# Moje notatki na bazie skryptu topology without tears

Lukasz Kopyto

February 28, 2024

# 1 Przestrzenie topologiczne

## 1.1 Topologia: definicje, lematy, zadania i rozwiazania

**1.1.1 Definicja: Topologia**

Niech $X$ bedzie niepustym zbiorem. Mowimy, ze zbior $T$ zawierajacy podzbiory $X$ jest topologia na $X$ jesli:

- $X$ oraz zbior pusty $\emptyset$, naleza do $T$,
- suma skonczona badz nie zbiorow z $T$ nalezy do $T$, inaczej $T$ jest zamkniety na sume, i ta suma moze byc nieskonczona
- przekroj dowolnych dwoch zbiorow z $T$ nalezy do $T$, inaczej $T$ jest zamkniety na przekroj, ale przekroj skonczony

Para $(X, T)$ nazywamy **przestrzenia topologiczna.**

**1.1.6 Definicja: Topologia dyskretna(discrete topology)**

Niech $X$ bedzie niepustym zbiorem oraz $T$ kolekcja wszystkich podzbiorow $X$. Wtedy mowimy, ze $T$ jest **topologia dyskretna** na zbiorze $X$. Przestrzen topologiczna $(X, T)$ jest nazywana **przestrzenia dyskretna**

**1.1.7 Definicja: Topologia niedyskretne(indiscrete topology)**

Niech $X$ bedzie niepustym zbiorem oraz $T = \{X, \emptyset\}$. Wtedy mowimy, ze $T$ jest **topologia niedyskretna** oraz $(X, T)$ jest **przestrzenia niedyskretna**

**1.1.9 Lemat: Topologia dyskretna i singletony**

Jezeli $(X, T)$ jest przestrzenia topologiczna, taka ze, dla kazdego $x \in X$, singleton $x$, $\{x\}$ jest w $X$, to $X$ jest topologia dyskretna.

**Dowod:**
Wystarcz sprawdzic prawdziwosc trzech warunkow, z definicji 1.1.1.

1. Z definicji $T$ jest topologia, wiec zawiera $X$ oraz $\emptyset$.
2. Niech $S$ bedzie suma skonczona lub nie dowolnej liczby zbiorow z $T$. Poniewaz mozemy zapisac $S$ jako $S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$, a kazdy singleton $\{x\} \in X$, wnioskujemy stad, ze $S \in T$
3. Analogicznie dowodzimy, ze przekroj dowolnych dwoch zbiorow z $T$ nalezy do $T$

---

**Cwiczenia 1.1**

1. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ustal czy podane kolekcje podzbiorow $X$ sa topologia na $X$

   (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$
   (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$
   (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$

   **Odpowiedz:**

   (a) Jest topologia.

(b) Nie jest, bo $\{a, b, f\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\} \notin T_2$

(c) Nie jest, bo $\{e, f\} \cup \{a, f\} = \{a, e, f\} \notin T_3$

2. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Wskaz i uzasadnij ktore kolekcje podzbiorow $X$ sa topologia na $X$

   (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$

   (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$

   (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$

   **Odpowiedz:**

   (a) Nie, bo $\{c\} \cup \{b\} = \{b, c\} \notin T_1$

   (b) Nie, bo $\{b, d, e\} \cap \{a, b, d\} = \{b, d\} \notin T_2$

   (c) Jest topologia.

3. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ oraz $T$ bedzie topologia dyskretna na $X$, ktore z ponizszych podpunktow sa prawdziwe?

   (a) $X \in T$- Prawda

   (b) $\{X\} \in T$- Falsz

   (c) $\{\emptyset\} \in T$- Falsz

   (d) $\emptyset \in T$- Prawda

   (e) $\emptyset \in X$- Falsz

   (f) $\{\emptyset\} \in X$- Falsz

   (g) $\{a\} \in T$- Prawda

   (h) $a \in T$- Falsz

   (i) $\emptyset \subseteq X$- Prawda

   (j) $\{a\} \in X$- Falsz

   (k) $\{\emptyset\} \subseteq X$- Falsz

   (l) $a \in X$- Prawda

   (m) $X \subseteq T$- Falsz

   (n) $\{a\} \subseteq T$- Falsz

   (o) $\{X\} \subseteq T$- Prawda

   (p) $a \subseteq T$- Falsz

4. Niech $(X, T)$ bedzie dowolna przestrzenia topologiczna. Udowodnij, ze **przekroj skonczonej liczby(dowolnej) elementow z $T$ jest elementem $T$**

   **Odpowiedz:**

   Udowodnimy to przez indukcje wzgledem liczby elementow przekroju.

