矩阵

2018 年 10 月 8 日

摘要

常用线性代数的引理和定理，写着玩

1 实对称矩阵的特征值是实数

$$
\begin{aligned}
Ax &= \lambda x \\
x^H A^H &= \bar{\lambda} x^H \\
x^H A^H x &= \bar{\lambda} x^H x \\
A^H &= A \\
x^H A x &= \bar{\lambda} x^H x \\
\lambda x^H x &= \bar{\lambda} x^H x \\
\lambda &= \bar{\lambda}
\end{aligned} \tag{1}
$$

2 n 阶方阵一定有 n 个特征根（重跟按重数计算）

设 A 是一个 n 阶方阵，它的特征值多项式 $|A-\lambda I|$ 是一个关于 λ 的多项式。根据代数基本定理，它可以唯一的分解成一次因式的乘积。所以 $|A-\lambda I|$ 一定有 n 个复数跟。

3 n 阶实对称矩阵一定有 n 个实特征跟（重跟按重数计算）

由以上两条结论易证。

4 实对称矩阵，不同特征值的特征向量正交

$$
\begin{aligned}
Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\
Ax_2 &= \lambda_2 x_2 \\
x_1^H A^H &= \lambda_1 x_1^H \\
x_1^H A^H x_2 &= \lambda_1 x_1^H x_2 \\
\lambda_2 x_1^H x_2 &= \lambda_1 x_1^H x_2 \\
(\lambda_1 - \lambda_2) x_1^H x_2 &= 0 \\
\lambda_1 &\neq \lambda_2 \\
x_1^H x_2 &= 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

5 设 A 为 n 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$，其中 Λ 是以 A 的特征值为对角线元素的对角矩阵

也即对称矩阵与对角矩阵相似。不会证。为什么 A 一定会有 n 个线性无关的特征向量？

6 实对称矩阵是半正定矩阵的充分必要条件是它的所有特征值都非负

由以上结论不难证明。
正定矩阵定义：一个 $n \times n$ 的实对称矩阵 A 是正定的，当且仅当对于所有的非零实系数向量 x，都有 $x^TAx > 0$.

7 对称矩阵

7.1 任意一个 n 阶方阵都可以表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和

$$A = \frac{1}{2}((A + A^T) + (A - A^T))$$

8 满秩

8.1 n 阶方阵 A 是满秩的当且仅当 A 可以表示为 n 阶初等矩阵的乘积

必要性：一个满秩的 n 阶方阵总可以经过若干次初等行变换和初等列变化化为标准型，故存在初等矩阵，使

$$\begin{aligned} A &= P_1 P_2 \cdots P_s E Q_1 Q_2 \cdots Q_l \\ &= P_1 P_2 \cdots P_s Q_1 Q_2 \cdots Q_l \end{aligned}$$

充分性：如果 A 可以表示为 n 阶初等矩阵的乘积，则

$$\begin{aligned} A &= P_1 P_2 \cdots P_s \\ &= P_1 P_2 \cdots P_s E \end{aligned}$$

其中 E 为 n 阶单位矩阵。因为初等变换不改变矩阵的秩，所以 $r(A) = r(E) = n$, 即 A 是满秩的。

9 对角矩阵

用一个 m 阶对角矩阵 D_m 左乘一个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, 所得结果相当于分别用 $d_1, d_2, \cdots, d_m$ 乘以 A 的第 $1, 2, \cdots, m$ 行。

用一个 n 阶对角矩阵右乘 A，所得结果相当于分别用 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 乘以 A 的第 $1, 2, \cdots, n$ 列。

10 矩阵乘积的秩

10.1 给定矩阵 $A_{m\times n}, B_{n\times s}$，那么有 $r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\}$

设 $AB = C$, 则 C 的每个行向量都是 B 的行向量的线性组合，所以 $r(C) \leq r(B)$. 同理 C 的每个列向量都是 A 的列向量的线性组合，所以 $r(C) \leq r(A)$.

10.2 设 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵，P 是一个 m 阶满秩方阵，Q 是一个 n 阶满秩方阵，则 $r(PA) = r(AQ) = r(A)$，即左乘或右乘满秩方阵后，矩阵的秩不变.

由上面的命题，不难证明。也可证明如下。P 是满秩方阵，所以 P 可以表示成初等矩阵的乘积，而初等变化不改变矩阵的秩，所以

$$r(PA) = r(P_1P_2\cdots P_sA) = r(A)$$

同理可证

$$r(AQ) = r(A)$$

11 迹 trace

一个 n 阶方阵 A 的迹，指的是 A 的主对角线上的元素的和。

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

11.1 $tr(AB) = tr(BA)$

证明：

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} \\ &= tr(BA) \end{aligned}$$

11.1.1 $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$

11.1.2 如果 A,B,C 是对称矩阵

$$tr(ABC) = tr(ACB) = tr(BAC) = tr(BCA) = tr(CAB) = tr(CBA)$$

11.2 $tr(A^T) = tr(A)$

11.3 $\nabla_A tr(AB) = B^T$

证明：

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} \\ \frac{\partial tr(AB)}{\partial a_{ij}} &= \frac{\partial \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji}}{\partial a_{ij}} \\ &= b_{ji} \end{aligned}$$

所以有

$$\nabla_A tr(AB) = B^T$$

12 矩阵的行列式

12.1 设 P 是 n 阶初等矩阵，A 是任意 n 阶方阵，则 $det(PA) = det(P)det(A)$

12.2 对任意 n 阶方阵 A，B，有 $det(AB) = det(A)det(B)$

13 可逆矩阵

13.1 一个 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是，A 是满秩的。

证：

(i) 必要性：当 A 可逆时，存在 B，使得 $AB = E$, 由于

$$\begin{aligned} r(AB) &\le min(r(A), r(B)) \\ r(AB) &= r(E) = n \end{aligned}$$

所以 $r(A) = r(B) = n$.

