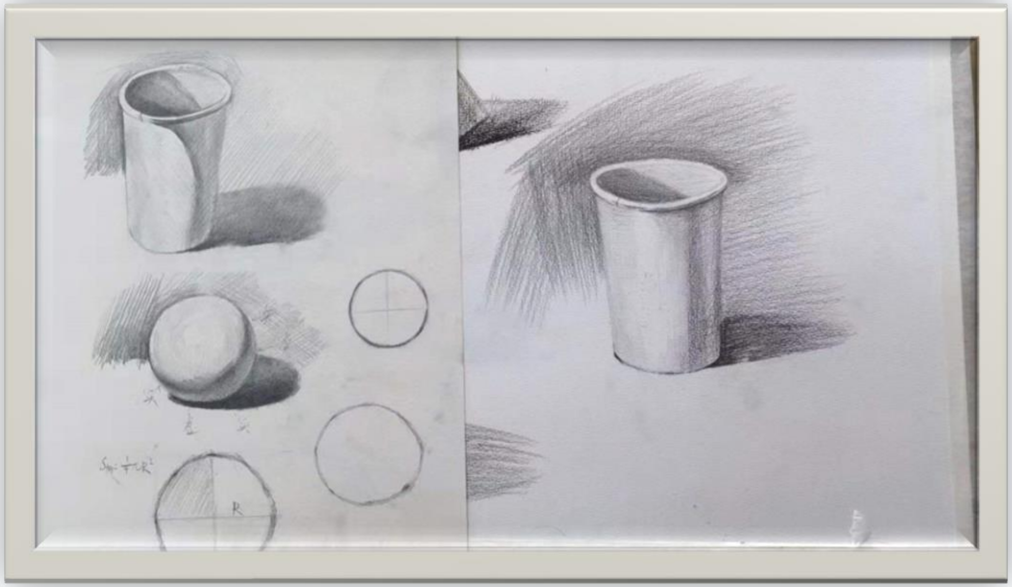
本次课的重点是：事件关系的判断，事件运算律熟练运用，概率定义的理解，熟练古典概率的计算问题。



下次课内容：

要讲到§1.3 条件概率开头，其中包括剩下的古典概率计算，古典概率的性质，柯氏公里定义及性质，条件概率的定义

记号	集合论	概率论
$A \subset B$	事件的角度：事件*A*发生，必然导致事件*B*发生	
$A \cup B$(和事件)	事件的角度：事件*A*与*B*至少有一个发生	
$A \cap B$ (AB)	A与B的交	事件A与B的积事件
	事件的角度：事件*A*与*B*同时发生	
$A \cap B = \phi$	A与B无公共元素	事件A与B互不相容(互斥)
$A \cap B = \phi$, 且$A \cup B = \Omega$	A与B互为余集	事件A与B互为对立事件
事件的角度:如果事件A与B必然有一个发生,但又不同时发生		
$A - B$	A与B的差集	事件A与B的差事件
	事件角度: 事件	*A*发生并且事件*B*不发生

重要的结论：$A\text{-}B = A\overline{B}$, $\overline{A} = \Omega - A$.

$A - B = A - AB = (A \cup B) - B$ (A-AB)∪B= (B-AB)∪A= A∪B

分配律： (A∪B)∩C=(A∩C)∪(B∩C) ;

(A∩B)∪C=(A∪C)∩(B∪C)

(A-B)∩C=(A∩C)-(B∩C)

注意：没有(A-B)∪C=(A∪C)-(B∪C)

德· 摩根律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

随机变量：$X(\varpi) \longrightarrow R^n$ 是试验结果的函数。

例：用X表示抛一次硬币时出现正面的次数，则

$X(H)=1$ $X(T)=0$

优势：用量化分析方法来研究随机现象的统计规律性。

概率的定义(客观量度)

频率(统计型概率)： $f_n(A) = \dfrac{m}{n}$

大量试验

概率与频率的关系? **频率稳定性的广泛应用:**

Monte Carlo(如著名的蒲丰投针问题)等

思考(概率历史上有名的生日问题)：班上有n(n<365)个人，至少有两个人的生日在同一天的概率为多大?

n	10	20	23	30	40	50
P(A)	0.12	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97

对于“0.97”从频率的角度该怎么理解?

古典概型试验与一般随机试验区别: 有限性和等可能性。

频率具有稳定性：在一定条件下，频率稳定于概率。

频率稳定性的广泛应用

(1) 英语中字母出现频率具有稳定性, E,T,O频率高，J,Q,Z频率低；电脑键盘设计、信息的编码(常用字母用较短的码)；

(2) 产品抽样检查，某电视节目收视率的调查, 衣服和用具总在同样部位相似的方式破损等, 英国生物统计学家高尔顿设计的高尔顿板；

(3) Monte Carlo仿真。(例如:计算圆周π的近似值)

Monte Carlo方法是计算机模拟的基础，它的名字来源于世界著名的赌城——摩纳哥的蒙特卡洛， 其历史起源于 1777 年法国科学家蒲丰提出的一种计算圆周π 的方法——随机投针法，即著名的蒲丰投针问题。

