Moje notatki na bazie skryptu topology without tears

Lukasz Kopyto

February 21, 2024

1 Przestrzenie topologiczne

1.1 Topologia: definicje, lematy, zadania i rozwiazania

1.1.1 Definicja: Topologia

Niech X bedzie niepustym zbiorem. Mowimy, ze zbior T zawierajacy podzbiory X jest topologia na X jesli:

- X oraz zbior pusty $\emptyset$, naleza do T,
- suma skonczona badz nie zbiorow z T nalezy do T, inaczej T jest zamkniety na sume, i ta suma moze byc nieskonczona
- przekroj dowolnych dwoch zbiorow z T nalezy do T, inaczej T jest zamkniety na przekroj, ale przekroj skonczony

Para (X, T) nazywamy **przestrzenia topologiczna.**

1.1.6 Definicja: Topologia dyskretna(discrete topology)

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz T kolekcja wszystkich podzbiorow X. Wtedy mowimy, ze T jest **topologia dyskretna** na zbiorze X. Przestrzen topologiczna (X, T) jest nazywana **przestrzenia dyskretna**

1.1.7 Definicja: Topologia niedyskretne(indiscrete topology)

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz $T = \{X, \emptyset\}$. Wtedy mowimy, ze T jest **topologia niedyskretna** oraz (X, T) jest **przestrzenia niedyskretna**

1.1.9 Lemat: Topologia dyskretna i singletony

Jezeli (X, T) jest przestrzenia topologiczna, taka ze, dla kazdego $x \in X$, singleton x, $\{x\}$ jest w X, to X jest topologia dyskretna.

Dowod:
Wystarcz sprawdzic prawdziwosc trzech warunkow, z definicji 1.1.1.

1. Z definicji T jest topologia, wiec zawiera X oraz $\emptyset$.
2. Niech S bedzie suma skonczona lub nie dowolnej liczby zbiorow z T. Poniewaz mozemy zapisac S jako $S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$, a kazdy singleton $\{x\} \in X$, wnioskujemy stad, ze $S \in T$
3. Analogicznie dowodzimy, ze przekroj dowolnych dwoch zbiorow z T nalezy do T

Cwiczenia 1.1

1. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ustal czy podane kolekcje podzbiorow X sa topologia na X
   (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$
   (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$
   (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$

   Odpowiedz:

   (a) Jest topologia.

(b) Nie jest, bo $\{a, b, f\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\} \notin T_2$

(c) Nie jest, bo $\{e, f\} \cup \{a, f\} = \{a, e, f\} \notin T_3$

2. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Wskaz i uzasadnij ktore kolekcje podzbiorow X sa topologia na X

   (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$

   (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$

   (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$

   Odpowiedz:

   (a) Nie, bo $\{c\} \cup \{b\} = \{b, c\} \notin T_1$

   (b) Nie, bo $\{b, d, e\} \cap \{a, b, d\} = \{b, d\} \notin T_2$

   (c) Jest topologia.

3. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ oraz T bedzie topologia dyskretna na X, ktore z ponizszych podpunktow sa prawdziwe?

   (a) $X \in T$- Prawda

   (b) $\{X\} \in T$- Falsz

   (c) $\{\emptyset\} \in T$- Falsz

   (d) $\emptyset \in T$- Prawda

   (e) $\emptyset \in X$- Falsz

   (f) $\{\emptyset\} \in X$- Falsz

   (g) $\{a\} \in T$- Prawda

   (h) $a \in T$- Falsz

   (i) $\emptyset \subseteq X$- Prawda

   (j) $\{a\} \in X$- Falsz

   (k) $\{\emptyset\} \subseteq X$- Falsz

   (l) $a \in X$- Prawda

   (m) $X \subseteq T$- Falsz

   (n) $\{a\} \subseteq T$- Falsz

   (o) $\{X\} \subseteq T$- Prawda

   (p) $a \subseteq T$- Falsz

4. Niech (X, T) bedzie dowolna przestrzenia topologiczna. Udowodnij, ze **przekroj skonczonej liczby(dowolnej) elementow z T jest elementem T**

   Odpowiedz:

   Udowodnimy to przez indukcje wzgledem liczby elementow przekroju.

   Teza: Dla przestrzeni topologicznej (X, T) przekroj skonczonej liczby elementow z T jest elementem T.

   Podstawa indukcji: dla n = 2, mamy $\bigcap_{i=1}^{2} A_i$, gdzie $A_i \in T$, A_i sa dowolnymi zbiorami nalezacymi do T. Poniewaz T jest topologia na X wiec z definicji, przekroj dowolnych dwoch zbiorow nalezacych do T, nalezy do T, zatem $\bigcap_{i=1}^{2} A_i \in T$.

