Chapter 11 Fuzzy Theory

* Fuzzy Theory

- 우리의 일상은 애매모호함으로 점철.
  = 저 남자 늘씬하고 멋지다. 저 여자 정말 예쁘다. 상큼하고 알싸한 맛.
  = 쌀 한 움큼, 고양이 한 아름, 돈 한 다발, ...
  = 물이 미지근하다. 오늘 날씨가 쌀쌀하다.



- 불완전하고, 부정확한 자료를 처리하기 위해 신경회로망을 사용함.
- 여기에 fuzzy logic을 추가하면 또 다른 애매모호한 처리의 상승효과가 가능.
- Fuzzy logic ... 퍼지 이론의 특정한 명시를 이해하고 조정하기 위한 수학적 기술.
  = Linguistic variable을 다루기 위한 mathematical tool을 제공하기 위함.
  = Fuzzy set ... 경계가 날카롭지 못한 집합.

* Functions of Fuzzy Vectors

- 퍼지이론은 확률 이론과는 다름.
- 두 이론의 닮은 점 :
  = 퍼지멤버쉽(fuzzy membership)과 확률의 값은 0-1사이.
  = 확률의 1은 어떤 사건이 일어날 확실성을 나타냄.
  = 애매모호함(fuzziness)의 1은 특정 집합에 속하는 대상에 관한 확실성.

- 1930s Jan Lukasiewicz :
  = The truth in any assertion은 [0,1]사이의 실수로 표시.
  = t:{assertion}→[0,1]
  = 여기서 t:{x}는 주장(assertion) x의 진리도를 나타내는 함수.

- 1965 Lofti Zadeh :
  = 2가 표시함수(bivalent indicator function)가 다가 표시함수(multivalued indicator function)로 확장될 수 있다.
  = X의 비퍼지 부분집합(nonfuzzy subset) A의 bif I_A는 다음과 같이 주어짐.

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

= X의 퍼지 부분집합 A의 mif μ_A는 다음과 같이 주어짐.

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0,1].$$

= Membership function ... mif

(1) 표준의 논리 연산자를 사용하여 구성할 수 있게 함.

(2) 집합 A에 속하는 퍼지 요소 x의 정도를 측정할 수 있게 함.

- 확률에서의 union과 intersection :

= Union : $A \cup B = A + B - AB$

= Intersection : $A \cap B = AB$

- 퍼지이론 :

= A, B의 union : 두 개중 더 큰 것. $\mu_{A \cup B}(x) = \max(I_A(x), I_B(x))$

= Intersection : 두 개중 더 작은 것. $\mu_{A \cap B}(x) = \min(I_A(x), I_B(x))$

= 예 :

(1) 두 개의 fuzzy vector가 다음과 같이 정의되면,

A = 0 .3 .7 .4 .8 B = .8 .2 .6 .7 .9

(2) Fuzzy OR(the union of the vectors)

$A \cup B$ = .8 .3 .7 .7 .9

(3) Fuzzy AND(the intersection of the vectors)

$A \cap B$ = 0 .2 .6 .4 .8

= The complement of a fuzzy vector $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

(1) 단위값에서 A의 각 요소를 뺀 것.

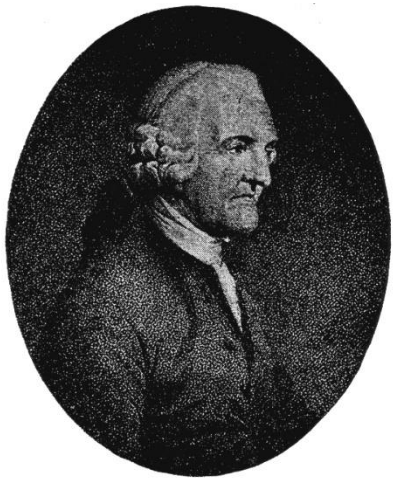
(2) A' = 1 .7 .3 .6 .2

= The intersect of A with its complement ... 영이 아님.

A∩A' = 0 .3 .3 .4 .2

= The union of A and not-A ... 1이 아님.

A∪A' = 1 .7 .7 .6 .8

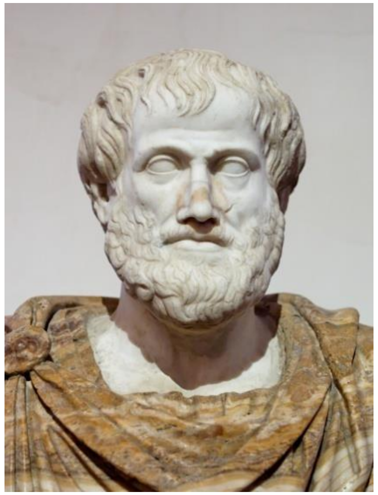


Edmond Hoyle
(1672-1769)

- 지배된 멤버쉽(dominated membership) :

= 퍼지집합 A의 모든 요소가 퍼지집합 B의 대응되는 요소와 같거나 적을 때.

= $A \subset B$ iff $\mu_A(x) < \mu_B(x)$, $\forall x$ in X



Aristotle
(384 BC- 322 BC)

- Like behavior that is "not according to Hoyle",

the fuzzy behaviors are "not according to Aristotle"

- 1990 Bart Kosko :

= The cardinality of fuzzy vector

(1) 퍼지 벡터의 크기. 요소(element)들의 합.