“在平面上画有一组间距为d的平行线，将一根长度为$l(l<d)$的针任意掷在这个平面上，求此针与平行线中任一条相交的概率”

三：古典概率

古典概率的起源 ⇨ 赌徒分赌金问题

定义：设*E*是一个随机试验,若它满足以下两个条件：

（1）仅有有限多个基本事件；（有限性）

(2)每个基本事件发生的可能性相等。（等可能性）

则称*E* 古典概型的试验。

例如：⇨ 掷骰子试验　抛硬币试验等

例1 抛一颗均匀的骰子，观察其出现的点数情况。

因为该试验的基本事件有6个：

$\{\omega_i\}=\{$出现的点数为$i\}$　$i=1, 2, .., 6$

而且基本事件$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots \{\omega_6\}$发生的可能性相等。

这是一个古典概型的随机试验。

E1: 抛一枚质量分布不均匀的硬币，观察其出现正面H和反面T的情况。

因为该试验的基本事件只有两个：

$\{\omega_1\}$={出现正面H}，$\{\omega_2\}$={出现反面T}。

但基本事件$\{\omega_1\}$、$\{\omega_2\}$发生的可能性不相等。

E2：仪器上某种型号的电子元件使用时间已达30小时，测该元件还能使用多少小时？

该试验不是古典概型的随机试验，因为它的样本空间有无数多个样本点。

E1, E2都不是一个古典概型的随机试验。

三：古典概率

设E是一个随机试验(重复性,明确性和不知预知性),

若它满足以下两个条件：

（1）仅有有限多个基本事件；（有限性）

(2)每个基本事件发生的可能性相等。（等可能性）

则称E 古典概型的试验。

定义：设试验E为古典概型试验，A是E的任一事件，则有：

$$P(A)=\frac{A\text{所含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$$

关键词：试验、可能

判断样本空间与事件分别所包含的基本事件数目.

$$=\frac{A\text{所含样本点的数目}}{\text{样本空间的样本点总数}}$$

所确定的概率称为事件A的古典概率。

注1：法国数学家拉普拉斯在1812年把它作为概率的一般定义，现在通常称为概率的古典定义。

注2：在古典概率的计算中常用到排列组合的知识，如乘法原理、加法原理等等。

古典概率的计算中常见的类型：

- (1) 随机取数：例1.2.2, 1.2.3, 1.2.8
- (2) 分(住)房，生日问题：例1.2.4
- (3) 抽球：例1.2.5(重点)

  注:古典概率的大部分问题都能形象化地用摸球模型来描述。
- (4) 配对(很少涉及)

注1: 种水稻地块的调查，某电视节目收视率的调查，某种疾病的抽查等可以用抽象化的摸球问题来描述。

注2：古典概率的计算在产品质量抽样检查等实际问题及理论物理的研究中都有重要应用。

用样本空间求概率

赌金分配

鸽笼问题

摸彩试验

例7：一个鸽场养了n只鸽子，每只鸽子都等可能的飞入N 个鸽笼中的任意一个去住($n\leq N$)，求下事件发生的概率。

（1）指定的n个鸽笼各有一只鸽子去住；

（2）恰好有n个鸽笼，每个各有只鸽子。

这个例子是古典概型中一个很典型的问题，不少实际问题都可以归结为它。

拓展: (投球入格)设有n个球，每个球都能以同样的概率落到N个格子的每个格子中；(著名的)生日问题

如: 若把球解释为粒子，把格子解释为相空间中的小区域，则这个问题便相应于统计物理学中的麦克斯韦-玻尔兹曼(Max-well-Boltzmann)统计。

解: (1)　设 A={指定的n 个鸽笼各有一只鸽子}

由乘法原理可知，基本事件总数为N^n.

指定的n个鸽笼各有一只鸽子，有$n!$个不同的住法。

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

（2）B={恰好有n 个鸽笼，每个各有只鸽子}

从N 个鸽笼中任意选出n 个，有C_N^n种不同的方法，

选出的n个鸽笼各有一只鸽子，有$n!$个不同的住法。

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

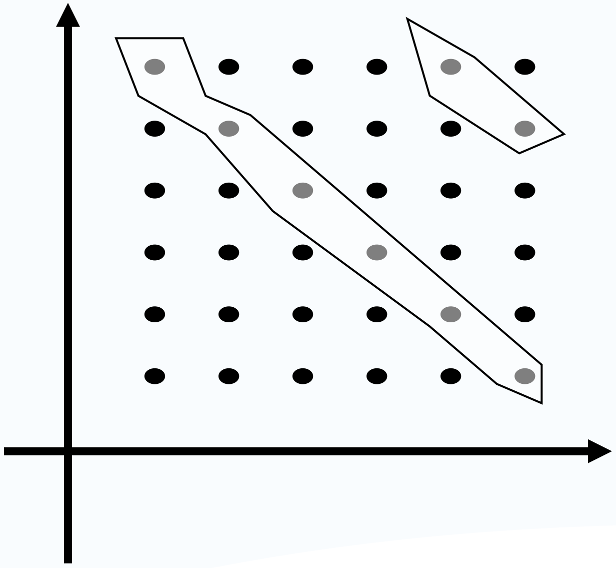
例: 将两颗均匀骰子抛掷一次, 求两颗骰子点数之和不为7, 11的概率.

