

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Județeană și a Municipiului București, 8 Martie 2014

CLASA a VII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. a) Arătați că pentru orice numere reale a și b are loc relația:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) + 50 \geq 2(2a + 1)(3b + 1).$$

b) Determinați numerele naturale n și p care verifică relația:

$$(n^2 + 1)(p^2 + 1) + 45 = 2(2n + 1)(3p + 1).$$

Soluție. a) Relația din enunț este echivalentă cu

$$(ab - 6)^2 + (a - 2)^2 + (b - 3)^2 \geq 0 \quad \dots\dots\dots \mathbf{3p}$$

$$b) (np - 6)^2 + (n - 2)^2 + (p - 3)^2 = 5 \quad \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$(np - 6)^2, (n - 2)^2, (p - 3)^2 \in \{0, 1, 4\} \text{ distincte} \quad \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Discutarea cazurilor și găsirea soluțiilor: } (n, p) \in \{(2, 4), (2, 2)\} \quad \dots\dots \mathbf{2p}$$

Problema 2. Fie numerele reale a, b, c astfel încât:

$$|a - b| \geq |c|, \quad |b - c| \geq |a|, \quad |c - a| \geq |b|.$$

Arătați că unul dintre numerele a, b, c este suma celorlalte două.

Soluție. Ridicând la pătrat inegalitățile din enunț rezultă $(a - b)^2 \geq c^2$ și analoagele $\dots\dots\dots \mathbf{2p}$

De aici rezultă $(a - b + c)(b + c - a) \leq 0$ și analoagele $\dots\dots\dots \mathbf{2p}$

Atunci: $(a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2 \leq 0$, de unde rezultă că unul dintre numerele a, b, c este suma celorlalte două $\dots\dots\dots \mathbf{3p}$

Soluție alternativă. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $a \geq b \geq c$. Atunci $a - b \geq |c|$ și $b - c \geq |a|$ (*) $\dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Adunând relațiile, rezultă $a - c \geq |a| + |c| \geq a - c$, deoarece $|a| \geq a$ și $|c| \geq -c$ $\dots\dots\dots \mathbf{2p}$

Ca urmare, în dubla inegalitate de mai sus are loc egalitatea, ceea ce se întâmplă dacă $a = |a|$ și $|c| = -c$, adică $a \geq 0$ și $c \leq 0$ $\dots\dots\dots \mathbf{2p}$

Relațiile (*) devin $a - b \geq -c$ și $b - c \geq a$, de unde $b = a + c$ $\dots\dots \mathbf{2p}$

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{A}) = 135^\circ$. Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează latura $[BC]$ în punctul D , iar bisectoarea unghiului B intersectează latura $[AC]$ în punctul E . Determinați $m(\widehat{BED})$.

Soluție. Dacă $I \in (BE)$ astfel încât IA este bisectoarea unghiului \widehat{DAB} ,
de unde ID bisectoarea unghiului \widehat{ADB} **1p**
Din $m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{ABD}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{IDB}) + m(\widehat{IBD}) = 45^\circ$ deducem
că $m(\widehat{DIB}) = 135^\circ$ **1p**
 $\triangle ABE \sim \triangle IBD$ **1p**
Implicația $\frac{AB}{IB} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{AB}{EB} = \frac{BI}{BD}$ **1p**
 $\triangle ABI \sim \triangle DBE$ **1p**
 $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{BAI})$ **1p**
 $m(\widehat{BED}) = 45^\circ$ **1p**

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctele $K \in (AB)$,
 $L \in (BC)$ și $M \in (CD)$ astfel încât triunghiul KLM este dreptunghic
isoscel, cu unghiul drept în L . Demonstrați că dreptele AL și DK sunt
perpendiculare.

Soluție. $\triangle KLB \equiv \triangle LMC$ **2p**
 $KB = LC$ **1p**
Din $AB = BC$ deducem $AK = BL$ **1p**
 $\triangle AKD \equiv \triangle BLA$ **2p**
Din $AK \perp BL$ și $AD \perp BA$, rezultă $AL \perp KD$ **1p**

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.