Moje notatki na bazie skryptu topology without tears

Lukasz Kopyto

February 16, 2024

1 Przestrzenie topologiczne

1.1 Definicje, lematy, zadania i rozwiazania

1.1.1 Definicja: Topologia

Niech X bedzie niepustym zbiorem. Mowimy, ze zbior T zawierajacy podzbiory X jest topologia na X jesli:

- X oraz zbior pusty $\emptyset$, naleza do T,
- suma skonczona badz nie zbiorow z T nalezy do T, inaczej T jest zamkniety na sume, i ta suma moze byc nieskonczona
- przekroj dowolnych dwoch zbiorow z T nalezy do T, inaczej T jest zamkniety na przekroj, ale przekroj skonczony

Para (X, T) nazywamy **przestrzenia topologiczna.**

1.1.6 Definicja: Topologia dyskretna(discrete topology)

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz T kolekcja wszystkich podzbiorow X. Wtedy mowimy, ze T jest **topologia dyskretna** na zbiorze X. Przestrzen topologiczna (X, T) jest nazywana **przestrzenia dyskretna**

1.1.7 Definicja: Topologia niedyskretne(indiscrete topology)

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz $T = \{X, \emptyset\}$. Wtedy mowimy, ze T jest **topologia niedyskretna** oraz (X, T) jest **przestrzenia niedyskretna**

1.1.9 Lemat: Topologia dyskretna i singletony

Jezeli (X, T) jest przestrzenia topologiczna, taka ze, dla kazdego $x \in X$, singleton x, $\{x\}$ jest w X, to X jest topologia dyskretna.

Dowod:
Wystarcz sprawdzic prawdziwosc trzech warunkow, z definicji 1.1.1.

1. Z definicji T jest topologia, wiec zawiera X oraz $\emptyset$.
2. Niech S bedzie suma skonczona lub nie dowolnej liczby zbiorow z T. Poniewaz mozemy zapisac S jako $S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$, a kazdy singleton $\{x\} \in X$, wnioskujemy stad, ze $S \in T$
3. Analogicznie dowodzimy, ze przekroj dowolnych dwoch zbiorow z T nalezy do T

Cwiczenia 1.1

1. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ustal czy podane kolekcje podzbiorow X sa topologia na X

   (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$
   (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$
   (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$

   Odpowiedz:

   (a) Jest topologia.
   (b) Nie jest, bo $\{a, b, f\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\} \notin T_2$
   (c) Nie jest, bo $\{e, f\} \cup \{a, f\} = \{a, e, f\} \notin T_3$

2. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Wskaz i uzasadnij ktore kolekcje podzbiorow X sa topologia na X

   (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$
   (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$
   (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$

   Odpowiedz:

   (a) Nie, bo $\{c\} \cup \{b\} = \{b, c\} \notin T_1$
   (b) Nie, bo $\{b, d, e\} \cap \{a, b, d\} = \{b, d\} \notin T_2$
   (c) Jest topologia.

3. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ oraz T bedzie topologia dyskretna na X, ktore z ponizszych podpunktow sa prawdziwe?

   (a) $X \in T$- Prawda

   (b) $\{X\} \in T$- Falsz

   (c) $\{\emptyset\} \in T$- Falsz

   (d) $\emptyset \in T$- Prawda

   (e) $\emptyset \in X$- Falsz

   (f) $\{\emptyset\} \in X$- Falsz

   (g) $\{a\} \in T$- Prawda

   (h) $a \in T$- Falsz

   (i) $\emptyset \subseteq X$- Prawda

   (j) $\{a\} \in X$- Falsz

   (k) $\{\emptyset\} \subseteq X$- Falsz

   (l) $a \in X$- Prawda

   (m) $X \subseteq T$- Falsz

   (n) $\{a\} \subseteq T$- Falsz

   (o) $\{X\} \subseteq T$- Prawda

   (p) $a \subseteq T$- Falsz

4. Niech (X, T) bedzie dowolna przestrzenia topologiczna. Udowodnij, ze **przekroj skonczonej liczby(dowolnej) elementow z T jest elementem T**

   Odpowiedz:

   Udowodnimy to przez indukcje wzgledem liczby elementow przekroju.

   Teza: Dla przestrzeni topologicznej (X, T) przekroj skonczonej liczby elementow z T jest elementem T.

   Podstawa indukcji: dla n = 2, mamy $\bigcap_{i=1}^{2} A_i$, gdzie $A_i \in T$, A_i sa dowolnymi zbiorami nalezacymi do T. Poniewaz T jest topologia na X wiec z definicji, przekroj dowolnych dwoch zbiorow nalezacych do T, nalezy do T, zatem $\bigcap_{i=1}^{2} A_i \in T$.

   Krok indukcyjny: Ustalmy teraz dowolne $n \in \mathbb{N}$ i zalozmy, ze $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in T$. Pokaze ze dla $n + 1$ teza zachodzi. Oznaczmy sobie $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Dla $n + 1$ mamy:

$\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1} =$ zal. ind. $= B \cap A_{n+1}$ Poniewaz $B \in T$ oraz $A_{n+1} \in T$ wiec z definicji topologi, $B \cap A_{n+1} \in T$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej, dla przestrzeni topologicznej (X, T) przekroj skonczonej liczby elementow z T jest elementem T.

5. Niech $\mathbb{R}$ bedzie zbiorem liczb rzeczywistych. Udowodnij ze kazdy z nastepujacych kolekcji podzbiorow $\mathbb{R}$ jest topologia.