用古典概率解此题，能将样本空间定义为:

$\Omega=\{2,\ldots,12\}$ 吗? 为什么?

随机事件：基于一定的试验目的进行试验。

- 解: 设$\Omega=\{(1,1)(1,2)\ldots(6,6)\}$
- $A=\{$两颗骰子点数之和为7或11$\}$
- $P(A)=8/36=2/9$



$$P(\overline{A})=\frac{36-8}{36}=1-P(A)=7/9$$

例: 将两颗均匀骰子抛掷一次, 求两颗骰子点数之和不为7, 11的概率.

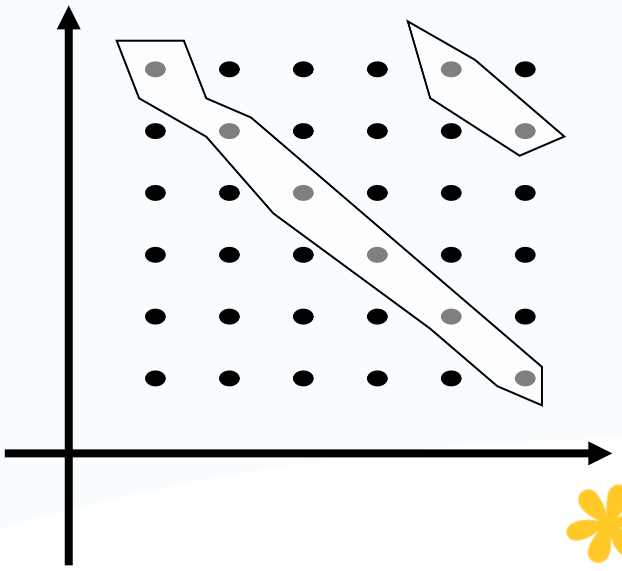
随机事件：基于一定的试验目的进行试验。

如果试验目的就是关注点数之和，样本空间为: Ω={2,….,12}

所求的概率：1-2/11=7/11.

此题试验目的关注具体的点数，否则“两颗骰子点数之差，或者之积等”这些随机事件的可能性如何求?

- 解: 设Ω={(1,1)(1,2)…(6,6)}
- A={两颗骰子点数之和为7或11}
- P(A)=8/36=2/9



$$P(\overline{A})=\frac{36-8}{36}=1-P(A)=7/9$$

例9:假如一场比赛中胜6局才算赢，两个赌徒在一个胜五局，另一个胜两局的情况下中断赌博，如何分配赌金？

解：（1）设想最多再进行4 局比赛即可结束；

（2）共有2^4 种可能情况，每一种情况出现是等可能的；

（3）其中仅有第一个赌徒四局皆输,第二个赌徒才可能赢

结论：16种可能情况中，仅有“第一个赌徒四局皆输”一种情况有利于第二个赌徒，故

$P_1 = 15/16, \quad P_2 = 1/16 \longrightarrow 15:1$

思考：甲、乙两位水平一样的乒乓球选手进行训练赛，规定先胜4局的人为胜者。现在甲已经胜了2局，乙已经胜了1局，那么最终甲获胜的概率是多少?

例8 袋中有10个小球，4个红的，6 个白的，求

（1）有放回地从中依次取3球，取得“2红1白”的概率。

（2）不放回地从中依次取3 球，取得“2红1白”的概率。

解：设想10个球依次编为1，2，3，…10。

（1）有放回抽样 A={有放回地取得“2红1白”}

样本点总数为$N=10\times10\times10=10^3$

所求事件包含的样本点数为$r=4^2\times6\times C_3^2$

$$=C_3^1\cdot6\cdot C_2^2\cdot4^2$$

C_3^2 是三次抽取中选出两次取到红球

所以 $$P(A)=\frac{r}{N}=\frac{C_3^2\times4^2\times6}{10^3}=0.288$$

（2）无放回抽样

记住书上例1.2.5结论

$$\frac{C_{n_1}^{d_1}C_{n_2}^{d_2}\cdots C_{n_M}^{d_M}}{C_n^d}$$

解法一：$N=10\times9\times8=P_{10}^{3}$

$$r=4\times3\times6\times C_3^2$$

$$P(A)=\frac{r}{N}=0.3$$

解二：

从袋中取出 3 个球，将每一种组合方式看成一个样本点，则基本事件总数= C_{10}^{3}

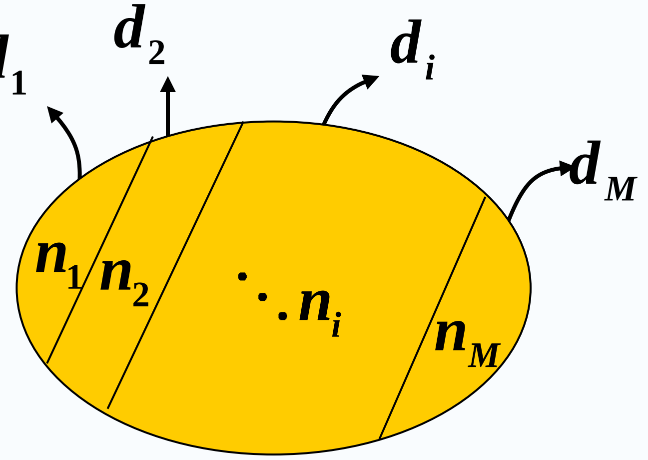
$$r=C_4^2\times C_6^1 \qquad P(A)=\frac{r}{N}=0.3$$

