

Moje notatki na bazie skryptu topology without tears

Lukasz Kopyto

March 9, 2024

1 Przestrzenie topologiczne

1.1 Topologia: definicje, lematy, zadania i rozwiazania

1.1.1 Definicja: Topologia

Niech X bedzie niepustym zbiorem. Mowimy, ze zbior T zawierajacy podzbiory X jest topologia na X jesli:

- X oraz zbior pusty \emptyset , naleza do T ,
- suma skonczona badz nie zbiorow z T nalezy do T , inaczej T jest zamkniety na sume, i ta suma moze byc nieskonczona
- przekroj dowolnych dwoch zbiorow z T nalezy do T , inaczej T jest zamkniety na przekroj, ale przekroj skonczony

Para (X, T) nazywamy **przestrzenia topologiczna**.

1.1.6 Definicja: Topologia dyskretna(discrete topology)

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz T kolekcja wszystkich podzbiorow X . Wtedy mowimy, ze T jest **topologia dyskretna** na zbiorze X . Przestrzen topologiczna (X, T) jest nazywana **przestrzenia dyskretna**

1.1.7 Definicja: Topologia niedyskretna(indiscrete topology)

Niech X bedzie niepustym zbiorem oraz $T = \{X, \emptyset\}$. Wtedy mowimy, ze T jest **topologia niedyskretna** oraz (X, T) jest **przestrzenia niedyskretna**

1.1.9 Lemat: Topologia dyskretna i singletony

Jezeli (X, T) jest przestrzenia topologiczna, taka ze, dla kazdego $x \in X$, singleton x , $\{x\}$ jest w X , to X jest topologia dyskretna.

Dowod:

Wystarcz sprawdzic prawdziwosc trzech warunkow, z definicji 1.1.1.

1. Z definicji T jest topologia, wiec zawiera X oraz \emptyset .
2. Niech S bedzie suma skonczona lub nie dowolnej liczby zbiorow z T . Poniewaz mozemy zapisac S jako $S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$, a kazdy singleton $\{x\} \in X$, wnioskujemy stad, ze $S \in T$
3. Analogicznie dowodzimy, ze przekroj dowolnych dwoch zbiorow z T nalezy do T

Cwiczenia 1.1

1. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ustal czy podane kolekcje podzbiorow X sa topologia na X

- (a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$
- (b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$
- (c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$

Odpowiedz:

- (a) Jest topologia.

(b) Nie jest, bo $\{a, b, f\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\} \notin T_2$

(c) Nie jest, bo $\{e, f\} \cup \{a, f\} = \{a, e, f\} \notin T_3$

2. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Wskaz i uzasadnij które kolekcje podzbiorów X są topologią na X

(a) $T_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$

(b) $T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$

(c) $T_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$

Odpowiedz:

(a) Nie, bo $\{c\} \cup \{b\} = \{b, c\} \notin T_1$

(b) Nie, bo $\{b, d, e\} \cap \{a, b, d\} = \{b, d\} \notin T_2$

(c) Jest topologia.

3. Niech $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ oraz T będzie topologią dyskretną na X , które z poniższych podpunktów są prawdziwe?

(a) $X \in T$ - Prawda

(b) $\{X\} \in T$ - Falsz

(c) $\{\emptyset\} \in T$ - Falsz

(d) $\emptyset \in T$ - Prawda

(e) $\emptyset \in X$ - Falsz

(f) $\{\emptyset\} \in X$ - Falsz

(g) $\{a\} \in T$ - Prawda

(h) $a \in T$ - Falsz

(i) $\emptyset \subseteq X$ - Prawda

(j) $\{a\} \in X$ - Falsz

(k) $\{\emptyset\} \subseteq X$ - Falsz

(l) $a \in X$ - Prawda

(m) $X \subseteq T$ - Falsz

(n) $\{a\} \subseteq T$ - Falsz

(o) $\{X\} \subseteq T$ - Prawda

(p) $a \subseteq T$ - Falsz

4. Niech (X, T) będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Udowodnij, że **przekroj skoncowej liczby (dowolnej) elementów z T jest elementem T**

Odpowiedz:

Udowodnimy to przez indukcję względem liczby elementów przekroju.

Teza: Dla przestrzeni topologicznej (X, T) przekroj skoncowej liczby elementów z T jest elementem T .

Podstawa indukcji: dla $n = 2$, mamy $\bigcap_{i=1}^2 A_i$, gdzie $A_i \in T$, A_i są dowolnymi zbiorami należącymi do T . Ponieważ T jest topologią na X więc z definicji, przekroj dowolnych dwóch zbiorów należących do T , należy do T , zatem $\bigcap_{i=1}^2 A_i \in T$.

Krok indukcyjny: Ustalmy teraz dowolne $n \in \mathbb{N}$ i założymy, że $\bigcap_{i=1}^n A_i \in T$. Pokażemy, że dla $n + 1$ teza zachodzi. Oznaczmy sobie

$B = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Dla $n + 1$ mamy:

$\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i \cap A_{n+1} = \text{zal. ind.} = B \cap A_{n+1}$ Ponieważ $B \in T$ oraz $A_{n+1} \in T$ więc z definicji topologii, $B \cap A_{n+1} \in T$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej, dla przestrzeni topologicznej (X, T) przekroj skoncowej liczby elementów z T jest elementem T .

5. Niech \mathbb{R} będzie zbiorem liczb rzeczywistych. Udowodnij, że każdy z następujących kolekcji podzbiorów \mathbb{R} jest topologią.

(a) T_1 zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział $(-n, n)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $(-n, n)$ oznacza zbiór $\{x \in \mathbb{R} : -n < x < n\}$

(b) T_2 zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział $[-n, n]$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[-n, n]$ oznacza zbiór $\{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}$

(c) T_3 zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział $[n, \infty)$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}^+$, gdzie $[n, \infty)$ oznacza zbiór $\{x \in \mathbb{R} : n \leq x\}$

Odpowiedz:

Trzeba każdy podpunkt sprawdzić z definicji topologii, czyli w każdym podpunkcie sprawdzić czy (a') X oraz \emptyset należą do T , (b') zamkniętość na sumie teorii mnogościowa skończona lub nie i (c') zamkniętość na przekroju (skończony)

dla T_1 mamy:

(a') Z opisu T_1 mamy, że $\mathbb{R} \in T_1$ oraz $\emptyset \in T_1$

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ gdzie $A_\alpha \in T_1$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym, będzie dowolna suma (skończona bądź nie) zbiorów. Rozważmy przypadki:

- $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$.

Wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathbb{R} \in T_1$

- $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla każdego $\alpha \in A$.

Wtedy mamy przypadki:

- $U_\alpha = \emptyset$ dla każdego $\alpha \in A$.

Wtedy $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset \in T_1$

- $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbiór

$$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in A\}$$

jest ograniczony z góry.

Wtedy, z tego że zbiór B jest ograniczony z góry i zawiera liczby naturalne, wiemy że istnieje najmniejsza liczba naturalna m , która ogranicza ten zbiór z góry. Weźmy zatem liczbę m . Zauważmy, że m jest jednocześnie maximum zbioru B . Z definicji zbioru T_1 mamy, że $(-m, m) \in T_1$ oraz z tego, że B jest ograniczony z góry, wnioskujemy

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = (-m, m) \in T_1$$

- $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha \in A$ oraz zbiór

$$B = \{n : U_\alpha = (-n, n) \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \alpha \in A\}$$

jest nieograniczony z góry.

Wtedy, mam sprzeczność, bo założyliśmy, że $\mathbb{R} \notin T_1$, z drugiej strony zbiór B jest nieograniczony, a

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}$$

Zatem ten podpunkt odpada.

Sprawdziliśmy zatem wszystkie możliwości i otrzymaliśmy, że zbiór T_1 jest zamknięty na sumę (skończona bądź nie)

(c') Weźmy dwa dowolne zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$. Pokażemy, że $B \cap C \in T_1$

Rozważmy przypadki:

- $B \vee C = \emptyset$

Wtedy: $B \cap C = \emptyset \in T_1$

- $B \wedge C \neq \emptyset$ Wtedy mamy przypadki:

- $B \wedge C = \mathbb{R}$

Wtedy $B \cap C = \mathbb{R} \in T_1$

- $B \vee C \neq \mathbb{R}$

Wtedy któryś ze zbiorów (być może oba) jest postaci $(-m, m)$ dla $m \in \mathbb{N}$. Jeśli $B = \mathbb{R}$ i $C = (-m, m)$, $m \in \mathbb{N}$ to $B \cap C = (-m, m) \in T_1$. Drugi przypadek to gdy oba są postaci prostej, czyli $B = (-m, m)$ oraz $C = (-n, n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$. Wtedy niech $k = \min(m, n)$, mamy $B \cap C = (-k, k) \in T_1$

Zatem T_1 zamknięte na przekrój.

T_1 jest zatem topologia. c.b.d.u.

dla T_2 mamy:

Dowód będzie analogiczny do tego z T_1 . Postaram się go bardziej ładnie zrobić.

(a') Z opisu T_2 wnioskujemy, że $\mathbb{R} \in T_2$ oraz $\emptyset \in T_2$.

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym. Rozważmy przypadki:

- $U_\alpha = \mathbb{R}$ dla pewnego $\alpha \in A$. Wtedy:
 $U = \mathbb{R} \in T_2$
- $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ dla kazdego $\alpha \in A$ Wtedy:
 Rozwazmy przypadki:
 - $U_\alpha = \emptyset$ dla kazdego $\alpha \in A$ Wtedy:
 $U = \emptyset \in T_2$
 - $U_\alpha \neq \emptyset$ dla pewnego α Wtedy:
 Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

$$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = [-x, x])$$

oraz zbior

$$B = \{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

jako zbior indeksow n dla ktorych istnieje $\alpha \in A$ taka ze $U_\alpha = [-n, n]$.

