Moje notatki na bazie skryptu topology without tears

Lukasz Kopyto

March 9, 2024

1 Przestrzenie topologiczne

1.1 Topologia: definicje, lematy, zadania i rozwiazania

1.1.1 Definicja: Topologia

Niech X bedzie niepustym zbiorem. Mowimy, ze zbior T zawierajacy podzbiory X jest topologia na X jesli:

- X oraz zbior pusty $\emptyset$, naleza do T,
- suma skonczona badz nie zbiorow z T nalezy do T, inaczej T jest zamkniety na sume, i ta suma moze byc nieskonczona
- przekroj dowolnych dwoch zbiorow z T nalezy do T, inaczej T jest zamkniety na przekroj, ale przekroj skonczony

Para (X, T) nazywamy **przestrzenia topologiczna.**

1.1.6 Definicja: Topologia dyskretna(discrete topology)

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz T kolekcja wszystkich podzbiorow X. Wtedy mowimy, ze T jest **topologia dyskretna** na zbiorze X. Przestrzen topologiczna (X, T) jest nazywana **przestrzenia dyskretna**

1.1.7 Definicja: Topologia niedyskretne(indiscrete topology)

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz $T = \{X, \emptyset\}$. Wtedy mowimy, ze T jest **topologia niedyskretna** oraz (X, T) jest **przestrzenia niedyskretna**

1.1.9 Lemat: Topologia dyskretna i singletony

Jezeli (X, T) jest przestrzenia topologiczna, taka ze, dla kazdego $x \in X$, singleton x, $\{x\}$ jest w X, to X jest topologia dyskretna.

Dowod:
Wystarcz sprawdzic prawdziwosc trzech warunkow, z definicji 1.1.1.

1. Z definicji T jest topologia, wiec zawiera X oraz $\emptyset$.
2. Niech S bedzie suma skonczona lub nie dowolnej liczby zbiorow z T. Poniewaz mozemy zapisac S jako $S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$, a kazdy singleton $\{x\} \in X$, wnioskujemy stad, ze $S \in T$
3. Analogicznie dowodzimy, ze przekroj dowolnych dwoch zbiorow z T nalezy do T

Cwiczenia 1.1

1. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ustal czy podane kolekcje podzbiorow X sa topologia na X

   (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$
   (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$
   (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$

   Odpowiedz:

   (a) Jest topologia.

(b) Nie jest, bo $\{a,b,f\} \cap \{a,b,d\} = \{a,b\} \notin T_2$
(c) Nie jest, bo $\{e,f\} \cup \{a,f\} = \{a,e,f\} \notin T_3$

2. Niech $X = \{a,b,c,d,e,f\}$. Wskaz i uzasadnij ktore kolekcje podzbiorow X sa topologia na X

   (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b,d,e\}, \{b,c,d,e\}, \{b\}\}$
   (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b,d,e\}, \{a,b,d\}, \{a,b,d,e\}\}$
   (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a,b,c\}, \{d,e,f\}, \{b,d,e,f\}\}$

   Odpowiedz:

   (a) Nie, bo $\{c\} \cup \{b\} = \{b,c\} \notin T_1$
   (b) Nie, bo $\{b,d,e\} \cap \{a,b,d\} = \{b,d\} \notin T_2$
   (c) Jest topologia.

3. Niech $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ oraz T bedzie topologia dyskretna na X, ktore z ponizszych podpunktow sa prawdziwe?

   (a) $X \in T$- Prawda
   (b) $\{X\} \in T$- Falsz
   (c) $\{\emptyset\} \in T$- Falsz
   (d) $\emptyset \in T$- Prawda
   (e) $\emptyset \in X$- Falsz
   (f) $\{\emptyset\} \in X$- Falsz
   (g) $\{a\} \in T$- Prawda
   (h) $a \in T$- Falsz
   (i) $\emptyset \subseteq X$- Prawda
   (j) $\{a\} \in X$- Falsz
   (k) $\{\emptyset\} \subseteq X$- Falsz
   (l) $a \in X$- Prawda
   (m) $X \subseteq T$- Falsz
   (n) $\{a\} \subseteq T$- Falsz
   (o) $\{X\} \subseteq T$- Prawda
   (p) $a \subseteq T$- Falsz

4. Niech (X,T) bedzie dowolna przestrzenia topologiczna. Udowodnij, ze **przekroj skonczonej liczby(dowolnej) elementow z T jest elementem T**

   Odpowiedz:

   Udowodnimy to przez indukcje wzgledem liczby elementow przekroju.

   Teza: Dla przestrzeni topologicznej (X,T) przekroj skonczonej liczby elementow z T jest elementem T.

   Podstawa indukcji: dla n = 2, mamy $\bigcap_{i=1}^{2} A_i$, gdzie $A_i \in T$, A_i sa dowolnymi zbiorami nalezacymi do T. Poniewaz T jest topologia na X wiec z definicji, przekroj dowolnych dwoch zbiorow nalezacych do T, nalezy do T, zatem $\bigcap_{i=1}^{2} A_i \in T$.

   Krok indukcyjny: Ustalmy teraz dowolne $n \in \mathbb{N}$ i zalozmy, ze $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in T$. Pokaze ze dla $n+1$ teza zachodzi. Oznaczmy sobie $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Dla $n+1$ mamy:

   $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1} = \text{ zal. ind. } = B \cap A_{n+1}$ Poniewaz $B \in T$ oraz $A_{n+1} \in T$ wiec z definicji topologi, $B \cap A_{n+1} \in T$
   Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej, dla przestrzeni topologicznej (X,T) przekroj skonczonej liczby elementow z T jest elementem T.

5. Niech $\mathbb{R}$ bedzie zbiorem liczb rzeczywistych. Udowodnij ze kazdy z nastepujacych kolekcji podzbiorow $\mathbb{R}$ jest topologia.

   (a) T_1 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-n,n)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $(-n,n)$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : -n < x < n\}$
   (b) T_2 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-n,n]$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[-n,n]$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}$

(c) T_3 zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[n, \infty)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[n, \infty)$ oznacza zbior $\{x \in \mathbb{R} : n \leq x\}$

Odpowiedz:

Trzeba kazdy podpunkt sprawdzic z definicji topologii, czyli w kazdym podpunkcie sprawdzic czy (a') X oraz $\emptyset$ naleza do T, (b') zamknietosc na sume teoriomnogosciowa skonczona lub nie i (c') zamknietosc na przekroj(skonczony)

dla T_1 mamy:

(a') Z opisu T_1 mamy, ze $\mathbb{R} \in T_1$ oraz $\emptyset \in T_1$

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ gdzie $A_\alpha \in T_1$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym, bedzie dowolna suma(skonczona badz nie) zbiorow. Rozwazmy przypadki:

- $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$.
  Wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathbb{R} \in T_1$
- $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla kazdego $\alpha \in A$.
  Wtedy mamy przypadki:
  - $U_\alpha = \emptyset$ dla kazdego $\alpha \in A$.
    Wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset \in T_1$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbior
    $$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \land n \in \mathbb{N} \land \alpha \in A\}$$
    jest ograniczony z gory.
    Wtedy, z tego ze zbior B jest ograniczony z gory i zawiera liczby naturalne, wiemy ze istnieje najmniejsza liczba naturalna m, ktora ogranicza ten zbior z gory. Wezmy zatem liczbe m. Zauwazmy, ze m jest jednoczesnie maximum zbioru B. Z definicji zbioru T_1 mamy, ze $(-m, m) \in T_1$ oraz z tego, ze B jest ograniczony z gory, wnioskujemy
    $$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = (-m, m) \in T_1$$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbior
    $$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \land n \in \mathbb{N} \land \alpha \in A\}$$
    jest nieograniczony z gory.
    Wtedy, mam sprzecznosc, bo zalozylismy, ze $\mathbb{R} \notin T_1$, z drugiej strony zbior B jest nieograniczony, a
    $$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}$$
    Zatem ten podpunkt odpada.

  Sprawdzilismy zatem wszystkie mozliwosci i otrzymalismy, ze zbior T_1 jest zamkniety na sume(skonczona badz nie)

(c') Wezmy dwa dowolne zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$. Pokazemy, ze $B \cap C \in T_1$
Rozwazmy przypadk:

- $B \lor C = \emptyset$
  Wtedy: $B \cap C = \emptyset \in T_1$
- $B \land C \neq \emptyset$ Wtedy mamy przypadki:
  - $B \land C = \mathbb{R}$
    Wtedy $B \cap C = \mathbb{R} \in T_1$
  - $B \lor C \neq \mathbb{R}$
    Wtedy ktorys ze zbiorow(byc moze oba) jest postaci $(-m, m)$ dla $m \in \mathbb{N}$. Jesli $B = \mathbb{R}$ i $C = (-m, m), m \in \mathbb{N}$ to $B \cap C = (-m, m) \in T_1$. Drugi przypadek to gdy oba sa postaci prostej, czyli $B = (-m, m)$ oraz $C = (-n, n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$. Wtedy niech $k = min(m, n)$, mamy $B \cap C = (-k, k) \in T_1$

Zatem T_1 zamkniete na przekroj.