注意：例子中的基本事件的结构有什么变化。

组合的角度：一次从袋中取3个，不考虑顺序。

分类抽球问题:

袋中有n个球(例1.2.5)



从袋中取$d(d \le n)$个,

其中恰有d_i个第i类球

$(i = 1, 2, \cdots, M)$的概率为:

$$\sum_{i=1}^{M} n_i = n$$

$$P = \frac{C_{n_1}^{d_1} C_{n_2}^{d_2} \cdots C_{n_M}^{d_M}}{C_n^d}$$

$$\sum_{i=1}^{M} d_i = d \;, d_i \le n_i$$

古典概率的计算中常见的类型：

- (1) 随机取数：例1.2.2, 1.2.3, 1.2.8
- (2) 分(住)房，生日问题：例1.2.4
- (3) 抽球：例1.2.5(重点)

  注:古典概率的大部分问题都能形象化地用摸球模型来描述。
- (4) 配对(很少涉及)

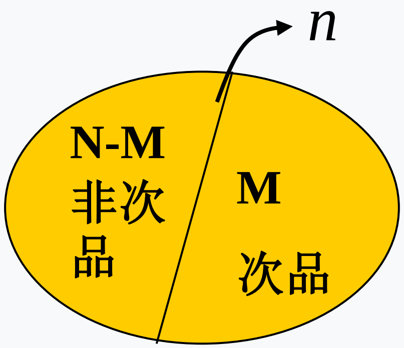
注:古典概率的计算在产品质量抽样检查等实际问题及理论物理的研究中都有重要应用。

思考(有名的生日问题)：班上有n(n<365)个人，至少有两个人的生日在同一天的概率为多大?

思考(有名的生日问题)：最少多少个人才可以使里面有两个人的生日月份相同的概率大于90%?

注: 实际中假如产品的好坏从外形上看不出来,而且我们又是随机抽样,那么任何一件产品被抽到的可能性都一样,这正是古典概率.

推广一般模型：一批同类产品共N件，其中有M件次品，从中随机抽取n件，求恰有m件次品的概率。



B={有m件次品}

$$P(B)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ m=0,1,\cdots,l=\min\{M,n\}$$

超几何函数级数展开

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(n)}b^{(n)}}{c^{(n)}}\cdot\frac{z^n}{n!}$$

超几何分布(Hypergeometric):
不放回抽样,不考虑顺序(组合角度)

(1)题目改为依次不放回抽取n件(考虑顺序）

$$P(B)=C_n^m\cdot\frac{P_M^m P_{N-M}^{n-m}}{P_N^n}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

易漏掉

固定一次顺序

(2)题目改为有放回依次抽取*n*件

固定一次顺序

$$P(B)=\frac{M^m\cdot(N-M)^{n-m}}{N^n}\cdot C_n^m$$

易漏掉

$$=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\cdot\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m}$$ ——二项分布

推广一般模型：一批同类产品共*N*件，其中有*M*件次品，从中随机抽取*n*件，求恰有*m*件次品的概率。

超几何函数级数展开

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(n)}b^{(n)}}{c^{(n)}}\cdot\frac{z^n}{n!}$$

B={有m件次品}

$$P(B)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\quad m=0,1,\cdots,l=\min\{M,n\}$$

超几何分布(Hypergeometric): 不放回抽样, 组合角度.

1)考虑顺序不放回抽取n件:

$$P(B)=C_n^m\cdot\frac{P_M^m P_{N-M}^{n-m}}{P_N^n}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

固定一次顺序

2) 题目改为有放回依次抽取n件:

$$P(B)=\frac{M^m\cdot(N-M)^{n-m}}{N^n}\cdot C_n^m=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\cdot\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m}$$

固定一次顺序

——二项分布

关系:当$N\to\infty$,超几何分布近似为二项分布.

古典概率具有如下三个性质：(离散均匀概率)

(1)对任意事件A，有$0\le P(A)\le 1$；

(2)$P(\Omega)=1$；

(3)若 $A_1,\cdots,A_m$ 互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$

证明(3)：$P(A_i)=k_i/n$，$i=1,2,\ldots,m$，且

和事件所含基本件数为$\sum k_i$，故

$$P(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=(\sum_{i=1}^{m}k_i)/n=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$$

缺陷：古典概率有局限性（有限性和等可能性）。

引申：无穷个的样本点如何计算概率？

用抽象化方法定义概率。

早在拉普拉斯给出概率的古典定义之前，人们就提出了几何概率(与区域的长度、面积、体积等测度有关，与位置及形状无关)的概念，这是研究有无穷多个可能结果的随机现象问题的。