Nastepnie rozwazmy dwa przypadki:

I. Zbior B jest ograniczony z gory. Wtedy z tego, ze B jest ograniczony oraz B zawiera tylko liczby naturalne, wnioskujemy, ze istnieje w B maximum. Niech $m = \max(B)$. Wtedy $U = [-m, m] \in T_2$

II. Zbior B jest nieograniczony z gory. Wtedy $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbb{R}$, lecz zalozyliśmy, ze $U \neq \mathbb{R}$. Zatem sprzeczność, wiec ten przypadek nam odpada.

Zatem T_2 jest zamknięty na sume.

(c') Wezmy dowolne dwa zbiory $B \in T_2$ oraz $C \in T_2$. Wtedy:

Rozwazmy przypadki:

- $B = \mathbb{R} \wedge C = \mathbb{R}$. Wtedy:
 $B \cap C = \mathbb{R} \in T_2$.
- WLOG zalożmy, ze $B \neq \mathbb{R}$. Wtedy:
 Rozwazmy przypadki:
 - $B = \emptyset$. Wtedy bezwzględnie na C :
 $B \cap C = \emptyset \in T_2$
 - $B = [-n, n]$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:
 - I. Jesli $C = \emptyset$ to:
 $B \cap C = \emptyset \in T_2$.

II. Jesli $C = [-m, m]$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, Wtedy:
 Niech $k = \min(m, n)$, mamy $B \cap C = [-k, k] \in T_2$

Zatem T_2 jest zamknięte na skończone przekroje.

Podsumowując, sprawdziliśmy z definicji topologii i otrzymaliśmy ze T_2 jest topologia. c.b.d.u.

dla T_3 mamy:

(a') Z opisu T_3 mamy, ze $\mathbb{R} \in T_3$ oraz $\emptyset \in T_3$

(b') Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym.

Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

$$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = [x, \infty])$$

oraz zbior

$$B = \{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\}$$

B to zbior wszystkich indeksow n dla ktorych $U_\alpha = [n, \infty]$. Poniewaz zbior ten zawiera tylko liczby naturalne, wiec ma minimum. Niech $m = \min(B)$. Wtedy $U = [m, \infty] \in T_3$. Zatem T_3 jest zamknięty na sume.

(c') Wezmy sobie dowolne zbiory $B \in T_3$ oraz $C \in T_3$. Niech $b = \min(B)$ oraz $c = \min(C)$. Wtedy $B \cap C = [\min(b, c), \infty] \in T_3$ bo $\min(b, c) \in \mathbb{N}$. Zatem T_3 jest zamknięty na przekroj.

Podsumowując, rozważyliśmy wszystkie możliwości i otrzymaliśmy, ze T_3 jest topologia.

6. Niech \mathbb{N} bedzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich. Udowodnij ze kazda z następujących kolekcji(w ramach) podzbiorow \mathbb{N} jest topologia.

Definicja: Initial segment topology; poki co brak polskiego tłumaczenia

T_1 zawiera \mathbb{N} oraz \emptyset oraz kazdy zbior $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, dla dowolnego n naturalnego dodatniego.

Dowód:

- Z opisu mamy, że $\emptyset \in T_1$ oraz $\mathbb{N} \in T_1$
- Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ dla pewnego zbioru indeksowego A i $U_\alpha \in T_1$. Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

$$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = \{1, 2, 3, \dots, x\})$$

oraz zbior

$$B = \{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\}$$

Rozważmy przypadki:

- Zbior B jest ograniczony z góry.
Ponieważ B zawiera liczby naturalne dodatnie i jest ograniczony z góry więc zawiera maximum. Niech $m = \max(B)$.
Zatem dla pewnego $\alpha, U_\alpha = \{1, 2, \dots, m\}$. Wtedy $U = \{1, 2, \dots, m\} \in T_1$.
- Zbior B jest nieograniczony z góry.
Ponieważ zbior B zawiera liczby naturalne dodatnie (od 1 wzwyż) i nie jest ograniczony z góry, więc $B = \mathbb{N}$. Zatem dla dowolnej $\alpha \in A$ istnieje $\alpha' \in A$ taka że, $U_\alpha \subset U_{\alpha'}$. Zatem $U = \mathbb{N}$.

Zatem T_1 jest zamknięty na sumę.

- Weźmy dowolne dwa zbiory $B \in T_1$ oraz $C \in T_1$

Rozważmy przypadki:

- $B = C = \mathbb{N}$. Wtedy:
 $B \cap C = \mathbb{N} \in T_1$
- WLOG $B \neq \mathbb{N}$. Wtedy:

Rozważmy przypadki:

- * $B = \emptyset$ Wtedy:
Bez względu na C . $B \cap C = \emptyset \in T_1$
- * $B \neq \emptyset$, czyli $B = \{1, 2, \dots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ to:
Jeśli $C = \emptyset$, to $B \cap C = \emptyset \in T_1$.
Jeśli $C = \{1, 2, \dots, m\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, to $B \cap C = \{1, 2, \dots, \min(n, m)\} \in T_1$

Zatem T_1 jest zamknięty na przekrój.

Zatem T_1 to topologia.

Definicja: Final segment topology; poki co brak polskiego tłumaczenia

T_2 zawiera \mathbb{N} oraz \emptyset oraz kazdy zbior $\{n, n+1, n+2, \dots\}$, dla dowolnego n naturalnego dodatniego.

Dowód:

- Z opisu mamy, że $\emptyset \in T_2$ oraz $\mathbb{N} \in T_2$
- Niech $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie A jest pewnym zbiorem indeksowym oraz $U_\alpha \in T_2$. Wprowadzmy sobie funkcje zdaniowa

$$P(x) = (\exists \alpha \in A)(U_\alpha = \{x, x+1, x+2, \dots\})$$

oraz zbior

$$B = \{n : P(n) \wedge n \in \mathbb{N}^+\}$$

Niech $m = \min(B)$. Wtedy dla każdego $\alpha \in A, U_\alpha \subset \{m, m+1, \dots\}$ oraz $U = \{m, m+1, \dots\} \in T_2$.

Zatem T_2 jest zamknięty na sumę.

- Weźmy dowolne $B \in T_2$ oraz $C \in T_2$.

Rozważmy przypadki:

- $B = \emptyset \vee C = \emptyset$. Wtedy:
 $B \cap C = \emptyset \in T_2$
- $B = \mathbb{N} \wedge C = \mathbb{N}$. Wtedy:
 $B \cap C = \mathbb{N} \in T_2$

- Zaden z nich nie jest pusty oraz oba nie sa zbiorem \mathbb{N} . Wtedy:
Jesli $B = \{m, m + 1, \dots\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $C = \{n, n + 1, \dots\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $B \cap C = \{max(m, n), max(m, n) + 1, \dots\} \in T_2$

Jesli WLOG $B = \{m, m + 1, \dots\}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $C = \mathbb{N}$ to $B \cap C = \{m, m + 1, \dots\} \in T_2$

Zatem T_2 jest zamkniete na przekroj

Zatem T_2 to topologia. c.b.d.u.

7. Wypisz wszystkie mozliwe topologie na ponizszych zbiorach:

(a) $X = \{a, b\}$

Odpowiedz:

Sa takie 4 topologie:

$$T_1 = \{X, \emptyset\}$$

$$T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$

$$T_3 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$$

$$T_4 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

(b) $X = \{a, b, c\}$

Odpowiedz:

Jest takich 29 topologii: TODO PRZEPISAC Z KARTKI JE TUTAJ

TODO NAPISZ DOWOD ZE JEST ICH 29, NA WIKI SPRAWDZ: TOPOLOGIES ON SET WITH 3 ELEMENTS

$$T_1 = \{X, \emptyset\}$$

$$T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \}$$

$$T_3 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

$$T_4 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$$

$$T_5 = \{X, \emptyset, \{c\}\}$$

$$T_6 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$$

$$T_7 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$$

$$T_8 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$$

$$T_9 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, a\}\}$$

$$T_{10} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{c, a\}\}$$

$$T_{11} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{c, b\}\}$$

$$T_{12} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$$

$$T_{13} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$T_{14} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b, c\}\}$$

8. Udowodnij ponizszy lemat.

Lemat: Topologia dyskretna i podzbiory nieskonczone

Niech X bedzie zbiorem nieskonczonym oraz T topologia na X . Jezeli kazdy nieskonczony podzbior X nalezy do T , to T jest topologia dyskretna.

Dowod:

Zgodnie z ktoryms tam lematem (latwy dowod), jesli T zawiera $\{x\}$ gdzie $x \in X$ jest dowolnym elementem X , to T jest topologia dyskretna.

Zatem wezmy dowolny element $x \in X$. Skoro X jest nieskonczonym zbiorem i kazdy nieskonczony podzbior X jest w T , to oznacza, ze mozemy sobie wybrac z X , nieskonczony ciag rozn wartosciowy, w ktorym nie ma elementu x .

