(a)

はじめ静止している質量 M のロケットを考える。このロケットには質量 $m_f(< M)$ の燃料が入っており、これを相対速度 w で噴射できる。つまり、ロケットが速度 v_1[*1]ですすんでいるときに噴射された燃料は外から見て $v_1 - w$ で飛んでいくことになる。

このロケットは燃料を燃やし尽くしたときどこまで加速できるのか調べたい。

簡単のために、まずは燃料を一発の砲弾として発射する場合を考えてみよう。発射後のロケットの速度を v_1、燃料の速度を v_2 とすると、

$$\boxed{\text{ア}:v_1 \text{ と } v_2 \text{ の式}} = w \qquad \cdots\text{(ロケットの速度から燃料の速度を引くと } w\text{)} \tag{1}$$

である。w はあくまで燃料とロケットの相対速度、すなわち<u>速度の差</u>であることに注意しよう。

又、簡単のために $m = M - m_f$ とおくと、運動量保存の法則より

$$\boxed{\text{イ}:m, m_f, v_1, v_2 \text{ の式}} = 0 \qquad \cdots\text{(最初静止していたので、発射後も運動量はゼロ)} \tag{2}$$

が成り立つ。

これらを v_1 について解くことで、

$$v_1 = \frac{m_f}{\boxed{\text{ウ}}} w \tag{3}$$

を得る。v_1 とはロケットの速度であったので、ロケットの終端速度をあげようと思ったら

- 発射される燃料の、ロケット全体に対する比を増やす
- 燃料を発射する速さ $|w|$ を上げる

をすればいいとわかる。

[*1] この PDF 中では速度ベクトルに上付き矢印を書いていない。文脈から判断してほしい。

(b)

では、燃料を時間をかけて放出する通常のロケットだとどうなるのか考えてみよう。

連続的に噴射するので難しいと思うかもしれないが、実は短い時間についてひとかたまりで考えてそれを無限に細かくしていくことで計算ができるのでやってみよう。

噴射開始 t 秒後の状況を考える。燃料を噴射する割合を $\mu = \frac{dm}{dt}$ とすると、ロケットの質量は $M - \boxed{\text{エ}}$ に減っている。これを m とおく。

ここからさらに短い時間 Δt がたつ間に噴射される燃料の質量は $\boxed{\text{オ}}$。また、この噴射によってロケットの速度が v から $v + \Delta v$ に上がるとしよう。

これをひとかたまりで考えると、(a) と同じように立式することができる。具体的には、燃料の速度を v_2 とおくと

$$\boxed{\text{カ}} = w \qquad \cdots\text{(ロケットと燃料の相対速度は } w\text{)} \tag{4}$$

$$\boxed{\text{キ}} = (M - \mu t)v = mv \qquad \cdots\text{(右辺は噴射前の運動量)} \tag{5}$$

これを解くと、

$$\mu \Delta t w = m \Delta v \tag{6}$$

となる。ところで (5),(6) 式などに出てくる $-\mu\Delta t$ とは、今回の放出によるロケットの質量の変化（$\boxed{\text{オ}}$だけ噴射されたので）である。これをわかりやすいように Δm とおいて、(6) 式に代入して

$$-\Delta m w = m \Delta v$$

を得る。これを非常に短い時間にする ($\Delta t \to 0$) と、$\Delta m, \Delta v \to 0$ でもあるので、

$$-w dm = m dv \tag{7}$$

と書ける。

これを積分してみよう。具体的には、両辺を m で割って

$$-w \cdot \frac{dm}{m} = dv \tag{8}$$

w は定数であることに注意すれば、両辺を「ロケットの噴射している間」で積分して

$$-w \int_M^{\boxed{\text{ケ}}} \frac{dm}{m} = \int_{\text{while rocket is firing}} dv \tag{9}$$

表 1　積分範囲

	最初	最後
時間 t	0	燃料を使い果たす時刻 m_f/μ
ロケットの速度 v	0	終端速度 v_1（求めたかった答え）
ロケットの質量 m	M	燃料を使い果たしたロケットの質量 $\boxed{\text{ケ}}$