T_1 jest zatem topologia. c.b.d.u.

dla T_2 mamy:

Dowod bedzie analogiczny do tego z T_1. Postaram sie go bardziej ladnie zrobic.

(a') Z opisu T_2 wnioskujemy, ze $\mathbb{R} \in T_2$ oraz $\emptyset \in T_2$.

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym. Rozwazmy przypadki:

- $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$. Wtedy:
  $U = \mathbb{R} \in T_2$
- $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla kazdego $\alpha \in A$ Wtedy:
  Rozwazmy przypadki:
  - $U_\alpha = \emptyset$ dla kazdego $\alpha \in A$ Wtedy:
    $U = \emptyset \in T_2$
  - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego α Wtedy:
    Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

$$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = [-x, x])$$

oraz zbior

$$B = \{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

jako zbior indeksow n dla ktorych istnieje $\alpha \in A$ taka ze $U_\alpha = [-n, n]$.
Nastepnie rozwazmy dwa przypadki:
I. Zbior B jest ogranioczony z gory. Wtedy z tego, ze B jest ograniczony oraz B zawiera tylko liczby naturalne, wnioskujemy, ze istnieje w B maximum. Niech $m = max(B)$. Wtedy $U = [-m, m] \in T_2$

II. Zbior B jest nieograniczony z gory. Wtedy $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbb{R}$, lecz zalozylismy, ze $U \neq \mathbb{R}$. Zatem sprzecznosc, wiec ten przypadek nam odpada.

Zatem T_2 jest zamkniety na sume.

(c') Wezmy dowolne dwa zbiory $B \in T_2$ oraz $C \in T_2$. Wtedy:
Rozwazmy przypadki:

- $B = \mathbb{R} \wedge C = \mathbb{R}$. Wtedy:
  $B \cap C = \mathbb{R} \in T_2$.
- WLOG zalozmy, ze $B \neq \mathbb{R}$. Wtedy:
  Rozwazmy przypadki:
  - $B = \emptyset$. Wtedy bezwzgledu na C:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$
  - $B = [-n, n]$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:
    I. Jesli $C = \emptyset$ to:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$.

    II. Jesli $C = [-m, m]$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, Wtedy:
    Niech $k = min(m, n)$, mamy $B \cap C = [-k, k] \in T_2$

  Zatem T_2 jest zamkniete na skonczone przekroje.

Podsumowujac, sprawdzilismy z definicji topologii i otrzymalismy ze T_2 jest topologia. c.b.d.u.

dla T_3 mamy:

(a') Z opisu T_3 mamy, ze $\mathbb{R} \in T_3$ oraz $\emptyset \in T_3$

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym.
Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

$$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = [x, \infty])$$

oraz zbior

$$B = \left\{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

B to zbior wszystkich indeksow n dla ktorych $U_\alpha = [n, \infty]$. Poniewaz zbior ten zawiera tylko liczby naturalne, wiec ma minimum. Niech $m = min(B)$. Wtedy $U = [m, \infty] \in T_3$. Zatem T_3 jest zamkniety na sume.

(c') Wezmy sobie dowolne zbiory $B \in T_3$ oraz $C \in T_3$. Niech $b = min(B)$ oraz $c = min(C)$. Wtedy $B \cap C = [min(b, c), \infty] \in T_3$ bo $min(b, c) \in \mathbb{N}$. Zatem T_3 jest zamkniety na przekroj.
Podsumowujac, rozwazylismy wszystkie mozliwosci i otrzymalsmy, ze T_3 jest topologia.

6. Niech $\mathbb{N}$ bedzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich. Udowodnij ze kazda z nastepujacych kolekcji(w ramkach) podzbiorow $\mathbb{N}$ jest topologia.

Definicja: **Initial segment topology**; poki co brak polskiego tlumaczenia

T_1 zawiera $\mathbb{N}$ oraz $\emptyset$ oraz kazdy zbior $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dla dowolnego n naturalnego dodatniego.

Dowod:

- Z opisu mamy, ze $\emptyset \in T_1$ oraz $\mathbb{N} \in T_1$
- Niech $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ dla pewnego zbioru indeksowego A i $U_\alpha \in T_1$. Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

  $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = \{1, 2, 3, \ldots, x\}$$

  oraz zbior

  $$B = \big\{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\big\}$$

  Rozwazmy przypadki:

  - Zbior B jest ogranioczony z gory.
    Poniewaz B zawiera liczby naturalne dodatnie i jest ograniczony z gory wiec zawiera maximum. Niech $m = max(B)$. Zatem dla pewnego $\alpha, U_\alpha = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wtedy $U = \{1, 2, \ldots, m\} \in T_1$.
  - Zbior B jest nieograniczony z gory.
    Poniewaz zbior B zawiera liczby naturalne dodatnie(od 1 wzwyz) i nie jest ograniczony z gory, wiec $B = \mathbb{N}$. Zatem dla dowolnej $\alpha \in A$ istnieje $\alpha' \in A$ taka ze, $U_\alpha \subset U_{\alpha'}$. Zatem $U = \mathbb{N}$.

  Zatem T_1 jest zamkniety na sume.
- Wezmy dowolne dwa zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$
  Rozwazmy przypadki:

  - $B = C = \mathbb{N}$. Wtedy:
    $B \cap C = \mathbb{N} \in T_1$
  - WLOG $B \neq \mathbb{N}$. Wtedy:
    Rozwazmy przypadki:
    * $B = \emptyset$ Wtedy:
      Bezwzgledu na C. $B \cap C = \emptyset \in T_1$
    * $B \neq \emptyset$, czyli $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ to:
      Jesli $C = \emptyset$, to $B \cap C = \emptyset \in T_1$.
      Jesli $C = \{1, 2, \ldots, m\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, to $B \cap C = \{1, 2, \ldots, min(n, m)\} \in T_1$

  Zatem T_1 jest zamkniety na przekroj.
  Zatem T_1 to topologia.

Definicja:**Final segment topology**; poki co brak polskiego tlumaczenia

T_2 zawiera $\mathbb{N}$ oraz $\emptyset$ oraz kazdy zbior $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$, dla dowolnego n naturalnego dodatniego.

Dowod:

- Z opisu mamy, ze $\emptyset \in T_2$ oraz $\mathbb{N} \in T_2$
- Niech $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie A jest pewnym zbiorem indeksowym oraz $U_\alpha \in T_2$. Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

  $$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = \{x, x+1, x+2, \ldots\}$$

  oraz zbior

  $$B = \big\{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\big\}$$

  Niech $m = min(B)$. Wtedy dla kazdego $\alpha \in A, U_\alpha \subset \{m, m+1, \ldots\}$ oraz $U = \{m, m+1, \ldots\} \in T_2$.
  Zatem T_2 jest zamkniety na sume.
- Wezmy dowolne $B \in T_2$ oraz $C \in T_2$.
  Rozwazmy przypadki:

  - $B = \emptyset \vee C = \emptyset$. Wtedy:
    $B \cap C = \emptyset \in T_2$
  - $B = \mathbb{N} \wedge C = \mathbb{N}$. Wtedy:
    $B \cap C = \mathbb{N} \in T_2$

– Zaden z nich nie jest pusty oraz oba nie sa zbiorem $\mathbb{N}$. Wtedy:
Jesli $B = \{m, m+1, \dots\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $C = \{n, n+1, \dots\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $B \cap C = \{max(m,n), max(m,$
T_2

Jesli WLOG $B = \{m, m+1, \dots\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $C = \mathbb{N}$ to $B \cap C = \{m, m+1, \dots\} \in T_2$

Zatem T_2 jest zamkniete na przekroj

Zatem T_2 to topologia. c.b.d.u.

7. Wypisz wszystkie mozliwe topologie na ponizszych zbiorach:

(a) $X = \{a, b\}$

Odpowiedz:

Sa takie 4 topologie:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \{X, \emptyset\} \\
T_2 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\} \\
T_3 &= \{X, \emptyset, \{b\}\} \\
T_4 &= \{X, \emptyset, \{a\}\}
\end{aligned}$$

(b) $X = \{a, b, c\}$

Odpowiedz:

Jest takich 29 topologii:TODO PRZEPISAC Z KARTKI JE TUTAJ

TODO NAPISZ DOWOD ZE JEST ICH 29, NA WIKI SPRAWDZ: TOPOLOGIES ON SET WITH 3 ELEMENTS

$$\begin{aligned}
T_1 &= \{X, \emptyset\} \\
T_2 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\},\} \\
T_3 &= \{X, \emptyset, \{a\}\} \\
T_4 &= \{X, \emptyset, \{b\}\} \\
T_5 &= \{X, \emptyset, \{c\}\} \\
T_6 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}\} \\
T_7 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,c\}\} \\
T_8 &= \{X, \emptyset, \{b\}, \{b,c\}\} \\
T_9 &= \{X, \emptyset, \{b\}, \{b,a\}\} \\
T_{10} &= \{X, \emptyset, \{c\}, \{c,a\}\} \\
T_{11} &= \{X, \emptyset, \{c\}, \{c,b\}\} \\
T_{12} &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b,c\}\} \\
T_{13} &= \{X, \emptyset, \{b\}, \{a,b,c\}\} \\
T_{14} &= \{X, \emptyset, \{c\}, \{a,b,c\}\}
\end{aligned}$$

8. Udowodnij ponizszy lemat.

Lemat: Topologia dyskretna i podzbiory nieskonczone

Niech X bedzie zbiorem niesoknczonym oraz T topologia na X. Jezeli kazdy nieskonczony podzbior X nalezy do T, to T jest topologia dyskretna.

