1. 设随机事件 A 与 B 相互独立，B 与 C 相互独立，A 与 C 互不相容，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.25$，$P(C)=0.125$，求 $P(A\cup B\cup C)$ 。

$$23/32$$

独立重复地抛一颗均匀骰子，设 X 表示出现 1 或 2 的次数，Y 表示出现 6 的次数。分别计算 X 和 Y 的数学期望。

于是 $EX=2/3$，$EY=1/3$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为正态总体 $X \sim N(0, \sqrt{2}^2)$ 的样本，记 $T = \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2$，计算方差 $D(T)$。

$$D(T) = 4 * 2 * 9 = 72$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为取自总体 $X \sim N(0,\theta)$ 的简单随机样本，其中 $\theta > 0$ 为方差，令

$T = |\sum_{i=1}^{n} X_i|$，确定常数 b，使 $E(bT)$ 为 $\sqrt{\theta}$ 的无偏估计。

$$b = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一组样本观察值,求 θ 的极大似然估计值.

求解得：

$$\hat{\theta} = \frac{n^2}{(\ln \prod_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

设随机变量 $X \sim N(12,3^2), Y \sim N(10,4^2)$， X,Y 相互独立。

（1）分别求 $U=2X+Y$ 与 $V=X-Y$ 的分布，并说明 U 与 V 是否独立；

（2）求概率 $P\{12<X+Y<32\}$。（用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）

U,V不独立.

$2\Phi(2)-1$

设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $U=X+Y$ 与 $V=X-Y$ 相互独立的充分必要条件为

（A） $E(X)=E(Y)$；

（B） $E(X^2)-(E(X))^2=E(Y^2)-(E(Y))^2$；

（C） $E(X^2)=E(Y^2)$；

（D） $E(X^2)+(E(X))^2=E(Y^2)+(E(Y))^2$.

假定某电视节目在 S 市的收视率为 15%，在一次收视率调查中，从该市的居民中随机抽取 5000 户，调查该电视节目的收视情况，试计算：抽样所得收视率与 15%之差的绝对值小于 0.01 的概率。

$$\Phi(1.95)=0.9744,\Phi(1.96)=0.9750,\Phi(1.97)=0.9756,\Phi(1.98)=0.9761$$

$$2\Phi(1.98)-1=0.9522$$

一油漆制造商宣称，他们生产的一种新型乳胶漆的平均干燥时间为 125 分钟；现从该种乳胶漆中随机抽出 20 罐做试验，发现他们的干燥时间（分钟）为：123, 109, 115, 121, 130, 127, 106, 120, 116, 136, 131, 128, 139, 110, 133, 122, 133, 119, 135, 109，假定干燥时间服从正态分布。

(1) 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验以上数据能否说明这种乳胶漆的平均干燥时间**大于**制造商宣称的 125 分钟。（经计算，样本均值为 123.1，样本标准差为 10）

（2）给出平均干燥时间 μ 的置信度为 95%的置信区间。

$$(t_{0.025}(19) = 2.093, t_{0.05}(19) = 1.729)$$

故可认为平均干燥时间大于125　分钟。

(118.42, 127.78)

4. 设随机变量$X \sim B(4,0.5)$，$Y \sim N(3,16)$，且它们的相关系数$\rho_{XY}=0.5$，令$Z=3X-2Y$，求$E(Z)$和$D(Z)$。

$$E(Z)=0$$

$$D(Z)=13$$

5. 设随机变量X,Y相互独立，且都服从$N(0,1)$分布，则$Z=\frac{X}{\sqrt{Y^2}}$服从什么分布？Z^2服从什么分布？

$t(1)$ $F(1,1)$

对敌人的阵地进行 100 次炮击，每次炮击时炮弹命中颗数的均值为 4，方差为 2.25。求

0.8164

三、(共 15 分)假设总体$X\sim U(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为一组样本，(1)求未知参数θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_1$，(2) 若$\hat{\theta}_2=k\hat{\theta}_1$是$\theta$的无偏估计量，$k$应取何值?

$$\hat{\theta}_1=\max_{1\le i\le n}\{X_i\}$$

$$\Rightarrow k=\frac{n+1}{n}$$

四、(共 10 分)市级历史名建筑为了大修而重新测量高度，建筑学院 6 位同学对该建筑的测量结果为(单位：米)：87.4，87.0，86.9，86.8，87.5，87.0 。据记载该建筑的高度为 87.4 米，若该建筑的高度测量值服从正态分布，你认为该建筑的高度是否需要修改($\alpha = 0.05$)?