(2) 3차원 벡터 Z= .3 .9 .2

cardinality M of Z = 1.4

= The subsetness of a vector A with respect to a vector B

(1) $S(A,B)=M(A\cap B)/M(A)$

(2) A = 0 .3 .7 .4 .8 B = .8 .2 .6 .7 .9

$A\cap B$ = 0 .2 .6 .4 .8

M(A) = 2.2 M(B) = 3.2 $M(A\cap B)$ = 2.0

(3) A가 B의 부분집합인 정도 S(A,B) = 2.0/2.2 = 0.909

B가 A의 부분집합인 정도 S(B,A) = 2.0/3.2 = 0.625

- Universe of discourse(論議領界) :

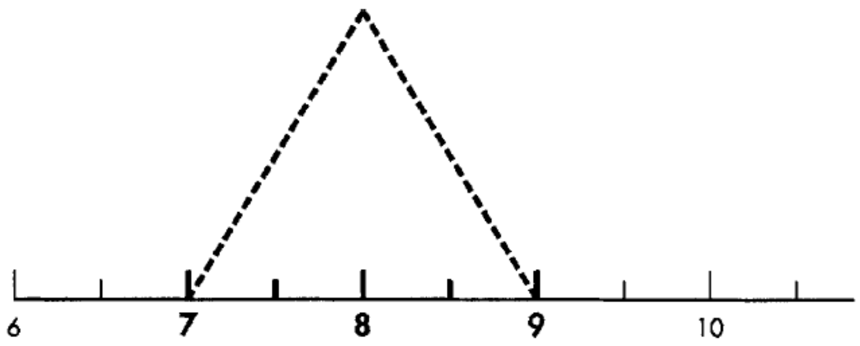
= Let K : kernel space

E : 집합이론적 연산(set-theoretic operation)의 유한한 응용에 의해 생성되는 K를 포함하는 집합.

= Universe of discourse (Dubois and Prade, 1980) ... E의 지정된 부분집합 (designated subset).

- Crisp vs Fuzzy :

= Crisp 8 and fuzzy 8



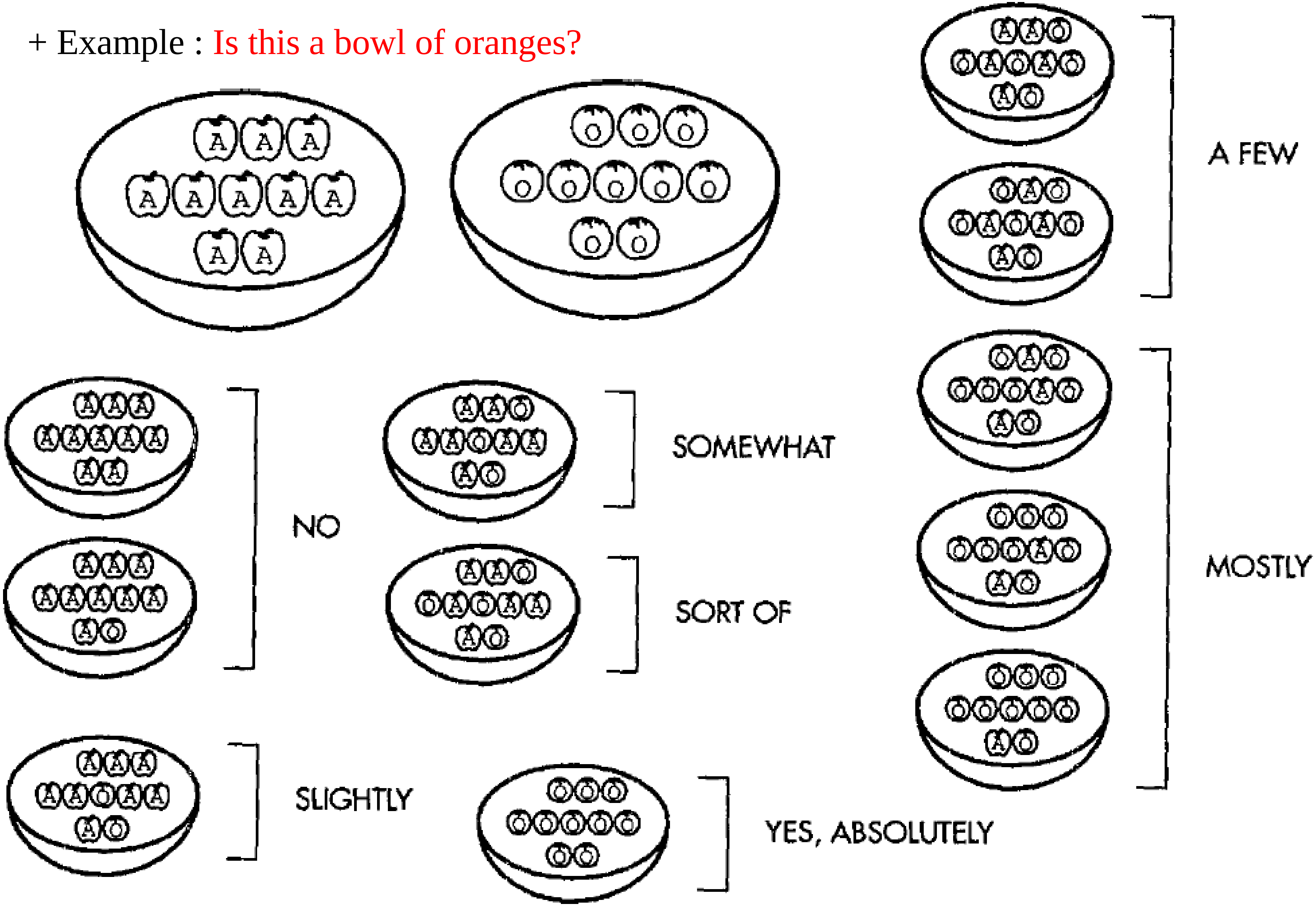
= An example of fuzzy set of Eightness with a triangular membership function

Member	Degree of Membership
7	0.0
7.5	0.5
8	1.0
8.5	0.5
9	0.0

= Crisp sets and fuzzy sets

+ Crisp sets handle only 0s and 1s → crisp logic by Greek philosopher Aristotle
+ Fuzzy sets handle all values between 0 and 1
+ Crisp … No Yes
+ Fuzzy … No Slightly Somewhat SortOf A Few Mostly Yes, Absolutely

+ Example : Is this a bowl of oranges?