   **Teza:** Dla przestrzeni topologicznej $(X, T)$ przekroj skonczonej liczby elementow z $T$ jest elementem $T$.

   **Podstawa indukcji:** dla n = 2, mamy $\bigcap_{i=1}^{2} A_i$, gdzie $A_i \in T$, $A_i$ sa dowolnymi zbiorami nalezacymi do $T$. Poniewaz $T$ jest topologia na $X$ wiec z definicji, przekroj dowolnych dwoch zbiorow nalezacych do $T$, nalezy do $T$, zatem $\bigcap_{i=1}^{2} A_i \in T$.

   **Krok indukcyjny:** Ustalmy teraz dowolne $n \in \mathbb{N}$ i zalozmy, ze $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in T$. Pokaze ze dla $n+1$ teza zachodzi. Oznaczmy sobie $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Dla $n+1$ mamy:

   $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1} = \text{ zal. ind. } = B \cap A_{n+1}$ Poniewaz $B \in T$ oraz $A_{n+1} \in T$ wiec z definicji topologi, $B \cap A_{n+1} \in T$

   Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej, dla przestrzeni topologicznej $(X, T)$ przekroj skonczonej liczby elementow z $T$ jest elementem $T$.

5. Niech $\mathbb{R}$ bedzie zbiorem liczb rzeczywistych. Udowodnij ze kazdy z nastepujacych kolekcji podzbiorow $\mathbb{R}$ jest topologia.

   (a) $T_1$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-n, n)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $(-n, n)$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : -n < x < n\}$

   (b) $T_2$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-n, n]$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[-n, n]$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}$

(c) $T_3$ zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[n, \infty)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[n, \infty)$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : n \leq x\}$

**Odpowiedz:**

Trzeba kazdy podpunkt sprawdzic z definicji topologii, czyli w kazdym podpunkcie sprawdzic czy (a') $X$ oraz $\emptyset$ naleza do $T$, (b') zamknietosc na sume teoriomnogosciowa skonczona lub nie i (c') zamknietosc na przekroj(skonczony)

**dla $T_1$ mamy:**

(a') Z opisu $T_1$ mamy, ze $\mathbb{R} \in T_1$ oraz $\emptyset \in T_1$

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ gdzie $A_\alpha \in T_1$ oraz $A$ jest pewnym zbiorem indeksowym, bedzie dowolna suma(skonczona badz nie) zbiorow. Rozwazmy przypadki:

- $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$.
  Wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathbb{R} \in T_1$
- $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla kazdego $\alpha \in A$.
  Wtedy mamy przypadki:
  - $U_\alpha = \emptyset$ dla kazdego $\alpha \in A$.
    Wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset \in T_1$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbior
    $$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in A\}$$
    jest ograniczony z gory.
    Wtedy, z tego ze zbior $B$ jest ograniczony z gory i zawiera liczby naturalne, wiemy ze istnieje najmniejsza liczba naturalna $m$, ktora ogranicza ten zbior z gory. Wezmy zatem liczbe $m$. Zauwazmy, ze $m$ jest jednoczesnie maximum zbioru B. Z definicji zbioru $T_1$ mamy, ze $(-m, m) \in T_1$ oraz z tego, ze $B$ jest ograniczony z gory, wnioskujemy
    $$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = (-m, m) \in T_1$$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbior
    $$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in A\}$$
    jest nieograniczony z gory.
    Wtedy, mam sprzecznosc, bo zalozylismy, ze $\mathbb{R} \notin T_1$, z drugiej strony zbior $B$ jest nieograniczony, a
    $$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}$$
    Zatem ten podpunkt odpada.

  Sprawdzilismy zatem wszystkie mozliwosci i otrzymalismy, ze zbior $T_1$ jest zamkniety na sume(skonczona badz nie)

(c') Wezmy dwa dowolne zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$. Pokazemy, ze $B \cap C \in T_1$
Rozwazmy przypadk:

- $B \vee C = \emptyset$
  Wtedy: $B \cap C = \emptyset \in T_1$
- $B \wedge C \neq \emptyset$ Wtedy mamy przypadki:
  - $B \wedge C = \mathbb{R}$
    Wtedy $B \cap C = \mathbb{R} \in T_1$
  - $B \vee C \neq \mathbb{R}$
    Wtedy ktorys ze zbiorow(byc moze oba) jest postaci $(-m, m)$ dla $m \in \mathbb{N}$. Jesli $B = \mathbb{R}$ i $C = (-m, m), m \in \mathbb{N}$ to $B \cap C = (-m, m) \in T_1$. Drugi przypadek to gdy oba sa postaci prostej, czyli $B = (-m, m)$ oraz $C = (-n, n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$. Wtedy niech $k = min(m, n)$, mamy $B \cap C = (-k, k) \in T_1$

Zatem $T_1$ zamkniete na przekroj.

