Moje notatki na bazie skryptu topology without tears

Lukasz Kopyto

February 27, 2024

1 Przestrzenie topologiczne

1.1 Topologia: definicje, lematy, zadania i rozwiazania

1.1.1 Definicja: Topologia

Niech X bedzie niepustym zbiorem. Mowimy, ze zbior T zawierajacy podzbiory X jest topologia na X jesli:

- X oraz zbior pusty $\emptyset$, naleza do T,
- suma skonczona badz nie zbiorow z T nalezy do T, inaczej T jest zamkniety na sume, i ta suma moze byc nieskonczona
- przekroj dowolnych dwoch zbiorow z T nalezy do T, inaczej T jest zamkniety na przekroj, ale przekroj skonczony

Para (X, T) nazywamy **przestrzenia topologiczna.**

1.1.6 Definicja: Topologia dyskretna(discrete topology)

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz T kolekcja wszystkich podzbiorow X. Wtedy mowimy, ze T jest **topologia dyskretna** na zbiorze X. Przestrzen topologiczna (X, T) jest nazywana **przestrzenia dyskretna**

1.1.7 Definicja: Topologia niedyskretne(indiscrete topology)

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz $T = \{X, \emptyset\}$. Wtedy mowimy, ze T jest **topologia niedyskretna** oraz (X, T) jest **przestrzenia niedyskretna**

1.1.9 Lemat: Topologia dyskretna i singletony

Jezeli (X, T) jest przestrzenia topologiczna, taka ze, dla kazdego $x \in X$, singleton x, $\{x\}$ jest w X, to X jest topologia dyskretna.

Dowod:
Wystarcz sprawdzic prawdziwosc trzech warunkow, z definicji 1.1.1.

1. Z definicji T jest topologia, wiec zawiera X oraz $\emptyset$.
2. Niech S bedzie suma skonczona lub nie dowolnej liczby zbiorow z T. Poniewaz mozemy zapisac S jako $S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$, a kazdy singleton $\{x\} \in X$, wnioskujemy stad, ze $S \in T$
3. Analogicznie dowodzimy, ze przekroj dowolnych dwoch zbiorow z T nalezy do T

Cwiczenia 1.1

1. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ustal czy podane kolekcje podzbiorow X sa topologia na X

   (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$
   (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$
   (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$

   Odpowiedz:

   (a) Jest topologia.

(b) Nie jest, bo $\{a, b, f\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\} \notin T_2$
(c) Nie jest, bo $\{e, f\} \cup \{a, f\} = \{a, e, f\} \notin T_3$

2. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Wskaz i uzasadnij ktore kolekcje podzbiorow X sa topologia na X

   (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$
   (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$
   (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$

   Odpowiedz:

   (a) Nie, bo $\{c\} \cup \{b\} = \{b, c\} \notin T_1$
   (b) Nie, bo $\{b, d, e\} \cap \{a, b, d\} = \{b, d\} \notin T_2$
   (c) Jest topologia.

3. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ oraz T bedzie topologia dyskretna na X, ktore z ponizszych podpunktow sa prawdziwe?

   (a) $X \in T$- Prawda
   (b) $\{X\} \in T$- Falsz
   (c) $\{\emptyset\} \in T$- Falsz
   (d) $\emptyset \in T$- Prawda
   (e) $\emptyset \in X$- Falsz
   (f) $\{\emptyset\} \in X$- Falsz
   (g) $\{a\} \in T$- Prawda
   (h) $a \in T$- Falsz
   (i) $\emptyset \subseteq X$- Prawda
   (j) $\{a\} \in X$- Falsz
   (k) $\{\emptyset\} \subseteq X$- Falsz
   (l) $a \in X$- Prawda
   (m) $X \subseteq T$- Falsz
   (n) $\{a\} \subseteq T$- Falsz
   (o) $\{X\} \subseteq T$- Prawda
   (p) $a \subseteq T$- Falsz

4. Niech (X, T) bedzie dowolna przestrzenia topologiczna. Udowodnij, ze **przekroj skonczonej liczby(dowolnej) elementow z T jest elementem T**

   Odpowiedz:

   Udowodnimy to przez indukcje wzgledem liczby elementow przekroju.