Jak? Na przyklad tak:

$$\begin{cases} a_1 = \begin{cases} 1 & \text{jesli } x \neq 1 \\ 0 & \text{jesli } x = 1 \end{cases} \\ a_n = \min \{y : y \in X \wedge y \neq x \wedge (\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\})(a_i \neq y)\} \end{cases}$$

Nastepnie rozwazmy dwa nieskonczone zbiory:

$$A = \{a_n : n = 2 \times k \wedge k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\}$$

oraz

$$B = \{a_n : n = 2 \times k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\}$$

Wtedy oczywiście $A \in T$ oraz $B \in T$ oraz $A \cap B = \{x\} \in T$

Z dowolności x , wnioskujemy, że T zawiera dowolny singleton $\{x\}$ taki że, $x \in X$. Zatem T jest topologią dyskretną. c.b.d.u.

9. Wskaz i udowodnij, które z poniższych zbiorów liczb rzeczywistych \mathbb{R} są topologiami.

T_1 : zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział (a, b) gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$;

Nie:

Weźmy sobie zbiór $A = \{1, 2\}$ oraz $B = \{4, 5\}$. Oczywiście $A \in T_1$ oraz $B \in T_1$, ale suma $A \cup B = \{1, 2\} \cup \{4, 5\} \notin T_1$

T_2 : zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Tak:

- Z definicji $\mathbb{R} \in T_2$ oraz $\emptyset \in T_2$
- Weźmy dowolną $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, gdzie $U_\alpha \in T_2$ oraz A jest pewnym zbiorem indeksowym. Wtedy jeśli pewien $U_\alpha = \mathbb{R}$ to $U = \mathbb{R} \in T_2$. W przeciwnym przypadku, jeśli każdy $U_\alpha = \emptyset$ to $U = \emptyset \in T_2$. W przeciwnym przypadku, jeśli nie każdy $U_\alpha = \emptyset$ wtedy rozważmy przypadki: jeśli zbiór indeksów r , dla których $U_\alpha = (-r, r)$, jest ograniczony, to wiemy, że istnieje indeks $q \in \mathbb{R}$, taki że $(\forall \alpha \in A)(U_\alpha \subseteq (-q, q))$ oraz $(-q, q) \in T_2$. Z drugiej strony jeśli zbiór indeksów r , dla których $U_\alpha = (-r, r)$, jest nieograniczony, to $U = \mathbb{R} \in T_2$.
- Weźmy dowolne dwa zbiory $A \in T_2$ oraz $B \in T_2$. Wtedy jeśli któryś z nich jest \emptyset to $A \cap B = \emptyset$. Jeśli żaden z nich nie jest \emptyset , to albo oba są \mathbb{R} , wtedy $A \cap B = \mathbb{R} \in T_2$ albo któryś z nich nie jest \mathbb{R} . Wtedy albo jeden z nich jest postaci $(-r, r)$ albo oba są tej postaci, $(-r, r), (-q, q)$. W każdym przypadku zauważamy, że $A \cap B = (-r, r) \in T_2$ lub $A \cap B = (-\min(r, q), \min(r, q)) \in T_2$

T_3 : zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{Q}^+$;

Odpowiedz:

Nie. Rozważmy ciąg liczb wymiernych r_n dążący do liczby niewymiernej r . Dodatkowo rozważmy nieskończoną sumę zbiorów $\bigcup_{i=1}^{\infty} (-r_n, r_n)$. Wtedy przy $n \rightarrow \infty$, $(-r_n, r_n) \rightarrow (-r, r)$. Każdy zbiór z $\bigcup_{i=1}^{\text{infy}} (-r_n, r_n)$ jest w T_3 ale $(-r, r)$ już nie jest.

T_4 : zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział $[-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{Q}^+$;

Odpowiedz:

Nie. Rozważmy ciąg liczb wymiernych r_n dążący do liczby wymiernej r . Dodatkowo rozważmy nieskończoną sumę zbiorów $\bigcup_{i=1}^{\infty} [-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}]$. Wtedy przy $n \rightarrow \infty$, $[-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}] \rightarrow (-r, r)$. Każdy zbiór z sumy $\bigcup_{i=1}^{\infty} [-r_n + \frac{1}{n}, r_n - \frac{1}{n}]$ jest w T_4 , ale $(-r, r)$ już nie jest.

T_5 : zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;

Odpowiedz:

Nie. Rozważmy ciąg liczb niewymiernych dążący do liczby wymiernej. Niech r_n będzie ciągiem liczb wymiernych dążącym do $\sqrt{2}$. Następnie rozważmy ciąg $g_n = 2 + \sqrt{2} - r_n$. Wtedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} (-g_n, g_n)$ dąży do $(-2, 2)$ przy $n \rightarrow \infty$. Argumentacja podobna jak w przykładzie 4.

T_6 : zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział $[-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$;

Odpowiedz:

Nie. Rozważmy ciąg liczb niewymiernych dążący do liczby wymiernej g_n . Rozważmy nieskończoną sumę $\bigcup_{i=1}^{\infty} [-g_n + \frac{1}{n}, g_n - \frac{1}{n}]$. Suma ta dąży do $[-g, g]$, gdzie g jest liczbą wymierną.

T_7 : zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział $[-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Odpowiedz:

Nie. Przykład z podpunktu 4 tutaj zadziała.

T_8 : zawiera \mathbb{R}, \emptyset oraz każdy przedział $(-r, r]$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Odpowiedz: Nie. Przykład z podpunktu 4 takza tutaj zadziała.

T_9 : zawiera \mathbb{R}, \emptyset , każdy przedział $[-r, r]$ oraz każdy przedział $(-r, r)$ gdzie $r \in \mathbb{R}^+$;

Odpowiedz:

Tak. Można tu zrobić dowód w stylu tych poprzednich- czyli przeanalizować wszystkie przypadki, ale poczekam na coś lepszego. Zostanie to tutaj uzupełnione.

T_{10} : zawiera \mathbb{R}, \emptyset , każdy przedział $[-n, n]$ oraz każdy przedział $(-r, r)$ gdzie $n \in \mathbb{N}^+$ oraz $r \in \mathbb{R}^+$;

Odpowiedz:

Tak. Można tu zrobić dowód w stylu tych poprzednich- czyli przeanalizować wszystkie przypadki, ale poczekam na coś lepszego. Zostanie to tutaj uzupełnione.

1.2 Zbiory otwarte: definicje, lematy, zadania i rozwiązania

1.2.1 Definicja: Zbiór otwarty- open set

Niech (X, T) będzie przestrzenia topologiczna. Wtedy elementy T nazywają się **zbiory otwarte**.

1.2.2 Lemat: Przestrzeń topologiczna i zbiory otwarte

Niech (X, T) będzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- X oraz \emptyset są zbiorami otwartymi.
- suma (skonczona lub nie) zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym
- przekroj skończony zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym

Dowód: Wynika to wprost z definicji. Podpunkt trzeci wynika z zadania 4.

1.2.3 Definicja: Zbiór domknięty- closed set

Niech (X, T) będzie przestrzenia topologiczna. Podzbiór S zbioru X jest **zbiorem domkniętym** w (X, T) jeśli jego dopełnienie w X , $X \setminus S$, jest zbiorem otwartym w (X, T)

Komentarz

Czyli mówimy, że S , będące podzbiorem X , jest zbiorem domkniętym w (X, T) jeśli jego dopełnienie w X , czyli $X \setminus S$ jest otwarte, czyli jeśli $X \setminus S \in T$

Zauważmy, że jeśli (X, T) jest przestrzenia dyskretna, wtedy każdy podzbiór X jest zbiorem domkniętym. Jednakże w przestrzeni niedyskretniej, (X, T) , jedyne zbiory domknięte są X oraz \emptyset

1.2.5 Lemat: Przestrzeń topologiczna i zbiory domknięte

Niech (X, T) będzie przestrzenia topologiczna. Wtedy

- \emptyset oraz X są zbiorami domkniętymi
- przekroj skończonej lub nieskończonej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym
- suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym

Komentarz:

Mozna tu dostrzec pewną analogię pomiędzy przestrzenią topologiczną a zbiorami otwartymi

Dowód:

TODO

Cwiczenie 1.2:

1. Wypisz wszystkie 64 podzbiory zbioru $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Obok każdego zbioru wypisz czy jest

- clopen (czyli otwarty i domknięty)
- ani domknięty ani otwarty
- otwarty ale nie domknięty
- domknięty ale nie otwarty

dla topologii T zadanej na X , takiej, że:

$$T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

Odpowiedz:

1. \emptyset : jest clopen, bo jest otwarty czyli należy do T oraz domknięty bo jego dopełnienie, czyli X należy do T .
2. $\{a\}$: jest clopen, bo jest otwarty czyli należy do T oraz domknięty bo jego dopełnienie $\{b, c, d, e, f\}$ należy do T .
3. $\{b\}$: nie jest otwarty bo nie należy do T oraz nie jest domknięty, bo jego dopełnienie też nie należy do T
4. $\{c\}$: nie jest otwarty ani domknięty
5. $\{d\}$: nie jest otwarty ani domknięty

