**Problema 1.5** Două numere naturale $x$ şi $y$ au proprietatea că $\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}$. Determinaţi cea mai mică valoare a sumei $x + y$.

**Soluţie** Fracţia $\frac{x}{y}$ este subunitară, prin urmare $x < y$ sau $x = y - d$, unde $d$ este un număr natural nenul. .................................... 1p

Relaţia dată se mai scrie $\frac{2011-1}{2011} < \frac{y-d}{y} < \frac{2012-1}{2012}$ sau $1 - \frac{1}{2011} < 1 - \frac{d}{y} < 1 - \frac{1}{2012}$, de unde $\frac{1}{2011} > \frac{d}{y} > \frac{1}{2012}$ sau $\frac{d}{2011d} > \frac{d}{y} > \frac{d}{2012d}$ (1)

Din (1) deducem $2011d < y < 2012d$ (2) .......................... 3p

Pentru $d = 1$ relaţia (2) este imposibilă.

Pentru $d = 2$ obţinem $4022 < y < 4024$, de unde $y = 4023$. Obţinem $x = 4021$ şi $x + y = 8044$.

Pentru $d \geq 3$ avem $4021d \geq 12063$ .

Avem $x + y = 2y - d$. Din $y > 2011d$ obţinem $2y - d > 4021d \geq 12063$.

Prin urmare valoarea minimă a sumei se obţine când $d = 2$ şi $x + y = 8044$. ......................................................... 4p

**Problema 2.5** Determinaţi numerele naturale $a, b, c$ cu proprietatea că $a + b + c = abc$.

**Soluţie** Observăm că dacă unul dintre numere este 0, atunci toate numerele sunt egale cu 0. ............................................... 1p

Dacă $abc \neq 0$,atunci relaţia se scrie $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = 1$. Cum relaţia este simetrică în $a, b, c$ putem presupune $a \leq b \leq c$ de unde $ab \leq ac \leq bc$.

Dacă $ab > 3$, atunci $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} < 1$. .......................... 2p

Dacă $ab = 2$, atunci $a = 1$ şi $b = 2$, de unde obţinem $\frac{1}{2c} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ şi atunci $c = 3$.

Dacă $ab = 3$, atunci $a = 1$ şi $b = 3$, de unde obţinem $\frac{1}{3c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$ şi atunci $c = 2$, care nu convine pentru că am presupus $b < c$. ............. 4p

**Problema 3.5** O mulţime $X \subset \mathbb{N}^*$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă oricare submulţime nevidă a sa are suma elementelor număr compus.

Arătaţi că mulţimea $Y = \{113! + 2, 113! + 3, ..., 113! + 15\}$ are proprietatea $(\mathcal{P})$. (Dacă $n$ este număr natural nenul, notaţia $n!$ reprezintă produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)

**Soluţie** O submulţime nevidă a lui $Y$ are suma elementelor egală cu $S = \mathcal{M}113! + s$, unde $2 \leq s \leq 2 + 3 + ... + 15$, de unde $2 \leq s \leq 119$. .... 2p

Pentru $2 \le s \le 113$ avem $S = \mathcal{M}113! + s = \mathcal{M}s$, de unde concluzia că $S$ este număr compus. .................................................. 2p

Pentru $s \in \{114, 116, 118\}$ avem $S$ număr par, prin urmare $S$ este număr compus.

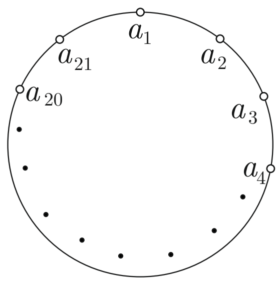
Dacă $s = 115$, atunci $S = \mathcal{M}5$

Dacă $s = 117$, atunci $S = \mathcal{M}3$

Dacă $s = 119$, atunci $S = \mathcal{M}7$ .................................... 3p

**Problema 4.5** Pe un cerc se scriu la întâmplare elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, 21\}$ în ordinea $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ (vezi figura alăturată). Se consideră sumele

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$
$$S_2 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,$$
$$\ldots$$
$$S_{17} = a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21},$$
$$S_{18} = a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_1.$$




Arătaţi că cel puţin două dintre cele 18 sume dau resturi diferite la împărţirea cu 5.

**Soluţie** Presupunem că $S_1$, $S_2$, ..., $S_{18}$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 5. Deoarece $S_1 = a_1 + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ şi $S_2 = (a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_6$, dacă $S_1$ şi $S_2$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 5, deducem că $a_1$ şi $a_6$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 5. În acelaşi fel deducem

1. $a_1, a_6, a_{11}, a_{16}$ şi $a_{21}$ dau acelaşi rest, $x$, la împărţirea cu 5.
2. $a_2, a_7, a_{12}, a_{17}$ dau acelaşi rest, $a$, la împărţirea cu 5.
3. $a_3, a_8, a_{13}, a_{18}$ dau acelaşi rest, $b$, la împărţirea cu 5.
4. $a_4, a_9, a_{14}, a_{19}$ dau acelaşi rest, $c$, la împărţirea cu 5.
5. $a_5, a_{10}, a_{15}, a_{20}$ dau acelaşi rest, $d$, la împărţirea cu 5. .......... 2p

Cum $\{a_1, a_2, ..., a_{21}\} = \{1, 2, ..., 21\}$ avem 5 resturi egale cu 1 şi câte 4 resturi egale cu 2, 3, 4 sau 0.

Rezultă $x = 1$ şi $\{a, b, c, d\} = \{0, 2, 3, 4\}$ ............................ 1p

Avem $S_1 = \mathcal{M}5 + 1 + 0 + 2 + 3 + 4 = \mathcal{M}5$ şi $S_{18} = \mathcal{M}5 + b + \mathcal{M}5 + c + \mathcal{M}5 + d + \mathcal{M}5 + 1 + \mathcal{M}5 + 1 = \mathcal{M}5 + 2 + (a + b + c + d) - a = \mathcal{M}5 + 11 - a$

Cum $S_1$ şi $S_{18}$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 5 deducem că $11 - a = \mathcal{M}5$, de unde $a = 1$; contradicţie. Rezultă că cel puţin două sume dau resturi diferite la împărţirea cu 5. ............................................... 4p