   Teza: Dla przestrzeni topologicznej (X, T) przekroj skonczonej liczby elementow z T jest elementem T.

   Podstawa indukcji: dla n = 2, mamy $\bigcap\limits_{i=1}^{2} A_i$, gdzie $A_i \in T$, A_i sa dowolnymi zbiorami nalezacymi do T. Poniewaz T jest topologia na X wiec z definicji, przekroj dowolnych dwoch zbiorow nalezacych do T, nalezy do T, zatem $\bigcap\limits_{i=1}^{2} A_i \in T$.

   Krok indukcyjny: Ustalmy teraz dowolne $n \in \mathbb{N}$ i zalozmy, ze $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in T$. Pokaze ze dla $n+1$ teza zachodzi. Oznaczmy sobie $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Dla $n+1$ mamy:

   $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1} = \text{ zal. ind. } = B \cap A_{n+1}$ Poniewaz $B \in T$ oraz $A_{n+1} \in T$ wiec z definicji topologi, $B \cap A_{n+1} \in T$
   Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej, dla przestrzeni topologicznej (X, T) przekroj skonczonej liczby elementow z T jest elementem T.

5. Niech $\mathbb{R}$ bedzie zbiorem liczb rzeczywistych. Udowodnij ze kazdy z nastepujacych kolekcji podzbiorow $\mathbb{R}$ jest topologia.

   (a) T_1 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-n, n)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $(-n, n)$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : -n < x < n\}$
   (b) T_2 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-n, n]$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[-n, n]$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}$

(c) T_3 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[n, \infty)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[n, \infty)$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : n \leq x\}$

Odpowiedz:

Trzeba kazdy podpunkt sprawdzic z definicji topologii, czyli w kazdym podpunkcie sprawdzic czy (a') X oraz $\emptyset$ naleza do T, (b') zamknietosc na sume teoriomnogosciowa skonczona lub nie i (c') zamknietosc na przekroj(skonczony)

dla T_1 mamy:

(a') Z opisu T_1 mamy, ze $\mathbb{R} \in T_1$ oraz $\emptyset \in T_1$

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ gdzie $A_\alpha \in T_1$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym, bedzie dowolna suma(skonczona badz nie) zbiorow. Rozwazmy przypadki:

- $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$.
  Wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathbb{R} \in T_1$
- $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla kazdego $\alpha \in A$.
  Wtedy mamy przypadki:
  - $U_\alpha = \emptyset$ dla kazdego $\alpha \in A$.
    Wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset \in T_1$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbior
    $$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in A\}$$
    jest ograniczony z gory.
    Wtedy, z tego ze zbior B jest ograniczony z gory i zawiera liczby naturalne, wiemy ze istnieje najmniejsza liczba naturalna m, ktora ogranicza ten zbior z gory. Wezmy zatem liczbe m. Zauwazmy, ze m jest jednoczesnie maximum zbioru B. Z definicji zbioru T_1 mamy, ze $(-m, m) \in T_1$ oraz z tego, ze B jest ograniczony z gory, wnioskujemy
    $$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = (-m, m) \in T_1$$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbior
    $$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in A\}$$
    jest nieograniczony z gory.
    Wtedy, mam sprzecznosc, bo zalozylismy, ze $\mathbb{R} \notin T_1$, z drugiej strony zbior B jest nieograniczony, a
    $$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}$$
    Zatem ten podpunkt odpada.

  Sprawdzilismy zatem wszystkie mozliwosci i otrzymalismy, ze zbior T_1 jest zamkniety na sume(skonczona badz nie)

(c') Wezmy dwa dowolne zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$. Pokazemy, ze $B \cap C \in T_1$
Rozwazmy przypadk:

- $B \vee C = \emptyset$
  Wtedy: $B \cap C = \emptyset \in T_1$
- $B \wedge C \neq \emptyset$ Wtedy mamy przypadki:
  - $B \wedge C = \mathbb{R}$
    Wtedy $B \cap C = \mathbb{R} \in T_1$
  - $B \vee C \neq \mathbb{R}$
    Wtedy ktorys ze zbiorow(byc moze oba) jest postaci $(-m, m)$ dla $m \in \mathbb{N}$. Jesli $B = \mathbb{R}$ i $C = (-m, m), m \in \mathbb{N}$ to $B \cap C = (-m, m) \in T_1$. Drugi przypadek to gdy oba sa postaci prostej, czyli $B = (-m, m)$ oraz $C = (-n, n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$. Wtedy niech $k = min(m, n)$, mamy $B \cap C = (-k, k) \in T_1$

Zatem T_1 zamkniete na przekroj.