拒绝原假设H_0，即认为该建筑的高度需要修改。

五、(共 15 分) 种子加硫酸后温度会升高，升高温度与种子含水率有关，种子含水率越大，浓硫酸与种子接触后放出的热量越多，温度越高。由于温度容易观测，含水率难以测定，以温度为自变量，含水率为因变量，测得数据如下

5 分钟后升高的温度(℃)	7.1	8.4	9.5	10.2	12.0
种子实际含水率	14.64	16.55	17.00	17.71	19.68

(1) 验证种子含水率Y与升温X之间是否存在显著的线性关系？($\alpha = 0.01$) (2) 确定种子含水率Y与升温X的经验回归直线方程； (3) 预测升温为 13℃ 时，种子的含水率可能是多少？

$$(R_{0.01}(3) = 0.959, \quad R_{0.01}(4) = 0.917, \quad R_{0.01}(5) = 0.847)$$

所以种子含水率Y与升温X线性相关关系显著。

经验回归方程为：$\hat{y} = 7.8837 + 0.978 \cdot x$

$$y = 7.8837 + 0.978 \times 13 = 20.5977$$

设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，则

(A) $X+Y$ 一定服从正态分布；　(B) (X,Y) 不一定服从二维正态分布；

(C) X 与 Y 相互独立等价于不相关；(D) 若 X 和 Y 相互独立，则函数 $f(X+Y)$ 服从正态分布

下列分布类型不具备可加性的是

(A) 正态分布；　(B) 二项分布；　(C) 均匀分布；　(D) 泊松分布.

设总体 X 服从区间 $[5,\ \theta]$ 上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的样本，则参数 θ 的极大似然估计量为

(A) $2\overline{X}-5$；(B) $5-2\overline{X}$；(C) $\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$；$(D)$ $\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n\geq 2)$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本, $\overline{X}$ 为样本均值,则下列哪个统计量是总体方差的无偏估计量

(A) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X-\overline{X})^2$； (B) $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X-\mu)^2$； (C) 上述二者都是； (D) 上述二者都不是.

在假设检验中，设 H_0 为原假设，犯第一类错误的情况是（ C ）

(A) H_0 为真，接受 H_0； (B) H_0 不真，接受 H_0；

(C) H_0 为真，拒绝 H_0； (D) H_0 不真，拒绝 H_0.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自总体 $X\sim N(0,3^2)$ 的一部分样本，则 $\dfrac{3X_{10}}{\sqrt{X_1^2+\cdots X_9^2}}$ 服从

(A) $N(0,1)$； (B) $t(3)$； (C) $t(9)$； (D) $F(1,9)$

设一工厂生产某种设备，其寿命 X（以年计）的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

工厂规定，出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换。若一台设备无须调换，厂方净赢利 100 元，若调换一台设备则净亏损 200 元，试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望.

$$E(Y)=100e^{-\frac{1}{4}}-200\left(1-e^{-\frac{1}{4}}\right)=33.64$$

五、计算题（10分）

设供电站供应某地区 1000 户居民用电，各户用电情况相互独立。已知每户每日用电量(单位:度）服从[0,20]上的均匀分布,利用中心极限定理求这 1000 户居民每日用电量超过 10100 度的概率。(所求概率用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）.

$$=1-\Phi\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$$

判断以下关系是否成立，并说明理由 $AB=\phi \Leftrightarrow P(AB)=0$

（10 分）在区间$[0,a]$上任意选一个位置，记为X，表示某个质点的坐标. 试求X的分布函数.

$$\therefore\ F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{a}, & 0\le x<a\\ 1, & x\ge a\end{cases}$$

4. 某人途经一个十字路口，所经方向有50%时间亮红灯，遇红灯需等待直至绿灯，等待时间在区间[0, 20](单位：秒)上服从均匀分布. 用X表示此人的等待时间，求X的分布函数，并分析X是否为离散型或连续型随机变量，说明理由.

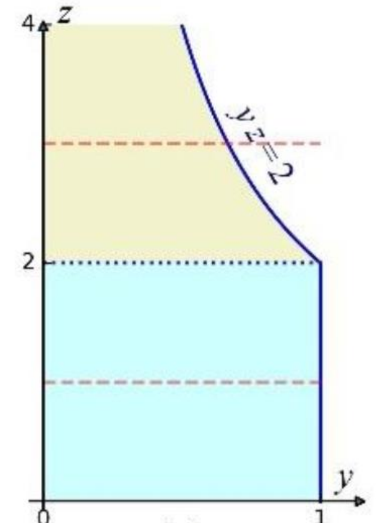
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{40}, & 0\le x<20\\ 1, & x\ge 20\end{cases}$$

5. 设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\},z\in R$.（用Φ表示结果即可）

【可用全概率公式计算，也可用独立性展开】

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(z), & z<0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\Phi(z), & z\geq 0\end{cases}$$

四、（10 分）设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim U(0,2),Y\sim U(0,1)$，求$Z=X/Y$的概率密度.



(c)

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le z<2\\ \dfrac{1}{z^2}, & z\ge 2\end{cases}$$