6. $\{e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
7. $\{f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
8. $\{a, b\}$: nie jest otwarty ani domkniety
9. $\{a, c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
10. $\{a, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
11. $\{a, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
12. $\{a, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
13. $\{b, c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
14. $\{b, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
15. $\{b, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
16. $\{b, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
17. $\{c, d\}$: jest otwarty bo należy do T , ale nie jest domkniety bo jego dopasowanie $\{a, b, e, f\}$ nie należy do T
18. $\{c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
19. $\{c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
20. $\{d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
21. $\{d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
22. $\{e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
23. $\{a, b, c\}$: nie jest otwarty ani domkniety
24. $\{a, b, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
25. $\{a, b, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
26. $\{a, b, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
27. $\{a, c, d\}$: jest otwarty bo należy do T , ale nie jest domkniety bo jego dopełnienie $\{b, e, f\}$ nie należy do T
28. $\{a, c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
29. $\{a, c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
30. $\{a, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
31. $\{a, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
32. $\{a, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
33. $\{b, c, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
34. $\{b, c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
35. $\{b, c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
36. $\{b, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
37. $\{b, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
38. $\{b, e, f\}$: nie jest otwarty, bo nie należy do T , ale jest domkniety bo jego dopełnienie, czyli $\{a, c, d\}$ należy do T .
39. $\{c, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
40. $\{c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
41. $\{c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
42. $\{d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
43. $\{a, b, c, d\}$: nie jest otwarty ani domkniety
44. $\{a, b, c, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
45. $\{a, b, c, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
46. $\{a, b, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
47. $\{a, b, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
48. $\{a, b, e, f\}$: nie jest otwarty bo nie należy do T , ale jest domkniety bo jego dopełnienie czyli c, d należy do T
49. $\{a, c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
50. $\{a, c, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
51. $\{a, c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
52. $\{a, c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
53. $\{a, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety

54. $\{b, c, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
55. $\{b, c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
56. $\{b, c, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
57. $\{b, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
58. $\{c, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
59. $\{a, b, c, d, e\}$: nie jest otwarty ani domkniety
60. $\{a, b, c, d, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
61. $\{a, b, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
62. $\{a, c, d, e, f\}$: nie jest otwarty ani domkniety
63. $\{b, c, d, e, f\}$: jest clopen, bo należy do T oraz jest domkniety bo jego dopełnienie $\{a\}$ należy do T
64. $\{a, b, c, d, e, f\}$: jest clopen, należy do T oraz jest domkniety bo jego dopełnienie czyli \emptyset należy do T

2. Niech (X, T) będzie przestrzenia topologiczna z własnością taką, że każdy podzbiór jest domkniety (closed). Udowodnij że jest to przestrzeń dyskretna.

Odpowiedz:

Zauważmy że przestrzeń dyskretna to taka przestrzeń, która zawiera wszystkie swoje podzbiory, równoważnie zawiera każdy singleton. Z założenia zadania mamy, że każdy podzbiór X jest domkniety. Weźmy dowolny podzbiór X , nazwijmy go A . Skoro każdy podzbiór X jest domkniety oraz $X \setminus A \subseteq X$, wnioskujemy, że $X \setminus A$ jest domkniety, czyli jego dopełnienie, czyli A jest otwarte. Z dowolności wyboru A , mamy, że (X, T) jest przestrzenia dyskretna.

3. Pokaż że jeśli (X, T) jest przestrzenia dyskretna lub przestrzenia nie dyskretna, wtedy każdy otwarty (open) zbiór jest clopen zbiorem. Znajdź topologię T na zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$, która nie jest dyskretna oraz nie jest nie dyskretna ale ma własność taką, że każdy zbiór otwarty (open) jest clopen.

Odpowiedz:

Załozmy, że (X, T) jest przestrzenia topologiczna taka, że każdy jej podzbiór jest domkniety. Skoro każdy podzbiór jest domkniety, to każdy podzbiór jest otwarty. Czyli każdy podzbiór X należy do T . Zatem (X, T) jest przestrzenia dyskretna.

4. Niech X będzie zbiorem nieskonczonym. Jeśli T jest topologia na X taka że każdy nieskonczony podzbiór X jest domkniety (closed), udowodnij że T jest topologia dyskretna.

Odpowiedz

Mamy, że X jest zbiorem nieskonczonym oraz topologia T na X ma taką własność, że każdy nieskonczony podzbiór X jest domkniety. Weźmy dowolny element $a \in X$, rozważmy nieskonczony zbiór $X \setminus \{a\}$. Jest on oczywiście nieskonczony i jest podzbiorem X . Zatem jest domkniety, czyli jego dopełnienie $\{a\} \in T$. Ponieważ a było dowolnym elementem X , wnioskujemy, że T jest topologia dyskretna.

5. Niech X będzie nieskonczonym zbiorem oraz T topologia na X z własnością taką, że jedynym nieskonczonym podzbiorem X , który jest otwarty jest X . Czy (X, T) musi być przestrzenia niedyskretna?

Odpowiedz:

Nie. Weźmy $X = \mathbb{N}$ oraz topologię T na X : $T = \{\mathbb{N}, \emptyset, \{1, 2\}\}$. TODO

6. Niech T będzie topologia na zbiorze X taka, że ma tylko 4 zbiory; dokładnie, $T = \{X, \emptyset, A, B\}$ gdzie A i B to niepuste różne, podzbiory **właściwe** (czyli nie mogą być równe X) X .

Udowodnij że A i B spełniają tylko jeden z wymienionych kryteriów:

- $B = X \setminus A$;
- $A \subset B$;
- $B \subset A$.

Korzystając z powyższego zadania, wypisz wszystkie topologie na $X = \{1, 2, 3, 4\}$ zawierające dokładnie 4 zbiory.

- 7.
- Używając indukcji, udowodnij że wraz ze wzrostem n , gdzie n to liczba elementów zbioru X , liczba topologii na zbiorze X wzrasta.
 - Używając indukcji udowodnij że jeśli skończony zbiór X ma $n \in \mathbb{N}$ punktów, to ma co najmniej $(n - 1)!$ różnych topologii.
 - Jeśli zbiór X jest dowolnym nieskonczonym zbiorem o mocy (cardinality) \aleph , czyli jest przeliczalny. Udowodnij, że jest co najmniej 2^{\aleph} różnych topologii na X . Wywnioskuj że każdy nieskonczony zbiór ma nieprzeliczalnie dużo różnych topologii na sobie.

1.3 Skonczenie-domknieta topologia(ang. The Finite-Closed Topology): definicje lematy, zadania i rozwiazania.

Do tej pory definiowalismy topologie poprzez okreslanie ktore zbiory sa otwarte. Czasami jest bardziej naturalnie opisac topologie poprzez okreslenie ktore zbiory sa domknietae.

1.3.1 Definicja: Skonczenie domknieta topologia(finite-closed topology(cofinite topology))

Niech X bedzie nie pustym zbiorem. Mowimy ze topologia T na X jest **skonczenie-domknieta topologia lub koskonczona topologia**(ang. finite-closed topology or cofinite topology) jesli domknietymi podzbiarami X sa X oraz wszystkie skonczone podzbiory X ; czyli otwartymi zbiorami sa \emptyset oraz wszystkie podzbiory X , ktore maja skonczone dopełnienia.

Inaczej:

$$T = \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ or } X \setminus A \text{ jest skonczony}\}$$

Dowod, ze T z tej definicji jest rzeczywiscie topologia TODO

Komentarz:

Zauwazmy, ze definicja 1.3.1 nie mowi nam, ze kazda topologia ktora zawiera w sobie X oraz domknietae skonczone podzbiory X jest skonczenie-domknieta topologia. Chodzi o to, ze domknietymi zbiorami musza byc tylko skonczone podzbiory X . W skonczenie-wymiarowej topologii wszystkie skonczone zbiory sa domknietae. Jednakze ponizszy przyklad pokazuje ze nieskonczone podzbiory nie musza byc otwarte.

1.3.2 Przyklad Rozwazmy zbior \mathbb{N} . Wtedy zbiory $\{1\}, \{5, 6, 7\}, \{2, 4, 6, 8\}$ sa skonczone wiec sa domknietae w skonczenie-domknietej topologii. Zatem ich dopełnienia:

$$\{2, 3, 4, \dots\}, \{1, 2, 3, 4, 8, 9, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

sa otwarte w skonczenie-domknietej topologii. Z drugiej strony, zbior parzystych liczb naturalnych nie jest domknietaem zbiorem poniewaz nie jest skonczony wiec jego dopełnienie, zbior liczb nieparzystych nie jest zbiorem domknietym w skonczenie-wymiarowej topologii. Wiec wszystkie skonczone zbiory sa domknietae, ale nie wszystkie nieskonczone zbiory sa otwarte.

1.3.3 Przyklad

Niech T bedzie skonczenie-wymiarowa topologia na zbiorze X . Jesli X ma przynajmniej 3 rozne clopen podzbiory, udowodnij ze X jest skonczonym zbiorem.

Komentarz do przykladu:

W zalozeniach zadania przykladu mamy to, ze T jest **skonczenie-domknieta topologia** oraz ze sa conajmniej 3 rozne clopen zbiory. Mamy pokazac, ze X jest zbiorem skonczonym.

Przypomnijmy, ze T jest **skonczenie-domknieta topologia**, czyli znaczy to ze rodzina wszystkich domknietych zbiorow sklada sie z X oraz wszystkich skonczonych podzbiorow X . Przypomnijmy rowniez, ze zbior jest clopen wtedy i tylko wtedy jesli jest jednoczesnie otwarty(open) oraz domkniety(closed). Przypomnijmy rowniez ze w kazdej przestrzeni topologicznej sa przynajmniej 2 zbiory, ktore sa clopen, mianowicie X oraz \emptyset . W przykladzie mamy dodatkowo podane, ze w przestrzeni (X, T) sa conajmniej 3 zbiory, ktore sa clopen. Wynika z tego, ze jest jeszcze jeden zbior clopen, ktory jest rozny od X oraz \emptyset .