Dowod:

Zgodnie z ktoryms tam lematem(latwy dowod), jesli T zawiera $\{x\}$ gdzie $x \in X$ jest dowolnym elementem X, to T jest topologia dyskretna.

Zatem wezmy dowolny element $x \in X$. Skoro X jest nieskonczonym zbiorem i kazdy nieskonczony podzbior X jest w T, to oznacza, ze mozemy sobie wybrac z X, nieskonczony ciag roznowartosciowy, w ktorym nie ma elementu x.

Jak? Na przyklad tak:

$$\begin{cases} a_1 = \begin{cases} 1 \text{ jesli } x \neq 1 \\ 0 \text{ jesli } x = 1 \end{cases} \\ a_n = min\{y : y \in X \wedge y \neq x \wedge (\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\})(a_i \neq y)\} \end{cases}$$

Nastepnie rozwazmy dwa nieskonczone zbiory:

$$A = \{a_n : n = 2 \times k \wedge k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\}$$

oraz

$$B = \{a_n : n = 2 \times k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\}$$

Wtedy oczywiscie $A \in T$ oraz $B \in T$ oraz $A \cap B = \{x\} \in T$

Z dowolnosci x, wnioskujemy, ze T zawiera dowolny singleton $\{x\}$ taki ze, $x \in X$. Zatem T jest topologia dyskretna. c.b.d.u.

9. Wskaz i udowodnij, ktore z ponizszych zbior liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ sa topologiami.

T_1 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial (a, b) gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$;

Nie:

Wezmy sobie zbior $A = \{1, 2\}$ oraz $B = \{4, 5\}$. Oczywiscie $A \in T_1$ oraz $B \in T_1$, ale suma $A \cup B = \{1, 2\} \cup \{4, 5\} \notin T_1$

T_2 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Tak:

- Z definicjie $\mathbb{R} \in T_2$ oraz $\emptyset \in T_2$
- Wezmy dowolna $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym. Wtedy jesli pewien $U_\alpha = \mathbb{R}$ to $U = \mathbb{R} \in T_2$. W przeciwnym przypadku, jesli kazdy $U_\alpha = \emptyset$ to $U = \emptyset \in T_2$. W przeciwnym przypadku, jesli nie kazdy $U_\alpha = \emptyset$ wtedy rozwazmy przypadki: jesli zbior indeksow r, dla ktorych $U_\alpha = (-r, r)$, jest ograniczony, to wiemy, ze istnieje indeks $q \in \mathbb{R}$, taki ze $(\forall \alpha in A)(U_\alpha \subseteq (-q, q))$ oraz $(-q, q) \in T_2$. Z drugiej strony jesli zbior indeksow r, dla ktorych $U_\alpha = (-r, r)$, jest nieograniczony, to $U = \mathbb{R} \in T_2$.
- Wezmy dowolne dwa zbiory $A \in T_2$ oraz $B \in T_2$. Wtedy jesli ktorys z nich jest $\emptyset$ to $A \cap B = \emptyset$. Jesli zaden z nich nie jest $\emptyset$, to albo oba sa $\mathbb{R}$, wtedy $A \cap B = \mathbb{R} \in T_2$ albo ktorys z nich nie jest $\mathbb{R}$. Wtedy albo jeden z nich jest postaci $(-r, r)$ albo oba sa tej postaci, $(-r, r), (-q, q)$. W kazdym przypadku zauwazamy, ze $A \cap B = (-r, r) \in T_2$ lub $A \cap B = (-min(r, q), min(r, q)) \in T_2$

T_3 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{Q}^+$;

Odpowiedz:

Nie. Rozwazmy ciag liczb wymiernych r_n dazacy do liczby niewymiernej r. Dodatkowo rozwazmy nieskonczona sume zbiorow $\bigcup_{i=1}^{\infty} (-r_n, r_n)$. Wtedy przy $n \to \infty, (-r_n, r_n) \to (-r, r)$. Kazdy zbior z $\bigcup_{i=1}^{infty} (-r_n, r_n)$ jest w T_3 ale $(-r, r)$ juz nie jest.

T_4 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{Q}^+$;

Odpowiedz:

Nie. Rozwazmy ciag liczb wymiernych r_n dazacy do liczby wymiernej r. Dodatkowo rozwazmy nieskonczona sume zbiorow $\bigcup_{i=1}^{\infty} [-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}]$. Wtedy przy $n \to \infty, [-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}] \to (-r, r)$. Kazdy zbior z sumy $\bigcup_{i=1}^{\infty} [-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}]$ jest w T_4, ale $(-r, r)$ juz nie jest.

T_5 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;

Odpowiedz:

Nie. Rozwazmy ciag liczb niewymiernych dazacy do liczby wymiernej. Niech r_n bedzie ciagiem liczb wymiernych dazacym do $\sqrt{2}$. Nastepnie rozwazmy ciag $g_n = 2 + \sqrt{2} - r_n$. Wtedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} (-g_n, g_n)$ dazy do $(-2, 2)$ przy $n \to \infty$. Argumentacja podobna jak w przykladzie 4.

T_6 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;

Odpowiedz:

Nie. Rozwazmy ciag liczb niewymiernych dazacy do liczby wymiernej g_n. Rozwazmy nieskonczona sume $\bigcup_{i=1}^{\infty} [-g_n + \frac{1}{n}, g_n - \frac{1}{n}]$. Suma ta dazy do $[-g, g]$, gdzie g jest liczba wymierna.

T_7 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $[-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Odpowiedz:

Nie. Przyklad z podpunktu 4 tutaj zadziala.

T_8 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$ oraz kazdy przedzial $(-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Odpowiedz: Nie. Przyklad z podpunktu 4 takza tutaj zadziala.

T_9 : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$, kazdy przedzial $[-r, r]$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Odowiedz:

Tak. Mozna tu zrobic dowod w stylu tych poprzednich- czyli przeanalizowac wszystkie przypadki, ale poczekam na cos lepszego. Zostanie to tutaj uzupelnione.

T_{10} : zawiera $\mathbb{R}, \emptyset$, kazdy przedzial $[-n, n]$ oraz kazdy przedzial $(-r, r)$ gdzie $n \in \mathbb{N}^+$ oraz $r \in \mathbb{R}^+$;

Odpowiedz:

Tak. Mozna tu zrobic dowod w stylu tych poprzednich- czyli przeanalizowac wszystkie przypadki, ale poczekam na cos lepszego. Zostanie to tutaj uzupelnione.

1.2 Zbiory otwarte: definicje, lematy, zadania i rozwiazania

1.2.1 Definicja: Zbior otwarty- open set

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy elementy T nazywaja sie **zbiory otwarte.**

1.2.2 Lemat: Przestrzen topologiczna i zbiory otwarte

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- X oraz $\emptyset$ sa zbiorami otwartymi.
- suma(skonczona lub nie) zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym
- przekroj skonczony zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym

Dowod: Wynika to wprost z definicji. Podpunkt trzeci wynika z zadania 4.