= Crisp and fuzzy arithmetic operations

Crisp	*Fuzzy*
$a = 3$ $b = 2$	$a = -2, 3, 8$ $b = -1, 2, 7$
Addition: $a + b$ $3 + 2 = 5$	$(-2, 3, 8) + (-1, 2, 7) = (-4, 5, 14)$
Subtraction: $a - b$ $3 - 2 = 1$	$(-2, 3, 8) - (-1, 2, 7) = (-8, 1, 10)$
Multiplication: $a \times b$ $3 \times 2 = 6$	$(-2, 3, 8) \times (-1, 2, 7) = (-3, 6, 15)$
Division: a / b $3 / 2 = 1.5$	$(-2, 3, 8) / (-1, 2, 7) = (-7.5, 1.5, 10.5)$

* Example of Developing A Fuzzy Control System

- System Name : BikeBraker

- Fuzzy Input :

= Speed Input :

Name	Range(mph)
Stopped	0–2
Slow	1–10
Pretty Fast	5–30
Real Fast	25–50

= Distance Input :

Name	Range(feet)
At	0–5
Real Close	0–40
Near	20–80
Pretty Far	60–120
Real Far	100–165

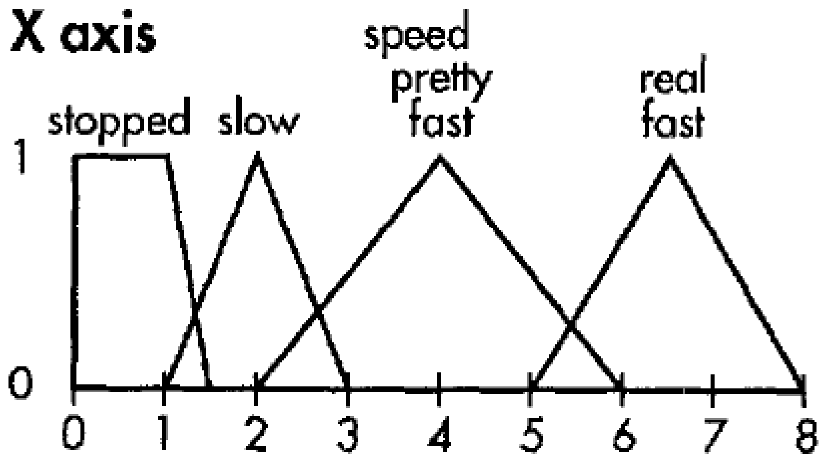
- Fuzzy Output :

= Braking Output

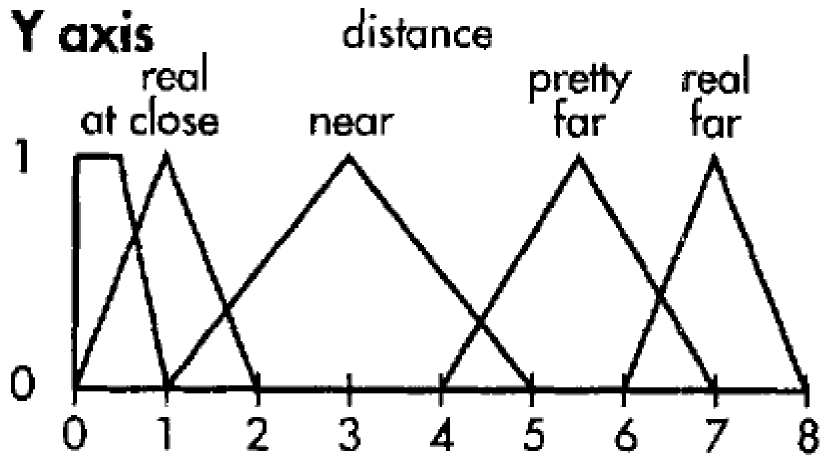
Name	Range(%)
None	0–1
Light	1–30
Medium	25–75
Squeeze Hard	65–100

- Create the Fuzzy Membership Functions :

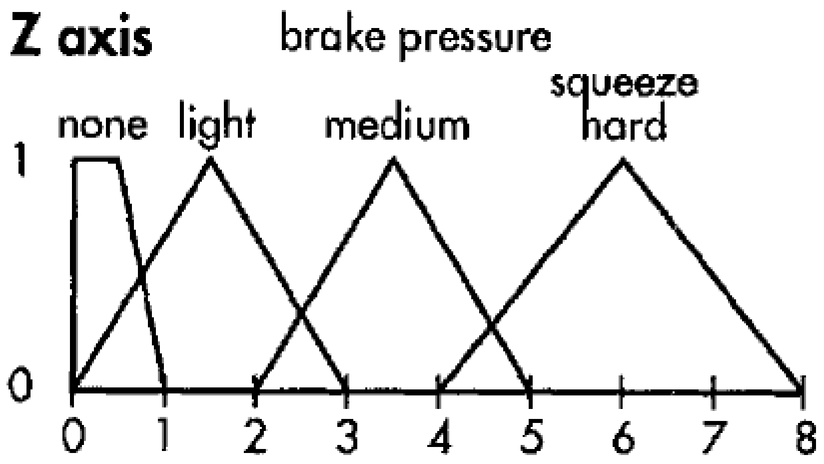
= Speed Input :



= Distance Input :



= Braking Output



- Construct the Rule Base :

= Writing Rules – BikeBraker Rules

As you are *At* the stop sign *and* you are *Stopped*, *Then* brake pressure is *None*

As you are Real Close to the stop sign *and* you are Stopped, *Then* brake pressure is None

As you are Near the stop sign *and* you are Stopped, *Then* brake pressure is None

As you are Pretty Far from the stop sign *and* you are Stopped, *Then* brake pressure is None

As you are Real Far from the stop sign *and* you are Stopped, *Then* brake pressure is None

As you are At the stop sign *and* you are going Slow, *Then* brake pressure is Medium

As you are Real Close to the stop sign *and* you are going Slow, *Then* brake pressure is Light

As you are Near the stop sign *and* you are going Slow, *Then* brake pressure is Light

As you are Pretty Far from the stop sign *and* you are going Slow. *Then* brake pressure is None

As you are Real Far from the stop sign *and* you are going Slow, *Then* brake pressure is None

As you are At the stop sign *and* you are going Pretty Fast, *Then* brake pressure is Squeeze Hard

As you are Real Close to the stop sign *and* you are going Pretty Fast, *Then* brake pressure is Squeeze Hard

As you are Near the stop sign *and* you are going Pretty Fast, *Then* brake pressure is Squeeze Hard

As you are Pretty Far from the stop sign *and* you are going Pretty Fast, *Then* brake pressure is Medium

As you are Real Far from the stop sign *and* you are going Pretty Fast, *Then* brake pressure is Light

