

# 矩阵

2018 年 10 月 7 日

摘要

常用线性代数的引理和定理，写着玩

## 1 实对称矩阵的特征值是实数

$$\begin{aligned}Ax &= \lambda x \\x^H A^H &= \bar{\lambda} x^H \\x^H A^H x &= \bar{\lambda} x^H x \\A^H &= A \\x^H A x &= \bar{\lambda} x^H x \\ \lambda x^H x &= \bar{\lambda} x^H x \\ \lambda &= \bar{\lambda}\end{aligned}\tag{1}$$

## 2 n 阶方阵一定有 n 个特征根（重跟按重数计算）

设  $A$  是一个  $n$  阶方阵，它的特征值多项式  $|A - \lambda I|$  是一个关于  $\lambda$  的多项式。根据代数基本定理，它可以唯一的分解成一次因式的乘积。所以  $|A - \lambda I|$  一定有  $n$  个复数跟。

## 3 n 阶实对称矩阵一定有 n 个实特征跟（重跟按重数计算）

由以上两条结论易证。

#### 4 实对称矩阵，不同特征值的特征向量正交

$$\begin{aligned}Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\Ax_2 &= \lambda_2 x_2 \\x_1^H A^H &= \lambda_1 x_1^H \\x_1^H A^H x_2 &= \lambda_1 x_1^H x_2 \\ \lambda_2 x_1^H x_2 &= \lambda_1 x_1^H x_2 \\(\lambda_1 - \lambda_2)x_1^H x_2 &= 0 \\ \lambda_1 &\neq \lambda_2 \\x_1^H x_2 &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

#### 5 设 $A$ 为 $n$ 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 $Q$ ，使得 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$ ，其中 $\Lambda$ 是以 $A$ 的特征值为对角线元素的对角矩阵

也即对称矩阵与对角矩阵相似。不会证。为什么  $A$  一定会有  $n$  个线性无关的特征向量？

#### 6 实对称矩阵是半正定矩阵的充分必要条件是它的所有特征值都非负

由以上结论不难证明。

正定矩阵定义：一个  $n \times n$  的实对称矩阵  $A$  是正定的，当且仅当对于所有的非零实系数向量  $x$ ，都有  $x^T Ax > 0$ 。

## 7 对称矩阵

7.1 任意一个  $n$  阶方阵都可以表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和

$$A = \frac{1}{2}((A + A^T) + (A - A^T))$$

## 8 满秩

8.1  $n$  阶方阵  $A$  是满秩的当且仅当  $A$  可以表示为  $n$  阶初等矩阵的乘积

必要性：一个满秩的  $n$  阶方阵总可以经过若干次初等行变换和初等列变化化为标准型，故存在初等矩阵，使

$$\begin{aligned} A &= P_1 P_2 \cdots P_s E Q_1 Q_2 \cdots Q_l \\ &= P_1 P_2 \cdots P_s Q_1 Q_2 \cdots Q_l \end{aligned}$$

充分性：如果  $A$  可以表示为  $n$  阶初等矩阵的乘积，则

$$\begin{aligned} A &= P_1 P_2 \cdots P_s \\ &= P_1 P_2 \cdots P_s E \end{aligned}$$

其中  $E$  为  $n$  阶单位矩阵。因为初等变换不改变矩阵的秩，所以  $r(A) = r(E) = n$ ，即  $A$  是满秩的。

## 9 对角矩阵

用一个  $m$  阶对角矩阵  $D_m$  左乘一个  $m \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})$ ，所得结果相当于分别用  $d_1, d_2, \dots, d_m$  乘以  $A$  的第  $1, 2, \dots, m$  行。

用一个  $n$  阶对角矩阵右乘  $A$ ，所得结果相当于分别用  $d_1, d_2, \dots, d_n$  乘以  $A$  的第  $1, 2, \dots, n$  列。

## 10 矩阵乘积的秩

10.1 给定矩阵  $A_{m \times n}, B_{n \times s}$ , 那么有  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

设  $AB = C$ , 则  $C$  的每个行向量都是  $B$  的行向量的线性组合, 所以  $r(C) \leq r(B)$ . 同理  $C$  的每个列向量都是  $A$  的列向量的线性组合, 所以  $r(C) \leq r(A)$ .

10.2 设  $A$  是一个  $m \times n$  阶矩阵,  $P$  是一个  $m$  阶满秩方阵,  $Q$  是一个  $n$  阶满秩方阵, 则  $r(PA) = r(AQ) = r(A)$ , 即左乘或右乘满秩方阵后, 矩阵的秩不变.

由上面的命题, 不难证明. 也可证明如下.  $P$  是满秩方阵, 所以  $P$  可以表示成初等矩阵的乘积, 而初等变化不改变矩阵的秩, 所以

$$r(PA) = r(P_1 P_2 \cdots P_s A) = r(A)$$

同理可证

$$r(AQ) = r(A)$$

## 11 矩阵乘积的行列式

11.1 设  $P$  是  $n$  阶初等矩阵,  $A$  是任意  $n$  阶方阵, 则  $\det(PA) = \det(P)\det(A)$

11.2 对任意  $n$  阶方阵  $A, B$ , 有  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

## 12 可逆矩阵

12.1 一个  $n$  阶方阵  $A$  可逆的充分必要条件是,  $A$  是满秩的。

证:

(i) 必要性: 当  $A$  可逆时, 存在  $B$ , 使得  $AB = E$ , 由于

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$$

$$r(AB) = r(E) = n$$

所以  $r(A) = r(B) = n$ .