$T_1$ jest zatem topologia. c.b.d.u.

**dla $T_2$ mamy:**

Dowod bedzie analogiczny do tego z $T_1$. Postaram sie go bardziej ladnie zrobic.

(a') Z opisu $T_2$ wnioskujemy, ze $\mathbb{R} \in T_2$ oraz $\emptyset \in T_2$.

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz $A$ jest pewnym zbiorem indeksowym. Rozwazmy przypadki:

- $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$. Wtedy:
  $U = \mathbb{R} \in T_2$
- $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla kazdego $\alpha \in A$ Wtedy:
  Rozwazmy przypadki:
  - $U_\alpha = \emptyset$ dla kazdego $\alpha \in A$ Wtedy:
    $U = \emptyset \in T_2$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha$ Wtedy:
    Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

    $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = [-x, x])$$

    oraz zbior

    $$B = \{n : P(n) \land n \in \mathbb{N}\}$$

    jako zbior indeksow $n$ dla ktorych istnieje $\alpha \in A$ taka ze $U_\alpha = [-n, n]$.
    Nastepnie rozwazmy dwa przypadki:
    I. Zbior $B$ jest ogranioczony z gory. Wtedy z tego, ze $B$ jest ograniczony oraz $B$ zawiera tylko liczby naturalne, wnioskujemy, ze istnieje w $B$ maximum. Niech $m = max(B)$. Wtedy $U = [-m, m] \in T_2$

    II. Zbior $B$ jest nieograniczony z gory. Wtedy $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbb{R}$, lecz zalozylismy, ze $U \neq \mathbb{R}$. Zatem sprzecznosc, wiec ten przypadek nam odpada.

  Zatem $T_2$ jest zamkniety na sume.

(c') Wezmy dowolne dwa zbiory $B \in T_2$ oraz $C \in T_2$. Wtedy:
Rozwazmy przypadki:

- $B = \mathbb{R} \land C = \mathbb{R}$. Wtedy:
  $B \cap C = \mathbb{R} \in T_2$.
- WLOG zalozmy, ze $B \neq \mathbb{R}$. Wtedy:
  Rozwazmy przypadki:
  - $B = \emptyset$. Wtedy bezwzgledu na $C$:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$
  - $B = [-n, n]$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:
    I. Jesli $C = \emptyset$ to:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$.

    II. Jesli $C = [-m, m]$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, Wtedy:
    Niech $k = min(m, n)$, mamy $B \cap C = [-k, k] \in T_2$

  Zatem $T_2$ jest zamkniete na skonczone przekroje.

Podsumowujac, sprawdzilismy z definicji topologii i otrzymalismy ze $T_2$ jest topologia. c.b.d.u.

**dla $T_3$ mamy:**

(a') Z opisu $T_3$ mamy, ze $\mathbb{R} \in T_3$ oraz $\emptyset \in T_3$

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz $A$ jest pewnym zbiorem indeksowym.
Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

$$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = [x, \infty])$$

oraz zbior

$$B = \left\{n : P(n) \land n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

$B$ to zbior wszystkich indeksow $n$ dla ktorych $U_\alpha = [n, \infty]$. Poniewaz zbior ten zawiera tylko liczby naturalne, wiec ma minimum. Niech $m = min(B)$. Wtedy $U = [m, \infty] \in T_3$. Zatem $T_3$ jest zamkniety na sume.

(c') Wezmy sobie dowolne zbiory $B \in T_3$ oraz $C \in T_3$. Niech $b = min(B)$ oraz $c = min(C)$. Wtedy $B \cap C = [min(b, c), \infty] \in T_3$ bo $min(b, c) \in \mathbb{N}$. Zatem $T_3$ jest zamkniety na przekroj.
Podsumowujac, rozwazylismy wszystkie mozliwosci i otrzymalsmy, ze $T_3$ jest topologia.

6. Niech $\mathbb{N}$ bedzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich. Udowodnij ze kazda z nastepujacych kolekcji(w ramkach) podzbiorow $\mathbb{N}$ jest topologia.

Definicja: **Initial segment topology**; poki co brak polskiego tlumaczenia

$T_1$ zawiera $\mathbb{N}$ oraz $\emptyset$ oraz kazdy zbior $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dla dowolnego $n$ naturalnego dodatniego.