1.2.3 Definicja: Zbior domkniety- closed set

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Podzbior S zbioru X jest **zbiorem domknietym** w (X, T) jesli jego dopelnienie w X, $X \setminus S$, jest zbiorem otwartym w (X, T)

Komentarz

Czyli mowimy, ze S, bedace podzbiorem X, jest zbiorem domknietym w (X, T) jesli jego dopelnienie w X, czyli $X \setminus S$ jest otwarte, czli jesli $X \setminus S \in T$

Zauwazmy, ze jesli (X, T) jest przestrzenia dyskretna, wtedy kazdy podzbior X jest zbiorem domknietym. Jednakze w przestrzeni niedyskretnej, (X, T), jedynymi zbiorami domknietymi sa X oraz $\emptyset$

1.2.5 Lemat: Przestrzen topologiczna i zbiory domkniete

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- $\emptyset$ oraz X sa zbiorami domknietymi
- przekroj skonczonej lub nieskonczonej liczby zbiorow domknietych jest zbiorem domknietym
- suma skonczonej liczby zbiorow zamknietych jest zbiorem domknietym

Komentarz:
Mozna tu dostrzec pewna analogie pomiedzy przestrzenia topologiczna i zbiorami otwartymi
Dowod:
TODO

Cwiczenie 1.2:

1. Wypisz wszystkie 64 podzbiory zbioru $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Obok kazdego zbioru wypisz czy jest
   - clopen (czyli otwarty i domkniety)
   - ani domkniety ani otwarty
   - otwarty ale nie domkniety
   - domkniety ale nie otwarty

   dla topologii T zadanej na X, takiej, ze:

   $$T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

   Odpowiedz:

   1. $\emptyset$: jest clopen, bo jest otwarty czyli nalezy do T oraz domkniety bo jego dopelnienie, czyli X nalezy do T.
   2. $\{a\}$: jest clopen, bo jest otwarty czyli nalezy do T oraz domkniety bo jesgo dopelnienie $\{b, c, d, e, f\}$ nalezy do T.
   3. $\{b\}$: nie jest otwarty bo nie nalezy do T oraz nie jest domkniety, bo jego domkniecie tez nie nalezy do T
   4. $\{c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
   5. $\{d\}$: nie jest otwarty ani domkniety

6. $\{e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
7. $\{f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
8. $\{a, b\}$: nie jest otwarty ani domkniety
9. $\{a, c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
10. $\{a, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
11. $\{a, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
12. $\{a, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
13. $\{b, c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
14. $\{b, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
15. $\{b, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
16. $\{b, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
17. $\{c, d\}$: jest otwarty bo nalezy do T, ale nie jest domkniety bo jego dopasowanie $\{a, b, e, f\}$ nie nalezy do T
18. $\{c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
19. $\{c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
20. $\{d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
21. $\{d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
22. $\{e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
23. $\{a, b, c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
24. $\{a, b, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
25. $\{a, b, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
26. $\{a, b, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
27. $\{a, c, d\}$: jest otwarty bo nalezy do T, ale nie jest domkniety bo jego dopelnienie $\{b, e, f\}$ nie nalezy do T
28. $\{a, c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
29. $\{a, c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
30. $\{a, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
31. $\{a, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
32. $\{a, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
33. $\{b, c, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
34. $\{b, c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
35. $\{b, c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
36. $\{b, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
37. $\{b, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
38. $\{b, e, f\}$: nie jest otwary, bo nie nalezy do T, ale jest domkniety bo jego dopelnienie, czyli $\{a, c, d\}$ nalezy do T.
39. $\{c, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
40. $\{c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
41. $\{c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
42. $\{d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
43. $\{a, b, c, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
44. $\{a, b, c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
45. $\{a, b, c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
46. $\{a, b, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
47. $\{a, b, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
48. $\{a, b, e, f\}$: nie jest otwarty bo nie nalezy do T, ale jest domkniety bo jego dopelnienie czyli c, d nalezy do T
49. $\{a, c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
50. $\{a, c, d.e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
51. $\{a, c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
52. $\{a, c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
53. $\{a, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety

54. $\{b, c, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
55. $\{b, c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
56. $\{b, c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
57. $\{b, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
58. $\{c, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
59. $\{a, b, c, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
60. $\{a, b, c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
61. $\{a, b, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
62. $\{a, c, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
63. $\{b, c, d, e, f\}$: jest clopen, bo nalezy do T oraz jest domkniety bo jego dopelnienie $\{a\}$ nalezy do T
64. $\{a, b, c, d, e, f\}$: jest clopen, nalezy do T oraz jest domkniety bo jego dopelnienie czyli $\emptyset$ nalezy do T

2. Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna z wlasnoscia taka, ze kazdy podzbior jest domkniety(closed). Udowodnij ze jest to przestrzen dyskretna.

   Odpowiedz:

   Zauwazmy ze przestrzen dyskretna to taka przestrzen, ktora zawiera wszystkie swojw podzbiory, rownowaznie zawiera kazdy singleton. Z zalozen zadania mamy, ze kazdy podzbior X jest domkniety. Wezmy dowolny podzbior X, nazwijmy go A. Skoro kazdy podzbior X jest domkniety oraz $X \setminus A \subseteq X$, wnioskujemy, ze $X \setminus A$ jest domkniety, czyli jego dopelnienie, czyli A jest otwarte. Z dowolnosci wyboru A, mamy, ze (X, T) jest przestrzenia dyskretna.

3. Pokaz ze jesli (X, T) jest przestrzenia dyskretna lub przestrzenia nie dyskretna, wtedy kazdy otwarty(open) zbior jest clopen zbiorem. Znajdz topologia T na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$, ktora nie jest dyskretna oraz nie jest nie dyskretna ale ma wlasnosc taka, ze kazdy zbior otwarty(open) jest clopen.

   Odpowiedz:

   Zalozmy, ze (X, T) jest przestrzenia topologiczna taka, ze kazdy jej podzbior jest domkniety. Skoro kazdy podzbior jest domkniety, to kazdy podzbior jest otwarty. Czyli kazdy podzbior X nalezy do T. Zatem (X, T) jest przestrzenia dyskretna.

4. Niech X bedzie zbiorem nieskonczonym. Jesli T jest topologia na X taka ze kazdy nieskonczony podzbior X jest domkniety(closed), udowodnij ze T jest topologia dyskretna.

   Odpowiedz

   Mamy, ze X jest zbiorem nieskonczonym oraz topologia T na X ma taka wlasnosc, ze kazdy nieskonczony podzbior X jest domkniety. Wezmy dowolny element $a \in X$, rozwazmy nieskonczony zbior $X \setminus \{a\}$. Jest on oczwyscie nieskonczony i jest podzbiorem X. Zatem jest domkniety, czyli jego dopelnienie- $\{a\} \in T$. Poniewaz a bylo dowolnym elementem X, wnioskujemy, ze T jest topologia dyskretna.

5. Niech X bedzie nieskonczonym zbiorem oraz T topologia na X z wlasnoscia taka, ze jedynym nieskonczonym podzbiorem X, ktory jest otwarty jest X. Czy (X, T) musi byc przestrzenia niedyskretna?

   Odpowiedz:

   Nie. Wezmy $X = \mathbb{N}$ oraz topologie T na X: $T = \{\mathbb{N}, \emptyset, \{1, 2\}\}$. TODO

6. Niech T bedzie topologia na zbiorze X taka, ze ma tylko 4 zbiory; dokladnie, $T = \{X, \emptyset, A, B\}$ gdzie A i B to niepuste rozne, podzbiory **wlasciwe**(czyli nie moga byc rowne X) X.

   Udowodnij ze A i B spelniaja tylko jeden z wymienionych kryteriow:

   - $B = X \setminus A$;
   - $A \subset B$;
   - $B \subset A$.

   Korzystajac z powyzszego zadania, wypisz wszystkie topologie na $X = \{1, 2, 3, 4\}$ zawierajace dokladnie 4 zbiory.

7. - Uzywajac indukcji, udowodnij ze wraz ze wzrostem n, gdzie n to liczba elementow zbioru X, liczba topologii na zbiorze X wzrasta.
   - Uzywajac indukcji udowonij ze jesli skonczony zbior X ma $n \in \mathbb{N}$ punktow, to ma conajmniej $(n - 1)!$ roznych topologii.
   - Jesli zbior X jest dowolnym nieskonczonym zbiorem o mocy(cardinality) $\aleph$, czyli jest przeliczalny. Udowodnij, ze jest conajmniej $2^{\aleph}$ roznych topologii na X. Wywnioskuj ze kazdy nieskonczony zbior ma nieprzeliczlanie duzoe roznych topologii na sobie.

1.3 Skonczenie-domknieta topologia(ang. The Finite-Closed Topology): definicje lematy, zadania i rozwiazania.

Do tej pory definiowalismy topologie poprzez okreslanie ktore zbiory sa otwarte. Czasami jest bardziej naturalnie opisac topologie poprzez okreslenie ktore zbiory sa domkniete.