Dowod:

Przestrzen topologiczna (X, T) ma 3 rozne podzbiory, ktore sa clopen, wiemy ze jest pewien podzbior $S \subseteq X$ taki ze, $S \neq X$ oraz $S \neq \emptyset$. Poniewaz S jest otwarty w (X, T) , wiec jego dopełnienie $X \setminus S$ jest zbiorem domknietym. Wiec S oraz $X \setminus S$ sa domknietae w skonczenie-domknietej topologii T . Zatem S oraz $X \setminus S$ sa obaj skonczonymi zbiorami, poniewaz zaden z nich nie jest rowny X . Ale $X = S \cup X \setminus S$, wiec X jest suma dwoch skonczonych zbiorow. Zatem X jest zbiorem skonczonym.

WDM-powtorka:

1.3.4 Definicja: Funkcja injekcja/surjekcja/bijekcja

Niech f bedzie funkcja z zbioru X w zbior Y .

- Funkcja f jest 1-1 lub injekcja jesli

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2, \text{ dla } x_1, x_2 \in X$$

- Funkcja f jest na lub surjekcja jesli

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(f(x) = y)$$

- Funkcja f jest bijekcja jesli jest jednoczesnie 1-1 i na.

1.3.5 Definicja: Odwrotnosc funkcji.

Niech f bedzie funkcja z zbioru X w zbior Y . Mowimy, ze funkcja f ma odwrotnosc(**have an inverse**) jesl istnieje taka funkcja g z Y w X , ze $g(f(x)) = x$, for all $x \in X$ oraz $f(g(y)) = y$, for all $y \in Y$. Funkcje g nazywamy funkcja odwrotna(**inverse function**) do f .

1.3.6 Lemat: Własności funkcji.

Niech f będzie funkcja z zbioru X w zbiór Y .

- Funkcja f ma odwrotność iff f jest bijekcją
- Niech g_1 oraz g_2 będą funkcjami z Y w X . Jeśli g_1 oraz g_2 są obie funkcjami odwrotnymi do f , wtedy $g_1 = g_2$; to znaczy $g_y = g_y$, dla każdego $y \in Y$.
- Niech g będzie funkcja z Y w X . Wtedy g jest funkcją odwrotną do f iff f jest funkcją odwrotną do g .

Dowód: TODO

Bardzo ważna definicja.

1.3.7 Definicja: Przeciwobraz funkcji

Niech f będzie funkcja ze zbioru X w zbiór Y . Jeśli S jest dowolnym podzbiorem Y , to zbiór $f^{-1}(S)$ jest zdefiniowany jako:

$$f^{-1}(S) = \{x : x \in X \text{ and } f(x) \in S\}$$

Mówimy, że podzbiór $f^{-1}(S)$ zbioru X jest przeciwobrazem (**inverse image**) zbioru S (przy odwzorowaniu f).

Komentarz:

Zauważmy, że funkcja odwrotna do funkcji $f : X \rightarrow Y$ istnieje iff f jest bijekcją. Natomiast przeciwobraz dowolnego podzbioru Y istnieje nawet wtedy, kiedy f nie jest 1-1 ani na.

Konczymy ten rozdział ciekawym przykładem.

1.3.9 Przykład

Niech (Y, T) będzie przestrzenią topologiczną oraz X niepustym zbiorem. Niech f będzie funkcja z X w Y . Połóżmy $T_1 = \{f^{-1}(S) : S \in T\}$. Udowodnij, że T_1 jest topologią na X .

Dowód:

Musimy pokazać zachodzenie trzech podpunktów z definicji topologii.

•

$$X \in T_1 \quad \text{bo} \quad X = f^{-1}(Y) \quad \text{i} \quad Y \in T \quad (1)$$

$$\emptyset \in T_1 \quad \text{bo} \quad \emptyset = f^{-1}(\emptyset) \quad \text{i} \quad \emptyset \in T \quad (2)$$

Zatem T_1 ma własność nr 1.

- Niech $\{A_j : j \in J\}$ będzie kolekcją elementów z T_1 , dla jakiegoś zbioru indeksowego J . Pokażemy, że $\bigcup_{j \in J} A_j \in T_1$. Ponieważ $A_j \in T_1$, więc z definicji T_1 wynika, że $A_j = f^{-1}(B_j)$, gdzie $B_j \in T$. Ponadto $\bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j)$. (Dowód w cw 1.3 #1) Zauważmy, że $B_j \in T$, dla każdego $j \in J$, więc $\bigcup_{j \in J} B_j \in T$, bo T jest topologią na Y . Zatem z definicji T_1 , $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) \in T_1$; czyli $\bigcup_{j \in J} A_j \in T_1$. Zatem T_1 ma własność numer 2.

- Niech A_1 oraz A_2 będą w T_1 . Musimy pokazać, że $A_1 \cap A_2 \in T_1$. Ponieważ $A_1, A_2 \in T_1$, $A_1 = f^{-1}(B_1)$ oraz $A_2 = f^{-1}(B_2)$, gdzie $B_1, B_2 \in T$. $A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. (Dowód w cw 1.3 #1). Ponieważ $B_1 \cap B_2 \in T$, mamy $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in T_1$. Zatem $A_1 \cap A_2 \in T_1$ i pokazaliśmy, że T_1 spełnia własność nr 3 z definicji topologii.

Zatem T_1 jest rzeczywiście topologią.

Komentarz, bardzo ważny:

Odnosi się do punktu drugiego definicji topologii, w której musimy pokazać, że dowolna suma (skończona lub nie) zbiorów z T , należy do T . Oznacza to, że nie wszystkie zbiory są przeliczalne. Wobec tego nie wystarczy założyć, że zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ są w T i pokazać, że ich suma też jest w T . To dowiedzie tylko tego, że **przeliczalna** suma zbiorów z T , należy do T . Nie wystarczy to, aby pokazać własność nr 2. Własność ta wymaga, aby **dowolna** suma zbiorów z T skończona lub nie, przeliczalna lub nie przeliczalna, należała do T .

Cwiczenia 1.3

TODO

2 Topologia euklidesowa

2.1 Topologia euklidesowa na \mathbb{R}

2.1.1 Definicja: Topologia euklidesowa na \mathbb{R}

Mówimy że podzbiór S zbioru \mathbb{R} jest otwarty w **topologii euklidesowej na \mathbb{R}** jeśli spełnia następujące własności:

$$(*) (\forall x \in S)(\exists a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b)(x \in (a, b) \subseteq S)$$

Czyli dla każdego $x \in S$, istnieją $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, takie że $x \in (a, b) \subseteq S$

Własnymi słowami, dla każdego elementu S , istnieje otwarty odcinek w którym ten element się znajduje.

Komentarz:

Przyjmujemy, że kiedykolwiek będziemy mówić o topologii na \mathbb{R} , bez specyfikowania topologii, to będziemy mieli na myśli topologię euklidesową.

Napiszemy teraz kilka bardzo ważnych własności dotyczących topologii euklidesowej na \mathbb{R} . **Uwaga 2.1.2 Własności topologii euklidesowej(niektóre)**

- (a) Pokażemy że topologia euklidesowa jest rzeczywiście topologią. Czyli że definicja 2.1.1 jest prawidłowa. Pokażemy 3 znane własności z definicji topologii.

Musimy pokazać że T spełnia 3 aksjomaty topologii. Mamy że zbiór należy do T iff kiedy ma własność (*).

- Najpierw pokażemy że \mathbb{R} należy do T . Niech $x \in \mathbb{R}$. Połóżmy $a = x - 1$ oraz $b = x + 1$. Wtedy $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$; czyli \mathbb{R} ma własność (*). Zauważmy że $\emptyset \in T$ bo \emptyset ma własność (*) defaultowo.
- Niech teraz $\{A_j : j \in J\}$ dla pewnego zbioru indeksowego J , będzie dowolna rodzina zbiorów z T . Pokażemy że $\bigcup_{j \in J} A_j \in T$; czyli że $\bigcup_{j \in J} A_j$ ma własność (*). Niech $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Wtedy $x \in A_k$ dla pewnego $k \in J$. Ponieważ $A_k \in T$, więc istnieją $a, b \in \mathbb{R}$ takie że $x \in (a, b) \subseteq A_k$. Ponieważ $k \in J$, $A_k \in \bigcup_{j \in J} A_j$ więc $x \in (a, b) \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$. Zatem $\bigcup_{j \in J} A_j$ ma własność (*) i należy do T .
- Weźmy dowolne $A_1, A_2 \in T$. Pokażemy że $A_1 \cap A_2 \in T$. Zatem niech $y \in A_1 \cap A_2 \in T$. Ponieważ $A_1 \in T$ więc istnieją a, b takie że $y \in (a, b)$. Analogicznie istnieją c, d takie że $y \in (c, d) \subseteq A_2$. Niech e będzie $\max(a, c)$ oraz f będzie $\min(b, d)$. Zatem $y \in (e, f)$. Ponieważ $(e, f) \in A_1$ oraz $(e, f) \in A_2$, zatem $(e, f) \in A_1 \cap A_2$. Zatem $A_1 \cap A_2$ ma własność (*), czyli należy do T .

Zatem T jest topologią na \mathbb{R}

Opiszemy teraz jak wyglądają zbiory otwarte i domknięte w tej topologii. W szczególności zobaczymy że każde otwarte przedziały/odcinki są otwarte w tej topologii oraz każde domknięte przedziały/odcinki są zbiorami domkniętymi

- (b) Niech $r, s \in \mathbb{R}$ z $r < s$. W topologii euklidesowej T na \mathbb{R} odcinek/przedział (r, s) należy do T i w konsekwencji jest zbiorem otwartym.

Dowód:

Dowód trywialny. Musimy pokazać, że dla (r, s) zachodzi własność (*). Weźmy dowolnego $x \in (r, s)$. Niech $a = r$ oraz $b = s$. Wtedy $x \in (r, s) \subseteq (a, b)$. Więc (r, s) jest otwarty w topologii euklidesowej

- (c) Przedziały otwarte $(-\infty, r)$ oraz (r, ∞) także są zbiorami otwartymi w \mathbb{R} .

