

Отношение "сигнал-шум"

Содержание

Вероятность битовой ошибки $BER=f(SNR)$

BPSK, PSK-M, QPSK

Расчет размера сигнального созвездия по значениям SNR и BER

Вероятность битовой ошибки как функция отношения "сигнал - шум". Случай BPSK

Передается нормально распределенная случайная последовательность бит при уровне сигнала $|a_1| = |a_2| = a$. Ошибка на приемнике происходит, если искажение амплитуды под действием шума $z(T) = a(T) + n_0(T)$ таково, что меняется полярность сигнала $z(T)$:

$$P_{err} = \frac{1}{2}(P[n_0(T) > a] + P[n_0(T) < -a]) = P[n_0(T) > a]$$

$$P_{err} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_a^{\infty} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_0^2}} dz = \operatorname{erfc}^1\left(\frac{a \pm \gamma_0}{\sigma_0}\right) = \operatorname{erfc}(\sqrt{SNR})$$

¹erfc - Complimentary Error Function, применяется для оценки вероятности того, что случайная величина лежит за пределами некоторого интервала. Для численного определения используются функции математических пакетов ЦОС.

Если средняя энергия передачи одного бита (символа)
 $E_b = a^2 T_b$, а средняя энергия шума на интервале передачи

$$\frac{N_0}{T_b}$$

тогда

$$P_{err} = \text{erfc}(\sqrt{SNR}) = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- ▶ Битовая ошибка экспоненциально убывает с ростом отношения "сигнал - шум"
- ▶ Повышать E_b малоэффективно
- ▶ Увеличить спектральную эффективность можно используя модуляции с большим числом состояний

Случай QPSK

В QPSK сигнал может быть представлен как $z(T) = a(T) + n_0(T) = \text{Re}(z(T)) + j\text{Im}(z(T))$. Тогда

$$P_{err} = P(\text{Re}(n_0(T)) > a) + P(\text{Im}(n_0(T)) > a) = 1 - \int_D f_{n_0}(z) dz$$

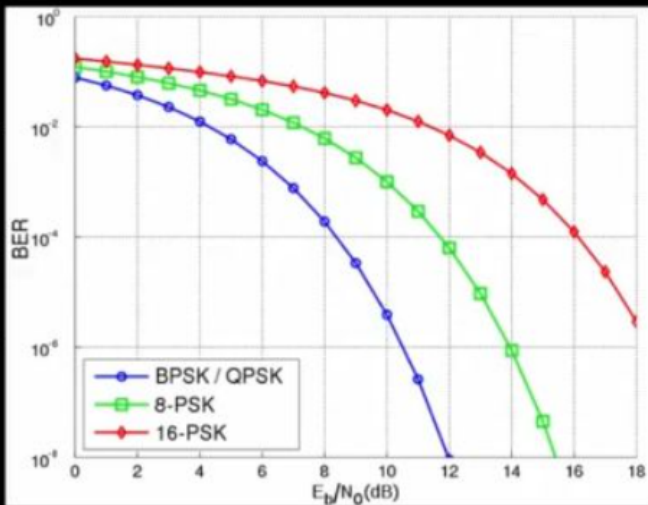
Вероятность нахождения шума в пределах области принятия решения D . Аппроксимируя квадрат D окружностью, можно вычислить

$$P_{err QPSK} \approx e^{(-\frac{a^2}{\sigma_0^2})}$$

$$\ln P_{err} = -\frac{a^2}{\sigma_0^2}$$

Водопадные кривые $\text{erfc}(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}})$

[Wikipedia]



Расчет размера сигнального созвездия по значениям SNR и BER

Если уровни сигнала заданы как

$$a[n] = (-2^M + 1) + 2k[n]$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

и все состояния равновероятны, то дисперсия данного сигнала имеет вид

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2^M} \sum_{a_i \in A} |a_i|^2 \approx \frac{2}{3}(2^M - 1)$$

откуда

$$P_{errQPSK} \approx e^{\left(-\frac{a^2}{\sigma_0^2}\right)} = e^{-3 \cdot 2^{(-M+1)} SNR}$$

$$M \approx \left(1 - \frac{3}{2} \frac{SNR}{\ln P_{err}}\right)$$

Расчет размера сигнального созвездия по значениям SNR и BER

1. Выбрать допустимое значение P_{err} , например, 10^{-6}
2. Определить требуемое значение SNR по водопадным кривым
3. Вычислить значение M и округлить до целого

Полоса, занимаемая сигналом составит MW

Источники на Coursera.org

- ▶ **Digital Signal Processing.** *École Polytechnique Fédérale de Lausanne.* M. Vetterli, P. Prandoni
- ▶ **Introduction to Satellite Communications.** *Institut Mines-Telecom.* L. Franck et al.