Topologia, notatki z wykladu.

Lukasz Kopyto

February 28, 2024

1 Wyklad nr 1. 20.02.2024

1.1 Metryka i przestrzen metryczna.

Metryka, czyli uogolnienie odleglosci. Chcemy mierzyc odleglosc miedzy elemenetami zbioru X, obojetnie czym on by nie byl. O elementach tego zbioru myslimy jak o punktach.

Definicja 1.1: Metryka

Funkcja $d : X \times X \to [0; \infty)$ jest metryka, jezeli

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $(\forall x, y)(d(x, y) = d(y, x))$
- $(\forall x, y, z)(d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z))$

Komentarz: Pierwsze dwa punkty definicji 1.1 sa oczywiste, chcemy aby odleglosc miedzy tymi samymi punktami byla zerowa oraz odleglosc miedzy x oraz y byla taka sama jak miedzy y oraz x. Rdzeniem definicji metryki, jest punkt 3 jej definicji, nierownosc trojkata. Mianowicie, jesli podczas naszej drogi, miedzy punktami x oraz z, chcemy odwiedzic dodatkowo punkt y, to naturalne jest, ze nasza droga moze sie wydluzyc.

Przyklady metryk: TODO

Definicja 1.2: Przestrzen metryczna

Niech X bedzie pewnym zbiorem oraz funkcja d bedaca metryka okreslona na tym zbiorze. Wtedy para (X, d) nazywamy przestrzen metryczna.

Komentarz: Intuicyjnie o powyzszej parze mozemy myslec jak o zbiorze wyposazonym w pewna strukture, podobnie zbior i czesciowy porzadek tworza zbior czesciowo uporzadkowany(poset- partially ordered set)

Definicja 1.3: Kula

Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. Kula o promineiu $r > 0$ i srodku $x \in X$ nazywamy zbior

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Przyklady kul w roznych metrykach: TODO

Definicja 1.4: Zbieznosc ciagu.

Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. Ciag elementow tej przestrzeni (x_n) jest zbiezny do x, jezeli:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(d(x_n, x) < \epsilon)$$

Definicja 1.5 Zbieznosc ciagu. Alternatywna definicja

Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. Ciag elementow tej przestrzeni (x_n) jest zbiezny, jesli **kazda kula o srodku w x zawiera prawie wszystkie wyrazy** (x_n)

Przyklady: TODO

Definicja 1.6 Zbior otwarty.

Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. Zbior $U \subset X$ jest otwarty, jezeli:

$$(\forall x \in U)(\exists r > 0)(B_r(x) \subseteq U)$$

Fakt 1.7: Zbior otwarty jest suma kul

Zbior U jest otwarty $\iff$ U jest suma kul. (Intuicja: zbior otwarty czyli przedzialy i ich sumy.)

Dowod: TODO
Komentarz:
Zbior jest otwarty jezeli dla dowolnego wyboru punktu z tego zbioru moge wybrac kule o srodku w tym punkcie.
Zbior pusty i cala przestrzen jest zawsze otwarta.
W przestrzeni dyskretnej kazdy zbior jest otwarty.

Fakt 1.8: Sumy i przekroje zbiorow otwartych.

- Suma dowolnie wielu zbiorow otwartych jest otwarta,
- Przekroj skonczenie wielu zbiorow otwartych jest otwarty.

Dowod: TODO

Definicja 1.9: Zbior domkniety.

Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. Zbior F jest domkniety, jezeli kazdy zbiezny ciag elementow F ma granice w F.

Fakt 1.10: Zbior domkniety kiedy

Zbior U jest otwarty $\iff$ U^c jest domkniety.

Dowod: TODO

2 Wyklad nr 2. 27.02.2024

TODO pojecia z wykladu do zrobienia:

- Wnetrze, Brzeg, Domkniecie
- Definicja ciaglosci w punkcie x
- Ciaglosc w sensie cauchy'eqo
- NWSR: f ciagla ¡-¿ dla kazdego x jesli x_n zbiega do x do $f(x_n)$ zbiega d0 $f(x)$ w sensie Heinego ¡-¿ przeciwobraz zbioru U jest owtarty dla kazdego U otwartego w Y
- homeomorfizm
- topologia
  - upgrade z przestrzeni metrycznej do topologicznej (X, T)

    $F \subseteq X$ domkniety jesli $F^c \in T$
  - $x_n \to x$ jezeli $\forall x \in U \exists N \forall n > N x_n \in U$
  - $Int A$ jest najwiekszy w sensie zawierania zbior otwarty w A
  - A z kreska na gorze najmniejszy domkniety zbior zawarty w A
  - f ciagla $f^{-1}[U]$ otwarty $\forall U otwarty$
- prosta sorgenfreya
- prosta hausdorffa