Dowód:

Niech $x \in (r, \infty)$. Połóżmy $a = r$ oraz $b = x + 1$. Wtedy $x \in (a, b) \subseteq (r, \infty)$, a więc $(r, \infty) \in T$. Analogiczny argument dowodzi tego, że $(-\infty, r)$ jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} .

- (d) Bardzo ważne jest, żeby mieć na uwadze, że podczas gdy każdy odcinek otwarty jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} , to przeciwność tego faktu jest fałszywa. Nie każdy zbiór otwarty w \mathbb{R} są odcinkami. Np. zbiór $(1, 2) \cup (4, 5)$ jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} , ale nie jest odcinkiem otwartym. Nawet zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} (2n, 2n+1)$ jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} .

- (e) Dla dowolnego $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, odcinek domknięty $[c, d]$ nie jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} .

Dowód:

Zauważmy, że $c \in [c, d]$. Załóżmy że istnieją takie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, że $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$. Wtedy $c \in (a, b)$ implikuje $a < c < b$ i w związku z tym $a < \frac{c+a}{2} < c$. Zatem $\frac{c+a}{2} \in (a, b)$ i $\frac{c+a}{2} \notin [c, d]$. Czyli $(a, b) \not\subseteq [c, d]$ co jest sprzecznością. Zatem nie istnieją takie a i b , że $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$. Czyli $[c, d]$ nie ma własności (*), więc $[c, d] \notin T$.

(f) Dla dowolnego $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, odcinek domknięty $[a, b]$ jest zbiorem domkniętym w topologii euklidesowej na \mathbb{R} .

Dowód:

Zauważmy że dopełnienie $[a, b]$, czyli $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ jako suma dwóch zbiorów otwartych, jest zbiorem otwartym. Czyli $[a, b]$ jest zbiorem domkniętym.

(g) Każdy singleton $\{a\}$ jest zbiorem domkniętym w \mathbb{R} .

Dowód:

Dopełnienie $\{a\}$ to zbiór $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$, który jest sumą dwóch zbiorów otwartych, czyli jest otwarty. Zatem $\{a\}$ jest domknięty w \mathbb{R} .

(h) Zauważmy że poprzedni podpunkt, to tak naprawdę szczególny przypadek punktu poprzedniego. Tzn. przyjmując, że $\{a\} = [a, a]$, mamy że $\{a\}$ jest domknięty.

(i) Zbiór liczb całkowitych \mathbb{Z} jest domknięty w \mathbb{R}

Dowód:

Dopełnieniem zbioru \mathbb{Z} , jest suma $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n, n+1)$ zbiorów otwartych $(n, n+1) \in \mathbb{R}$, więc jest otwarta w \mathbb{R} . Zatem \mathbb{Z} jest domknięty w \mathbb{R} .

(j) Zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} nie jest ani domknięty w \mathbb{R} ani otwarty w \mathbb{R} .

Pokażemy, że \mathbb{Q} nie jest zbiorem otwartym, udawadniając, że nie spełnia własności (*). Aby to zrobić, wystarczy że pokażemy, że \mathbb{Q} nie zawiera **żadnego** otwartego odcinka (a, b) z $a < b$.

Dowód:

Załozmy, że $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Między dwoma dowolnymi różnymi liczbami rzeczywistymi, znajduje się liczba niewymierna (prosty dowód). Zatem istnieje $c \in (a, b)$ takie że, $c \notin \mathbb{Q}$. To przeczy temu, że $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$. Zatem \mathbb{Q} nie zawiera żadnego odcinka (a, b) czyli nie jest zbiorem otwartym.

Aby pokazać że \mathbb{Q} nie jest zbiorem domkniętym, wystarczy że pokażemy że dopełnienie \mathbb{Q} czyli $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest zbiorem otwartym. Korzystając z tego, że pomiędzy każdymi dwoma liczbami rzeczywistymi znajduje się liczba wymierna, widzimy że $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie zawiera żadnego odcinka (a, b) z $a < b$. Zatem $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} , czyli \mathbb{Q} nie jest zbiorem domkniętym w \mathbb{R} .

(k) W rozdziale 3 udowodnimy że jedynymi zbiorami clopen w \mathbb{R} są \mathbb{R} oraz \emptyset .

2.2 Baza topologii

Uwaga 2.1.2 pozwoliła/pokazała nam jak opisywać topologie euklidesowe na \mathbb{R} w bardziej wygodny sposób. W tym rozdziale rozwinie my ten pomysł przedstawiając bazy topologii.

2.2.1 Lemat

Podzbiór $S \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym wtedy i tylko wtedy kiedy jest sumą otwartych odcinków, i.e. postaci (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$

Dowód:

(\leftarrow) Załozmy że S jest sumą otwartych odcinków. To znaczy że istnieje odcinek (a_j, b_j) gdzie $j \in J$ i J jest jakimś zbiorem indeksowym, takim że $S = \bigcup_{j \in J} (a_j, b_j)$. Wiemy z uwagi 2.1.2 b) że każdy (a_j, b_j) jest zbiorem otwartym. Zatem S jako suma zbiorów otwartych jest otwarty.

(\rightarrow) Załozmy, że S jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} . Wtedy dla każdego $x \in S$ istnieje odcinek $I_x = (a, b)$ taki że $x \in I_x \subseteq S$. Pokażemy teraz, że $S = \bigcup_{x \in S} I_x$. Pokażemy to pokazując zawieranie w dwie strony. Niech $y \in S$. Wtedy $y \in I_y$. Zatem $y \in \bigcup_{x \in S} I_x$. Z drugiej strony niech $z \in \bigcup_{x \in S} I_x$. Wtedy $z \in I_t$ dla pewnego $t \in S$. Ponieważ każdy $I_x \subseteq S$, więc $I_t \subseteq S$ czyli $z \in S$. Zatem $S = \bigcup_{x \in S} I_x$. Czyli S jest sumą otwartych odcinków. Powyższy lemat mówi nam, że aby opisać topologie na \mathbb{R} wystarczy powiedzieć że każdy odcinek

(a, b) jest zbiorem otwartym. Każdy inny zbiór otwarty, jest sumą tych zbiorów otwartych. To prowadzi nas do poniższej definicji.

2.2.2 Definicja: Baza topologii

Niech (X, T) będzie przestrzenią topologiczną. Kolekcja \mathbb{B} zbiorów otwartych w X jest **baza** topologii T jeśli każdy zbiór otwarty jest sumą elementów z \mathbb{B} .

Komentarz

Jeśli \mathbb{B} jest baza topologii T na X to podzbiór $U \subseteq X$ jest w T iff jeśli jest sumą elementów z \mathbb{B} . Zatem \mathbb{B} generuje nam topologie T w ten sposób: jeśli ktoś nam powiedział jakie zbiory są w \mathbb{B} wtedy możemy zdefiniować zbiory w T - są one wszystkimi możliwymi zbiorami złożonym z sum elementów z \mathbb{B} .

Przykłady:

- $\mathbb{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Wtedy \mathbb{B} jest baza topologii euklidesowej na \mathbb{R} , lemat 2.2.1
- Niech (X, T) bedzie topologia dyskretna oraz \mathbb{B} rodzina wszystkich singletonow zbioru X . Wtedy \mathbb{B} jest baza dla T .
- Niech $x = \{a, b, c, d, e, f\}$ oraz $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$. Wtedy $\mathbb{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ jest baza T bo $\mathbb{B} \subseteq T$ oraz kazdy element T mozna wyrazic jako sume elementow z \mathbb{B} . Zauwazmy ze \emptyset jest pusta suma elementow z \mathbb{B} . Zauwazmy tez, ze T jest baza dla samego siebie.

2.2.6 Lematokomentarz: Różne bazy dla tej samej topologii

Tak jak w poprzednim punkcie poruszyliśmy, jeśli (X, T) jest przestrzenia topologiczna, to T same w sobie jest baza dla T . Dla przykładu zbiór wszystkich możliwych podzbiorów X jest baza dla topologii dyskretnej na X .

Widzimy, że dla zadanej topologii T może być wiele różnych baz. Preciesy. Zauważmy (**UDOWODNIJ TO**), że jeśli \mathbb{B} jest baza dla topologii T na zbiorze X , oraz zbiór \mathbb{B}_1 będący kolekcją podzbiorów X taka że $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_1 \subseteq X$, wtedy \mathbb{B}_1 jest także baza T . ← TODO UDOWODNIJ

Zatem baza dla topologii, pozwala nam zdefiniować topologie, lecz trzeba uważać. Spójrzmy na poniższy przykład:

2.2.7 Przykład

Niech $X = \{a, b, c\}$ oraz $\mathbb{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. Wtedy \mathbb{B} **nie jest baza** dla żadnej topologii na X . Aby zobaczyć dlaczego spojrzymy:

Niech \mathbb{B} będzie baza dla topologii T . T zawiera wszystkie możliwe sumy z \mathbb{B} , tj:

$$T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

Ale T nie jest topologia, bo nie zawiera w sobie przekroju $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$. Zatem \mathbb{B} nie może być baza T .

To prowadzi nas do bardzo ważnego pytania: jeśli \mathbb{B} jest kolekcją podzbiorów X , jaki warunek zapewnia to, że \mathbb{B} jest rzeczywiście baza dla topologii na X ?

Poniższy lemat ustali te warunki.