   Krok indukcyjny: Ustalmy teraz dowolne $n \in \mathbb{N}$ i zalozmy, ze $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in T$. Pokaze ze dla $n + 1$ teza zachodzi. Oznaczmy sobie $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Dla $n + 1$ mamy:

   $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1} = \text{ zal. ind. } = B \cap A_{n+1}$ Poniewaz $B \in T$ oraz $A_{n+1} \in T$ wiec z definicji topologi, $B \cap A_{n+1} \in T$

   Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej, dla przestrzeni topologicznej (X, T) przekroj skonczonej liczby elementow z T jest elementem T.

5. Niech $\mathbb{R}$ bedzie zbiorem liczb rzeczywistych. Udowodnij ze kazdy z nastepujacych kolekcji podzbiorow $\mathbb{R}$ jest topologia.

   (a) T_1 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-n, n)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $(-n, n)$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : -n < x < n\}$

   (b) T_2 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-n, n]$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[-n, n]$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}$

(c) T_3 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[n, \infty)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[n, \infty)$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : n \leq x\}$

Odpowiedz:

Trzeba kazdy podpunkt sprawdzic z definicji topologii, czyli w kazdym podpunkcie sprawdzic czy (a') X oraz $\emptyset$ naleza do T, (b') zamknietosc na sume teoriomnogosciowa skonczona lub nie i (c') zamknietosc na przekroj(skonczony)

dla T_1 mamy:

(a') Z opisu T_1 mamy, ze $\mathbb{R} \in T_1$ oraz $\emptyset \in T_1$

(b') Niech $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ gdzie $A_\alpha \in T_1$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym, bedzie dowolna suma(skonczona badz nie) zbiorow. Rozwazmy przypadki:

- $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$.
  Wtedy $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathbb{R} \in T_1$
- $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla kazdego $\alpha \in A$.
  Wtedy mamy przypadki:
  - $U_\alpha = \emptyset$ dla kazdego $\alpha \in A$.
    Wtedy $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset \in T_1$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbior
    $$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in A\}$$
    jest ograniczony z gory.
    Wtedy, z tego ze zbior B jest ograniczony z gory i zawiera liczby naturalne, wiemy ze istnieje najmniejsza liczba naturalna m, ktora ogranicza ten zbior z gory. Wezmy zatem liczbe m. Zauwazmy, ze m jest jednoczesnie maximum zbioru B. Z definicji zbioru T_1 mamy, ze $(-m, m) \in T_1$ oraz z tego, ze B jest ograniczony z gory, wnioskujemy
    $$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = (-m, m) \in T_1$$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbior
    $$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in A\}$$
    jest nieograniczony z gory.
    Wtedy, mam sprzecznosc, bo zalozylismy, ze $\mathbb{R} \notin T_1$, z drugiej strony zbior B jest nieograniczony, a
    $$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}$$
    Zatem ten podpunkt odpada.

  Sprawdzilismy zatem wszystkie mozliwosci i otrzymalismy, ze zbior T_1 jest zamkniety na sume(skonczona badz nie)

(c') Wezmy dwa dowolne zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$. Pokazemy, ze $B \cap C \in T_1$
Rozwazmy przypadk:

- $B \vee C = \emptyset$
  Wtedy: $B \cap C = \emptyset \in T_1$
- $B \wedge C \neq \emptyset$ Wtedy mamy przypadki:
  - $B \wedge C = \mathbb{R}$
    Wtedy $B \cap C = \mathbb{R} \in T_1$
  - $B \vee C \neq \mathbb{R}$
    Wtedy ktorys ze zbiorow(byc moze oba) jest postaci $(-m, m)$ dla $m \in \mathbb{N}$. Jesli $B = \mathbb{R}$ i $C = (-m, m), m \in \mathbb{N}$ to $B \cap C = (-m, m) \in T_1$. Drugi przypadek to gdy oba sa postaci prostej, czyli $B = (-m, m)$ oraz $C = (-n, n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$. Wtedy niech $k = min(m, n)$, mamy $B \cap C = (-k, k) \in T_1$

Zatem T_1 zamkniete na przekroj.

T_1 jest zatem topologia. c.b.d.u.

dla T_2 mamy:

Dowod bedzie analogiczny do tego z T_1. Postaram sie go bardziej ladnie zrobic.

(a') Z opisu T_2 wnioskujemy, ze $\mathbb{R} \in T_2$ oraz $\emptyset \in T_2$.