As you are At the stop sign *and* you are going Real Fast, *Then* brake pressure is Squeeze Hard

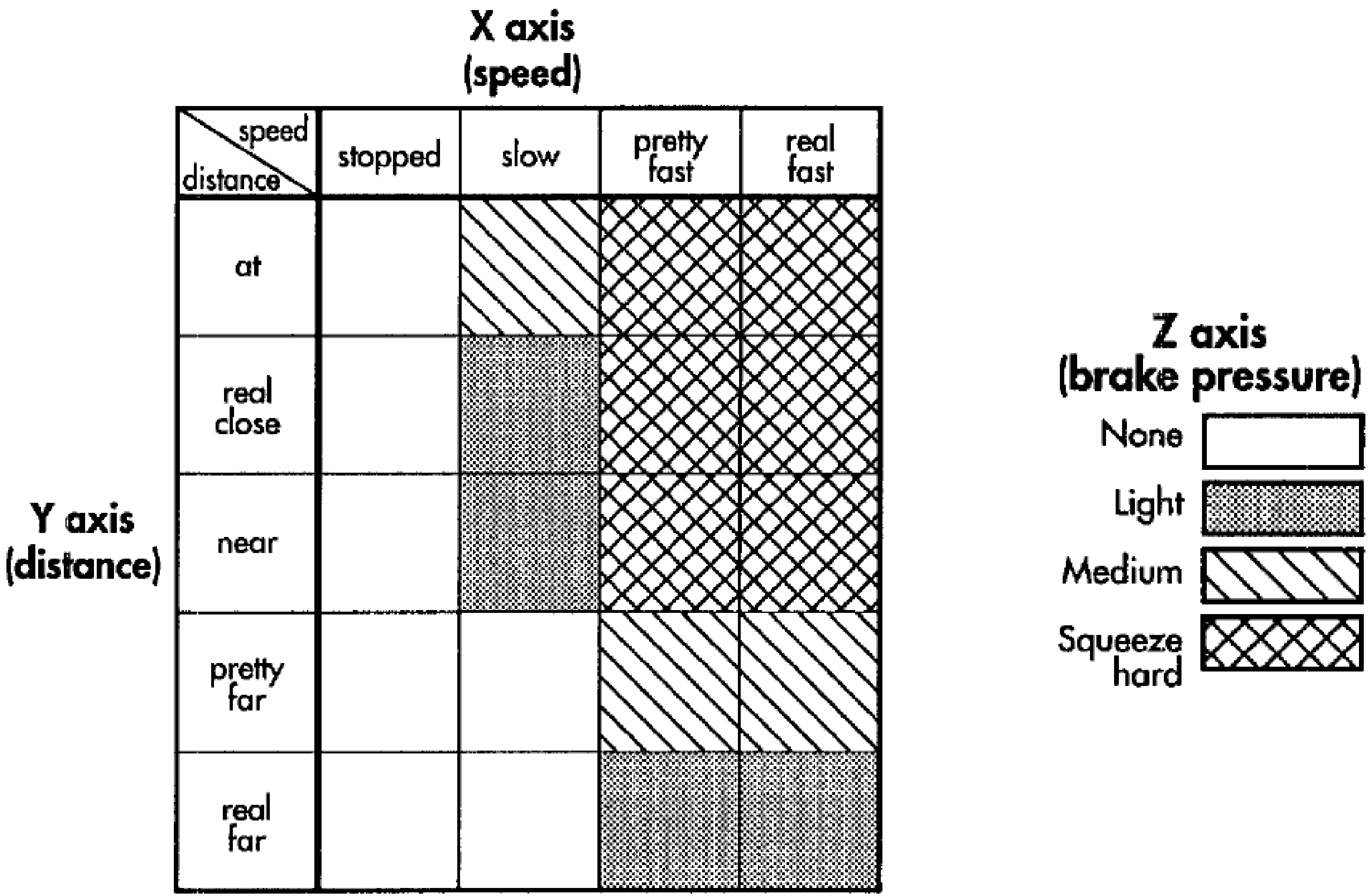
As you are Real Close to the stop sign *and* you are going Real Fast, *Then* brake pressure is Squeeze Hard

As you are Near the stop sign *and* you are going Real Fast, *Then* brake pressure is Squeeze Hard

