

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa națională, Hunedoara, 23 aprilie 2019

CLASA a VI-a – soluții

Problema 1. Se consideră un număr rațional r și numerele naturale $a_1, a_2, \dots, a_6, b_1, b_2, \dots, b_6$ astfel încât $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_6 \leq 11$ și

$$r = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_5}{b_5} = \frac{a_6}{b_6}.$$

Arătați că r este număr întreg.

Soluție. Dacă $b_1 = 1$, atunci $r = a_1 \in \mathbb{N}$ **2p**

În caz contrar, printre cele 6 numere naturale distincte b_1, b_2, \dots, b_6 , făcând parte din mulțimea $\{2, 3, 4, \dots, 11\}$, există două consecutive **2p**

În acest caz, din $b_{i+1} = 1 + b_i$ rezultă $r = \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_{i+1} - a_i}{b_{i+1} - b_i} \in \mathbb{N}$ **3p**

Problema 2. Determinați toate perechile (a, b) de numere naturale pentru care fracțiile

$$\frac{3a + 8b + 2}{10a + 2b + 1} \quad \text{și} \quad \frac{8a + b + 3}{2a + 7b + 3}$$

reprezintă, simultan, numere naturale.

Soluție. Pentru ca ambele fracții să fie, simultan, numere naturale este necesar ca $3a + 8b + 2 \geq 10a + 2b + 1$ și $8a + b + 3 \geq 2a + 7b + 3$, de unde, prin adunare, $11a + 9b + 5 \geq 12a + 9b + 4$, ceea ce implică $a \in \{0, 1\}$ **2p**

Pentru $a = 0$ a doua fracție este $\frac{b+3}{7b+3}$; pentru ca ea să fie număr natural trebuie ca $b \geq 7b$, deci $b = 0$, caz în care și prima fracție este număr natural **2p**

Pentru $a = 1$ a doua fracție este $\frac{b+11}{7b+5}$; pentru ca ea să fie număr natural trebuie ca $b + 11 \geq 7b + 5$, deci $b \in \{0, 1\}$ și convine doar $b = 1$, caz în care și prima fracție este număr natural **2p**

Așadar, perechile cerute sunt $a = 0, b = 0$ și $a = 1, b = 1$ **1p**

Problema 3. Determinați cel mai mare număr natural n pentru care este îndeplinită condiția

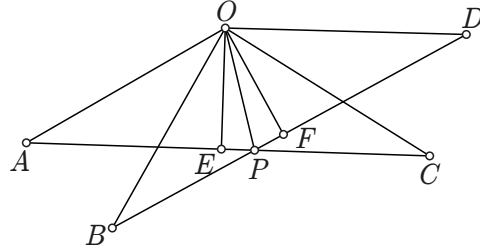
există n semidrepte distincte două câte două, cu aceeași origine, astfel încât măsura oricărui unghi format de aceste semidrepte este un număr natural care nu este prim.

Soluție. Dacă luăm 90 de unghiuri de 4° , formate în jurul unui punct, obținem 90 de semidrepte care fac între ele unghiuri cu măsuri întregi, multiplu de 4 **2p**

Să arătăm că, dacă luăm 91 sau mai multe semidrepte, condiția nu este îndeplinită. Notăm unghiurile formate în jurul originii comune a semidreptelor, în sensul mișcării acelor de ceas, începând cu un unghi oarecare, u_1, u_2, \dots, u_n , $n \geq 91$. Atunci sumele $u_1 + u_2$, $u_3 + u_4, \dots, u_{89} + u_{90}$ au, împreună, cel mult 359° . Deoarece sunt 45 de sume și $8 \cdot 45 = 360$, există o sumă $S < 8^\circ$. Cum $S \geq 2$, rezultă că S este număr prim sau $S = 4 = 2 + 2$, sau $S = 6 = 2 + 4 = 3 + 3$; în toate cazurile deducem că S sau unul dintre termenii săi este număr prim **4p**

Așadar, numărul cerut este 90 **1p**

Problema 4. În interiorul unghiului propriu \widehat{AOD} considerăm punctele B și C astfel încât $OA = OB$, $OD = OC$, segmentele AC și BD se intersectează în punctul P , iar semidreapta $(PO$ este bisectoarea unghiului \widehat{APD} . Arătați că unghiurile \widehat{AOB} și \widehat{COD} sunt congruente.



Soluție. Cerința este echivalentă cu $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ **1p**

Fie E și F picioarele perpendicularelor duse din O pe AC respectiv BD . Atunci $OE = OF$ (deoarece PO este bisectoarea unghiului \widehat{APD}) și $AO = BO$ (din ipoteză), deci triunghiurile dreptunghice OAE și OBF sunt congruente. Astfel $\widehat{OAE} = \widehat{OBF}$. Analog arătăm că $\widehat{OCE} = \widehat{ODF}$ **4p**

Deoarece segmentele AC și BD se intersectează, unghiurile \widehat{AOB} , \widehat{BOC} și \widehat{COD} sunt adiacente, iar punctele O și B sunt pe părți diferite ale dreptei AC . Deducem $\widehat{OAC} < \widehat{OAB} < 90^\circ$, ultima inegalitate având loc deoarece unghiul \widehat{OAB} este unghi de la baza triunghiului isoscel OAB . Cum PO este bisectoarea unghiului \widehat{APD} , unghiurile \widehat{APO} și \widehat{OPD} sunt ascuțite, iar unghiul \widehat{OPD} este unghi exterior triunghiului OBP , deci $\widehat{OPD} > \widehat{OBP}$, de unde rezultă că \widehat{OBP} este unghi ascuțit. Analog se arată că unghiurile \widehat{ODB} și \widehat{OCA} sunt ascuțite. Astfel E și F sunt în interiorul segmentelor AC , respectiv BD , deci $\widehat{OAC} = \widehat{OAE}$, $\widehat{OCA} = \widehat{OCE}$, $\widehat{OBD} = \widehat{OBP}$ și $\widehat{ODB} = \widehat{ODP}$. Deducem că unghiurile triunghiurilor OAC , OBD sunt respectiv congruente și, folosind observația inițială, obținem concluzia..... **2p**