(b') Niech $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym. Rozwazmy przypadki:

- $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$. Wtedy:
  $U = \mathbb{R} \in T_2$
- $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla kazdego $\alpha \in A$ Wtedy:
  Rozwazmy przypadki:
  - $U_\alpha = \emptyset$ dla kazdego $\alpha \in A$ Wtedy:
    $U = \emptyset \in T_2$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego α Wtedy:
    Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa
    $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = [-x, x])$$
    oraz zbior
    $$B = \{n : P(n) \land n \in \mathbb{N}\}$$
    jako zbior indeksow n dla ktorych istnieje $\alpha \in A$ taka ze $U_\alpha = [-n, n]$.
    Nastepnie rozwazmy dwa przypadki:
    I. Zbior B jest ogranioczony z gory. Wtedy z tego, ze B jest ograniczony oraz B zawiera tylko liczby naturalne, wnioskujemy, ze istnieje w B maximum. Niech $m = max(B)$. Wtedy $U = [-m, m] \in T_2$

    II. Zbior B jest nieograniczony z gory. Wtedy $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbb{R}$, lecz zalozylismy, ze $U \neq \mathbb{R}$. Zatem sprzecznosc, wiec ten przypadek nam odpada.

  Zatem T_2 jest zamkniety na sume.

(c') Wezmy dowolne dwa zbiory $B \in T_2$ oraz $C \in T_2$. Wtedy:
Rozwazmy przypadki:

- $B = \mathbb{R} \land C = \mathbb{R}$. Wtedy:
  $B \cap C = \mathbb{R} \in T_2$.
- WLOG zalozmy, ze $B \neq \mathbb{R}$. Wtedy:
  Rozwazmy przypadki:
  - $B = \emptyset$. Wtedy bezwzgledu na C:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$
  - $B = [-n, n]$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:
    I. Jesli $C = \emptyset$ to:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$.

    II. Jesli $C = [-m, m]$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, Wtedy:
    Niech $k = min(m, n)$, mamy $B \cap C = [-k, k] \in T_2$

  Zatem T_2 jest zamkniete na skonczone przekroje.

Podsumowujac, sprawdzilismy z definicji topologii i otrzymalismy ze T_2 jest topologia. c.b.d.u.

dla T_3 mamy:

(a') Z opisu T_3 mamy, ze $\mathbb{R} \in T_3$ oraz $\emptyset \in T_3$

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym.
Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa
$$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = [x, \infty])$$
oraz zbior
$$B = \left\{n : P(n) \land n \in \mathbb{N}^+\right\}$$
B to zbior wszystkich indeksow n dla ktorych $U_\alpha = [n, \infty]$. Poniewaz zbior ten zawiera tylko liczby naturalne, wiec ma minimum. Niech $m = min(B)$. Wtedy $U = [m, \infty] \in T_3$. Zatem T_3 jest zamkniety na sume.

(c') Wezmy sobie dowolne zbiory $B \in T_3$ oraz $C \in T_3$. Niech $b = min(B)$ oraz $c = min(C)$. Wtedy $B \cap C = [min(b, c), \infty] \in T_3$ bo $min(b, c) \in \mathbb{N}$. Zatem T_3 jest zamkniety na przekroj.
Podsumowujac, rozwazylismy wszystkie mozliwosci i otrzymalsmy, ze T_3 jest topologia.

6. Niech $\mathbb{N}$ bedzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich. Udowodnij ze kazda z nastepujacych kolekcji(w ramkach) podzbiorow $\mathbb{N}$ jest topologia.

Definicja: Initial segment topology; poki co brak polskiego tlumaczenia

T_1 zawiera $\mathbb{N}$ oraz $\emptyset$ oraz kazdy zbior $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dla dowolnego n naturalnego dodatniego.

Dowod:

- Z opisu mamy, ze $\emptyset \in T_1$ oraz $\mathbb{N} \in T_1$
- Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ dla pewnego zbioru indeksowego A i $U_\alpha \in T_1$. Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

  $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = \{1, 2, 3, \ldots, x\}$$

  oraz zbior

  $$B = \big\{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\big\}$$

  Rozwazmy przypadki:

  - Zbior B jest ogranioczony z gory.
    Poniewaz B zawiera liczby naturalne dodatnie i jest ograniczony z gory wiec zawiera maximum. Niech $m = max(B)$. Zatem dla pewnego $\alpha, U_\alpha = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wtedy $U = \{1, 2, \ldots, m\} \in T_1$.
  - Zbior B jest nieograniczony z gory.
    Poniewaz zbior B zawiera liczby naturalne dodatnie(od 1 wzwyz) i nie jest ograniczony z gory, wiec $B = \mathbb{N}$. Zatem dla dowolnej $\alpha \in A$ istnieje $\alpha' \in A$ taka ze, $U_\alpha \subset U_{\alpha'}$. Zatem $U = \mathbb{N}$.