2.2.8 Lemat: Warunek na bycie baza

Niech X będzie niepustym zbiorem oraz \mathbb{B} będzie kolekcją podzbiorów X . Wtedy \mathbb{B} jest baza dla topologii na X wtedy i tylko wtedy kiedy \mathbb{B} ma następujące własności:

$$(a) \quad X = \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B,$$

(b) dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathbb{B}$, zbiór $B_1 \cap B_2$ jest sumą elementów z \mathbb{B}

Dowód:

Zakładamy że X jest niepustym zbiorem oraz \mathbb{B} kolekcją podzbiorów (jakichs?) X .

(\rightarrow)

Implikacja w prawo. Załóżmy że \mathbb{B} jest baza topologii T . T jest topologia więc spełnia 3 aksjomaty topologii (definicja). W szczególności X jest zbiorem otwartym oraz przekrój zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Ponieważ zbiory otwarte są sumą elementów z \mathbb{B} , wynika z tego, że własności (a) oraz (b) są prawdziwe.

(\leftarrow)

Implikacja w lewo. Załóżmy że \mathbb{B} ma własności (a) i (b) oraz niech T będzie kolekcją wszystkich podzbiorów X , które są sumami elementów z \mathbb{B} . Pokażemy, że T jest topologia na X .

Z własności (a), $X = \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B$ zatem $X \in T$. \emptyset jest pusta suma podzbiorów \mathbb{B} zatem $\emptyset \in T$.

Następnie niech $\{T_j\}$ będzie rodziną elementów T . Wtedy każdy T_j jest jakąś sumą elementów z \mathbb{B} . Zatem suma wszystkich T_j jest sumą elementów z \mathbb{B} więc należy do T .

Finalnie niech C oraz D będą w T . Chcemy pokazać że $C \cap D \in T$. Ale $C = \bigcup_{k \in K} B_k$, dla jakiegoś zbioru indeksowego K i zbiorów $B_k \in \mathbb{B}$ oraz $D = \bigcup_{j \in J} B_j$ dla jakiegoś zbioru indeksowego J oraz $B_j \in \mathbb{B}$. Zatem

$$C \cap D = \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{k \in K, j \in J} (B_k \cap B_j)$$

ZROB DOWOD Z TYMI PRZEKROJAMI I SUMAMI TODO

Z założenia (b), każdy $B_k \cap B_j$ jest sumą elementów z \mathbb{B} zatem $C \cap D$ jest sumą elementów z \mathbb{B} . Zatem $C \cap D \in T$. Zatem T spełnia wszystkie 3 aksjomaty z definicji zatem jest topologia.

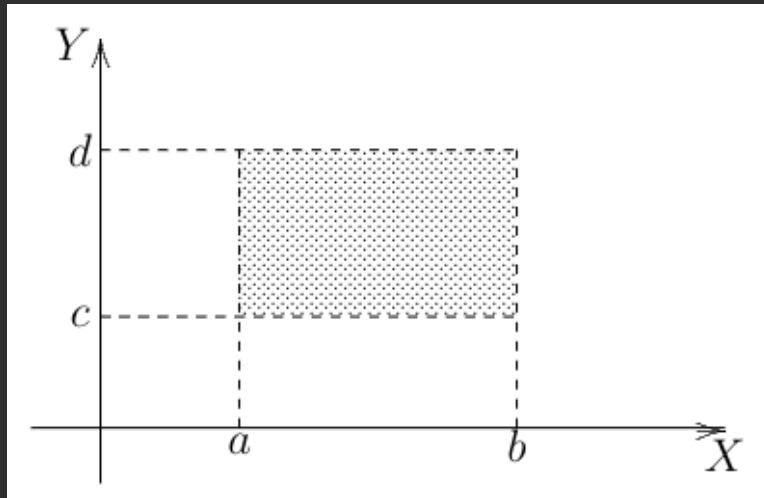
Powyższy lemat 2.2.8 daje nam bardzo pożyteczne narzędzie. Pozwala nam ono zdefiniować topologie tylko poprzez wypisanie jej bazy. Jest to o wiele bardziej poręczniejsze niż opisanie wszystkich zbiorów otwartych.

Posłużymy się teraz tą własnością aby zdefiniować topologie na płaszczyźnie. Jest ona znana pod nazwą "topologia euklidesowa"

2.2.9 Przykład

Niech \mathbb{B} będzie kolekcja wszystkich "otwartych prostokątów" na płaszczyźnie, mających każdy bok równoległy do osi X lub osi Y

$$\mathbb{B} = \{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2, a < x < b, c < y < d \}$$



Wtedy \mathbb{B} jest baza topologii na płaszczyźnie. Ta topologia nazywa się topologia euklidesowa.

Aby dostrzec, że \mathbb{B} jest rzeczywiście baza topologii, zauważmy że (i) płaszczyzna jest sumą wszystkich takich otwartych prostokątów oraz (ii) przekrój dowolnych dwóch prostokątów jest prostokątem. Przez prostokąt rozumiemy tu taki prostokąt z bokami równoległymi do osi X i Y , tak jak na obrazku. Zatem własności z lematu 2.2.8 zachodzą więc \mathbb{B} jest baza.

2.2.10 Lematokomentarz: Uogólnienie Przykładu 2.2.9

Uogólniając przykład 2.2.9 możemy zauważyć jak położyć topologie na $\mathbb{R}^n = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \}$, dla dowolnego całkowitego $n > 2$. Przyjmujemy tutaj, że \mathbb{B} jest kolekcja wszystkich podzbiorów $\{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle : a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n \} \subseteq \mathbb{R}^n$ z bokami równoległymi do osi układu współrzędnych. Taka kolekcja \mathbb{B} jest baza dla **topologii euklidesowej** na \mathbb{R}^n .

2.3 Baza dla podanej wcześniej topologii

Lemat 2.2.8 powiedział nam pod jakimi warunkami kolekcja \mathbb{B} podzbiorów X jest baza dla **pewnej** topologii na X . Jednakże czasami mamy już **ustaloną** topologie T na X i chcemy się dowiedzieć czy \mathbb{B} jest baza dla dokładnie tej topologii T . Możemy to oczywiście sprawdzić z definicji 2.2.2 Bazy topologii, ale lemat 2.3.2 pokazuje nam alternatywną metodę.

Spojrzymy najpierw na pewien przykład:

Przykład 2.3.1

Niech \mathbb{B} będzie kolekcja odcinków jednostronnie domkniętych postaci $(a, b]$, $a < b$, gdzie $(a, b] = \{ x : x \in \mathbb{R}, a < x \leq b \}$. Wtedy \mathbb{B} jest baza dla topologii na \mathbb{R} , ponieważ \mathbb{R} jest sumą wszystkich elementów z \mathbb{B} oraz przekrój dowolnych dwóch jednostronnie otwartych odcinków, jest jednostronnie otwartym odcinkiem.

Jednakże:

Topologia T która ma \mathbb{B} jako swoją bazę, **nie** jest topologia euklidesowa na \mathbb{R} .

Dlaczego? Zauważmy, że $(a, b]$ jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} z topologia T , podczas gdy $(a, b]$ nie jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} z topologia euklidesowa. (nie możemy otoczyć punktu b "odcinkiem otwartym" - dowód ćwiczenie 2.1).

Podsumowując, \mathbb{B} jest baza dla **pewnej** topologii ale nie jest baza dla topologii euklidesowej na \mathbb{R} .

2.3.2 Lemat Baza topologii podejsie 2?

Niech (X, T) będzie przestrzenią topologiczną. Rodzina \mathbb{B} otwartych podzbiorów X jest baza T wtedy i tylko wtedy kiedy dla dowolnego punktu x należącego do dowolnego zbioru otwartego U , istnieje zbiór $B \in \mathbb{B}$ taki że $x \in B \subseteq U$.

Czyli rodzina zbiorów \mathbb{B} jest baza iff dla dowolnego punktu z dowolnego zbioru istnieje zbiór bazowy B taki że $x \in B \subseteq U$

Dowód:

Musimy pokazać że:

- jeśli \mathbb{B} jest baza T oraz $x \in U \in T$, to istnieje $B \in \mathbb{B}$ takie że $x \in B \subseteq U$

oraz

- jeśli dla każdego $U \in T$ i $x \in U$ istnieje $B \in \mathbb{B}$ takie że $x \in B \subseteq U$, wtedy \mathbb{B} jest baza T .

Zatem:

Załozmy że \mathbb{B} jest baza T oraz $x \in U \in T$. Ponieważ \mathbb{B} jest baza T , więc U jest sumą otwartych zbiorów z \mathbb{B} . To znaczy $U = \bigcup_{j \in J} B_j$ dla pewnego zbioru indeksowego J i $B_j \in \mathbb{B}$. Ale $x \in U$ implikuje to że $x \in B_j$ dla pewnego $j \in J$. Zatem $x \in B_j \subseteq U$, tak jak chcieliśmy.

Z drugiej strony, załozmy że dla każdego $U \in T$ and każdego $x \in U$ istnieje $B \in \mathbb{B}$ z $x \in B \subseteq U$. Pokazemy że każdy zbiór otwarty jest sumą elementów z \mathbb{B} . Wtedy niech V będzie dowolnym zbiorem otwartym. Wtedy dla każdego $x \in V$, istnieje $B_x \in \mathbb{B}$ taki że $x \in B_x \subseteq V$. Zauważmy że $V = \bigcup_{x \in V} B_x$ ← **UDOWODNIJ TODO**. Zatem V jest sumą elementów z \mathbb{B} .