1777 年法国科学家布丰(曾译蒲丰)提出的一种计算圆周π的方法——随机投针法，即著名的蒲丰投针问题，就是几何概率的一个早期例子。

“在平面上画有一组间距为d的平行线，将一根长度为$l(l<d)$的针任意掷在这个平面上，求此针与平行线中任一条相交的概率。”

19世纪，几何概率逐步发展起来。

但到19世纪末，出现了一些自相矛盾的结果。

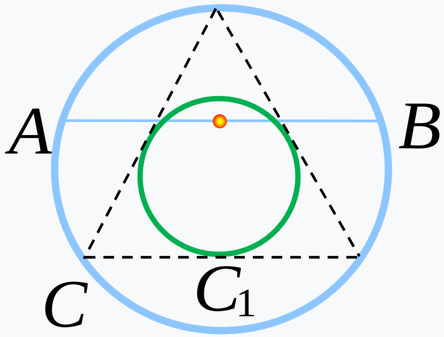
贝特朗奇论：在半径为 r 的圆 C 内“任意”作一弦，试求此弦长度 l 大于圆内接等边三角形边长 $\sqrt{3}r$ 的概率。

解一：　作半径为 $r/2$ 的同心圆 C_1

设弦AB的中点M“任意”落于圆 C_1 内

若 M 落于圆 C_1 内，则 $l > \sqrt{3}r$

$$p = \frac{\pi (r/2)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

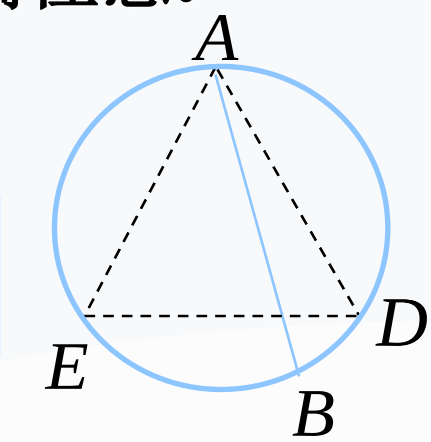


假定弦的中点在圆内均匀分布。

解二：设弦AB的一端A固定于圆周上，另一端任意.

考虑等边 ΔADE，如 B 落于角 A 对应的弧 $\overset{\frown}{DE}$ 上，则 $l > \sqrt{3}r$

$$p = \frac{DE\text{的弧长}}{\text{圆周长}} = \frac{1}{3}$$

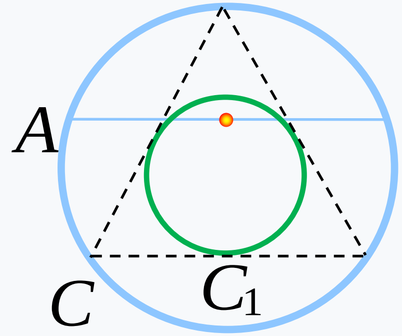


假定端点在圆周上均匀分布。

贝特朗奇论：在半径为 r 的圆 C 内“任意”作一弦，试求此弦长度 l 大于圆内接等边三角形边长 $\sqrt{3}r$ 的概率。

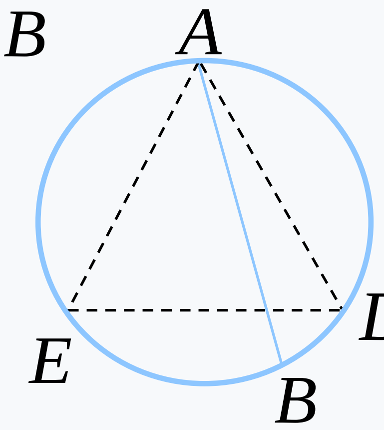
1) 假定弦的中点在圆内均匀分布。

$$p=\frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2}=\frac{1}{4}$$

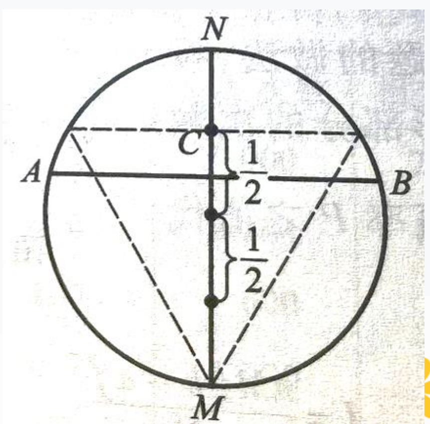


2) 假定端点在圆周上均匀分布。

$$p=\frac{\overset{\frown}{DE}\text{的弧长}}{\text{圆周长}}=\frac{1}{3}$$



3) 解三：假定弦的中点在直径上均匀分布。
由于对称性，可预先指定弦的方向。作垂直于此方向的直径，只有交直径于 1/4点与3/4点间的弦，其长才大于内接正三角形边长。



设所有交点是等可能的，则所求概率为 1/2.