(ii) 充分性: 若  $A$  是满秩的, 则  $A$  可以表示成初等矩阵的乘积, 初等矩阵是可逆的, 它们的乘积也是可逆的, 故  $A$  是可逆的。

## 13 相似变换

当存在一个可逆矩阵  $P$ , 使得

$$B = P^{-1}AP$$

则称  $A$  和  $B$  为相似矩阵,  $P$  称为相似变换矩阵。

相似矩阵  $A$  和  $B$  有许多相同的性质。

### 13.1 秩相等

$P$  为可逆矩阵, 所以  $P$  是满秩的, 矩阵乘以满秩矩阵, 不改秩数。

### 13.2 行列式值相等

### 13.3 迹相等

### 13.4 相同的特征多项式

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\ &= \det(P^{-1})\det(AP - \lambda I)\det(P) \\ &= \det(P^{-1}P)\det(AP - \lambda I) \\ &= \det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

$A$  和  $B$  有相同的特征多项式, 所以有相同的根, 即特征值。

### 13.5 特征值相同, 特征向量一般不同

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ PBP^{-1}x &= \lambda x \\ B(P^{-1}x) &= \lambda(P^{-1}x) \end{aligned}$$

$A$  的特征向量  $x$  对应于  $B$  的特征向量  $P^{-1}x$ .

因为  $A$  与  $B$  有许多相似的性质, 因此在给定了  $A$  以后, 如果能找到一个与之相似而形式又足够简单的矩阵  $B$ , 那么对  $A$  的研究就可以转化为对更为简单的  $B$  的研究, 使计算简化许多. 比如说如果  $A$  与一个对角矩阵相似, 就说  $A$  是可对角化的。

## 14 n 阶方阵

### 14.1 可对角化的定义

如果  $n$  阶方阵  $A$  与一个对角矩阵  $\Lambda$  相似, 就说  $A$  是可对角化的。

$$P^{-1}EP = A$$

注意, 所有的矩阵都可以通过一系列的初等行变换和列变化, 化为标准型, 不要和可对角化混淆。

$$P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_l = D$$

### 14.2 可对角化的条件

$n$  阶方阵可对角化的充要条件是有  $n$  个线性无关的特征向量. 证明见下文. 如果  $n$  阶方阵有  $n$  个不同的特征值, 则  $n$  可对角化, 反之不一定对. 考虑矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$A$  的特征值为  $(1, 2, 2)$ , 重根  $2$  有两个线性无关的特征向量,  $(1, 1, 0)$  和  $(-1/3, 0, 1)$ . 所以  $A$  有  $3$  个线性无关的特征向量, 可以对角化. 所谓的代数重数和几何重数。

### 14.3 对角化的方法 - 特征值分解

假设  $n$  阶矩阵  $A$  有特征根  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ , 以及  $n$  个线性无关的特征向量  $q_1, q_2, \cdots, q_n$  (列向量), 易证明

$$Q^{-1}AQ = \Lambda$$

其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$$

证明如下

$$\begin{aligned} AQ &= A[q_1, q_2, \dots, q_n] \\ &= [Aq_1, Aq_2, \dots, Aq_n] \\ &= [\lambda_1 q_1, \lambda_2 q_2, \dots, \lambda_n q_n] \\ &= [q_1, q_2, \dots, q_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= Q\Lambda \end{aligned}$$

所以有

$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

特征值分解可以用来求矩阵的逆。可以看出

$$A^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q^{-1}$$

因为  $\Lambda$  是对角矩阵，所以有

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

当矩阵是对称方阵时

$$\begin{aligned} A &= A^T \\ Q\Lambda Q^{-1} &= (Q\Lambda Q^{-1})^T \\ &= (Q^{-1})^T \Lambda^T Q^T \\ &= (Q^{-1})^T \Lambda Q^T \end{aligned}$$

于是有

$$Q^{-1} = Q^T$$

也就是说， $Q$  是正交矩阵。

## 15 矩阵的奇异值分解 SVD

假设  $A$  是一个  $m \times n$  的矩阵，那么定义矩阵  $A$  的 SVD 为：

$$A = U\Sigma V^T$$

其中  $U$  是  $m \times m$  的矩阵， $V$  是  $n \times n$  的矩阵。 $U$  和  $V$  都是幺正矩阵（酉矩阵, unitary matrix），即  $U^T U = I, V^T V = I$ 。 $\Sigma$  是  $m \times n$  的矩阵，除了对角线以外的元素都是 0，对角线上的元素称为奇异值。

$A^T A$  是  $n \times n$  的一个对称方阵，又上文可知，可以对其做特征值分解，得到  $n$  个正交的特征向量，所有的特征向量可以张成一个  $n \times n$  的幺正矩阵  $V$ 。

用类似的方法，对  $AA^T$  做特征值分解，可以得到  $m \times m$  的幺正矩阵  $U$ 。

这里得到的  $U$  和  $V$  就是上面 SVD 公式里面的  $U$  和  $V$ 。证明如下：

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A^T = V\Sigma U^T$$

$$AA^T = U\Sigma^2 U^T$$

这个链接写的很好：<http://www.cnblogs.com/pinard/p/6251584.html>