(ii) 充分性：若 A 是满秩的，则 A 可以表示成初等矩阵的乘积，初等矩阵是可逆的，它们的乘积也是可逆的，故 A 是可逆的。

14 相似变换

当存在一个可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP$$

则称 A 和 B 为相似矩阵，P 称为相似变换矩阵。

相似矩阵 A 和 B 有许多相同的性质。

14.1 秩相等

P 为可逆矩阵，所以 P 是满秩的，矩阵乘以满秩矩阵，不改秩数。

14.2 行列式值相等

$det(B) = det(P^{-1}AP) = det(P^{-1})det(A)det(P) = det(P^{-1}P)det(A) = det(A)$

14.3 迹相等

$tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(PP^{-1}A) = tr(A)$. 所以满秩矩阵的迹等于它的特征值的和。

14.4 相同的特征多项式

$$\begin{aligned}
det(B - \lambda I) &= det(P^{-1}AP - \lambda I) \\
&= det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\
&= det(P^{-1})det(AP - \lambda I)det(P) \\
&= det(P^{-1}P)det(AP - \lambda I) \\
&= det(A - \lambda I)
\end{aligned}$$

A 和 B 有相同的特征多项式，所以有相同的根，即特征值。

14.5 特征值相同，特征向量一般不同

$$Ax = \lambda x$$
$$PBP^{-1}x = \lambda x$$
$$B(P^{-1}x) = \lambda(P^{-1}x)$$

A 的特征向量 x 对应于 B 的特征向量 $P^{-1}x$.

因为 A 与 B 有许多相似的性质，因此在给定了 A 以后，如果能找到一个与之相似而形式又足够简单的矩阵 B, 那么对 A 的研究就可以转化为对更为简单的 B 的研究，使计算简化许多。比如说如果 A 与一个对角矩阵相似，就说 A 是可对角化的。

15 n 阶方阵

15.1 可对角化的定义

如果 n 阶方阵 A 与一个对角矩阵 Λ 相似，就说 A 是可对角化的。

$$P^{-1}EP = A$$

注意，所有的矩阵都可以通过一系列的初等行变换和列变化，化为标准型，不要和可对角化混淆。

$$P_1P_2 \cdots P_sAQ_1Q_2 \cdots Q_l = D$$

15.2 可对角化的条件

n 阶方阵可对角化的充要条件是有 n 个线性无关的特征向量。证明见下文。如果 n 阶方阵有 n 个不同的特征值，则 n 可对角化，反之不一定对。考虑矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

A 的特征值为 (1,2,2), 重根 2 有两个线性无关的特征向量，(1,1,0) 和 (-1/3,0,1). 所以 A 有 3 个线性无关的的特征向量，可以对角化。所谓的代数重数和几何重数。

15.3 对角化的方法 - 特征值分解

假设 n 阶矩阵 A 有特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，以及 n 个线性无关的特征向量 $q_1, q_2, \cdots, q_n$（列向量），易证明

$$Q^{-1}AQ = \Lambda$$

其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$Q = [q_1, q_2, \cdots, q_n]$$

证明如下

$$\begin{aligned} AQ &= A[q_1, q_2, \cdots, q_n] \\ &= [Aq_1, Aq_2, \cdots, Aq_n] \\ &= [\lambda_1 q_1, \lambda_2 q_2, \cdots, \lambda_n q_n] \\ &= [q_1, q_2, \cdots, q_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= Q\Lambda \end{aligned}$$

所以有

$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

特征值分解可以用来求矩阵的逆。可以看出

$$A^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q^{-1}$$

因为 Λ 是对角矩阵，所以有

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

当矩阵是对称方阵时

$$
\begin{aligned}
A &= A^T \\
Q\Lambda Q^{-1} &= (Q\Lambda Q^{-1})^T \\
&= (Q^{-1})^T \Lambda^T Q^T \\
&= (Q^{-1})^T \Lambda Q^T
\end{aligned}
$$

于是有

$$Q^{-1} = Q^T$$

也就是说，Q 是正交矩阵。

16 矩阵的奇异值分解 SVD

假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，那么定义矩阵 A 的 SVD 为：

$$A = U\Sigma V^T$$

其中 U 是 $m \times m$ 的矩阵，V 是 $n \times n$ 的矩阵。U 和 V 都是幺正矩阵（酉矩阵, unitary matrix），即 $U^T U = I, V^T V = I$。Σ 是 $m \times n$ 的矩阵，除了对角线以外的元素都是 0，对角线上的元素称为奇异值。

$A^T A$ 是 $n \times n$ 的一个对称方阵，又上文可知，可以对其做特征值分解，得到 n 个正交的特征向量，所有的特征向量可以张成一个 $n \times n$ 的幺正矩阵 V.

用类似的方法，对 AA^T 做特征值分解，可以得到 $m \times m$ 的幺正矩阵 U.

这里得到的 U 和 V 就是上面 SVD 公式里面的 U 和 V. 证明如下：

$$
\begin{aligned}
A &= U\Sigma V^T \\
A^T &= V\Sigma U^T \\
AA^T &= U\Sigma^2 U^T
\end{aligned}
$$

这个链接写的很好：http://www.cnblogs.com/pinard/p/6251584.html