**Dowod:**

- Z opisu mamy, ze $\emptyset \in T_1$ oraz $\mathbb{N} \in T_1$
- Niech $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ dla pewnego zbioru indeksowego $A$ i $U_\alpha \in T_1$. Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

  $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = \{1, 2, 3, \ldots, x\}$$

  oraz zbior

  $$B = \{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\}$$

  Rozwazmy przypadki:

  - Zbior $B$ jest ogranioczony z gory.
    Poniewaz $B$ zawiera liczby naturalne dodatnie i jest ograniczony z gory wiec zawiera maximum. Niech $m = max(B)$. Zatem dla pewnego $\alpha, U_\alpha = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wtedy $U = \{1, 2, \ldots, m\} \in T_1$.
  - Zbior $B$ jest nieograniczony z gory.
    Poniewaz zbior $B$ zawiera liczby naturalne dodatnie(od 1 wzwyz) i nie jest ograniczony z gory, wiec $B = \mathbb{N}$. Zatem dla dowolnej $\alpha \in A$ istnieje $\alpha' \in A$ taka ze, $U_\alpha \subset U_{\alpha'}$. Zatem $U = \mathbb{N}$.

  Zatem $T_1$ jest zamkniety na sume.
- Wezmy dowolne dwa zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$
  Rozwazmy przypadki:
  - $B = C = \mathbb{N}$. Wtedy:
    $B \cap C = \mathbb{N} \in T_1$
  - WLOG $B \neq \mathbb{N}$. Wtedy:
    Rozwazmy przypadki:
    * $B = \emptyset$ Wtedy:
      Bezwzgledu na $C$. $B \cap C = \emptyset \in T_1$
    * $B \neq \emptyset$, czyli $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ to:
      Jesli $C = \emptyset$, to $B \cap C = \emptyset \in T_1$.
      Jesli $C = \{1, 2, \ldots, m\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, to $B \cap C = \{1, 2, \ldots, min(n, m)\} \in T_1$

  Zatem $T_1$ jest zamkniety na przekroj.
  Zatem $T_1$ to topologia.

Definicja:**Final segment topology**; poki co brak polskiego tlumaczenia

$T_2$ zawiera $\mathbb{N}$ oraz $\emptyset$ oraz kazdy zbior $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$, dla dowolnego $n$ naturalnego dodatniego.

**Dowod:**

- Z opisu mamy, ze $\emptyset \in T_2$ oraz $\mathbb{N} \in T_2$
- Niech $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $A$ jest pewnym zbiorem indeksowym oraz $U_\alpha \in T_2$. Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

  $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = \{x, x+1, x+2, \ldots\}$$

  oraz zbior

  $$B = \{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\}$$

  Niech $m = min(B)$. Wtedy dla kazdego $\alpha \in A, U_\alpha \subset \{m, m+1, \ldots\}$ oraz $U = \{m, m+1, \ldots\} \in T_2$.
  Zatem $T_2$ jest zamkniety na sume.
- Wezmy dowolne $B \in T_2$ oraz $C \in T_2$.
  Rozwazmy przypadki:
  - $B = \emptyset \vee C = \emptyset$. Wtedy:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$
  - $B = \mathbb{N} \wedge C = \mathbb{N}$. Wtedy:
    $B \cap C = \mathbb{N} \in T_2$

– Zaden z nich nie jest pusty oraz oba nie sa zbiorem $\mathbb{N}$. Wtedy:
Jesli $B = \{m, m+1, \dots\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $C = \{n, n+1, \dots\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $B \cap C = \{max(m,n), max(m,$
$T_2$

Jesli WLOG $B = \{m, m+1, \dots\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $C = \mathbb{N}$ to $B \cap C = \{m, m+1, \dots\} \in T_2$

Zatem $T_2$ jest zamkniete na przekroj

Zatem $T_2$ to topologia. c.b.d.u.

7. Wypisz wszystkie mozliwe topologie na ponizszych zbiorach:

(a) $X = \{a, b\}$

**Odpowiedz:**

Sa takie 4 topologie:

$$T_1 = \{X, \emptyset\}$$
$$T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$
$$T_3 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$$
$$T_4 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

(b) $X = \{a, b, c\}$

**Odpowiedz:**

Jest takich 29 topologii:TODO PRZEPISAC Z KARTKI JE TUTAJ

TODO NAPISZ DOWOD ZE JEST ICH 29, NA WIKI SPRAWDZ: TOPOLOGIES ON SET WITH 3 ELEMENTS

$$T_1 = \{X, \emptyset\}$$
$$T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \}$$
$$T_3 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$
$$T_4 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$$
$$T_5 = \{X, \emptyset, \{c\}\}$$
$$T_6 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$$
$$T_7 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$$
$$T_8 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$$
$$T_9 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, a\}\}$$
$$T_{10} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{c, a\}\}$$
$$T_{11} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{c, b\}\}$$
$$T_{12} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$$
$$T_{13} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\}$$
$$T_{14} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b, c\}\}$$

8. Udowodnij ponizszy lemat.

**Lemat: Topologia dyskretna i podzbiory nieskonczone**

Niech $X$ bedzie zbiorem niesoknczonym oraz $T$ topologia na $X$. Jezeli kazdy nieskonczony podzbior $X$ nalezy do $T$, to $T$ jest topologia dyskretna.