T_1 jest zatem topologia. c.b.d.u.

dla T_2 mamy:

Dowod bedzie analogiczny do tego z T_1. Postaram sie go bardziej ladnie zrobic.

(a') Z opisu T_2 wnioskujemy, ze $\mathbb{R} \in T_2$ oraz $\emptyset \in T_2$.

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym. Rozwazmy przypadki:

- $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$. Wtedy:
  $U = \mathbb{R} \in T_2$
- $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla kazdego $\alpha \in A$ Wtedy:
  Rozwazmy przypadki:
  - $U_\alpha = \emptyset$ dla kazdego $\alpha \in A$ Wtedy:
    $U = \emptyset \in T_2$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego α Wtedy:
    Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

    $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = [-x, x])$$

    oraz zbior

    $$B = \{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

    jako zbior indeksow n dla ktorych istnieje $\alpha \in A$ taka ze $U_\alpha = [-n, n]$.
    Nastepnie rozwazmy dwa przypadki:
    I. Zbior B jest ogranioczony z gory. Wtedy z tego, ze B jest ograniczony oraz B zawiera tylko liczby naturalne, wnioskujemy, ze istnieje w B maximum. Niech $m = max(B)$. Wtedy $U = [-m, m] \in T_2$

    II. Zbior B jest nieograniczony z gory. Wtedy $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbb{R}$, lecz zalozylismy, ze $U \neq \mathbb{R}$. Zatem sprzecznosc, wiec ten przypadek nam odpada.

  Zatem T_2 jest zamkniety na sume.

(c') Wezmy dowolne dwa zbiory $B \in T_2$ oraz $C \in T_2$. Wtedy:
Rozwazmy przypadki:

- $B = \mathbb{R} \wedge C = \mathbb{R}$. Wtedy:
  $B \cap C = \mathbb{R} \in T_2$.
- WLOG zalozmy, ze $B \neq \mathbb{R}$. Wtedy:
  Rozwazmy przypadki:
  - $B = \emptyset$. Wtedy bezwzgledu na C:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$
  - $B = [-n, n]$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:
    I. Jesli $C = \emptyset$ to:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$.

    II. Jesli $C = [-m, m]$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, Wtedy:
    Niech $k = min(m, n)$, mamy $B \cap C = [-k, k] \in T_2$

  Zatem T_2 jest zamkniete na skonczone przekroje.

Podsumowujac, sprawdzilismy z definicji topologii i otrzymalismy ze T_2 jest topologia. c.b.d.u.

dla T_3 mamy:

(a') Z opisu T_3 mamy, ze $\mathbb{R} \in T_3$ oraz $\emptyset \in T_3$

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym.
Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

$$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = [x, \infty])$$

oraz zbior

$$B = \left\{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

B to zbior wszystkich indeksow n dla ktorych $U_\alpha = [n, \infty]$. Poniewaz zbior ten zawiera tylko liczby naturalne, wiec ma minimum. Niech $m = min(B)$. Wtedy $U = [m, \infty] \in T_3$. Zatem T_3 jest zamkniety na sume.

(c') Wezmy sobie dowolne zbiory $B \in T_3$ oraz $C \in T_3$. Niech $b = min(B)$ oraz $c = min(C)$. Wtedy $B \cap C = [min(b, c), \infty] \in T_3$ bo $min(b, c) \in \mathbb{N}$. Zatem T_3 jest zamkniety na przekroj.
Podsumowujac, rozwazylismy wszystkie mozliwosci i otrzymalsmy, ze T_3 jest topologia.