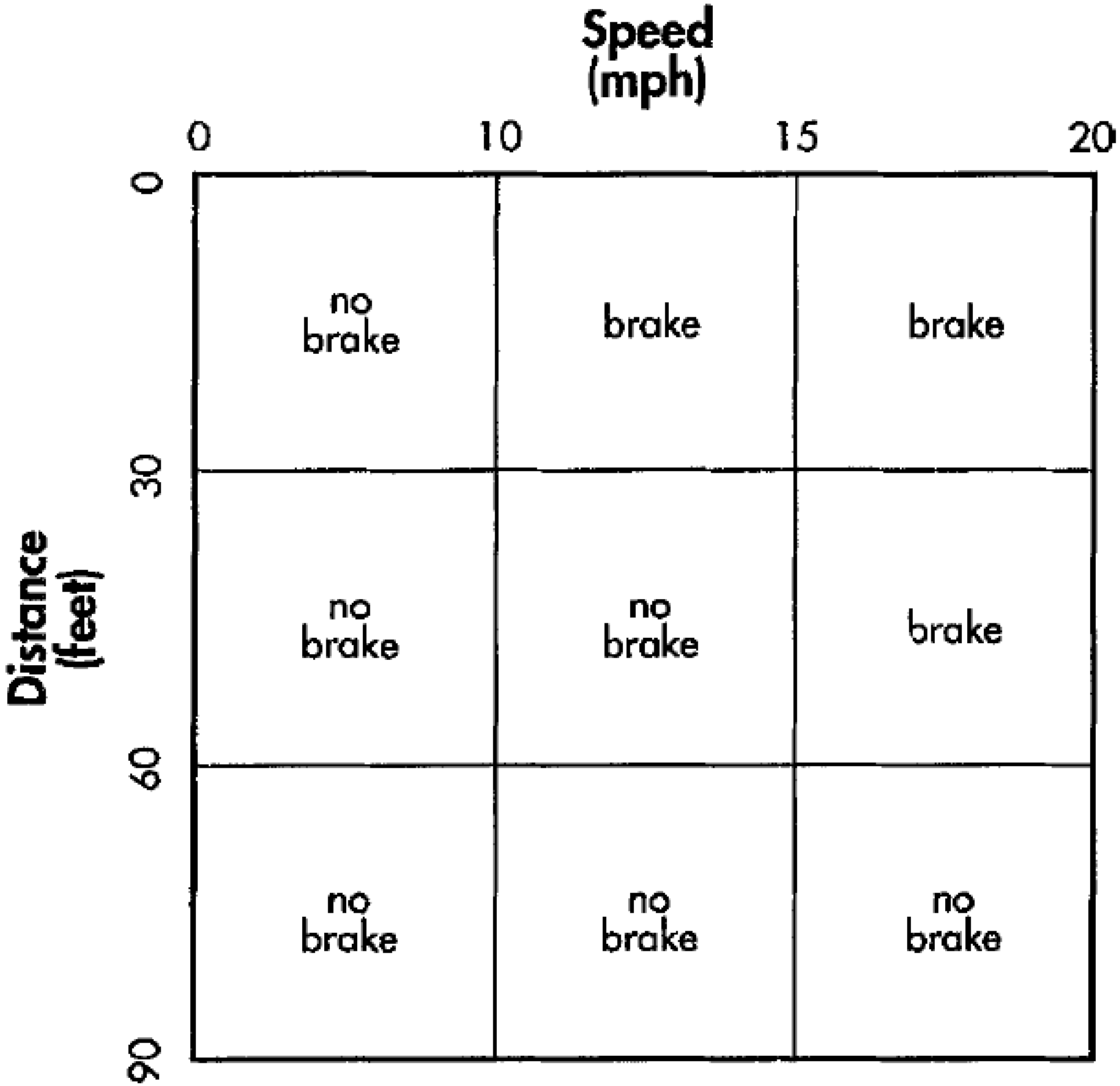
As you are Pretty Far from the stop sign *and* you are going Real Fast, *Then* brake pressure is Medium

As you are Real Far from the stop sign *and* you are going Real Fast, *Then* brake pressure is Light

- Fuzzy Associative Memory Example :

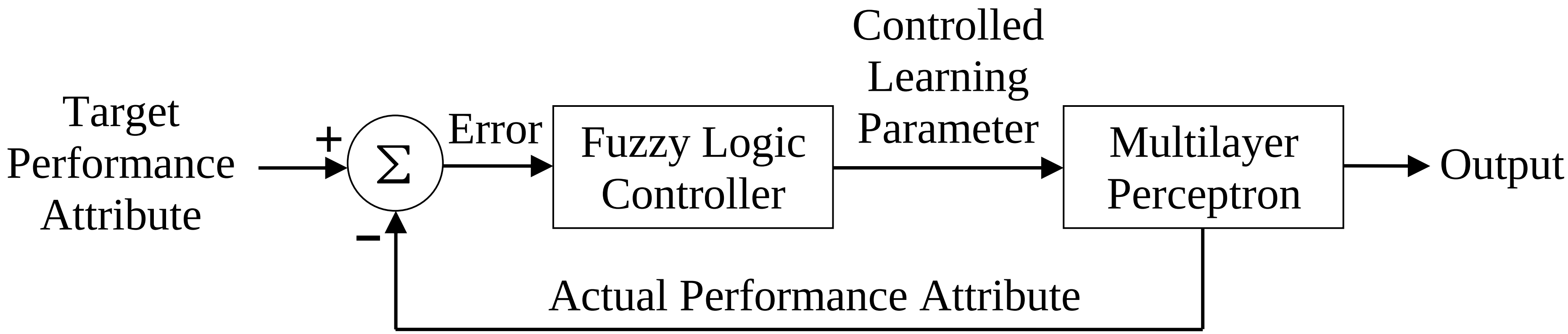


- Let’s Think If Your System Has Crisp Sets :



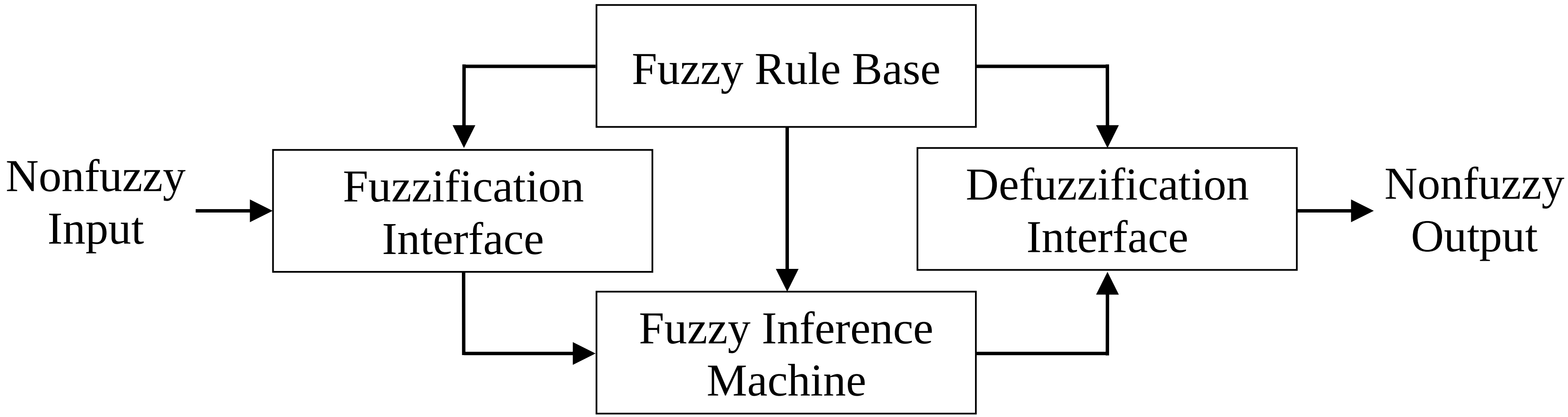
* Hybrid Learning System

- Fuzzy control of back-propagation learning :



- Fuzzy logic controller :
  = Backpropagation 학습을 가지는 다층 퍼셉트론의 learning parameter를 알맞게 하기 위해 사용됨.
  = 학습과정의 수렴율을 개선시키기 위해 사용.
  = Backpropagation algorithm의 unknown learning parameter들의 인간언어적 서술을 도움.

