Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului Societatea de Științe Matematice din România



## Olimpiada Națională de Matematică Etapa Județeană și a Municipiului București, 12 Martie 2011

## CLASA a X-a

**Problema 1.** Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Arătați că ecuația

$$a^x + b^x = c^x$$

are cel mult o soluție.

**Problema 2.** a) Arătați că, dacă  $z_1, z_2, z_3, z_4$  sunt numere complexe distincte, cu modulele egale și cu suma nulă, atunci patrulaterul cu vârfurile de afixe  $z_1, z_2, z_3, z_4$  este dreptunghi.

b) Arătați că, dacă numerele reale x, y, z, t îndeplinesc relațiile

 $\sin x + \sin y + \sin z + \sin t = 0 \text{ si } \cos x + \cos y + \cos z + \cos t = 0$ atunci, pentru orice număr întreg n,

$$\sin(2n+1)x + \sin(2n+1)y + \sin(2n+1)z + \sin(2n+1)t = 0.$$

**Problema 3.** Fie a,b două numere complexe. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

 $A_1$ ) Modulele rădăcinilor complexe ale ecuației  $x^2-ax+b=0$  sunt respectiv egale cu modulele rădăcinilor ecuației  $x^2-bx+a=0$ .

$$A_2$$
)  $a^3 = b^3$  sau  $b = \overline{a}$ .

**Problema 4.** a) Arătați că, dacă a,b>1 sunt numere reale distincte, atunci

$$\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b).$$

b) Arătați că, dacă  $n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2$  și  $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 1$  sunt numere reale, atunci

$$\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \ldots + \log_{a_{n-1}}(\log_{a_{n-1}} a_n) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0.$$

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.