6. Niech $\mathbb{N}$ bedzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich. Udowodnij ze kazda z nastepujacych kolekcji(w ramkach) podzbiorow $\mathbb{N}$ jest topologia.

Definicja: Initial segment topology; poki co brak polskiego tlumaczenia

T_1 zawiera $\mathbb{N}$ oraz $\emptyset$ oraz kazdy zbior $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, dla dowolnego n naturalnego dodatniego.

Dowod:

- Z opisu mamy, ze $\emptyset \in T_1$ oraz $\mathbb{N} \in T_1$
- Niech $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ dla pewnego zbioru indeksowego A i $U_\alpha \in T_1$. Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

  $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = \{1, 2, 3, \dots, x\}$$

  oraz zbior

  $$B = \left\{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

  Rozwazmy przypadki:

  - Zbior B jest ogranioczony z gory.
    Poniewaz B zawiera liczby naturalne dodatnie i jest ograniczony z gory wiec zawiera maximum. Niech $m = max(B)$. Zatem dla pewnego $\alpha, U_\alpha = \{1, 2, \dots, m\}$. Wtedy $U = \{1, 2, \dots, m\} \in T_1$.
  - Zbior B jest nieograniczony z gory.
    Poniewaz zbior B zawiera liczby naturalne dodatnie(od 1 wzwyz) i nie jest ograniczony z gory, wiec $B = \mathbb{N}$. Zatem dla dowolnej $\alpha \in A$ istnieje $\alpha' \in A$ taka ze, $U_\alpha \subset U_{\alpha'}$. Zatem $U = \mathbb{N}$.

  Zatem T_1 jest zamkniety na sume.
- Wezmy dowolne dwa zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$
  Rozwazmy przypadki:
  - $B = C = \mathbb{N}$. Wtedy:
    $B \cap C = \mathbb{N} \in T_1$
  - WLOG $B \neq \mathbb{N}$. Wtedy:
    Rozwazmy przypadki:
    * $B = \emptyset$ Wtedy:
      Bezwzgledu na C. $B \cap C = \emptyset \in T_1$
    * $B \neq \emptyset$, czyli $B = \{1, 2, \dots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ to:
      Jesli $C = \emptyset$, to $B \cap C = \emptyset \in T_1$.
      Jesli $C = \{1, 2, \dots, m\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, to $B \cap C = \{1, 2, \dots, min(n, m)\} \in T_1$

  Zatem T_1 jest zamkniety na przekroj.
  Zatem T_1 to topologia.

Definicja:Final segment topology; poki co brak polskiego tlumaczenia

T_2 zawiera $\mathbb{N}$ oraz $\emptyset$ oraz kazdy zbior $\{n, n+1, n+2, \dots\}$, dla dowolnego n naturalnego dodatniego.

Dowod:

- Z opisu mamy, ze $\emptyset \in T_2$ oraz $\mathbb{N} \in T_2$
- Niech $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie A jest pewnym zbiorem indeksowym oraz $U_\alpha \in T_2$. Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

  $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = \{x, x+1, x+2, \dots\}$$

  oraz zbior

  $$B = \left\{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

  Niech $m = min(B)$. Wtedy dla kazdego $\alpha \in A, U_\alpha \subset \{m, m+1, \dots\}$ oraz $U = \{m, m+1, \dots\} \in T_2$.
  Zatem T_2 jest zamkniety na sume.
- Wezmy dowolne $B \in T_2$ oraz $C \in T_2$.
  Rozwazmy przypadki:
  - $B = \emptyset \vee C = \emptyset$. Wtedy:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$
  - $B = \mathbb{N} \wedge C = \mathbb{N}$. Wtedy:
    $B \cap C = \mathbb{N} \in T_2$

- Zaden z nich nie jest pusty oraz oba nie sa zbiorem $\mathbb{N}$. Wtedy:
  Jesli $B = \{m, m+1, \dots\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $C = \{n, n+1, \dots\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $B \cap C = \{max(m,n), max(m,$
  T_2

  Jesli WLOG $B = \{m, m+1, \dots\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $C = \mathbb{N}$ to $B \cap C = \{m, m+1, \dots\} \in T_2$

Zatem T_2 jest zamkniete na przekroj

Zatem T_2 to topologia. c.b.d.u.