- Fuzzy logic controller의 구성 :



= Fuzzification interface :

(1) 입력변수의 값의 범위를 일치하는 universe of discourse로 변화시키는 scale mapping.

(2) Nonfuzzy(crisp) input data를 (fuzzy set의 label로도 볼 수 있는) 적절한 언어적 값으로 바꾸는 fuzzification.

= Fuzzy rule base : IF - THEN 형태로 쓰여진 언어적 제어 규칙의 집합.

= Fuzzy inference machine : fuzzified input에 대응하여 fuzzy control action을 추론하기위한 fuzzy rule base로 부터 규칙을 채택하는 의사 결정 논리 (decision-making logic).

= Defuzzication interface :

(1) 출력변수 값의 범위를 일치되는 universe of discourse로 바꾸는 scale mapping.

(2) 추론된 fuzzy control action으로 부터 nonfuzzy(crisp) control action을 내는 defuzzification

(3) 가능한 action의 분포의 重心(center of gravity)로 정의되는 crisp output을 생성(이러한 defuzzification rule을 centroid method).

- Back-propagation learning의 fuzzy control의 주된 아이디어는 수렴속도를 빠르게 하기 위해서 fuzzy IF-THEN- rule의 형태로 heuristic을 구현하는 것.
- Heuristic은 sum of squared error E에 의해 조정됨.

- Backpropagation 학습에 있어서의 heuristic :

= Let CE(change of error) ... error surface의 gradient의 근사치.

CCE(change of CE) ... 수렴의 가속도에 관련된 second-order gradient의 근사치.

= Rule base :

(1) IF 알고리즘의 여러 연속적인 반복에서 CE가 부호변화가 없는 작은값 THEN 학습율 변수의 값이 증가되어야만 함.

(2) IF 알고리즘의 여러 연속적인 반복에서 CE의 부호변화가 일어나면 THEN CCE 값에 관계없이 learning-rate parameter의 값이 감소되어야 함.

(3) IF 알고리즘의 연속적 반복에서 부호변화가 없고 CE와 CCE가 작은 값,
THEN learning-rate parameter와 momentum constant 값이 증가되어야 함.

= Error surface에서의 gradient의 부호변화는 CE의 부호변화와 동일.

(1) 예를 들어 $E(n-2) \le E(n-1)$과 $E(n-1) > E(n)$의 상황이라면,

$$CE(n-1) = E(n-1) - E(n-2) \ge 0 \text{이고}$$

$$CE(n) = E(n) - E(n-1) < 0 \text{이다.}$$

(2) 여기서 의미는 알고리즘의 반복 n-2와 n사이에 부호변화의 의미.

- Fuzzy rule base for fuzzy back-propagation learning :

= Decision table for the fuzzy logic control of η and α

Learning-rate Parameter

CCE	CE: NB	NS	ZE	PS	PB
NB	NS	NS	NS	NS	NS
NS	NS	ZE	PS	ZE	NS
ZE	ZE	PS	PS	PS	ZE
PS	NS	ZE	PS	ZE	NS
PB	NS	NS	NS	NS	NS

Momentum Constant

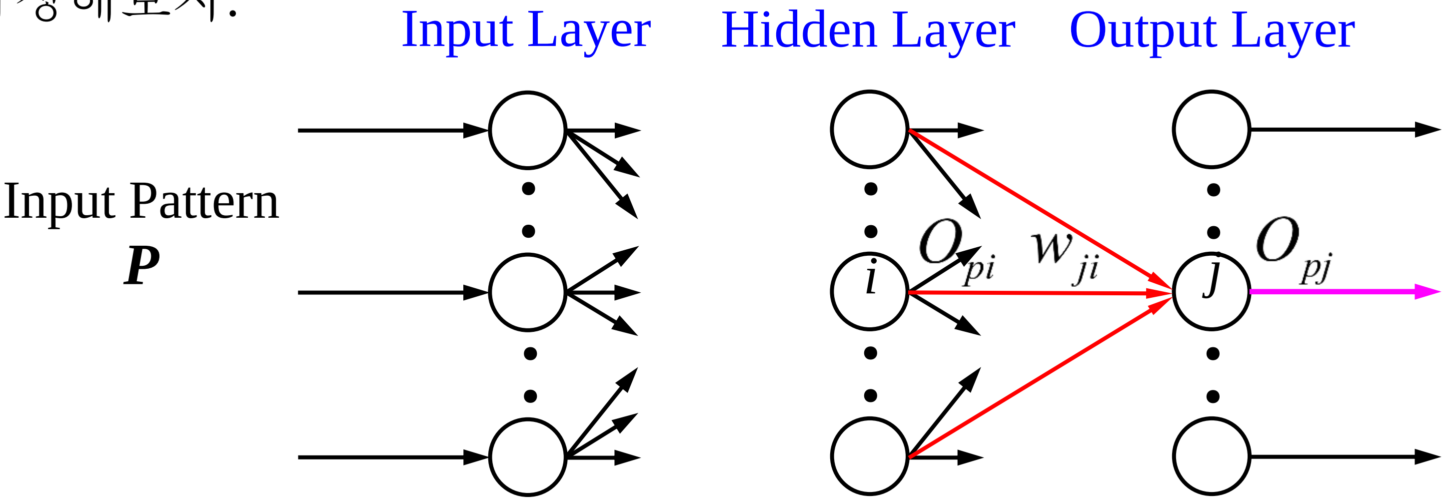
CCE	CE: NB	NS	ZE	PS	PB
NB	NS	NS	ZE	ZE	ZE
NS	NS	ZE	ZE	ZE	ZE
ZE	ZE	PS	PS	PS	ZE
PS	ZE	ZE	ZE	ZE	NS
PB	ZE	ZE	ZE	NS	NS

NB : negative big NS : negative small ZE : zero
PS : positive small PB : positive big

- Error는 얼마나 클까?