同一问题有三种不同的答案，是在取弦时采用不同的等可能性假定. 这三种答案是针对三种不同的随机试验，对于各自的随机试验而言，它们都是正确的。

这类问题之所以有不同解答, 当一随机试验有无穷多个可能结果时，有时很难客观地规定“等可能”这一概念。

同因此，使用术语“随机地”、“等可能”、“均匀分布”等时，应明确指明其含义，这因试验而异。

这反映了几何概率的逻辑基础是不够严密的。几何概率这类问题说明了拉普拉斯关于概率的古典定义带有很大的局限性。

当严密的概率公理化系统建立后，几何概率才能健康地发展且有广泛的应用。

古典概率具有如下三个性质：(离散均匀概率)

(1)对任意事件A，有$0\le P(A)\le 1$；

(2)$P(\Omega)=1$；

(3)若 $A_1,\cdots,A_m$ 互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$

证明(3)： $P(A_i)=k_i/n$， $i=1,2,\ldots,m$, 且

和事件所含基本件数为$\sum k_i$, 故

$$P(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=(\sum_{i=1}^{m}k_i)/n=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$$

缺陷：古典概率有局限性（有限性和等可能性）

引申：无穷个的样本点如何计算概率？

用<u>抽象化方法</u>定义概率。

在这种背景下，柯尔莫哥洛夫于1933年在他的《概率论基础》一书中第一次给出了概率的测度论式的定义和一套严密的公理体系。

这一公理体系着眼于规定事件及事件概率的最基本的性质和关系，并用这些规定来表明概率的运算法则。

它们是从客观实际中抽象出来的，既概括了概率的古典定义、几何定义及频率定义的基本特性，又避免了各自的局限性和含混之处。

概率论公理化的三种学派

① 1921年以凯恩斯(J.M.Keynes)为代表的“主观概率学派”

凯恩斯主张把任何命题都看作事件, 例如“明天将下雨”,“土星上有生命”等等都是事件, 人们对这些事件的可信程度就是概率, 而与随机试验无关, 通常称为主观概率.

② 1928年以冯.米泽斯(von Mises)为代表的“客观概率学派”(频率理论学派)

米泽斯定义事件的概率为该事件出现的频率的极限, 而作为公理就必须把这一极限的存在作为第一条公理, 通常称为客观概率

③ 1933年以柯尔莫哥洛夫为代表的“以测度论为基础的概率公理化体系”

目前, 绝大多数教科书都是采用柯尔莫哥洛夫的概率公理化体系.

四：概率的公理化定义

定义：设E的样本空间为Ω，对于E的每个事件A，均对应于唯一一个实数，记为$P(A)$，其对应规则为

1. (非负性)　对任一事件A, 有$0 \le P(A) \le 1$;
2. (规范性)　$P(\Omega)=1$;
3. (可列可加性或完全可加性)

E的事件列$A_1, A_2, \ldots$, 互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

称$P(A)$是A的概率。

注：又称为柯氏公理。前苏联大数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)1933年成功地将概率论实现公理化的。

德雷·柯尔莫哥洛夫个人简介：

柯尔莫哥洛夫是前苏联数学家. 1903年4月25日生于俄罗斯顿巴夫市；1987年10月20日卒. 主要在概率论、算法信息论和拓扑学贡献，最为人所道的是对概率论公理化所作出的贡献。他曾说："概率论作为数学学科，可以而且应该从公理开始建设，和几何、代数的路一样。

A.N.Kolmogorov
俄国数学家，主要在概率论、算法信息论和拓扑学贡献，
1903.4.25-1987.10.20

柯尔莫哥洛夫是20世纪最有影响的数学家之一. 柯尔莫哥洛夫是现代概率论的开拓者之一.柯尔莫哥洛夫与辛欣共同把实变函数的方法应用于概率论. 1933年，柯尔莫哥洛夫的专著《概率论的基础》出版，书中第一次在测度论基础上建立了概率论的严密公理体系，这一光辉成就使他名垂史册.

A.N.Kolmogorov俄国数学家，主要在概率论、算法信息论和拓扑学贡献，1903.4.25-1987.10.20

因为这一专著不仅提出了概率论的公理定义，在公理的框架内系统地给出了概率论理论体系.

而且给出并证明：相容的有限维概率分布族决定无穷维概率分布的“相容性定理”，解决了随机过程的概率分布的存在问题；提出了现代的一般的条件概率和条件期望的概念并导出了他们的基本性质，使马尔可夫过程以及很多关于随机过程的概念得以严格地定义并论证.

这就奠定了近代概率论的基础，从而使概率论建立在完全严格的数学基础之上. 20世纪20年代，在概率论方面他还作了关于强大数律、重对数律等的基本工作 。

A.N.Kolmogorov俄国数学家，主要在概率论、算法信息论和拓扑学贡献，1903.4.25-1987.10.20

柯尔莫哥洛夫不但是杰出的数学家，而且是优秀的教育家，他指导过60多名博士和副博士.他认为在大学的数学教育中，好的教师应该是:(1)讲课高明，比如能用其它科学领域的例子来吸引学生;(2)以清晰的解释和宽广的数学知识来吸引学生;(3)善于作个别指导，清楚每个学生的能力，在其能力范围内安排学习内容，使学生增强信心.他还说：“只有那些自己对数学充满热情并且将之看成为一门活的发展科学的人，才能真正教好数学。”柯尔莫哥洛夫非常关心和重视基础教育，并亲自领导了中学数学教科书的编写工作. 他培养了许多优秀的数学家，如盖尔范德、马尔采夫、格涅坚科、阿诺尔德等.

