# Topologia, notatki z wykladu.

Lukasz Kopyto

February 20, 2024

# 1 Wyklad nr 1. 20.02.2024

## 1.1 Metryka i przestrzen metryczna.

Metryka, czyli uogolnienie odleglosci. Chcemy mierzyc odleglosc miedzy elemenetami zbioru $X$, obojetnie czym on by nie byl. O elementach tego zbioru myslimy jak o punktach.

**Definicja 1.1: Metryka**

Funkcja $d : X \times X \to [0; \infty)$ jest metryka, jezeli

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $(\forall x, y)(d(x, y) = d(y, x))$
- $(\forall x, y, z)(d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z))$

**Komentarz:** Pierwsze dwa punkty definicji 1.1 sa oczywiste, chcemy aby odleglosc miedzy tymi samymi punktami byla zerowa oraz odleglosc miedzy x oraz y byla taka sama jak miedzy y oraz x. Rdzeniem definicji metryki, jest punkt 3 jej definicji, nierownosc trojkata. Mianowicie, jesli podczas naszej drogi, miedzy punktami x oraz z, chcemy odwiedzic dodatkowo punkt y, to naturalne jest, ze nasza droga moze sie wydluzyc.

**Przyklady metryk:** TODO

**Definicja 1.2: Przestrzen metryczna**

Niech $X$ bedzie pewnym zbiorem oraz funkcja $d$ bedaca metryka okreslona na tym zbiorze. Wtedy para $(X, d)$ nazywamy przestrzen metryczna.

**Komentarz:** Intuicyjnie o powyzszej parze mozemy myslec jak o zbiorze wyposazonym w pewna strukture, podobnie zbior i czesciowy porzadek tworza zbior czesciowo uporzadkowany(poset- partially ordered set)

**Definicja 1.3: Kula**

Niech $(X, d)$ bedzie przestrzenia metryczna. Kula o promineiu $r > 0$ i srodku $x \in X$ nazywamy zbior

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

**Przyklady kul w roznych metrykach:** TODO

**Definicja 1.4: Zbieznosc ciagu.**

Niech $(X, d)$ bedzie przestrzenia metryczna. Ciag elementow tej przestrzeni $(x_n)$ jest zbiezny do $x$, jezeli:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(d(x_n, x) < \epsilon)$$

**Definicja 1.5 Zbieznosc ciagu. Alternatywna definicja**

Niech $(X, d)$ bedzie przestrzenia metryczna. Ciag elementow tej przestrzeni $(x_n)$ jest zbiezny, jesli **kazda kula o srodku w x zawiera prawie wszystkie wyrazy** $(x_n)$

**Przyklady:** TODO

**Definicja 1.6 Zbior otwarty.**

Niech $(X, d)$ bedzie przestrzenia metryczna. Zbior $U \subset X$ jest otwarty, jezeli:

$$(\forall x \in U)(\exists r > 0)(B_r(x) \subseteq U)$$

**Fakt 1.7: Zbior otwarty jest suma kul**

Zbior $U$ jest otwarty $\iff$ $U$ jest suma kul. (Intuicja: zbior otwarty czyli przedzialy i ich sumy.)

**Dowod:** TODO
**Komentarz:**
Zbior jest otwarty jezeli dla dowolnego wyboru punktu z tego zbioru moge wybrac kule o srodku w tym punkcie.
Zbior pusty i cala przestrzen jest zawsze otwarta.
W przestrzeni dyskretnej kazdy zbior jest otwarty.

**Fakt 1.8: Sumy i przekroje zbiorow otwartych.**

- Suma dowolnie wielu zbiorow otwartych jest otwarta,
- Przekroj skonczenie wielu zbiorow otwartych jest otwarty.

**Dowod:** TODO

**Definicja 1.9: Zbior domkniety.**

Niech $(X, d)$ bedzie przestrzenia metryczna. Zbior $F$ jest domkniety, jezeli kazdy zbiezny ciag elementow $F$ ma granice w $F$.

**Fakt 1.10: Zbior domkniety kiedy**

Zbior $U$ jest otwarty $\iff$ $U^c$ jest domkniety.

**Dowod:** TODO