1.3.1 Definicja: Skonczenie domknieta topologia(finite-closed topology(cofinite topology))

Niech X bedzie nie pustym zbiorem. Mowimy ze topologia T na X jest **skonczenie-domknieta topologia lub koskonczona topologia**(ang. finite-closed topology or cofinite topology) jesli domknietymi podzbiorami X sa X oraz wszystkie skonczone podzbiory X; czyli otwartymi zbiorami sa $\emptyset$ oraz wszystkie podzbiory X, ktore maja skonczone dopelnienia.
Inaczej:

$$T = \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ or } X \setminus A \text{ jest skonczony}\}$$

Dowod, ze T z tej definicji jest rzeczywiscie topologia TODO
Komentarz:
Zauwazmy, ze definicja 1.3.1 nie mowi nam, ze kazda topologia ktora zawiera w sobie X oraz domkniete skonczone podzbiory X jest skonczenie-domknieta topologia. Chodzi o to, ze domknietymi zbiorami musza byc tylko skonczone podzbiory X. W skonczenie-wymiarowej topologi wszystkie skonczone zbiory sa domkniete. Jednakze ponizszy przyklad pokazuje ze nieskonczone podzbiory nie musza byc otwarte.
1.3.2 Przyklad Rozwazmy zbior $\mathbb{N}$. Wtedy zbiory $\{1\}, \{5, 6, 7\}, \{2, 4, 6, 8\}$ sa skonczone wiec sa domkniete w skonczenie-domknietej topologii. Zatem ich dopelnienia:

$$\{2, 3, 4, \dots\}, \{1, 2, 3, 4, 8, 9, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

sa otwarte w skonczenie-domknietej topologii. Z drugiej strony, zbior parzystych liczb naturalnych nie jest domknietem zbiorem poniewaz nie jest skonczony wiec jego dopelnienie, zbior liczb nieparzystych nie jest zbiorem domknietym w skonczenie-wymiarowej topologii. Wiec wszystkie skonczone zbiory sa domkniete, ale nie wszystkie nieskonczone zbiory sa otwarte.
1.3.3 Przyklad
Niech T bedzie skonczenie-wymiarowa topologia na zbiorze X. Jesli X ma przynajmniej 3 rozne clopen podzzbiory, udowodnij ze X jest skonczonym zbiorem.
Komentarz do przykladu:
W zalozeniach zadania przykladu mamy to, ze T jest **skonczenie-domknieta topologia** oraz ze sa conajmniej 3 rozne clopen zbiory. Mamy pokazac, ze X jest zbiorem skonczonym.
Przypomnijmy, ze T jest **skonczenie-domknieta topologia**, czyli znaczy to ze rodzina wszystkich domknietych zbiorow sklada sie z X oraz wszystkich skonczonych podzbiorow X. Przypominjmy rowniez, ze zbior jest clopen wtedy i tylko wtedy jesli jest jednoczesnie otwarty(open) oraz domkniety(closed). Przypomnijmy rowniez ze w kazdej przestrzeni topologicznej sa przynajmniej 2 zbiory, ktore sa clopen, mianowicie X oraz $\emptyset$. W przykladzie mamy dodatkowo podane, ze w przestrzeni (X, T) sa conajmniej 3 zbiory, ktore sa clopen. Wynika z tego, ze jest jeszcze jeden zbior clopen, ktory jest rozny od X oraz $\emptyset$.
Dowod:
Przestrzen topologiczna (X, T) ma 3 rozne podzbiory, ktore sa clopen, wiemy ze jest pewien podzbior $S \subseteq X$ taki ze, $S \neq X$ oraz $S \neq \emptyset$. Poniewaz S jest otwarty w (X, T), wiec jego dopelnienie $X \setminus S$ jest zbiorem domknietym. Wiec S oraz $X \setminus S$ sa domkniete w skonczenie domknietej topologi T. Zatem S oraz $X \setminus S$ sa obaj skonczonymi zbiorami, ponieaz zaden z nich nie jest rowny X. Ale $X = S \cup X \setminus S$, wiec X jest suma dwoch skonczonych zbiorow. Zatem X jest zbiorem skonczonym.
WDM-powtorka:

1.3.4 Definicja: Funkcja injekcja/surjekcja/bijekcja

Niech f bedzie funkcja z zbioru X w zbior Y.

- Funkcja f jest 1-1 lub injekcja jesli
$$f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2, \text{ dla } x_1, x_2 \in X$$
- Funkcja f jest na lub surjekcja jesli
$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(f(x) = y)$$
- Funkcja f jest bijekcja jesli jest jednoczesnie 1-1 i na.

1.3.5 Definicja: Odwrotnosc funkcji.

Niech f bedzie funkcja z zbioru X w zbior Y. Mowimy, ze funkcja f ma odwrotnosc(**have an inverse**) jesl istnieje taka funkjca g z Y w X, ze $g(f(x)) = x$, for all $x \in X$ oraz $f(g(y)) = y$, for all $y \in Y$. Funkcje g nazywamy funkcja odwrotna(**inverse function**) do f.

1.3.6 Lemat: Wlasnosci funkcji.

Niech f bedzie funkcja z zbioru X w zbior Y.

- Funkcja f ma odwrotnosc iff f jest bijekcja
- Niech g_1 oraz g_2 beda funkcjami z Y w X. Jesli g_1 oraz g_2 sa obie funkcjami odwrotnymi do f, wtedy $g_1 = g_2$; to znaczy $g_y = g_y$, dla kazdego $y \in Y$.
- Niech g bedzie funkcja z Y w X. Wtedy g jest funkcja odwrotna do f iff f jest funkcja odwrotna do g.

Dowod: TODO
Bardzo wazna definicja.

1.3.7 Definicja: Przeciwobraz funkcji

Niech f bedzie funkcja ze zbioru X w zbior Y. Jesli S jest dowolnym podzbiorem Y, to zbior $f^{-1}(S)$ jest zdefiniowany jako:

$$f^{-1}(S) = \{x : x \in X \text{ and } f(x) \in S\}$$

Mowimy, ze podzbior $f^{-1}(S)$ zbioru X jest przeciwobrazem(**inverse image**) zbioru S(przy odwzorowaniu f).

Komentarz:
Zauwazmy ze funkcja odwrotna do funkcji $f : X \to Y$ istnieje iff f jest bijekcja. Natmiast przeciwobraz dowolnego podzbioru Y istnieje nawet wtedy, kiedy f nie jest 1-1 ani na.
Konczymy ten rozdzial ciekawym przykladem.
1.3.9 Przyklad
Niech (Y, T) bedzie przestrzenia topologiczna oraz X niepustym zbiorem. Niech f bedzie funkcja z X w Y. Polozmy $T_1 = \left\{f^{-1}(S) : S \in T\right\}$. Udowodnij, ze T_1 jest topologia na X.
Dowod:
Musimy pokazac zachodzenie trzech podpunktow z definicji topologii.

- $$X \in T_1 \qquad \text{bo} \qquad X = f^{-1}(Y) \qquad \text{i} \qquad Y \in T \tag{1}$$
  $$\emptyset \in T_1 \qquad \text{bo} \qquad \emptyset = f^{-1}(\emptyset) \qquad \text{i} \qquad \emptyset \in T \tag{2}$$
  Zatem T_1 ma wlasnosc nr 1.
- Niech $\{A_j : j \in J\}$ bedzie kolekcja elementow z T_1, dla jakiegos zbioru indekoswego J. Pokazemy, ze $\bigcup_{j\in J} A_j \in T_1$. Poniewaz $A_j \in T_1$, wiec z definicji T_1 wynika, ze $A_j = f^{-1}(B_j)$, gdzie $B_j \in T$. Ponadto $\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j)$.(Dowod w cw 1.3 #1) Zauwazmy ze $B_j \in T$, dla kazdego $j \in J$, wiec $\bigcup_{j\in J} B_j$, bo T jest topologia na Y. Zatem z definicji T_1, $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) \in T_1$; czyli $\bigcup_{j\in J} A_j \in T_1$. Zatem T_1 ma wlasnosc numer 2.
- Niech A_1 oraz A_2 beda w T_1. Musimy pokazac, ze $A_1 \cap A_2 \in T_1$. Poniewaz $A_1, A_2 \in T_1$, $A_1 = f^{-1}(B_1)$ oraz $A_2 = f^{-1}(B_2)$, gdzie $B_1, B_2 \in T$. $A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2$. (Dowod w cw 1.3 #1). Poniewaz $B_1 \cap B_2 \in T$, mamy $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in T_1$. Zatem $A_1 \cap A_2 \in T_1$ i pokazalismy ze T_1 spelnia wlasnosc nr 3 z definicji topologii.

Zatem T_1 jest rzeczywiscie topologia.
Komentarz, bardzow wazny:
Odnosi sie do punktu drugiego definicji topologii, w ktorej musimy pokazac ze dowolna suma(skonczone lub nie) zbiorow z T, nalezy do T. Otoz nie kazde zbiory sa przeliczalne. Wiec nie wystarczy zaklozyc, ze zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sa w T_1 i pokazac ze ich suma tez jest w T_1. To dowiedzie tylko temu, ze **przeliczalna** suma zbiorow z T, nalezy do T. Nie wystarczy to aby pokazac wlasnosc nr 2. Wlasnosc ta wymaga aby **dowolna** suma zbiorow z T skonczona lub nie, przeliczalna lub nie przeliczalna, nalezala do T.

Cwiczenia 1.3
TODO

---

2 Topologia euklidesowa

2.1 Topologia euklidesowa na $\mathbb{R}$

2.1.1 Definicja: Topologia euklidesowa na $\mathbb{R}$

Mowimy ze podzbior S zbioru $\mathbb{R}$ jest otwarty w **topologii euklidesowej na** $\mathbb{R}$ jesli spelnia nastepujace wlasnosci:

$$(*)(\forall x \in S)(\exists a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b)(x \in (a, b) \subseteq S)$$

Czyli dla kazdego $x \in S$, istnieja $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, takie ze $x \in (a, b) \subseteq S$
Wlasnymi slowami, dla kazdego elementu S, istnieje otwarty odcinek w ktorym ten element sie znajduje.