   (a) T_1 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-n, n)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $(-n, n)$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : -n < x < n\}$

   (b) T_2 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-n, n]$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[-n, n]$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}$

   (c) T_3 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[n, \infty)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[n, \infty)$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : n \leq x\}$

   Odpowiedz:

   Trzeba kazdy podpunkt sprawdzic z definicji topologii, czyli w kazdym podpunkcie sprawdzic czy (a') X oraz $\emptyset$ naleza do T, (b') zamknietosc na sume teoriomnogosciowa skonczona lub nie i (c') zamknietosc na przekroj(skonczony)

   dla T_1 mamy:

   (a') Z opisu T_1 mamy, ze $\mathbb{R} \in T_1$ oraz $\emptyset \in T_1$

   (b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ gdzie $A_\alpha \in T_1$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym, bedzie dowolna suma(skonczona badz nie) zbiorow. Rozwazmy przypadki:

   - $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$.
     Wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathbb{R} \in T_1$
   - $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla kazdego $\alpha \in A$.
     Wtedy mamy przypadki:
     - $U_\alpha = \emptyset$ dla kazdego $\alpha \in A$.
       Wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset \in T_1$
     - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbior

       $$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \land n \in \mathbb{N} \land \alpha \in A\}$$

       jest ograniczony z gory.
       Wtedy, z tego ze zbior B jest ograniczony z gory i zawiera liczby naturalne, wiemy ze istnieje najmniejsza liczba naturalna m, ktora ogranicza ten zbior z gory. Wezmy zatem liczbe m. Zauwazmy, ze m jest jednoczesnie maximum zbioru

B. Z definicji zbioru T_1 mamy, ze $(-m, m) \in T_1$ oraz z tego, ze B jest ograniczony z gory, wnioskujemy

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = (-m, m) \in T_1$$

– $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbior

$$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in A\}$$

jest nieograniczony z gory.
Wtedy, mam sprzecznosc, bo zalozylismy, ze $\mathbb{R} \notin T_1$, z drugiej strony zbior B jest nieograniczony, a

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}$$

Zatem ten podpunkt odpada.

Sprawdzilismy zatem wszystkie mozliwosci i otrzymalismy, ze zbior T_1 jest zamkniety na sume(skonczona badz nie)

(c') Wezmy dwa dowolne zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$. Pokazemy, ze $B \cap C \in T_1$

Rozwazmy przypadk:

- $B \vee C = \emptyset$
  Wtedy: $B \cap C = \emptyset \in T_1$
- $B \wedge C \neq \emptyset$ Wtedy mamy przypadki:
  - $B \wedge C = \mathbb{R}$
    Wtedy $B \cap C = \mathbb{R} \in T_1$
  - $B \vee C \neq \mathbb{R}$
    Wtedy ktorys ze zbiorow(byc moze oba) jest postaci $(-m, m)$ dla $m \in \mathbb{N}$. Jesli $B = \mathbb{R}$ i $C = (-m, m), m \in \mathbb{N}$ to $B \cap C = (-m, m) \in T_1$. Drugi przypadek to gdy oba sa postaci prostej, czyli $B = (-m, m)$ oraz $C = (-n, n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$. Wtedy niech $k = min(m, n)$, mamy $B \cap C = (-k, k) \in T_1$

Zatem T_1 zamkniete na przekroj.

T_1 jest zatem topologia. c.b.d.u.

dla T_2 mamy: TODO

dla T_3 mamy: TODO

(a') Z opisu T_3 mamy, ze $\mathbb{R} \in T_3$ oraz $\emptyset \in T_3$

(b') cos dalej

1.2.1 Definicja: Zbior otwarty- open set

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy elementy T nazywaja sie **zbiory otwarte.**

1.2.2 Lemat: Przestrzen topologiczna i zbiory otwarte

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- X oraz $\emptyset$ sa zbiorami otwartymi.
- suma(skonczona lub nie) zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym
- przekroj skonczony zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym

Dowod: Wynika to wprost z definicji. Podpunkt trzeci wynika z zadania 4.

1.2.3 Definicja: Zbior zamkniety- closed set

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Podzbior S zbioru X jest **zbiorem zamknietym** w (X, T) jesli jego dopelnienie w X, $X \setminus S$, jest zbiorem otwartym w (X, T)

Komentarz

Czyli mowimy, ze S, bedace podzbiorem X, jest zbiorem zamknietym w (X, T) jesli jego dopelnienie w X, czyli $X \setminus S$ jest otwarte, czli jesli $X \setminus S \in T$

Zauwazmy, ze jesli (X, T) jest przestrzenia dyskretna, wtedy kazdy podzbior X jest zbiorem zamknietym. Jednakze w przestrzeni niedyskretnej, (X, T), jedynymi zbiorami zamknietymi sa X oraz $\emptyset$

1.2.5 Lemat: Przestrzen topologiczna i zbiory zamkniete

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- $\emptyset$ oraz X sa zbiorami zamknietymi
- przekroj skonczonej lub nieskonczonej liczby zbiorow zamknietych jest zbiorem zamknietym
- suma skonczonej liczby zbiorow zamknietych jest zbiorem zamknietym

Komentarz:

Mozna tu dostrzec pewna analogie pomiedzy przestrzenia topologiczna i zbiorami otwartymi

Dowod:

TODO