2.3.3 Lemat: Baza topologii podejsie 3?

Niech \mathbb{B} będzie baza topologii T na zbiorze X . Wtedy podzbiór U zbioru X jest otwarty wtedy i tylko wtedy kiedy dla każdego $x \in U$ istnieje $B \in \mathbb{B}$ takie że $x \in B \subseteq U$

Dowód:

Niech U będzie dowolnym podzbiorem X . Załozmy że dla każdego $x \in U$ istnieje $B_x \in \mathbb{B}$ taki że $x \in B_x \subseteq U$. Widac że $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ ← **TUTAJ TROCHE NIE KUMAM ZROB DOWOD I PRZEANALIZUJ** Zatem U jest sumą zbiorów otwartych i co za tym idzie U jest zbiorem otwartym. Dowód w druga strone wynika z lematu 2.3.2.

Komentarz

Zauważmy że własność bazy opisana w lemacie 2.3.3 jest dokładnie ta własnością, którą użyliśmy aby opisać topologię euklidesową na \mathbb{R} . Powiedzieliśmy wtedy, że podzbiór $U \subseteq \mathbb{R}$ jest otwarty iff dla każdego $x \in U$ istnieje $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$ takie, że $x \in (a, b) \subseteq U$

ATTENZIONE

Miej na uwadze i pamiętaj, o różnicy w lematkach 2.2.8 i 2.3.2. W lemacie 2.2.8 podaliśmy własności jakie musi mieć rodzina \mathbb{B} aby była dla **pewnej** topologii, podczas gdy lemat 2.3.2 daje nam własności jakie musi mieć rodzina \mathbb{B} podzbiorów przestrzeni topologicznej (X, T) aby być bazą **danej** topologii T .

2.3.4 Lemat: Bazy dla tej samej topologii

Niech B_1 oraz B_2 będą bazami dla topologii odpowiednio T_1 oraz T_2 , na niepustym zbiorze X . Wtedy $T_1 = T_2$ wtedy i tylko wtedy kiedy:

- dla każdego $B \in B_1$ i każdego $x \in B$, istnieje $B' \in B_2$ takie że $x \in B' \subseteq B$, oraz
- dla każdego $B \in B_2$ i każdego $x \in B$, istnieje $B' \in B_1$ takie że $x \in B' \subseteq B$

Dowód:

Pokazemy że B_1 oraz B_2 są bazami dla tej samej topologii iff (a) oraz (b) zachodzą. Najpierw założymy że one są bazami dla tej samej topologii, tzn $T_1 = T_2$ i pokazemy że (a) i (b) zachodzą. Następnie założymy że (a) i (b) zachodzą i pokazemy że $T_1 = T_2$.

Zatem:

Najpierw założymy że $T_1 = T_2$. Wtedy (a) i (b) są konsekwencją lematu 2.3.2

Z drugiej strony, założymy, że B_1 oraz B_2 spełniają warunki (a) oraz (b). Na mocy lematu 2.3.2, (a) implikuje to, że każde $B \in B_1$ jest otwarte w (X, T_2) ; to znaczy $B_1 \subseteq T_2$. Ponieważ każdy element T_1 jest sumą elementów z T_2 , implikuje to $T_1 \subseteq T_2$. Analogicznie (b) pociąga za sobą $T_2 \subseteq T_1$. Czyli $T_1 = T_2$, tak jak chcieliśmy.

Spojrzymy teraz na przykłady.

2.3.5 Przykład

Pokaż, że zbiór \mathbb{B} składający się z wszystkich "otwartych trójkątów równobocznych" z podstawą równoległą do osi X , jest bazą dla topologii euklidesowej na \mathbb{R}^2 . (Otwarty, czyli bez brzegu).

Dowód przez obrazki i tłumaczenie. TODO FORMALNY DOWOD!!!!

Musimy pokazać że \mathbb{B} jest bazą dla topologii euklidesowej. Zastosujemy lemat 2.3.4 ale najpierw musimy pokazać, że \mathbb{B} jest bazą dla **jakiejs** topologii na \mathbb{R}^2

Aby to zrobić, pokazemy że \mathbb{B} spełnia warunki z lematu 2.2.8

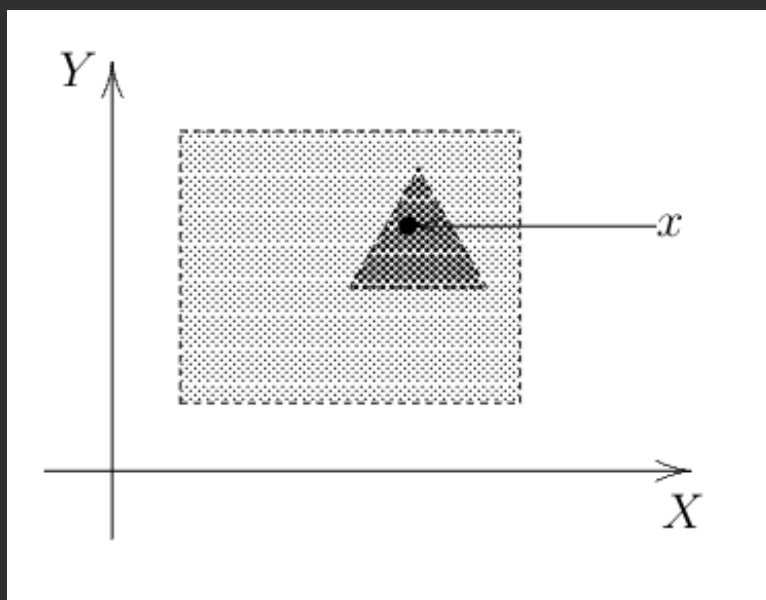
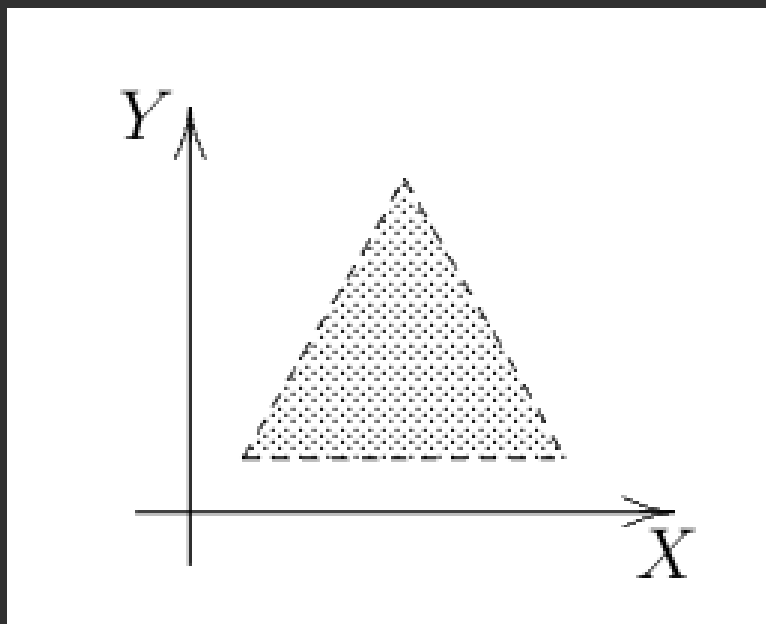
Pierwsza rzecz, którą należy zauważyć jest to, że \mathbb{B} jest bazą dla jakiejs topologii ponieważ spełnia warunki z lematu 2.2.8. Aby to zauważyć, spojrz na \mathbb{R}^2 jest równe sumie wszystkich otwartych trójkątów równobocznych z podstawą równoległą do osi X oraz ze przecięciem dwóch dowolnych trójkątów jest kolejnym trójkątem. ?

Następnie pokażemy że warunki (a) oraz (b) z lematu 2.3.4 są spełnione.

Najpierw sprawdzimy warunek (a). Niech R będzie otwartym prostokątem z bokami równoległymi do osi układu oraz x dowolnym punktem w R . Pokażemy że istnieje otwarty trójkąt równoboczny T z podstawą równoległą do osi X taki że $x \in T \subseteq R$. Na obrazku łatwo to zauważyć.

W końcu sprawdzamy warunek (b) z lematu 2.3.4. Niech T' będzie otwartym trójkątem równobocznym z podstawą równoległą do osi X oraz niech y będzie dowolnym punktem w T' . Wtedy istnieje otwarty prostokąt R' taki że $y \in R' \subseteq T'$. Ponownie na obrazku jest łatwo to dostrzec.

Zatem warunki lematu 2.3.4 są spełnione. Zatem \mathbb{B} jest rzeczywiście bazą dla topologii euklidesowej na \mathbb{R}^2 .



W przykładzie 2.2.9 zdefiniowaliśmy sobie baze dla topologii euklidesowej jako kolekcje "otwartych prostokątów" (z bokami równoległymi do osi układu). Przykład 2.3.5 pokazał nam że "otwarte prostokąty" mogą być wymienione przez "otwarte trójkąty równoboczne" (z podstawą równoległą do osi X) bez potrzeby zmiany topologii. W ćwiczeniu 2.3.1 zobaczymy że warunki w nawiasach (równoległość) mogą zostać porzucone bez potrzeby zmiany topologii. Co więcej "otwarte prostokąty" mogą zostać wymienione na "otwarte koła".

3 Punkty skupienia(ang Limit Points)

3.1 Punkty skupienia i domknięcie

3.2 Sąsiedztwo (ang Neighbourhoods)

3.3 Spójność (ang Connectedness)

4 Homeomorfizmy

4.1 Podprzestrzenie

4.2 Homeomorfizmy

4.3 Nie-homeomorficzne przestrzenie (ang Non-Homeomorphic Spaces)