Komentarz:

Przyjmujemy, ze kiedykolwiek bedziemy mowic o topologi na $\mathbb{R}$, bez specyfikowania topologii, to bedziemy mieli na mysli topologie euklidesowa.

Napiszemy teraz kilka bardzo waznych wlasnosci dotyczacych topologi euklidesowej na $\mathbb{R}$. **Uwaga 2.1.2 Wlasnosci topologii euklidesowej(niektore)**

(a) Pokazemy ze topologia euklidesowa jest rzeczywiscie topologia. Czyli ze definicja 2.1.1 jest prawidlowa. Pokazemy 3 znane wlasnosci z definicji topologi.

Musimy pokazac ze T spelnia 3 aksjomaty topologii. Mamy ze zbior nalezy do T iff kiedy ma wlasnosc (*).

- Najpierw pokazem ze $\mathbb{R}$ nalezy do T. Niech $x \in \mathbb{R}$. Polozmy $a = x - 1$ oraz $b = x + 1$. Wtedy $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$; czyli $\mathbb{R}$ ma wlasnosc (*). Zauwazmy ze $\emptyset \in T$ bo $\emptyset$ ma wlasnosc (*) defaultowo.
- Niech teraz $\{A_j : j \in J\}$ dla pewnego zbioru indeksowego J, bedzie dowolna rodzina zbiorow z T. Pokazemy ze $\bigcup_{j \in J} A_j \in T$; czyli ze $\bigcup_{j \in J} A_j$ ma wlasnosc (*). Niech $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Wtedy $x \in A_k$ dla pewnego $k \in J$. Poniewaz $A_k \in T$, wiec istnieja $a, b \in \mathbb{R}$ takie ze $x \in (a, b) \subseteq A_k$. Poniewaz $k \in J, A_k \in \bigcup_{j \in J} A_j$ wiec $x \in (a, b) \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$. Zatem $\bigcup_{j \in J} A_j$ ma wlasnosc (*) i nalezy do T.
- Wezmy dowolne $A_1, A_2 \in T$. Pokazemy ze $A_1 \cap A_2 \in T$. Zatem niech $y \in A_1 \cap A_2 \in T$. Poniewaz $A_1 \in T$ wiec istnieja a,b takie ze $y \in (a, b)$. Analogicznie istnieja c,d takie ze $y \in (c, d) \subseteq A_2$. Niech e bedzie max(a,c) orac f bedzie min(b,d). Zatem $y \in (e, f)$. Poniewaz $(e, f) \in A_1$ oraz $(e, f) \in A_2$, zatem $(e, f) \in A_1 \cap A_2$. Zatem $A_1 \cap A_2$ ma wlasnosc (*), czyli nalezy do T.

Zatem T jest topologia na $\mathbb{R}$

Opiszemy teraz jak wygladaja zbiory otwarte i domkniete w tej topologii. W szczegolnosci zobaczymy ze kazde otwarte przedzialy/odcinki sa otwarte w tej topologii oraz kazde domkniete przedzialy/odcinki sa zbiorami domknietymi

(b) Niech $r, s \in \mathbb{R}$ z $r < S$. W topologi euklidesowej T na $\mathbb{R}$ odcinek/przedzial (r, s) nalezy do T i w konsekwencji jest zbiorem otwartym.

Dowod:

Dowod trywialny. Musimy pokazac, ze dla (r, s) zachodzi wlasnosc (*). Wezmy dowolnego $x \in (r, s)$. Niech $a = r$ oraz $b = s$. Wtedy $x \in (r, s) \subseteq (a, b)$, Wiec (r, s) jest otwarty w topologii euklidesowej

(c) Przedzialy otwarte $(-\infty, r)$ oraz (r, ∞) takze sa zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}$.

Dowod:

Niech $x \in (r, \infty)$. Polozmy $a = r$ oraz $b = x + 1$. Wtedy $x \in (a, b) \subseteq (r, \infty)$, a wiec $(r, \infty) \in T$. Analogiczny argument dowodzi tego, ze $(-\infty, r)$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$.

(d) Bardzo wazne jest, zeby miec na uwadze, ze podczas gdy kazdy odcinek otwarty jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$, to przeciwnosc tego faktu jest falszywa. Nie kazdy zbior otwarty w R sa odcinkami. Np zbior $(1, 2) \cup (4, 5)$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$, ale nie jest odcinkiem otwartym. Nawet zbior $\bigcup_{n=1}^{\infty} (2n, 2n + 1)$ jest zbiorem otwartym w R.

(e) Dla dowolnego $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, odcinek domkniety $[c, d]$ nie jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$.

Dowod:

Zauwazmy, ze $c \in [c, d]$. Zalozmy ze istnieja takie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ze $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$. Wtedy $c \in (a, b)$ implikuje $a < c < b$ i w zwiazku z tym $a < \frac{c+a}{2} < c$. Zatem $\frac{c+a}{2} \in (a, b)$ i $\frac{c+a}{2} \notin [c, d]$. Czyli $(a, b) \not\subseteq [c, d]$ co jest sprzecznoscia. Zatem nie istnieja takie a i b, ze $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$. Czyli $[c, d]$ nie ma wlasnosci (*), wiec $[c, d] \notin T$.

(f) Dla dowolnego $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, odcinek domkniety $[a, b]$ jest zbiorem domknietym w topologii euklidesowej na $\mathbb{R}$.

Dowod:

Zauwazmy ze dopelnienie $[a, b]$, czyli $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ jako suma dwoch zbiorow otwartych, jest zbiorem otwartym. Czyli $[a, b]$ jest zbiorem domknietym.

(g) Kazdy singleton $\{a\}$ jest zbiorem domknietym w $\mathbb{R}$.

Dowod:

Dopelnienie $\{a\}$ to zbior $(-\infty,)\cup(a, \infty)$, ktory jest suma dwoch zbiorow otwartych, czyli jest otwarty. Zatem $\{a\}$ jest domkniety w $\mathbb{R}$.

(h) Zauwazmy ze poprzedni podpunkt, to tak naprawde szczegolny przypadek punktu przedpoprzedniego. Tzn przyjmujac, ze $\{a\} = [a, a]$, mamy ze $\{a\}$ jest domkniety.

(i) Zbior liczb calkowitych $\mathbb{Z}$ jest domkniety w $\mathbb{R}$

Dowod:

Dopelnieniem zbioru $\mathbb{Z}$, jest suma $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1)$ zbiorow otwartych $(n, n+1) \in \mathbb{R}$, wiec jest otwarta w $\mathbb{R}$. Zatem $\mathbb{Z}$ jest domkniety w $\mathbb{R}$.

(j) Zbior liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nie jest ani domkniety w $\mathbb{R}$ ani otwarty w $\mathbb{R}$.

Pokazemy, ze $\mathbb{Q}$ nie jest zbiorem otwartym, udawadniajac, ze nie spelnia wlasnosci (*). Aby to zrobic, wystarczy ze pokazemy, ze $\mathbb{Q}$ nie zawiera **zadnego** otwartego odcinka (a, b) z $a < b$.

Dowod:

Zalozmy, ze $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Miedzy dwoma dowolnymi roznymi liczbami rzeczywistymi, znajduje sie liczba niewymierna(prosty dowod). Zatem istnieje $c \in (a, b)$ takie ze, $c \notin \mathbb{Q}$. To przeczy temu, ze $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$. Zatem $\mathbb{Q}$ nie zawiera zadnego odcinka (a, b) czyli nie jest zbiorem otwartym.

Aby pokazac ze $\mathbb{Q}$ nie jest zbiorem domknietym, wystarczy ze pokazemy ze dopelnienie $\mathbb{Q}$ czyli $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest zbiorem otwartym. Korzystajac z tego, ze pomiedzy kazdymi dwoma liczbami rzeczywistymi znajduje sie liczba wymierna, widzimy ze $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie zawiera zadnego odcinka (a, b) z $a < b$. Zatem $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$, czyli $\mathbb{Q}$ nie jest zbiorem domknietym w $\mathbb{R}$.

(k) W rozdziale 3 udowodnimy ze jedynymi zbiorami clopen w $\mathbb{R}$ sa $\mathbb{R}$ oraz $\emptyset$.

2.2 Baza topologii

Uwaga 2.1.2 pozwolila/pokazala nam jak opisywac topologie euklidesowe na $\mathbb{R}$ w bardziej wygodny sposob. W tym rodzizale rozwiniemy ten pomysl przedstawiajac baze topologii.