**Dowod:**

Zgodnie z ktoryms tam lematem(latwy dowod), jesli $T$ zawiera $\{x\}$ gdzie $x \in X$ jest dowolnym elementem $X$, to $T$ jest topologia dyskretna.

Zatem wezmy dowolny element $x \in X$. Skoro $X$ jest nieskonczonym zbiorem i kazdy nieskonczony podzbior $X$ jest w $T$, to oznacza, ze mozemy sobie wybrac z $X$, nieskonczony ciag roznowartosciowy, w ktorym nie ma elementu $x$.

Jak? Na przyklad tak:

$$\begin{cases} a_1 = \begin{cases} 1 \text{ jesli } x \neq 1 \\ 0 \text{ jesli } x = 1 \end{cases} \\ a_n = min\{y : y \in X \wedge y \neq x \wedge (\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\})(a_i \neq y)\} \end{cases}$$

Nastepnie rozwazmy dwa nieskonczone zbiory:

$$A = \{a_n : n = 2 \times k \wedge k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\}$$

oraz

$$B = \{a_n : n = 2 \times k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\}$$

Wtedy oczywiscie $A \in T$ oraz $B \in T$ oraz $A \cap B = \{x\} \in T$

Z dowolnosci $x$, wnioskujemy, ze $T$ zawiera dowolny singleton $\{x\}$ taki ze, $x \in X$. Zatem $T$ jest topologia dyskretna. c.b.d.u.

9. Wskaz i udowodnij, ktore z ponizszych zbior liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ sa topologiami.

$T_1$ : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(a, b)$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$;

**Nie:**

Wezmy sobie zbior $A = \{1, 2\}$ oraz $B = \{4, 5\}$. Oczywiscie $A \in T_1$ oraz $B \in T_1$, ale suma $A \cup B = \{1, 2\} \cup \{4, 5\} \notin T_1$

$T_2$ : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

**Tak:**

- Z definicjie $\mathbb{R} \in T_2$ oraz $\emptyset \in T_2$
- Wezmy dowolna $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz $A$ jest pewnym zbiorem indeksowym. Wtedy jesli pewien $U_\alpha = \mathbb{R}$ to $U = \mathbb{R} \in T_2$. W przeciwnym przypadku, jesli kazdy $U_\alpha = \emptyset$ to $U = \emptyset \in T_2$. W przeciwnym przypadku, jesli nie kazdy $U_\alpha = \emptyset$ wtedy rozwazmy przypadki: jesli zbior indeksow $r$, dla ktorych $U_\alpha = (-r, r)$, jest ograniczony, to wiemy, ze istnieje indeks $q \in \mathbb{R}$, taki ze $(\forall \alpha in A)(U_\alpha \subseteq (-q, q))$ oraz $(-q, q) \in T_2$. Z drugiej strony jesli zbior indeksow $r$, dla ktorych $U_\alpha = (-r, r)$, jest nieograniczony, to $U = \mathbb{R} \in T_2$.
- Wezmy dowolne dwa zbiory $A \in T_2$ oraz $B \in T_2$. Wtedy jesli ktorys z nich jest $\emptyset$ to $A \cap B = \emptyset$. Jesli zaden z nich nie jest $\emptyset$, to albo oba sa $\mathbb{R}$, wtedy $A \cap B = \mathbb{R} \in T_2$ albo ktorys z nich nie jest $\mathbb{R}$. Wtedy albo jeden z nich jest postaci $(-r, r)$ albo oba sa tej postaci, $(-r, r), (-q, q)$. W kazdym przypadku zauwazamy, ze $A \cap B = (-r, r) \in T_2$ lub $A \cap B = (-min(r, q), min(r, q)) \in T_2$

$T_3$ : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{Q}^+$;

**Odpowiedz:**

Nie. Rozwazmy ciag liczb wymiernych $r_n$ dazacy do liczby niewymiernej $r$. Dodatkowo rozwazmy nieskonczona sume zbiorow $\bigcup_{i=1}^{\infty}(-r_n, r_n)$. Wtedy przy $n \to \infty, (-r_n, r_n) \to (-r, r)$. Kazdy zbior z $\bigcup_{i=1}^{infty}(-r_n, r_n)$ jest w $T_3$ ale $(-r, r)$ juz nie jest.