= 다층 퍼셉트론은 sigmoid 함수를 사용하므로 상한값과 하한값이 0과 1에 근접한 값일뿐 절대 0, 1이 될 수 없으므로 학습된 모든 패턴이 잘 인식되는 완전히 수렴된 경우에도 최소한의 error는 존재한다.

= 예를 들면, 0 ~ 9 까지 10개의 패턴(각 패턴의 샘플도 딱 한 개라고 가정)을 학습하는 경우, 출력층의 목표출력값을 지정하기 위해 4개의 노드만을 사용한다고 가정해보자.



= 출력값이 0.99이면 1로 보고, 0.01이면 0으로 본다면

+ 완전 수렴되었을 때 error는 각 노드에서 (약) 0.01 발생하고

+ 4개의 노드에서 0.01 * 4 = 0.04 발생할 것이며

+ 10개의 패턴에서 0.04 * 10 = 0.4 정도 발생한다. 생각보다 엄청나다.

+ 0 ~ 9에 각 10개씩 샘플을 모았다면... 또 0.4 * 10 = 4 → 실로 엄청나다.

= 그러면 완전히 다 틀렸을 경우에는 error가 얼마나 클까?
+ 각 노드에서 1만큼 error가 나니까 한 패턴에 (약) 4만큼 난다.
+ 0 ~ 9까지 10개의 패턴에서 4 * 10 = 40
+ 각 패턴마다 10개의 예제 패턴이 있다면 40 * 10 = 400 → 실로 엄청나다.

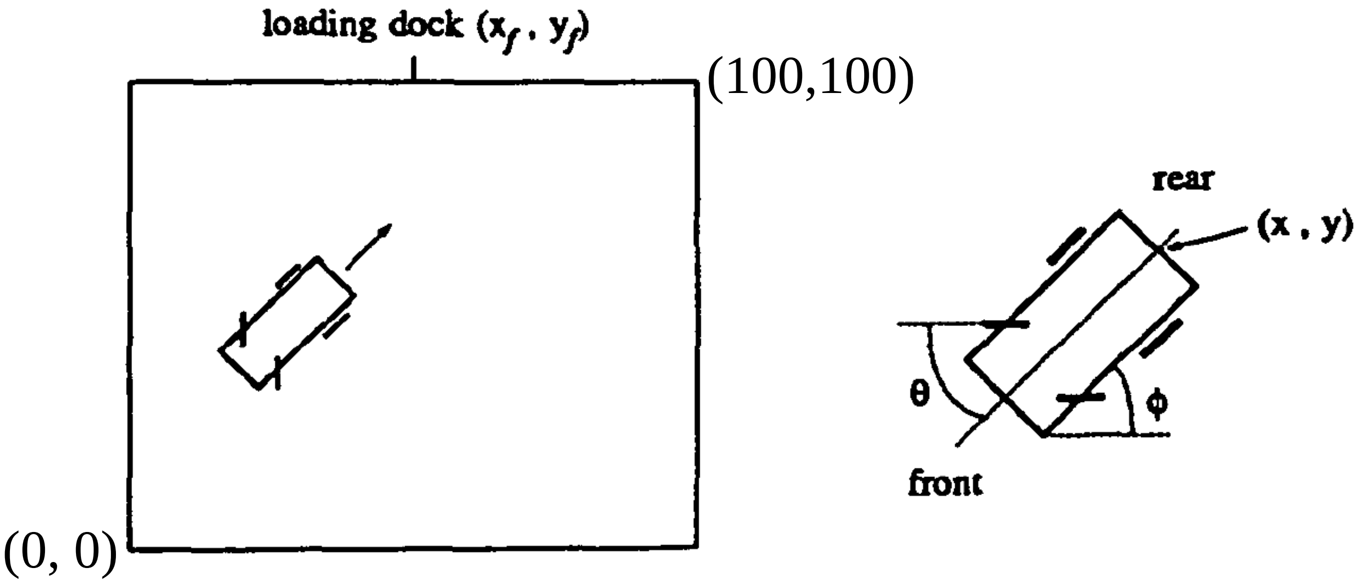
= 위의 두 경우는 error에 절대값을 취한 경우라서 그렇고
+ 서로 상쇄됨을 막기위해 error의 자승을 이용한다면 이 값보다는 줄겠지만
자승을 하는 만큼 실수 연산이 추가되어 실행시간에 큰 영향을 미치게 됨.

= 학습을 끝내기 위해서 항상 error를 확인해야 하는데
+ 자승을 하는 경우에는 error의 총합 E가 0.1 ~ 0.01 정도만 되어도 충분.

* A Fuzzy Truck Driver

- 트럭의 위치는 두 입력 변수에 의해 정의 :
  - = ϕ : -90도와 270도 사이의 트럭과 횡좌표(abscissa)의 앞뒤축(fore-to-aft axis) 사이의 각.
  - = x : 0에서 100사이의 트럭의 뒷 끝의 중심점의 좌우 위치.
  - y : 트럭이 벽과 부딪치지 않게 충분히 크다고 가정하여 중요치 않음.
- 적재벽(loading dock)의 목표점 (x, y)는 (50,100).