2.2.1 Lemat

Podzbior $S \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym wtedy i tylko wtedy kiedy jest suma otwartych odcinkow, i.e. postaci $(a, b), a, b \in \mathbb{R}$

Dowod:

($\leftarrow$) Zalozmy ze S jest suma otwartych odcinkow. To znaczy ze istnieje odcinek (a_j, b_j) gdzie $j \in J$ i J jest jakims zbiorem indeksowym, takim ze $S = \bigcup_{j \in J}(a_j, b_j)$. Wiemy z uwagi 2.1.2 b) ze kazdy (a_j, b_j) jest zbiorem otwartym. Zatem S jako suma zbiorow otwartych jest otwarty.

($\rightarrow$) Zalozmy, ze S jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$. Wtedy dla kazdego $x \in S$ istnieje odcinek $I_x = (a, b)$ taki ze $x \in I_x \subseteq S$. Pokazemy teraz, ze $S = \bigcup_{x \in S} I_x$. Pokazemy to pokazujac zawieranie w dwie strony. Niech $y \in S$. Wtedy $y \in I_y$. Zatem $y \in \bigcup_{x \in S} I_x$. Z drugiej strony niech $z \in \bigcup_{x \in S} I_x$. Wtedy $z \in I_t$ dla pewnego $t \in S$. Poniewaz kazdy $I_x \subseteq S$, wiec $I_t \subseteq S$ czyli $z \in S$. Zatem $S = \bigcup_{x \in S} I_x$. Czyli S jest suma otwartych odcinkow. Powyzszy lemat mowi nam, ze aby opisac topologie na $\mathbb{R}$ wystarczy powiedziec ze jazdy odcinek

(a, b) jest zbziorem otwartym. Kazdy inny zbior otwarty, jest suma tych zbiorow otwartych. To prowadzi nas do ponizszej definicji.

2.2.2 Definicja: Baza topologii

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Kolekcja $\mathbb{B}$ zbiorow otwartych w X jest **baza** topologi T jesli kazdy zbior otwarty jest suma elementow z $\mathbb{B}$.

Komentarz

Jesli $\mathbb{B}$ jest baza topologii T na X to podzbior $U \subseteq X$ jest w T iff jesli jest suma elementow z $\mathbb{B}$. Zatem $\mathbb{B}$ generuje nam topologie T w ten sposob: jesli ktos nam powiedzial jakie zbiory sa w $\mathbb{B}$ wtedy mozemy zdeterminowac zbiory w T- sa one wszystkimi mozliwymi zbiorami zlozonym z sum elementow z $\mathbb{B}$.

Przyklady:

- $\mathbb{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Wtedy $\mathbb{B}$ jest baza topologi euklidesowej na $\mathbb{R}$, lemat 2.2.1
- Niech (X,T) bedzie topologia dyskretna oraz $\mathbb{B}$ rodzina wszystkich singletonow zbioru X. Wtedy $\mathbb{B}$ jest baza dla T.
- Niech $x = \{a,b,c,d,e,f\}$ oraz $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$. Wtedy $\mathbb{B} = \{\{a\}, \{c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ jest baza T bo $\mathbb{B} \subseteq T$ oraz kazdy element T mozna wyrazic jako sume elementow z $\mathbb{B}$. Zauwazmy ze $\emptyset$ jest pusta suma elementow z $\mathbb{B}$. Zauwazmy tez, ze T jest baza dla samego siebie.

2.2.6 Lematokomentarz: Rozne bazy dla tej samej topologii

Tak jak w poprzednim punkcie poruszylismy, jesli (X,T) jest przestrzenia topologiczna, to T same w sobie jest baza dla T. Dla przykladu zbior wszystkich mozliwych podzbiorow X jest baza dla topologii dyskretnej na X.
Widzimy, ze dla zadanej topologii T moze byc wiele roznych baz. Precisely. Zauwazmy (**UDOWODNIJ TO**), ze jesli $\mathbb{B}$ jest baza dla topologii T na zbiorze X, oraz zbior $\mathbb{B}_1$ bedacy kolekcja podzbiorow X taka ze $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_1 \subseteq X$, wtedy $\mathbb{B}_1$ jest takze baza T. $\leftarrow$ TODO UDOWODNIJ

Zatem baza dla topologii, pozwala nam zdefiniowac topologie, lecz trzeba uwazac. Spojrzmy na ponizszy przyklad:

2.2.7 Przyklad

Niech $X = \{a,b,c\}$ oraz $\mathbb{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$. Wtedy $\mathbb{B}$ **nie jest baza** dla zadnej topologii na X. Aby zobaczyc dlaczego spojrzmy:

Niech $\mathbb{B}$ bedzie baza dla topologii T. T zaweira wszystkie mozliwe sumy z $\mathbb{B}$, tj:

$$T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$$

Ale T nie jest topologia, bo nie zawiera w sobie przekroju $\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\}$. Zatem $\mathbb{B}$ nie moze byc baza T.

To prowadzi nas do bardzo waznego pytania: jesli $\mathbb{B}$ jest kolekcja podzbiorow X, jaki warunek zapewnia to, ze $\mathbb{B}$ jest rzeczywiscie baza dla topologii na X?

Ponizszy lemat ustali te warunki.

2.2.8 Lemat: Warunek na bycie baza

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz $\mathbb{B}$ bedzie kolekcja podzbiorow X. Wtedy $\mathbb{B}$ jest baza dla topologi na X wtedy i tylko wtedy kiedy $\mathbb{B}$ ma nastepujace wlasnosci:

(a) $X = \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B$,

(b) dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathbb{B}$, zbior $B_1 \cap B_2$ jest suma elementow z $\mathbb{B}$

Dowod:

Zakladamy ze X jest niepustym zbiorem oraz $\mathbb{B}$ kolekcja podzbiorow(jakichs?) X.

$(\rightarrow)$

Implikacja w prawo. Zalozmy ze $\mathbb{B}$ jest baza topologii T. T jest topologia wiec spelnia 3 aksjomaty topologii(definicja). W szczegolnosci X jest zbiorem otwartym oraz przekroj zbiorow otwartych jest zbiorem otwartym. Poniewaz zbiory otwarte sa suma elementow z $\mathbb{B}$, wynikaz tego, ze wlasnosci (a) oraz (b) sa prawdziwe.

$(\leftarrow)$

Implikacja w lewo. Zalozmy ze $\mathbb{B}$ ma wlasnosci (a) i (b) oraz niech T bedzie kolekcja wszystkich podzbiorow X, ktore sa sumami elementow z $\mathbb{B}$. Pokazemy, ze T jest topologia na X.

Z wlasnosci (a), $X = \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B$ zatem $X \in T$. $\emptyset$ jest pusta suma podzbiorow $\mathbb{B}$ zatem $\emptyset \in T$.

Nastepnie niech $\{T_j\}$ bedzie rodzina elementow T. Wtedy kazdy T_j jest jakas suma elementow z $\mathbb{B}$. Zatem suma wszystkich T_j jest suma elementow z $\mathbb{B}$ wiec nalezy do T.

Finalnie niech C oraz D beda w T. Chcemy pokazac ze $C \cap D \in T$. Ale $C = \bigcup_{k \in K} B_k$, dla jakiegos zbioru indeksowego K i zbiorow $B_k \in \mathbb{B}$ oraz $D = \bigcup_{j \in J} B_j$ dla jakiegos zbioru indeksowego J oraz $B_j \in \mathbb{B}$. Zatem

$$C \cap D = \left(\bigcup_{k \in K} B_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{k \in K, j \in J} (B_k \cap B_j)$$

ZROB DOWOD Z TYMI PRZEKROJAMI I SUMAMI TODO

Z zalozenia (b), kazdy $B_k \cap B_j$ jest suma elementow z $\mathbb{B}$ zatem $C \cap D$ jest suma elementow z $\mathbb{B}$. Zatem $C \cap D \in T$

Zatem T spelnia wszystkie 3 aksjomaty z definicji zatem jest topologia.

Powyzszy lemat 2.2.8 daje nam bardzo pozyteczne narzedzie. Pozwala nam ono zdefiniowac topologie tylko poprzez wypisanie jej bazy. Jest to o wiele bardziej poreczniejsze niz opisanie wszystkich zbiorow otwartych.