$T_4$ : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{Q}^+$;

**Odpowiedz:**

Nie. Rozwazmy ciag liczb wymiernych $r_n$ dazacy do liczby wymiernej $r$. Dodatkowo rozwazmy nieskonczona sume zbiorow $\bigcup_{i=1}^{\infty}[-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}]$. Wtedy przy $n \to \infty, [-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}] \to (-r, r)$. Kazdy zbior z sumy $\bigcup_{i=1}^{\infty}[-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}]$ jest w $T_4$, ale $(-r, r)$ juz nie jest.

$T_5$ : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;

**Odpowiedz:**

Nie. Rozwazmy ciag liczb niewymiernych dazacy do liczby wymiernej. Niech $r_n$ bedzie ciagiem liczb wymiernych dazacym do $\sqrt{2}$. Nastepnie rozwazmy ciag $g_n = 2 + \sqrt{2} - r_n$. Wtedy $\bigcup_{i=1}^{\infty}(-g_n, g_n)$ dazy do $(-2, 2)$ przy $n \to \infty$. Argumentacja podobna jak w przykladzie 4.

$T_6$ : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;

**Odpowiedz:**

Nie. Rozwazmy ciag liczb niewymiernych dazacy do liczby wymiernej $g_n$. Rozwazmy nieskonczona sume $\bigcup_{i=1}^{\infty}[-g_n + \frac{1}{n}, g_n - \frac{1}{n}]$. Suma ta dazy do $[-g, g]$, gdzie $g$ jest liczba wymierna.

$T_7$ : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

**Odpowiedz:**

Nie. Przyklad z podpunktu 4 tutaj zadziala.

$T_8$ : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

**Odpowiedz:** Nie. Przyklad z podpunktu 4 takza tutaj zadziala.

$T_9$ : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$, kazdy przedzial $[-r, r]$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

**Odowiedz:**

Tak. Mozna tu zrobic dowod w stylu tych poprzednich- czyli przeanalizowac wszystkie przypadki, ale poczekam na cos lepszego. Zostanie to tutaj uzupelnione.

$T_{10}$ : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$, kazdy przedzial $[-n, n]$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $n \in \mathbb{N}^+$ oraz $r \in \mathbb{R}^+$;

**Odpowiedz:**

Tak. Mozna tu zrobic dowod w stylu tych poprzednich- czyli przeanalizowac wszystkie przypadki, ale poczekam na cos lepszego. Zostanie to tutaj uzupelnione.

## 1.2 Zbiory otwarte: definicje, lematy, zadania i rozwiazania

**1.2.1 Definicja: Zbior otwarty- open set**

Niech $(X,T)$ bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy elementy $T$ nazywaja sie **zbiory otwarte.**

**1.2.2 Lemat: Przestrzen topologiczna i zbiory otwarte**

Niech $(X,T)$ bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- $X$ oraz $\emptyset$ sa zbiorami otwartymi.
- suma(skonczona lub nie) zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym
- przekroj skonczony zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym

**Dowod:** Wynika to wprost z definicji. Podpunkt trzeci wynika z zadania 4.

**1.2.3 Definicja: Zbior domkniety- closed set**

Niech $(X,T)$ bedzie przestrzenia topologiczna. Podzbior $S$ zbioru $X$ jest **zbiorem domknietym** w $(X,T)$ jesli jego dopelnienie w $X$, $X\setminus S$, jest zbiorem otwartym w $(X,T)$

**Komentarz**

Czyli mowimy, ze $S$, bedace podzbiorem $X$, jest zbiorem domknietym w $(X,T)$ jesli jego dopelnienie w $X$, czyli $X\setminus S$ jest otwarte, czli jesli $X\setminus S\in T$

Zauwazmy, ze jesli $(X,T)$ jest przestrzenia dyskretna, wtedy kazdy podzbior $X$ jest zbiorem domknietym. Jednakze w przestrzeni niedyskretnej, $(X,T)$, jedynymi zbiorami domknietymi sa $X$ oraz $\emptyset$

**1.2.5 Lemat: Przestrzen topologiczna i zbiory domkniete**

Niech $(X,T)$ bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- $\emptyset$ oraz $X$ sa zbiorami domknietymi
- przekroj skonczonej lub nieskonczonej liczby zbiorow domknietych jest zbiorem domknietym
- suma skonczonej liczby zbiorow zamknietych jest zbiorem domknietym