  Zatem T_1 jest zamkniety na sume.
- Wezmy dowolne dwa zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$
  Rozwazmy przypadki:

  - $B = C = \mathbb{N}$. Wtedy:
    $B \cap C = \mathbb{N} \in T_1$
  - WLOG $B \neq \mathbb{N}$. Wtedy:
    Rozwazmy przypadki:
    - $B = \emptyset$ Wtedy:
      Bezwzgledu na C. $B \cap C = \emptyset \in T_1$
    - $B \neq \emptyset$, czyli $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ to:
      Jesli $C = \emptyset$, to $B \cap C = \emptyset \in T_1$.
      Jesli $C = \{1, 2, \ldots, m\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, to $B \cap C = \{1, 2, \ldots, min(n, m)\} \in T_1$

  Zatem T_1 jest zamkniety na przekroj.
  Zatem T_1 to topologia.

Definicja:Final segment topology; poki co brak polskiego tlumaczenia

T_2 zawiera $\mathbb{N}$ oraz $\emptyset$ oraz kazdy zbior $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$, dla dowolnego n naturalnego dodatniego.

Dowod:

- Z opisu mamy, ze $\emptyset \in T_2$ oraz $\mathbb{N} \in T_2$
- Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie A jest pewnym zbiorem indeksowym oraz $U_\alpha \in T_2$. Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

  $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = \{x, x+1, x+2, \ldots\}$$

  oraz zbior

  $$B = \big\{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\big\}$$

  Niech $m = min(B)$. Wtedy dla kazdego $\alpha \in A, U_\alpha \subset \{m, m+1, \ldots\}$ oraz $U = \{m, m+1, \ldots\} \in T_2$.
  Zatem T_2 jest zamkniety na sume.
- Wezmy dowolne $B \in T_2$ oraz $C \in T_2$.
  Rozwazmy przypadki:

  - $B = \emptyset \vee C = \emptyset$. Wtedy:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$
  - $B = \mathbb{N} \wedge C = \mathbb{N}$. Wtedy:
    $B \cap C = \mathbb{N} \in T_2$

- Zaden z nich nie jest pusty oraz oba nie sa zbiorem $\mathbb{N}$. Wtedy:
  Jesli $B = \{m, m+1, \dots\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $C = \{n, n+1, \dots\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $B \cap C = \{max(m,n), max(m,$
  T_2

  Jesli WLOG $B = \{m, m+1, \dots\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $C = \mathbb{N}$ to $B \cap C = \{m, m+1, \dots\} \in T_2$

Zatem T_2 jest zamkniete na przekroj

Zatem T_2 to topologia. c.b.d.u.

7. Wypisz wszystkie mozliwe topologie na ponizszych zbiorach:

   (a) $X = \{a, b\}$

   Odpowiedz:

   Sa takie 4 topologie:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \{X, \emptyset\} \\
T_2 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\} \\
T_3 &= \{X, \emptyset, \{b\}\} \\
T_4 &= \{X, \emptyset, \{a\}\}
\end{aligned}
$$

   (b) $X = \{a, b, c\}$

   Odpowiedz:

   Jest takich 29 topologii:TODO PRZEPISAC Z KARTKI JE TUTAJ

   TODO NAPISZ DOWOD ZE JEST ICH 29, NA WIKI SPRAWDZ: TOPOLOGIES ON SET WITH 3 ELEMENTS

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \{X, \emptyset\} \\
T_2 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \} \\
T_3 &= \{X, \emptyset, \{a\}\} \\
T_4 &= \{X, \emptyset, \{b\}\} \\
T_5 &= \{X, \emptyset, \{c\}\} \\
T_6 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}\} \\
T_7 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,c\}\} \\
T_8 &= \{X, \emptyset, \{b\}, \{b,c\}\} \\
T_9 &= \{X, \emptyset, \{b\}, \{b,a\}\} \\
T_{10} &= \{X, \emptyset, \{c\}, \{c,a\}\} \\
T_{11} &= \{X, \emptyset, \{c\}, \{c,b\}\} \\
T_{12} &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b,c\}\} \\
T_{13} &= \{X, \emptyset, \{b\}, \{a,b,c\}\} \\
T_{14} &= \{X, \emptyset, \{c\}, \{a,b,c\}\}
\end{aligned}
$$

8. Udowodnij ponizszy lemat.

Lemat: Topologia dyskretna i podzbiory nieskonczone

Niech X bedzie zbiorem niesoknczonym oraz T topologia na X. Jezeli kazdy nieskonczony podzbior X nalezy do T, to T jest topologia dyskretna.

