矩阵

2018 年 10 月 5 日

摘要

常用线性代数的引理和定理，写着玩

1 实对称矩阵的特征值是实数

$$
\begin{aligned}
Ax &= \lambda x \\
x^H A^H &= \bar{\lambda} x^H \\
x^H A^H x &= \bar{\lambda} x^H x \\
A^H &= A \\
x^H A x &= \bar{\lambda} x^H x \\
\lambda x^H x &= \bar{\lambda} x^H x \\
\lambda &= \bar{\lambda}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

2 n 阶方阵一定有 n 个特征根（重跟按重数计算）

设 A 是一个 n 阶方阵，它的特征值多项式 $|A-\lambda I|$ 是一个关于 λ 的多项式。根据代数基本定理，它可以唯一的分解成一次因式的乘积。所以 $|A-\lambda I|$ 一定有 n 个复数跟。

3 n 阶实对称矩阵一定有 n 个实特征跟（重跟按重数计算）

由以上两条结论易证。

4 实对称矩阵，不同特征值的特征向量正交

$$
\begin{aligned}
Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\
Ax_2 &= \lambda_2 x_2 \\
x_1^H A^H &= \lambda_1 x_1^H \\
x_1^H A^H x_2 &= \lambda_1 x_1^H x_2 \\
\lambda_2 x_1^H x_2 &= \lambda_1 x_1^H x_2 \\
(\lambda_1 - \lambda_2) x_1^H x_2 &= 0 \\
\lambda_1 &\neq \lambda_2 \\
x_1^H x_2 &= 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

5 设 A 为 n 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$，其中 Λ 是以 A 的特征值为对角线元素的对角矩阵

也即对称矩阵与对角矩阵相似。不会证。为什么 A 一定会有 n 个线性无关的特征向量?

6 实对称矩阵是半正定矩阵的充分必要条件是它的所有特征值都非负

由以上结论不难证明。
正定矩阵定义：一个 $n \times n$ 的实对称矩阵 A 是正定的，当且仅当对于所有的非零实系数向量 x，都有 $x^TAx > 0$.

7 n 阶方阵

7.1 可对角化的条件

n 阶方阵可对角化的充要条件是有 n 个线性无关的特征向量。如果 n 阶方阵有 n 个不同的特征值，则 n 可对角化，反之不一定对。考虑矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

A 的特征值为 (1,2,2), 重根 2 有两个线性无关的特征向量，(1,1,0) 和 (-1/3,0,1). 所以 A 有 3 个线性无关的的特征向量，可以对角化。所谓的代数重数和几何重数。

7.2 对角化的方法 - 特征值分解

假设 n 阶矩阵 A 有特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，以及 n 个线性无关的特征向量 $q_1, q_2, \cdots, q_n$（列向量），易证明

$$Q^{-1}AQ = \Lambda$$

其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$Q = [q_1, q_2, \cdots, q_n]$$

证明如下

$$\begin{aligned}
AQ &= A[q_1, q_2, \cdots, q_n] \\
&= [Aq_1, Aq_2, \cdots, Aq_n] \\
&= [\lambda_1 q_1, \lambda_2 q_2, \cdots, \lambda_n q_n] \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} [q_1, q_2, \cdots, q_n] \\
&= \Lambda Q
\end{aligned}$$

所以有

$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

特征值分解可以用来求矩阵的逆。可以看出

$$A^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q^{-1}$$

因为 Λ 是对角矩阵，所以有

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

当矩阵是对称方阵时

$$\begin{aligned}
A &= A^T \\
Q\Lambda Q^{-1} &= (Q\Lambda Q^{-1})^T \\
&= (Q^{-1})^T \Lambda^T Q^T \\
&= (Q^{-1})^T \Lambda Q^T
\end{aligned}$$

于是有

$$Q^{-1} = Q^T$$

也就是说，Q 是正交矩阵。

8 矩阵的奇异值分解 SVD

假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，那么定义矩阵 A 的 SVD 为：

$$A = U\Sigma V^T$$

其中 U 是 $m \times m$ 的矩阵，V 是 $n \times n$ 的矩阵。U 和 V 都是幺正矩阵（酉矩阵, unitary matrix），即 $U^TU = I, V^TV = I$。Σ 是 $m \times n$ 的矩阵，除了对角线以外的元素都是 0，对角线上的元素称为奇异值。

A^TA 是 $n \times n$ 的一个对称方阵，又上文可知，可以对其做特征值分解，得到 n 个正交的特征向量，所有的特征向量可以张成一个 $n \times n$ 的幺正矩阵 V.

用类似的方法，对 AA^T 做特征值分解，可以得到 $m \times m$ 的幺正矩阵 U.

这里得到的 U 和 V 就是上面 SVD 公式里面的 U 和 V. 证明如下：

$$\begin{aligned}
A &= U\Sigma V^T \\
A^T &= V\Sigma U^T \\
AA^T &= U\Sigma^2 U^T
\end{aligned}$$