**Komentarz:**
Mozna tu dostrzec pewna analogie pomiedzy przestrzenia topologiczna i zbiorami otwartymi
**Dowod:**
TODO

---

**Cwiczenie 1.2:**

1. Wypisz wszystkie 64 podzbiory zbioru $X=\{a,b,c,d,e,f\}$. Obok kazdego zbioru wypisz czy jest
   - clopen (czyli otwarty i domkniety)
   - ani domkniety ani otwarty
   - otwarty ale nie domkniety
   - domkniety ale nie otwarty

   dla topologii $T$ zadanej na $X$, takiej, ze:

   $$T=\{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$$

   **Odpowiedz:**

   1. $\emptyset$: jest clopen, bo jest otwarty czyli nalezy do $T$ oraz domkniety bo jego dopelnienie, czyli $X$ nalezy do $T$.
   2. $\{a\}$: jest clopen, bo jest otwarty czyli nalezy do $T$ oraz domkniety bo jesgo dopelnienie $\{b,c,d,e,f\}$ nalezy do $T$.
   3. $\{b\}$: nie jest otwarty bo nie nalezy do $T$ oraz nie jest domkniety, bo jego domkniecie tez nie nalezy do $T$
   4. $\{c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
   5. $\{d\}$: nie jest otwarty ani domkniety

6. $\{e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
7. $\{f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
8. $\{a, b\}$: nie jest otwarty ani domkniety
9. $\{a, c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
10. $\{a, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
11. $\{a, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
12. $\{a, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
13. $\{b, c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
14. $\{b, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
15. $\{b, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
16. $\{b, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
17. $\{c, d\}$: jest otwarty bo nalezy do $T$, ale nie jest domkniety bo jego dopasowanie $\{a, b, e, f\}$ nie nalezy do $T$
18. $\{c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
19. $\{c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
20. $\{d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
21. $\{d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
22. $\{e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
23. $\{a, b, c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
24. $\{a, b, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
25. $\{a, b, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
26. $\{a, b, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
27. $\{a, c, d\}$: jest otwarty bo nalezy do $T$, ale nie jest domkniety bo jego dopelnienie $\{b, e, f\}$ nie nalezy do $T$
28. $\{a, c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
29. $\{a, c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
30. $\{a, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
31. $\{a, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
32. $\{a, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
33. $\{b, c, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
34. $\{b, c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
35. $\{b, c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
36. $\{b, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
37. $\{b, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
38. $\{b, e, f\}$: nie jest otwary, bo nie nalezy do $T$, ale jest domkniety bo jego dopelnienie, czyli $\{a, c, d\}$ nalezy do $T$.
39. $\{c, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
40. $\{c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
41. $\{c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
42. $\{d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
43. $\{a, b, c, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
44. $\{a, b, c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
45. $\{a, b, c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
46. $\{a, b, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
47. $\{a, b, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
48. $\{a, b, e, f\}$: nie jest otwarty bo nie nalezy do $T$, ale jest domkniety bo jego dopelnienie czyli $c, d$ nalezy do $T$
49. $\{a, c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
50. $\{a, c, d.e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
51. $\{a, c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
52. $\{a, c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
53. $\{a, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety

54. $\{b, c, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
55. $\{b, c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
56. $\{b, c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
57. $\{b, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
58. $\{c, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
59. $\{a, b, c, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
60. $\{a, b, c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
61. $\{a, b, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
62. $\{a, c, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
63. $\{b, c, d, e, f\}$: jest clopen, bo nalezy do $T$ oraz jest domkniety bo jego dopelnienie $\{a\}$ nalezy do $T$
64. $\{a, b, c, d, e, f\}$: jest clopen, nalezy do $T$ oraz jest domkniety bo jego dopelnienie czyli $\emptyset$ nalezy do $T$

2. Niech $(X, T)$ bedzie przestrzenia topologiczna z wlasnoscia taka, ze kazdy podzbior jest domkniety(closed). Udowodnij ze jest to przestrzen dyskretna.

3. Pokaz ze jesli $(X, T)$ jest przestrzenia dyskretna lub przestrzenia nie dyskretna, wtedy kazdy otwarty(open) zbior jest clopen zbiorem. Znajdz topologia $T$ na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$, ktora nie jest dyskretna oraz nie jest nie dyskretna ale ma wlasnosc taka, ze kazdy zbior otwarty(open) jest clopen.

   **Odpowiedz:**

   Zalozmy, ze $(X, T)$ jest przestrzenia topologiczna taka, ze kazdy jej podzbior jest domkniety. Skoro kazdy podzbior jest domkniety, to kazdy podzbior jest otwarty. Czyli kazdy podzbior $X$ nalezy do $T$. Zatem $(X, T)$ jest przestrzenia dyskretna.

4. Niech $X$ bedzie zbiorem nieskonczonym. Jesli $T$ jest topologia na $X$ taka ze kazdy nieskonczony podzbior $X$ jest domkniety(closed), udowodnij ze $T$ jest topologia dyskretna.

