

矩阵

2018 年 10 月 5 日

摘要

常用线性代数的引理和定理，写着玩

1 实对称矩阵的特征值是实数

$$\begin{aligned}Ax &= \lambda x \\x^H A^H &= \bar{\lambda} x^H \\x^H A^H x &= \bar{\lambda} x^H x \\A^H &= A \\x^H A x &= \bar{\lambda} x^H x \\\lambda x^H x &= \bar{\lambda} x^H x \\\lambda &= \bar{\lambda}\end{aligned}\tag{1}$$

2 n 阶方阵一定有 n 个特征根（重跟按重数计算）

设 A 是一个 n 阶方阵，它的特征值多项式 $|A - \lambda I|$ 是一个关于 λ 的多项式。根据代数基本定理，它可以唯一的分解成一次因式的乘积。所以 $|A - \lambda I|$ 一定有 n 个复数跟。

3 n 阶实对称矩阵一定有 n 个实特征跟（重跟按重数计算）

由以上两条结论易证。

4 实对称矩阵，不同特征值的特征向量正交

$$\begin{aligned}Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\Ax_2 &= \lambda_2 x_2 \\x_1^H A^H &= \lambda_1 x_1^H \\x_1^H A^H x_2 &= \lambda_1 x_1^H x_2 \\ \lambda_2 x_1^H x_2 &= \lambda_1 x_1^H x_2 \\(\lambda_1 - \lambda_2)x_1^H x_2 &= 0 \\ \lambda_1 &\neq \lambda_2 \\x_1^H x_2 &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

5 设 A 为 n 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 Q ，使得 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$ ，其中 Λ 是以 A 的特征值为对角线元素的对角矩阵

也即对称矩阵与对角矩阵相似。不会证。为什么 A 一定会有 n 个线性无关的特征向量？

6 实对称矩阵是半正定矩阵的充分必要条件是它的所有特征值都非负

由以上结论不难证明。

正定矩阵定义：一个 $n \times n$ 的实对称矩阵 A 是正定的，当且仅当对于所有的非零实系数向量 x ，都有 $x^T Ax > 0$ 。

7 n 阶方阵

7.1 可对角化的条件

n 阶方阵可对角化的充要条件是有 n 个线性无关的特征向量。如果 n 阶方阵有 n 个不同的特征值，则 n 可对角化，反之不一定对。考虑矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

A 的特征值为 (1,2,2)，重根 2 有两个线性无关的特征向量，(1,1,0) 和 (-1/3,0,1)。所以 A 有 3 个线性无关的特征向量，可以对角化。所谓的代数重数和几何重数。

7.2 对角化的方法 - 特征值分解

假设 n 阶矩阵 A 有特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，以及 n 个线性无关的特征向量 q_1, q_2, \dots, q_n (列向量)，易证明

$$Q^{-1}AQ = \Lambda$$

其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$$

证明如下

$$\begin{aligned}
 AQ &= A[q_1, q_2, \dots, q_n] \\
 &= [Aq_1, Aq_2, \dots, Aq_n] \\
 &= [\lambda_1 q_1, \lambda_2 q_2, \dots, \lambda_n q_n] \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} [q_1, q_2, \dots, q_n] \\
 &= \Lambda Q
 \end{aligned}$$

所以有

$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

特征值分解可以用来求矩阵的逆。可以看出

$$A^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q^{-1}$$

因为 Λ 是对角矩阵，所以有

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

当矩阵是对称方阵时

$$\begin{aligned}
 A &= A^T \\
 Q\Lambda Q^{-1} &= (Q\Lambda Q^{-1})^T \\
 &= (Q^{-1})^T \Lambda^T Q^T \\
 &= (Q^{-1})^T \Lambda Q^T
 \end{aligned}$$

于是有

$$Q^{-1} = Q^T$$

也就是说， Q 是正交矩阵。

8 矩阵的奇异值分解 SVD

假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，那么定义矩阵 A 的 SVD 为：

$$A = U\Sigma V^T$$

其中 U 是 $m \times m$ 的矩阵， V 是 $n \times n$ 的矩阵。 U 和 V 都是幺正矩阵（酉矩阵, unitary matrix），即 $U^T U = I$, $V^T V = I$ 。 Σ 是 $m \times n$ 的矩阵，除了对角线以外的元素都是 0，对角线上的元素称为奇异值。

$A^T A$ 是 $n \times n$ 的一个对称方阵，又上文可知，可以对其做特征值分解，得到 n 个正交的特征向量，所有的特征向量可以张成一个 $n \times n$ 的幺正矩阵 V 。

用类似的方法，对 AA^T 做特征值分解，可以得到 $m \times m$ 的幺正矩阵 U 。

这里得到的 U 和 V 就是上面 SVD 公式里面的 U 和 V 。证明如下：

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A^T = V\Sigma U^T$$

$$AA^T = U\Sigma^2 U^T$$

这个链接写的很好：<http://www.cnblogs.com/pinard/p/6251584.html>