7. Wypisz wszystkie mozliwe topologie na ponizszych zbiorach:

   (a) $X = \{a, b\}$

   Odpowiedz:

   Sa takie 4 topologie:

   $T_1 = \{X, \emptyset\}$
   $T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$
   $T_3 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$
   $T_4 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$

   (b) $X = \{a, b, c\}$

   Odpowiedz:

   Jest takich 29 topologii:TODO PRZEPISAC Z KARTKI JE TUTAJ

   TODO NAPISZ DOWOD ZE JEST ICH 29, NA WIKI SPRAWDZ: TOPOLOGIES ON SET WITH 3 ELEMENTS

   $T_1 = \{X, \emptyset\}$
   $T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \}$
   $T_3 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$
   $T_4 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$
   $T_5 = \{X, \emptyset, \{c\}\}$
   $T_6 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$
   $T_7 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$
   $T_8 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$
   $T_9 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, a\}\}$
   $T_{10} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{c, a\}\}$
   $T_{11} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{c, b\}\}$
   $T_{12} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$
   $T_{13} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\}$
   $T_{14} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b, c\}\}$

8. Udowodnij ponizszy lemat.

> **Lemat: Topologia dyskretna i podzbiory nieskonczone**
>
> Niech X bedzie zbiorem niesoknczonym oraz T topologia na X. Jezeli kazdy nieskonczony podzbior X nalezy do T, to T jest topologia dyskretna.

Dowod:

Zgodnie z ktoryms tam lematem(latwy dowod), jesli T zawiera $\{x\}$ gdzie $x \in X$ jest dowolnym elementem X, to T jest topologia dyskretna.

Zatem wezmy dowolny element $x \in X$. Skoro X jest nieskonczonym zbiorem i kazdy nieskonczony podzbior X jest w T, to oznacza, ze mozemy sobie wybrac z X, nieskonczony ciag roznowartosciowy, w ktorym nie ma elementu x.

Jak? Na przyklad tak:

$$\begin{cases} a_1 = \begin{cases} 1 \text{ jesli } x \neq 1 \\ 0 \text{ jesli } x = 1 \end{cases} \\ a_n = min\{y : y \in X \land y \neq x \land (\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\})(a_i \neq y)\} \end{cases}$$

Nastepnie rozwazmy dwa nieskonczone zbiory:

$$A = \{a_n : n = 2 \times k \land k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\}$$

oraz

$$B = \{a_n : n = 2 \times k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\}$$

Wtedy oczywiscie $A \in T$ oraz $B \in T$ oraz $A \cap B = \{x\} \in T$

Z dowolnosci x, wnioskujemy, ze T zawiera dowolny singleton $\{x\}$ taki ze, $x \in X$. Zatem T jest topologia dyskretna. c.b.d.u.

9. Wskaz i udowodnij, ktore z ponizszych zbior liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ sa topologiami.

T_1 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial (a, b) gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$;

Nie:

Wezmy sobie zbior $A = \{1, 2\}$ oraz $B = \{4, 5\}$. Oczywiscie $A \in T_1$ oraz $B \in T_1$, ale suma $A \cup B = \{1, 2\} \cup \{4, 5\} \notin T_1$

T_2 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Tak:

- Z definicjie $\mathbb{R} \in T_2$ oraz $\emptyset \in T_2$
- Wezmy dowolna $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym. Wtedy jesli pewien $U_\alpha = \mathbb{R}$ to $U = \mathbb{R} \in T_2$. W przeciwnym przypadku, jesli kazdy $U_\alpha = \emptyset$ to $U = \emptyset \in T_2$. W przeciwnym przypadku, jesli nie kazdy $U_\alpha = \emptyset$ wtedy rozwazmy przypadki: jesli zbior indeksow r, dla ktorych $U_\alpha = (-r, r)$, jest ograniczony, to wiemy, ze istnieje indeks $q \in \mathbb{R}$, taki ze $(\forall \alpha in A)(U_\alpha \subseteq (-q, q))$ oraz $(-q, q) \in T_2$. Z drugiej strony jesli zbior indeksow r, dla ktorych $U_\alpha = (-r, r)$, jest nieograniczony, to $U = \mathbb{R} \in T_2$.
- Wezmy dowolne dwa zbiory $A \in T_2$ oraz $B \in T_2$. Wtedy jesli ktorys z nich jest $\emptyset$ to $A \cap B = \emptyset$. Jesli zaden z nich nie jest $\emptyset$, to albo oba sa $\mathbb{R}$, wtedy $A \cap B = \mathbb{R} \in T_2$ albo ktorys z nich nie jest $\mathbb{R}$. Wtedy albo jeden z nich jest postaci $(-r, r)$ albo oba sa tej postaci, $(-r, r), (-q, q)$. W kazdym przypadku zauwazamy, ze $A \cap B = (-r, r) \in T_2$ lub $A \cap B = (-min(r, q), min(r, q)) \in T_2$

T_3 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{Q}^+$;

Odpowiedz:

Nie. Rozwazmy ciag liczb wymiernych r_n dazacy do liczby niewymiernej r. Dodatkowo rozwazmy nieskonczona sume zbiorow $\bigcup_{i=1}^{\infty} (-r_n, r_n)$. Wtedy przy $n \to \infty, (-r_n, r_n) \to (-r, r)$. Kazdy zbior z $\bigcup_{i=1}^{infty} (-r_n, r_n)$ jest w T_3 ale $(-r, r)$ juz nie jest.

T_4 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{Q}^+$;

Odpowiedz:

Nie. Rozwazmy ciag liczb wymiernych r_n dazacy do liczby wymiernej r. Dodatkowo rozwazmy nieskonczona sume zbiorow $\bigcup_{i=1}^{\infty} [-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}]$. Wtedy przy $n \to \infty, [-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}] \to (-r, r)$. Kazdy zbior z sumy $\bigcup_{i=1}^{\infty} [-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}]$ jest w T_4, ale $(-r, r)$ juz nie jest.

T_5 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;

Odpowiedz:

Nie. Rozwazmy ciag liczb niewymiernych dazacy do liczby wymiernej. Niech r_n bedzie ciagiem liczb wymiernych dazacym do $\sqrt{2}$. Nastepnie rozwazmy ciag $g_n = 2 + \sqrt{2} - r_n$. Wtedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} (-g_n, g_n)$ dazy do $(-2, 2)$ przy $n \to \infty$. Argumentacja podobna jak w przykladzie 4.

T_6 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;

Odpowiedz:

Nie. Rozwazmy ciag liczb niewymiernych dazacy do liczby wymiernej g_n. Rozwazmy nieskonczona sume $\bigcup_{i=1}^{\infty} [-g_n + \frac{1}{n}, g_n - \frac{1}{n}]$. Suma ta dazy do $[-g, g]$, gdzie g jest liczba wymierna.

T_7 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Odpowiedz:

Nie. Przyklad z podpunktu 4 tutaj zadziala.

T_8 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Odpowiedz: Nie. Przyklad z podpunktu 4 takza tutaj zadziala.

T_9 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$, kazdy przedzial $[-r, r]$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Odowiedz:

Tak. Mozna tu zrobic dowod w stylu tych poprzednich- czyli przeanalizowac wszystkie przypadki, ale poczekam na cos lepszego. Zostanie to tutaj uzupelnione.

T_{10} : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$, kazdy przedzial $[-n, n]$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $n \in \mathbb{N}^+$ oraz $r \in \mathbb{R}^+$;

Odpowiedz:

Tak. Mozna tu zrobic dowod w stylu tych poprzednich- czyli przeanalizowac wszystkie przypadki, ale poczekam na cos lepszego. Zostanie to tutaj uzupelnione.

1.2 Zbiory otwarte: definicje, lematy, zadania i rozwiazania

1.2.1 Definicja: Zbior otwarty- open set

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy elementy T nazywaja sie **zbiory otwarte.**

1.2.2 Lemat: Przestrzen topologiczna i zbiory otwarte

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- X oraz $\emptyset$ sa zbiorami otwartymi.
- suma(skonczona lub nie) zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym
- przekroj skonczony zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym

Dowod: Wynika to wprost z definicji. Podpunkt trzeci wynika z zadania 4.