5. Niech $X$ bedzie nieskonczonym zbiorem oraz $T$ topologia na $X$ z wlasnoscia taka, ze jedynym nieskonczonym podzbiorem $X$, ktory jest otwarty jest $X$. Czy $(X, T)$ musi byc przestrzenia niedyskretna?

6. Niech $T$ bedzie topologia na zbiorze $X$ taka, ze ma tylko 4 zbiory; dokladnie, $T = \{X, \emptyset, A, B\}$ gdzie $A$ i $B$ to niepuste rozlaczne, podzbiory **wlasciwe**(czyli nie moga byc rowne $X$) $X$.

   Udowodnij ze $A$ i $B$ spelniaja tylko jeden z wymienionych kryteriow:

   - $B = X \setminus A$;
   - $A \subset B$;
   - $B \subset A$.

   Korzystajac z powyzszego zadania, wypisz wszystkie topolobia na $X = \{1, 2, 3, 4\}$ zawierajace dokladnie 4 zbiory.

7. - Uzywajac indukcji, udowodnij ze wraz ze wzrostem $n$, gdzie n to liczba elementow zbioru $X$, liczba topologii na zbiorze $X$ wzrasta.
   - Uzywajac indukcji udowonij ze jesli skonczony zbior $X$ ma $n \in \mathbb{N}$ punktow, to ma conajmniej $(n-1)!$ roznych topologii.
   - Jesli zbior $X$ jest dowolnym nieskonczonym zbiorem o mocy(cardinality) $\aleph$, czyli jest przeliczalny. Udowodnij, ze jest conajmniej $2^{\aleph}$ roznych topologii na $X$. Wywnioskuj ze kazdy nieskonczony zbior ma nieprzeliczlanie duzoe roznych topologii na sobie.

## 1.3 Skonczenie-domknieta topologia(ang. The Finite-Closed Topology): definicje lematy, zadania i rozwiazania.

Do tej pory definiowalismy topologie poprzez okreslanie ktore zbiory sa otwarte. Czasami jest bardziej naturalnie opisac topologie poprzez okreslenie ktore zbiory sa domkniete.

**1.3.1 Definicja: Skonczenie domknieta topologia(finite-closed topology(cofinite topology))**

Niech $X$ bedzie nie pustym zbiorem. Mowimy ze topologia $T$ na $X$ jest **skonczenie-domknieta topologia lub koskonczona topologia**(ang. finite-closed topology or cofinite topology) jesli domknietymi podzbiorami $X$ sa $X$ oraz wszystkie skonczone podzbiory $X$; czyli otwartymi zbiorami sa $\emptyset$ oraz wszystkie podzbiory $X$, ktore maja skonczone dopelnienia.
Inaczej:

$$T = \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ or } X \setminus A \text{ jest skonczony}\}$$

**Dowod, ze T z tej definicji jest rzeczywiscie topologia** TODO

**Komentarz:**

Zauwazmy, ze definicja 1.3.1 nie mowi nam, ze kazda topologia ktora zawiera w sobie $X$ oraz domkniete skonczone podzbiory $X$ jest skonczenie-domknieta topologia. Chodzi o to, ze domknietymi zbiorami musza byc tylko skonczone podzbiory $X$. W skonczenie-wymiarowej topologi wszystkie skonczone zbiory sa domkniete. Jednakze ponizszy przyklad pokazuje ze nieskonczone podzbiory nie musza byc otwarte.

**1.3.2 Przyklad** Rozwazmy zbior $\mathbb{N}$. Wtedy zbiory $\{1\}, \{5, 6, 7\}, \{2, 4, 6, 8\}$ sa skonczone wiec sa domkniete w skonczenie-domknietej topologii. Zatem ich dopelnienia:

$$\{2, 3, 4, \ldots\}, \{1, 2, 3, 4, 8, 9, \ldots\}, \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

sa otwarte w skonczenie-domknietej topologii. Z drugiej strony, zbior parzystych liczb naturalnych nie jest domknietem zbiorem poniewaz nie jest skonczony wiec jego dopelnienie, zbior liczb nieparzystych nie jest zbiorem domknietym w skonczenie-wymiarowej topologii. Wiec wszystkie skonczone zbiory sa domkniete, ale nie wszystkie nieskonczone zbiory sa otwarte.

**1.3.3 Przyklad**

Niech $T$ bedzie skonczenie-wymiarowa topologia na zbiorze $X$. Jesli $X$ ma przynajmniej 3 rozne clopen podzzbiory, udowodnij ze $X$ jest skonczonym zbiorem.