Dowod:

Zgodnie z ktoryms tam lematem(latwy dowod), jesli T zawiera $\{x\}$ gdzie $x \in X$ jest dowolnym elementem X, to T jest topologia dyskretna.

Zatem wezmy dowolny element $x \in X$. Skoro X jest nieskonczonym zbiorem i kazdy nieskonczony podzbior X jest w T, to oznacza, ze mozemy sobie wybrac z X, nieskonczony ciag roznowartosciowy, w ktorym nie ma elementu x.

Jak? Na przyklad tak:

$$
\begin{cases}
a_1 = \begin{cases} 1 \text{ jesli } x \neq 1 \\ 0 \text{ jesli } x = 1 \end{cases} \\
a_n = min\{y : y \in X \land y \neq x \land (\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\})(a_i \neq y)\}
\end{cases}
$$

Nastepnie rozwazmy dwa nieskonczone zbiory:

$$
A = \{a_n : n = 2 \times k \land k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\}
$$

oraz

$$B = \{a_n : n = 2 \times k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\}$$

Wtedy oczywiscie $A \in T$ oraz $B \in T$ oraz $A \cap B = \{x\} \in T$

Z dowolnosci x, wnioskujemy, ze T zawiera dowolny singleton $\{x\}$ taki ze, $x \in X$. Zatem T jest topologia dyskretna. c.b.d.u.

9. Wskaz i udowodnij, ktore z ponizszych zbior liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ sa topologiami.

$T_1:$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial (a, b) gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$;
$T_2:$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;
$T_3:$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{Q}^+$;
$T_4:$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{Q}^+$;
$T_5:$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;
$T_6:$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;
$T_7:$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;
$T_8:$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;
$T_9:$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$, kazdy przedzial $[-r, r]$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;
$T_{10}:$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$, kazdy przedzial $[-n, n]$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $n \in \mathbb{N}^+$ oraz $r \in \mathbb{R}^+$;

1.2 Zbiory otwarte: definicje, lematy, zadania i rozwiazania

1.2.1 Definicja: Zbior otwarty- open set

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy elementy T nazywaja sie **zbiory otwarte.**

1.2.2 Lemat: Przestrzen topologiczna i zbiory otwarte

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- X oraz $\emptyset$ sa zbiorami otwartymi.
- suma(skonczona lub nie) zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym
- przekroj skonczony zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym

Dowod: Wynika to wprost z definicji. Podpunkt trzeci wynika z zadania 4.

1.2.3 Definicja: Zbior zamkniety- closed set

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Podzbior S zbioru X jest **zbiorem zamknietym** w (X, T) jesli jego dopelnienie w X, $X \setminus S$, jest zbiorem otwartym w (X, T)

Komentarz

Czyli mowimy, ze S, bedace podzbiorem X, jest zbiorem zamknietym w (X, T) jesli jego dopelnienie w X, czyli $X \setminus S$ jest otwarte, czli jesli $X \setminus S \in T$

Zauwazmy, ze jesli (X, T) jest przestrzenia dyskretna, wtedy kazdy podzbior X jest zbiorem zamknietym. Jednakze w przestrzeni niedyskretnej, (X, T), jedynymi zbiorami zamknietymi sa X oraz $\emptyset$

1.2.5 Lemat: Przestrzen topologiczna i zbiory zamkniete

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- $\emptyset$ oraz X sa zbiorami zamknietymi
- przekroj skonczonej lub nieskonczonej liczby zbiorow zamknietych jest zbiorem zamknietym
- suma skonczonej liczby zbiorow zamknietych jest zbiorem zamknietym

Komentarz:
Mozna tu dostrzec pewna analogie pomiedzy przestrzenia topologiczna i zbiorami otwartymi
Dowod:
TODO

Cwiczenie 1.2:

1.3 Skonczenie-domknieta topologia(ang. The Finite-Closed Topology): definicje lematy, zadania i rozwiazania.

Zwykle definiujemy topologe na zbiorze przez okreslenie, ktore zbiory sa otwarte. Czasami bardziej naturalnie jest zdefiniowac topologie przez okreslenie, ktore zbiory sa domkniete.