1.2.3 Definicja: Zbior domkniety- closed set

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Podzbior S zbioru X jest **zbiorem domknietym** w (X, T) jesli jego dopelnienie w X, $X \setminus S$, jest zbiorem otwartym w (X, T)

Komentarz

Czyli mowimy, ze S, bedace podzbiorem X, jest zbiorem domknietym w (X, T) jesli jego dopelnienie w X, czyli $X \setminus S$ jest otwarte, czli jesli $X \setminus S \in T$

Zauwazmy, ze jesli (X, T) jest przestrzenia dyskretna, wtedy kazdy podzbior X jest zbiorem domknietym. Jednakze w przestrzeni niedyskretnej, (X, T), jedynymi zbiorami domknietymi sa X oraz $\emptyset$

1.2.5 Lemat: Przestrzen topologiczna i zbiory domkniete

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- $\emptyset$ oraz X sa zbiorami domknietymi
- przekroj skonczonej lub nieskonczonej liczby zbiorow domknietych jest zbiorem domknietym
- suma skonczonej liczby zbiorow zamknietych jest zbiorem domknietym

Komentarz:

Mozna tu dostrzec pewna analogie pomiedzy przestrzenia topologiczna i zbiorami otwartymi

Dowod:

TODO

Cwiczenie 1.2:

1. Wypisz wszystkie 64 podzbiory zbioru $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Obok kazdego zbioru wypisz czy jest
   - clopen
   - ani clopen ani open
   - open ale nie closed
   - closed ale nie open
2. Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna z wlasnoscia taka, ze kazdy podzbior jest domkniety(closed). Udowodnij ze jest to przestrzen dyskretna.
3. Pokaz ze jesli (X, T) jest przestrzenia dyskretna lub przestrzenia nie dyskretna, wtedy kazdy otwarty(open) zbior jest clopen zbiorem. Znajdz topologia T na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$, ktora nie jest dyskretna oraz nie jest nie dyskretna ale ma wlasnosc taka, ze kazdy zbior otwarty(open) jest clopen.
4. Niech X bedzie zbiorem nieskonczonym. Jesli T jest topologia na X taka ze kazdy nieskonczony podzbior X jest domkniety(closed), udowodnij ze T jest topologia dyskretna.
5. Niech X bedzie nieskonczonym zbiorem oraz T topologia na X z wlasnoscia taka, ze jedynym nieskonczonym podzbiorem X, ktory jest otwarty jest X. Czy (X, T) musi byc przestrzenia niedyskretna?
6. Niech T bedzie topologia na zbiorze X taka, ze ma tylko 4 zbiory; dokladnie, $T = \{X, \emptyset, A, B\}$ gdzie A i B to niepuste rozlaczne, podzbiory **wlasciwe**(czyli nie moga byc rowne X) X.

   Udowodnij ze A i B spelniaja tylko jeden z wymienionych kryteriow:

- $B = X \setminus A$;
- $A \subset B$;
- $B \subset A$.

Korzystajac z powyzszego zadania, wypisz wszystkie topolobia na $X = \{1, 2, 3, 4\}$ zawierajace dokladnie 4 zbiory.

7. - Uzywajac indukcji, udowodnij ze wraz ze wzrostem n, gdzie n to liczba elementow zbioru X, liczba topologii na zbiorze X wzrasta.
   - Uzywajac indukcji udowonij ze jesli skonczony zbior X ma $n \in \mathbb{N}$ punktow, to ma conajmniej $(n-1)!$ roznych topologii.
   - Jesli zbior X jest dowolnym nieskonczonym zbiorem o mocy(cardinality) $\aleph$, czyli jest przeliczalny. Udowodnij, ze jest conajmniej $2^{\aleph}$ roznych topologii na X. Wywnioskuj ze kazdy nieskonczony zbior ma nieprzeliczlanie duzoe roznych topologii na sobie.

1.3 Skonczenie-domknieta topologia(ang. The Finite-Closed Topology): definicje lematy, zadania i rozwiazania.