Posluzymy sie teraz ta wlasnoscia aby zdefiniowac topologie na plaszczyznie. Jest ona znana pod nazwa "topologia euklidesowa"

2.2.9 Przyklad

Niech $\mathbb{B}$ bedzie kolekcja wszystkich "otwartych prostokatow" na plaszczyznie, majacych kazdy bok rownolegly do osi X lub osi Y

$$\mathbb{B} = \left\{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, a < x < b, c < y < d \right\}$$

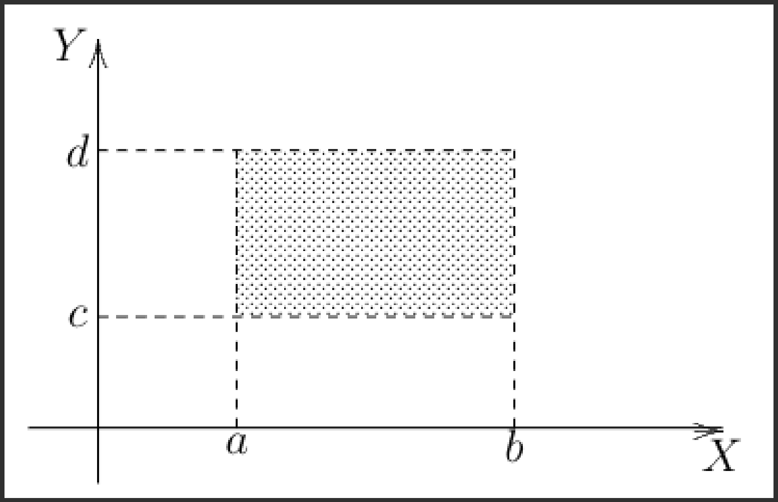

Figure 1: Podpis pod obrazkiem

Wtedy $\mathbb{B}$ jest baza topologii na plaszczyznie. Ta topologia nazywa sie topologia euklidesowa.

Aby dostrzec, ze $\mathbb{B}$ jest rzeczywiscie baza topologii, zauwazmy ze (i) plaszczyzna jest suma wszystkich takich otwartych prostokatow oraz (ii) przekroj dowolnych dwoch prostokatow jest prostokatem. Przez prostokat rozumiemy tu taki prostokat z bokami rownoleglymi do osi X i Y, tak jak na obrazku. Zatem wlasnosci z lematu 2.2.8 zachodza wiec $\mathbb{B}$ jest baza.

2.2.10 Lematokomentarz: Uogolnienie Przykladu 2.2.9

Uogolniajac przyklad 2.2.9 mozemy zauwazyc jak polozyc topologie na $\mathbb{R}^n = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$, dla dowolnego calkowitego $n > 2$. Przyjmujemy tutaj, ze $\mathbb{B}$ jest kolekcja wszystkich podzbiorow $\{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle : a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ z bokami rownoleglymi do osi ukladu wspolrzednych. Taka kolekcja $\mathbb{B}$ jest baza dla **topologii euklidesowej** na $\mathbb{R}$.

2.3 Baza dla podanej wczesniej topologii

Lemat 2.2.8 powiedzial nam pod jakimi warunkami kolekcja $\mathbb{B}$ podzbiorow X jest baza dla **pewnej** topologii na X. Jednakze czasami mamy juz **ustalona** topologie T na X i chcemy sie dowiedziec czy $\mathbb{B}$ jest baza dla dokladnie tej topologii T. Mozemy to owczywiscie sprawdzic z definicji 2.2.2 Bazy topologii, ale lemat 2.3.2 pokazuje nam alternatywna metode.

Spojrzmy najpierw na pewien przyklad:

Przyklad 2.3.1

Niech $\mathbb{B}$ bedzie kolekcja odcinkow jednostronnie domknietych postaci $(a, b]$, $a < b$, gdzie $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$. Wtedy $\mathbb{B}$ jest baza dla topologii na $\mathbb{R}$, poniewaz $\mathbb{R}$ jest suma wszystkich elementow z $\mathbb{B}$ oraz przekroj dowolnych dwoch jednostronnie otwartych odcinkow, jest jednostornnie otwartym odcinkiem.

Jednakze:

Topologia T ktora ma $\mathbb{B}$ jako swoja baze, **nie** jest topologia euklidesowa na $\mathbb{R}$.

Dlaczeg? Zauwazmy, ze $(a, b]$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$ z topologia T, podczas gdy $(a, b]$ nie jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$ z topologia euklidesowa. (nie mozemy otoczyc punktu b "odcinkiem otwartym"- dowod cwiczneie 2.1).

Podsumowoujac, $\mathbb{B}$ jest baza dla **pewnej** topologii ale nie jest baza dla topologii euklidesowej na $\mathbb{R}$.

2.3.2 Lemat Baza topologii podejscie 2?

Niech (X, T) bedzie przestrzenia topologiczna. Rodzina $\mathbb{B}$ otwartych podzbiorow X jest baza T wtedy i tylko wtedy kiedy dla dowolnego punktu x nalezacego do dowolnego zbioru otwartego U, istnieje zbior $B \in \mathbb{B}$ taki ze $x \in B \subseteq U$.
Czyli rodzina zbiorow $\mathbb{B}$ jest baza iff dla dowolnego punktu z dowolnego zbioru istnieje zbior bazowy B taki ze $x \in B \subseteq U$

Dowod:

Musimy pokazac ze:

- jesli $\mathbb{B}$ jest baza T oraz $x \in U \in T$, to istnieje $B \in \mathbb{B}$ takie ze $x \in B \subseteq U$

  oraz

- jesli dla kazdego $U \in T$ i $x \in U$ istnieje $B \in \mathbb{B}$ takie ze $x \in B \subseteq U$, wteedy $\mathbb{B}$ jest baza T.

Zatem:
Zalozmy ze $\mathbb{B}$ jest baza T oraz $x \in U \in T$. Poniewaz $\mathbb{B}$ jest baza T, wiec U jest suma otwartych zbiorow z $\mathbb{B}$. To znaczy $U = \bigcup_{j \in J} B_j$ dla pewnego zbioru indeksowego J i $B_j \in \mathbb{B}$. Ale $x \in U$ implikuje to ze $x \in B_j$ dla pewnego $j \in J$. Zatem $x \in B_j \subseteq U$, tak jak chcielismy.

Z drugiej strony, zalozmy ze dla kazdego $U \in T$ and kazdego $x \in T$ istnieje $B \in \mathbb{B}$ z $x \in B \subseteq U$. Pokazemy ze kazdy zbior otwarty jest suma elementow z $\mathbb{B}$. Wiec niech V bedzie dowolnym zbiorem otwartym. Wtedy dla kazdeggo $x \in V$, istnieje $B_x \in B$ taki ze $x \in B_x \subseteq V$. Zauwazmy ze $V = \bigcup_{x \in V} B_x$ ←**UDOWODNIJ TODO**. Zatem V jest suma elementow z $\mathbb{B}$.

2.3.3 Lemat: Baza topologii podejscie 3?

Niech $\mathbb{B}$ bedzie baza topologii T na zbiorze X. Wtedy podzbior U zbioru X jest otwarty wtedy i tylko wtedy kiedy dla kazdego $x \in U$ istnieje $B \in \mathbb{B}$ takie ze $x \in B \subseteq U$

Dowod:
Niech U bedzie dowolnym podzbiorem X. Zalozmy ze dla kazdego $x \in U$ istnieje $B_x \in \mathbb{B}$ taki ze $x \in B_x \subseteq U$. Widac ze $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ ←**TUTAJ TROCHE NIE KUMAM ZROB DOWOD I PRZEANALIZUJ** Zatem U jest suma zbiorow otwartych i co za tym idzie U jest zbiorem otwartym. Dowod w druga strone wynika z lematu 2.3.2.

Komentarz
Zauwazmy ze wlasnosc bazy opisana w lemacie 2.3.3 jest dokladnie ta wlasnoscia, ktora uzylismy aby opisac topologie euklidesowa na $\mathbb{R}$. Powiedzielsimy wtedy, ze podzbior $U \subseteq \mathbb{R}$ jest otwarty iff dla kazdego $x \in U$ istnieje $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$ takie, ze $x \in (a, b) \subseteq U$

ATTENZIONE
Miej na uwadze i pamietaj, o roznicy w lematach 2.2.8 i 2.3.2. W lemacie 2.2.8 podalismy wlasnosci jakie musi miec rodzina $\mathbb{B}$ aby baza dla **pewnej** topologi, podczas gdy lemat 2.3.2 daje nam wlasnosci jakie musi miec rodzina $\mathbb{B}$ podzbiorow przestrzeni topologicznej (X, T) aby byc baza **danej** topologii T.

2.3.4 Lemat: Bazy dla tej samej topologii

Niech B_1 oraz B_2 beda bazami dla topologii odpowiednio T_1 oraz T_2, na niepustym zbiorze X. Wtedy $T_1 = T_2$ wtedy i tylko wtedy kiedy:

(a) dla kazdego $B \in B_1$ i kazdego $x \in B$, istnieje $B' \in B_2$ takie ze $x \in B' \subseteq B$, oraz

(b) dla kazdego $B \in B_2$ i kazdego $x \in B$, istnieje $B' \in B_1$ takie ze $x \in B' \subseteq B$

Dowod:

3 Punkty skupienia(ang Limit Points)

3.1 Punkty skupienia i domkniecie

3.2 Sasiedztwo (ang Neighbourhoods)

3.3 Spojnosc (ang Connectedness)

4 Homeomorfizmy

4.1 Podprzestrzenie

4.2 Homeomorfizmy

4.3 Nie-homeomorficzne przestrzenie (ang Non-Homeomorphic Spaces)