となる。右辺は単に「速度の変化 (dv)」を「ロケットの噴射している間」積分したものなので、（最初ロケットは静止していたから）噴射後のロケットの速度 v_1 にほかならない。積分範囲については表 1 を参考にしてほしい。

さあ、左辺を計算しよう。

$$
\begin{aligned}
v_1 &= -w \int_M^{\boxed{\text{ケ}}} \frac{dm}{m} && (10) \\
&= -w \left[\log |m|\right]_M^{\boxed{\text{ケ}}} && (11) \\
&= -w \left(\log \left|\boxed{\text{ケ}}\right| - \log |M|\right) && (12) \\
&= -w \left(\log \boxed{\text{ケ}} - \log M\right) \qquad \text{絶対値記号の中身はいずれも正} && (13) \\
&= -w \log \frac{\boxed{\text{ケ}}}{M} && (14) \\
&= w \log \frac{M}{\boxed{\text{ケ}}} && (15)
\end{aligned}
$$

やはり、ロケットの最終的な速度をあげようと思ったら

- 噴射される燃料の、ロケット全体に対する比を増やす
  （$\rightarrow$ 積める荷物の量 (payload) は減ってしまう）
- 燃料を噴射する速さ $|w|$ を上げる

をすればいいとわかる。

しかし、前者を改善しても log オーダーでしか改善しないため、w を上げるのが現実的である。詳しくは Web ページの解説を読んでほしい。

コラム

この公式は 1897 年、ロシア人ロケット工学者ツィオルコフスキーによって発見された。彼は難聴であり家計も苦しかったことからまともに学校に通わず、また実際にロケットを作ったこともなかったにもかかわらず、この公式のほかにも、多段式ロケット、液体燃料ロケット、金属製で流線型の航空機[*2]、ジェットエンジン、宇宙船、「人工衛星」という概念、宇宙エレベータなどなど現在も使われ続ける先見的なアイデアを多数残し（現在のロケット工学はすべて彼の影響を受けているといっても過言ではない)、その功績をたたえ宇宙旅行の父と呼ばれる。

また、この公式を眺めていると $\boxed{\text{コ}}$ はロケットの最終的な速度に影響しないことがわかる。つまり、チビチビと放出してもドバーっと放出しても、噴出速度が同じであれば最終的に同じ速度に達するのである。

実際には、ドバーッと放出しかつ噴射速度が高いとエンジンが耐えられない。そのため、効率のみを考えればチビチビと放出したほうが良いのである。たとえば小惑星探査機はやぶさに使われたイオンエンジンは「老人の鼻息」と呼ばれるほど推進力が小さいが、燃料が飛んでいく速さ自体はとても速い。数年かけてチビチビと高速に放出することで、通常の化学ロケットの 10 倍という性能を叩き出している。推進剤の速度を速くするということは燃料の重量が少なくてすむということにつながり、乗せられる荷物の量に直結するので非常に重要である。

じゃあ全部このイオンエンジンにすればいいじゃんと思うかもしれないが、先程言ったようにパワーを数年間かけて出す設計になっているので、推力自体は鼻息レベルであり地上から飛び立つことができない。地上からはパワフルな通常のロケットで飛び立ち、イオンエンジンは宇宙に出てからの加速用として用いられた。

ちなみに、はやぶさの向かった小惑星イトカワは約 3 億 km の彼方にあり、新幹線で行くと約 120 年かかるが、はやぶさはトラブルに見舞われながらも 7 年で往復した。

解答

ア　$v_1 - v_2$

イ　$mv_1 + m_f v_2$

ウ　M

エ　μt

[*2] 当時の航空機は木と布でできていた

オ　$\mu\Delta t$

カ　$(v + \Delta v) - v_2$

キ　$(m - \mu\Delta t)(v + \Delta v) + \mu\Delta t v_2$

ク　なし

ケ　$M - m_f$

コ　μ、すなわち燃料を消費する速さ