柯尔莫哥洛夫胸襟开朗，他总是具有把青年人吸引到他研究工作中去的魅力，并形成以他为首的学派.

A.N.Kolmogorov
俄国数学家，主要在概率论、算法信息论和拓扑学贡献，**1903.4.25-1987.10.20**

学业工作经历及荣誉：

柯尔莫哥洛夫**1925**年毕业于莫斯科大学，**1929**年研究生毕业，成为莫斯科大学数学研究所研究员. **1930**年**6**月到**1931**年**3**月访问哥廷根、慕尼黑及巴黎. **1931**年任莫斯科大学教授，**1933**年任该校数学力学研究所所长. **1935**年获物理数学博士学位. 继于**1939**年当选为苏联科学院院士. **1966**年当选为苏联教育科学院院士. 他还被选为荷兰皇家学会、英国皇家学会、美国国家科学院、法国科学院、罗马尼亚科学院以及其它多个国家科学院的会员或院士，并获得不少国外著名大学的荣誉博士称号

A.N.Kolmogorov俄国数学家，主要在概率论、算法信息论和拓扑学贡献，1903.4.25-1987.10.20

由于柯尔莫哥洛夫的卓越成就，他七次荣膺列宁勋章，并被授予苏联社会主义劳动英雄的称号. 他还是列宁奖金和国家奖金的获得者. 1980年荣获了沃尔夫奖，1986年荣获了罗巴切夫斯基奖.

柯尔莫哥洛夫的论著总计有230多种，涉及的领域包括实变函数论、测度论、集论、积分论、三角级数、数学基础论、拓扑空间论、泛函分析、概率论、动力系统、统计力学、数理统计、信息论等多个分支.

由公理化定义可以得到如下重要性质:

1. 不可能事件的概率为0, 即$P(\phi)=0$;（逆不真）

证明: $\phi\cup\phi\cup\cdots=\phi \Longrightarrow P(\varphi)=\sum_{K=1}^{\infty}P(\varphi)$

$\Longrightarrow P(\phi)=0$

2. (有限可加性)若试验E的事件组 $A_1,\ldots,A_m$ 互不相容, 则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$

3. 对立事件概率和为1, 即$P(A)+P(\overline{A})=1$;

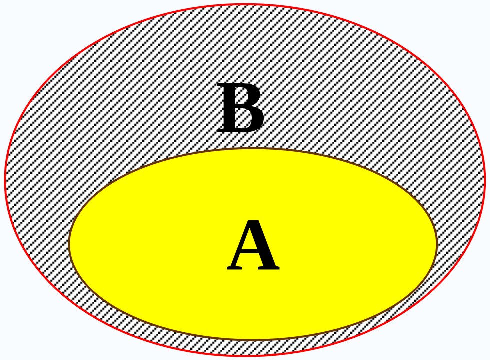
证明: $A\cup\overline{A}=\Omega,\ A\cap\overline{A}=\varphi$

4.（概率单调性）若事件A和B满足$A\subset B$，则有

$P(A)\leq P(B)$, $P(B\text{-}A)=P(B)\text{-}P(A)$ 成立。

证明：$B=A\cup(B-A)$,且

$$A\cap(B-A)=\varphi$$



由概率的有限可加性，得

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

$$\Longrightarrow P(B)-P(A)=P(B-A)\geq 0$$

一般结论(A与B任意关系)：例1.2.6

$$(1)P(A-B)=P(A)-P(AB);$$

$$(2)P(A-B)=P(A\cup B)-P(B).$$

例 1.2.6 证明对试验E的两个事件A和B有

$$(1)\ P(A-B)=P(A)-P(AB);$$

$$(2)\ P(A-B)=P(A\cup B)-P(B).$$

证：在例1. 1. 8（书上）中已证得，

$$A-B=A-AB=(A\cup B)-B$$

注意到$AB\subset A, B\subset A\cup B,$

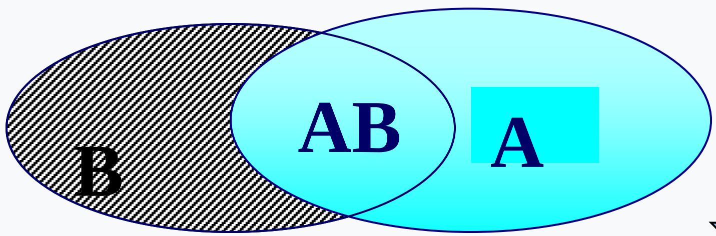
由概率的单调性可得

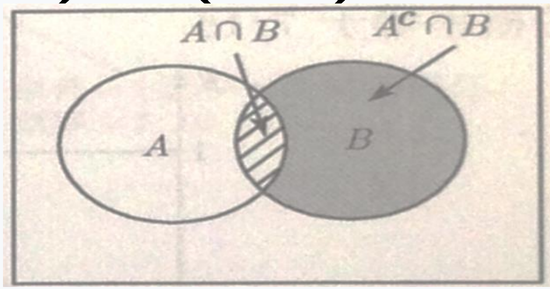
$$P(A-B)=P(A)-P(AB),$$

$$P(A-B)=P(A\cup B)-P(B).$$

概率加法定理：对试验E 的任意两个事件A 和B 有

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$





A∪B=(A-B)∪B

(A-AB)∪B

= (B-AB)∪A

$$AB=\phi$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$

$$AB=\phi, A\bigcup B=\Omega$$

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(\overline{A})=1.$$

概率的公理化定义及性质，为概率的计算提供了更完善的理论依据。

书上例1.2.7 古典概率是公理化定义的特例。

多除少补原理:

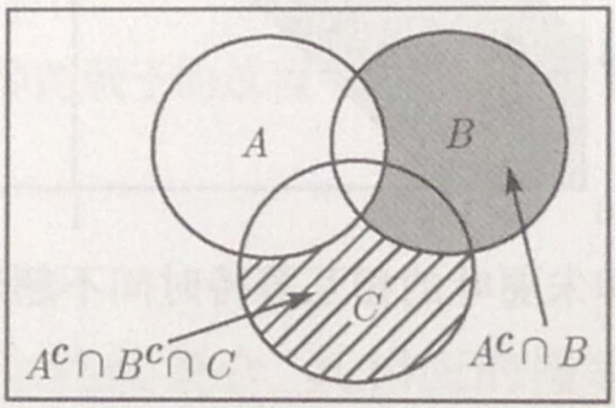
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i\le k\le n} P(A_iA_k)+\cdots+(-1)^{n+1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

$$P(B_1\cup B_2\cup B_3)$$

$$=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)$$

$$-P(B_1B_2)-P(B_1B_3)-P(B_2B_3)$$

$$+P(B_1B_2B_3)$$



例如:

抽检试验

放球试验

例11 设50件产品中有5件是次品，其余的是合格品，从中任取3件，求选到的3件产品中有次品的概率。

解法一：设A={选到的3件产品中有次品}，

A_i={选到的3件产品中有i件次品}，$i=1,2,3$。

则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$， 并且有A_1，A_2，A_3互不相容。

所以有 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

模型：

$$\frac{C_{n_1}^{d_1}C_{n_2}^{d_2}\cdots C_{n_M}^{d_M}}{C_n^d}$$

$$=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}+\frac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}+\frac{C_5^3}{C_{50}^3}$$

$$\approx 0.2761$$

解法二：考虑A的对立事件

$\overline{A}$={选到的3件产品全是合格品}

有

$$P(\overline{A})=\frac{C_{45}^{3}}{C_{50}^{3}}\approx 0.7239$$

从而

$$P(A)=1-P(\overline{A})\approx 1-0.7239$$

$$=0.2761$$

注：一般没有强调是有放回的就为不放回地抽取。

思考有放回地抽取？

$$P（A）=\frac{C_3^1 5\cdot 45^2}{50^3}+\frac{C_3^2\cdot 5^2\cdot 45}{50^3}+\frac{C_3^3\cdot 5^3}{50^3} \quad 或 \quad 1-\frac{C_3^3\cdot 45^3}{50^3}$$

例书上习题一15题: 将5个球随意地放入三只盒子，求每个盒子中至少有一个球的概率。

分析 此题直接采用古典概率定义去做会很困难，现借助于另一组事件来计算。

解 设 A={每个盒子中至少有一个球}

B_i={第 i 个盒子是空的}, i =1, 2, 3。

则 $A = \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 = \overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3}$

$$P(A)=P(\overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3})=1-P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$$

$$=1-P(B_1)-P(B_2)-P(B_3)$$

$$+P(B_1B_2)+P(B_1B_3)+P(B_2B_3)-P(B_1B_2B_3)$$

$$P(A)=P(\overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3})=1-P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$$

$$=1-P(B_1)-P(B_2)-P(B_3)+P(B_1B_2)+$$

$$P(B_1B_3)+P(B_2B_3)-P(B_1B_2B_3)$$

有　$P(B_i)=2^5/3^5$，$i=1,2,3$;

$P(B_iB_j)=1/3^5$，　$1\le i<j\le 3$;

$P(B_1B_2B_3)=0$　(为什么？)

故　$P(A)=1-3\times(2/3)^5+3\times(1/3)^5=50/81=0.6173$

思考1 (最大车牌号): 某城有N辆卡车，车牌号从1到N，有一个外地人到该城去，把遇到的n辆车子的牌号抄下（可能重复抄到某些车牌号），求抄到的最大号码正好为k的概率（$k=1,\ldots,N$）

解 设每辆卡车被遇到的机会相同。

思考2：甲、乙两位水平一样的乒乓球选手进行训练赛，规定先胜4局的人为胜者。现在甲已经胜了2局，乙已经胜了1局，那么最终甲获胜的概率是多少?

思考3：最少多少个人才可以使里面有两个人的生日月份相同的概率大于90%?

本次课的重点是：
熟练古典概率的计算问题及柯氏公理的性质，加法公式。

下次课内容：
要讲到§1.3 中的全概率公式，其中包括条件概率，乘法公式，全概率公式。