$$0 \le x \le 100$$
$$-90 \le \phi \le 270$$
$$-30 \le \theta \le 30$$

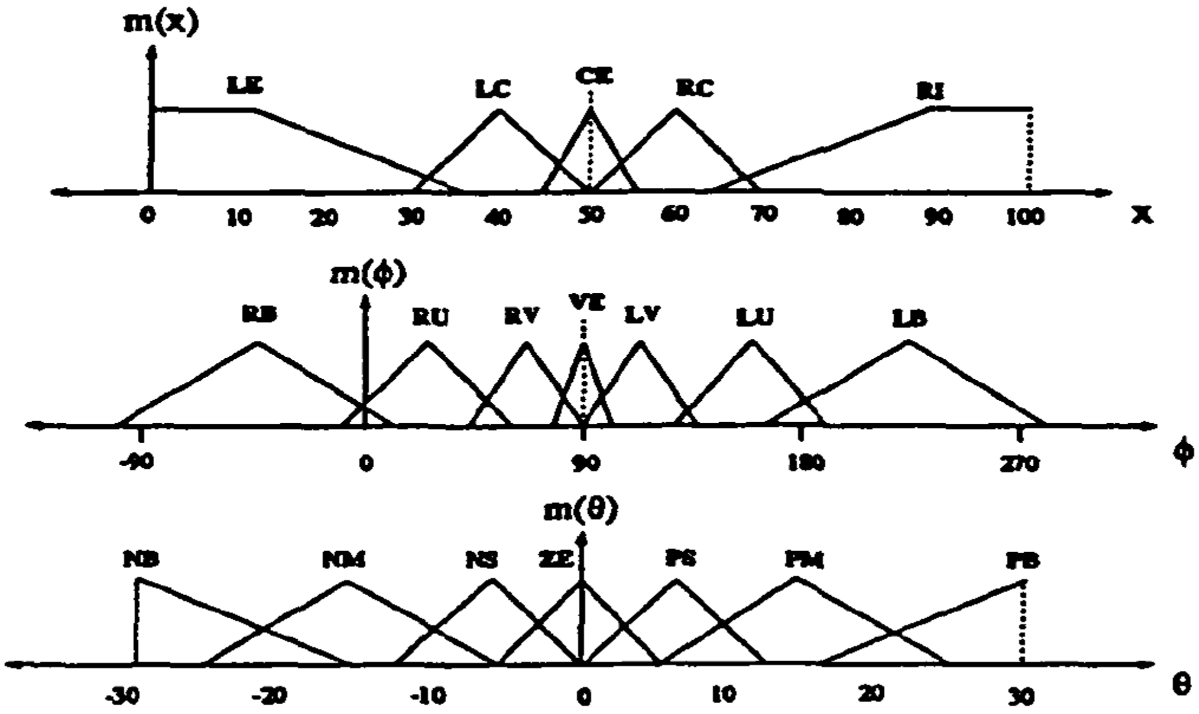


- 시뮬레이션의 목표는 트럭을 뒤로 해서 목표점에 들이대는 것.
- 목표의 도달은 $\phi = 90^\circ$, $x = 50$.

- 퍼지 개념을 도입하는 장점은 문제의 입출력을 정의하는 방법 :

Angle ϕ	x-position x	Steering-angle signal θ
RB : Right Below RU : Right Upper RV : Right Vertical VE : Vertical LV : Left Vertical LU : Left Upper LB : Left Below	LE : Left LC : Left Center CE : Center RC : Right Center RI : Right	NB : Negative Big NM : Negative Medium NS : Negative Small ZE : Zero PS : Positive Small PM : Positive Medium PB : Positive Big

- 각 언어적 퍼지집합 값에 대한 퍼지 멤버쉽 함수 :



Fuzzy set CE, VE, ZE 가 다른 fuzzy set 보다 좁은 이유는 적재벽 가까이에서는 더욱 정교한 제어가 필요하기 때문이다.

- Fuzzy Associative Memory (FAM) matrix :

x

ϕ	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS

- Fuzzy와 neural controller의 비교 :

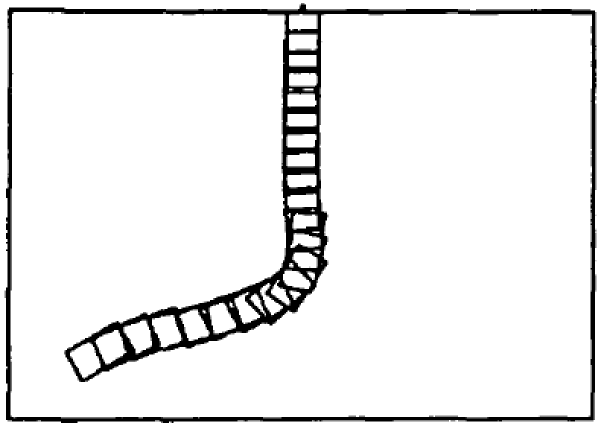
= Fuzzy가 항상 좋은 것은 아님.

= 제어 과정(control process)의 구조적 지식이 이용 가능하면, 퍼지 방식이 간단.

= 만약에 화물차의 위치나 바퀴 값이 다음과 같다면

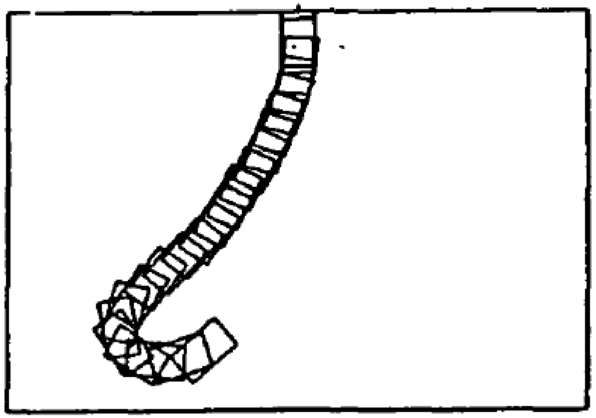
$$IF \quad x = LE \; and \; \phi = RB, \quad THEN \quad \theta = PS$$

= 초기 위치 (x, y, ϕ)에서의 퍼지 제어기에 의한 궤적 :



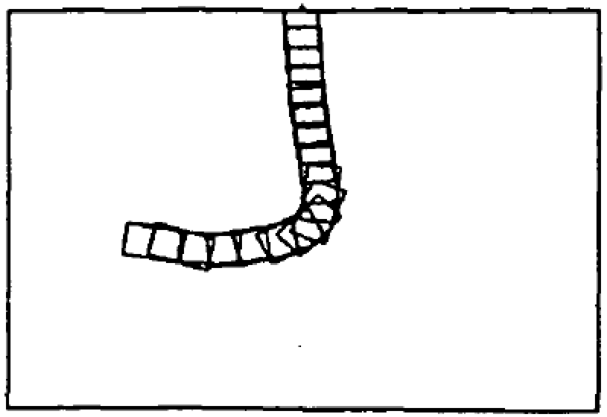
(20,20,30)

x=LE, ϕ=RU, THEN θ=NS



(30,10,220)

x=LE, ϕ=LB, THEN θ=NB



(30,40,-10)

x=LE, ϕ=RB, THEN θ=PS

= 초기 위치 (x, y, ϕ)에서의 신경망 제어기에 의한 궤적 :