Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Hunedoara, 23 aprilie, 2019

CLASA a V-a, Soluţii şi Baremuri

Problema 1. Determinaţi numerele de trei cifre $\overline{abc}$ al căror pătrat are cifra sutelor a, cifra zecilor b şi cifra unităţilor c.

Soluţie şi barem. Fie $n = \overline{abc}$. Avem $n^2 = M \cdot 1000 + n$ .... 1 punct

Rezultă $n(n-1) = M \cdot 1000$ deci $n(n-1)$ este divizibil cu 2^3 şi cu 5^3. Cum numerele n şi $n-1$ sunt relativ prime, atunci n sau $n-1$ se divide cu 5^3, respectiv n sau $n-1$ se divide cu 2^3 .... 3 puncte

Din divizibilitatea cu 125, n poate fi unul dintre numerele $125, 126, 250, 251, 375, 376, 500, 501, 625, 626, 750, 751, 875, 876$. În fiecare caz n sau $n-1$ trebuie să se dividă cu 8. Prin verificare rămân doar soluţiile 376 şi 625 .... 3 puncte

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Care este numărul maxim $m \leq n$ (m depinde de n), pentru care putem alege m numere dintre $1, 2, \ldots, n$ cu proprietatea că pentru oricare două dintre acestea, a, b, cu $a > b$, numărul $a - b$ nu divide numărul $a + b$?

Soluţie şi barem. Să notăm cu A o astfel de familie de numere, alese dintre $1, 2, \ldots, n$. Pentru $a > b$ din A, deducem că $a - b$ nu poate fi 1 sau 2. Altfel 1 ar divide $a + b$, respectiv 2 ar divide $a + b = 2 + 2 + 2b$ **2p**

Rezultă că diferenţa minimă dintre două numere consecutive din A este 3. În plus, dacă $a - b = 3k$ şi b nu se divide cu 3, atunci $a + b = 2b + 3k$ nu se divide cu $a - b$ .. **2p**

În funcţie de restul împărţirii lui n la 3, vom avea următoarele secvenţe de numere din $1, 2, \ldots, n$, cu număr maxim de elemente:

Dacă $n = 3k$, A cu număr maxim poate fi $1, 4, 7, \ldots 3k - 2$ deci $m = k$. **1p**

Dacă $n = 3k + 1$, A poate fi $1, 4, \ldots, 3k - 2, 3k + 1$ deci $m = k + 1$ **1p**

Dacă $n = 3k + 2$ o astfel de mulţime este $1, 4, 7, \ldots, 3k - 2, 3k + 1$ deci $m = k + 1$ **1p**

Problema 3. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, notăm cu $s(n)$ numărul de perechi (x, y) de numere naturale, alese dintre $1, 2, \ldots, n$, cu $x > y$, astfel încât x şi y să aibă exact $x - y$ divizori comuni.

a) Există n astfel încât $s(n) = 2019$?

b) Există n astfel încât $s(n) = 2020$?

Justificaţi răspunsurile.

Soluţie şi barem. Observăm că dacă $d|y$ şi $d|x$ atunci $d|x - y$. **1p**

Prin urmare dacă $(x, y), x > y$, este o pereche cu proprietatea din enunţ, atunci $x - y$ are exact $x - y$ divizori, deci toate numerele $1, 2, \ldots x - y$. Dacă $x - y = 1$ atunci x şi y au un singur divizor, adică 1 .... **1p**

Altfel $x - y \geq 2$, deci $x - y - 1 \geq 1$, iar $x - y - 1 | x - y$ implică $x - y - 1 = 1$, adică $x - y = 2$. Prin urmare x şi y au aceeaşi paritate. Pentru ca x şi y să aibă în comun 2 divizori, ele nu pot fi impare, deci sunt ambele pare. Aşadar perechile de acest tip sunt de forma $(y + 1, y)$ şi $(2y + 2, 2y)$, cu y natural nenul **2p**

Rezultă că pentru $n = 2k$, k număr natural, avem $s(n) = (2k - 1) + (k - 1) = 3k - 2$, iar dacă $n = 2k + 1$, $k \geq 1$ avem $s(n) = 2k + (k - 1) = 3k - 1$. Cum $s(n)$ nu poate fi multiplu de 3, răspunsul la a) este nu. **2p**

Cum $2020 = 3 \cdot 674 - 2$ obţinem că $s(1348) = 3 \cdot 674 - 2 = 2020$, aşadar „da” pentru b) **1p**

Problema 4. Numerele naturale de la 1 la 49 sunt aşezate la întâmplare, câte unul în fiecare căsuţă a unei table de şah 7×7. Arătaţi că există un pătrat 2×2 al tablei, format din patru căsuţe vecine, astfel încât suma celor patru numere din interior să fie cel puţin 81.

Soluţie şi barem. Există 6×6 pătrate de tipul celor din enunţ. **1p**

Fie $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{36}$, sumele numerelor scrise în interiorul acestora. Deducem că $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_{36} \leq 36 s_{36}$. **1p**

Pe de altă parte, în suma de mai sus, pătrăţelele din colţuri sunt numărate o dată, cele de pe margini, dar nu în colţuri, de două ori, iar celelalte de patru ori. Avem deci $s \geq 49 + 48 + 47 + 46 + 2(45 + \cdots + 26) + 4(25 + 24 + \cdots + 1)$ **3p**

Calculând sumele, deducem $s \geq 2910$. Aşadar $36 s_{36} \geq 2910$, deci $s_{36} \geq \frac{2910}{36} > 80,8$ şi, cum s_{36} e întreg, rezultă $s_{36} \geq 81$. **2p**