§1.4 事件的独立性

一、两个事件的独立性

在一般情况下(如教材 例1.3.1), $P(A|B) \neq P(A)$。

但若

$$P(A|B) = P(A) \qquad (1)$$

成立，即事件A发生的可能性大小不受事件B的影响。我们说A与B是<u>相互独立</u>的。

定义：设A，B是<u>同一试验</u>E的两个事件，若满足

$$P(AB) = P(A)P(B) \qquad (2)$$

称事件A与B<u>相互独立(independent)</u>。

注1：必然事件及不可能事件与任何事件独立.

注2：当$P(B)>0$时 公式（1）与（2）是等价的.

(1)式常用来判断事件的独立性; (2)式常用来计算概率。

定理1：若事件A和B相互独立，则下列三对事件

$$A，\overline{B}；\overline{A}，B；\overline{A}，\overline{B}$$

也相互独立。

证明：仅对第三种情形证明。

目的：$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$

因为$P(AB)=P(A)P(B)$

所以 $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=[1-P(A)][1-P(B)]=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

设A, B是两个随机事件，且$0 < P(A), P(B) < 1$，

$P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$，请问$A, B$是否相互独立？

答案　A和B相互独立。

因为 $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A}) \Rightarrow \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}$

$$\Rightarrow P(AB)P(\overline{A}) = P(B\overline{A})P(A)$$

$$\Rightarrow P(AB)[1 - P(A)] = [P(B) - P(AB)]P(A)$$

$$\Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

用到 公式　$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$

此结论也可用来判断两个事件的独立性。

在多个事件中，是否存在类似的独立性呢？

例1 (伯恩斯坦反例) 一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色, 第三面染成黑色, 而第四面同时染上红, 白, 黑三种颜色. 现在以A,B,C分别记投一次四面体出现红, 白, 黑颜色朝下的事件, 则由于四面体中有两面有红色, 因此

解：$P(A) = 1/2$

同理$P(B) = P(C) = 1/2$, 容易算出

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = 1/4$$

从而有

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \qquad (1) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \end{aligned}$$

即A、B、C中任意两个都是相互独立的。我们称A、B、C 两两独立。

例1 (伯恩斯坦反例) 一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色, 第三面染成黑色, 而第四面同时染上红, 白, 黑三种颜色. 现在以A,B,C分别记投一次四面体出现红, 白, 黑颜色朝下的事件, 则由于四面体中有两面有红色, 因此

$P(A)=P(B)=P(C)=1/2$, 容易算出

从而有
$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \end{aligned} \qquad (1)$$

但$P(ABC)=1/4 \neq 1/8= P(A)P(B)P(C)$

如果
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \qquad (2)$$

从而(1)和(2)同时成立，我们称A、B、C 相互独立。

二、n 个事件的独立性

定义：设A_1，A_2，…，A_n为试验E的事件，若对所有可能的组合及$1\leq i<j<\ldots\leq n$，有

$$\left.\begin{aligned}&P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\\&P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)\\&\cdots\\&P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)\end{aligned}\right\}\quad(*)$$

成立，则称事件组A_1，A_2，…，A_n<u>相互独立</u>。

若对一切$1\leq i_1<i_2\leq n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})$$

成立，则称事件组A_1，A_2，…，A_n<u>两两独立</u>。

注:(*)包含$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-C_n^1-C_n^0=2^n-n-1$等式.

2）事件组A_1，A_2，…，A_n相互独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$

事件组A_1，A_2，…，A_n两两独立。

与n个事件的互不相容等价于两两互不相容区别。

3）事件A与B相互独立 $\not\Leftrightarrow$ 互不相容。(重点)

定理1：若事件A和B相互独立，则下列三对事件A，$\bar{B}$；$\bar{A}$，B；$\bar{A}$，$\bar{B}$也相互独立。

定理2：若个事件A_1，A_2，…，A_n相互独立，则将A_1，A_2，…，A_n中的任意多个事件换成它们的对立事件后，所得到的个事件仍然相互独立。

例如：

“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”

“有志者事竟成”

系统的可靠性设计

“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”

例2三个臭枪手向一个神枪手比武.他们都独立地向同一目标射击，三个臭枪手命中率分别为0.5、0.55、0.60，神枪手的命中率为0.90.问哪一方胜出的可能性大?

解：令A={三个臭枪手组队命中目标}

A_i={第 i 个臭枪手命中目标}, i=1,2,3, 则有

A_1、A_2、A_3相互独立。

$$P(A)=P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1-P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$

$$=1-P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2})\,P(\overline{A_3})$$

$$=1-(1-0.5)(1-0.55)(1-0.6)$$

$$=1-0.5\cdot 0.45\cdot 0.4=0.91$$

三个臭枪手胜出的可能性大.

“有志者事竟成”

例3 某人做一次试验获得成功的概率仅为0.2, 他持之以恒,不断重复试验,求他做10次试验至少成功一次的概率？做20次又怎样呢？

解：设他做k次试验至少成功一次的概率为p_k,

A_i={第i次试验成功}, i=1, 2, …

则 $$p_{10} = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})\, P(\overline{A_2}) \ldots P(\overline{A_{10}})$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{k} [1 - P(A_i)] = 1 - (1 - 0.2)^{10} \approx 0.8926$$

$$p_{20} = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})\, P(\overline{A_2}) \ldots P(\overline{A_{20}})$$

$$= 1 - (1 - 0.2)^{20} \approx 0.9885$$

例3 某人做一次试验获得成功的概率仅为0.2, 他持之以恒, 不断重复试验,求他做10次试验至少成功一次的概率？做20次又怎样呢？

一般，将试验E重复进行k次，每次试验中A出现的概率p（$0 < p < 1$）则A至少出现一次的概率为

$$p_k = 1 - (1 - p)^k$$

并且
$$\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty}[1-(1-p)^k]=1$$

注: 虽然每次成功的概率很小, 但是混合后则有很大的概率, 在实际工作中, 这类效应值得充分重视.

例: 假若每个人血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%, 混合100个人的血清, 求此血清中含有肝炎病毒的概率.

例3 某人做一次试验获得成功的概率仅为0.2, 他持之以恒, 不断重复试验,求他做10次试验至少成功一次的概率？做20次又怎样呢？

A_i={第i次试验成功}, i=1, 2, …

则 $p_k = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)$ $\qquad p_k = 1-(1-p)^k$

例: 假若每个人血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%, 混合100个人的血清, 求此血清中含有肝炎病毒的概率.

虽然每次成功的概率很小, 但是混合后则有很大的概率, 在实际工作中, 这类效应值得充分重视.

注: 没有独立性的假定, 上述计算便无从进行. 当然这里的独立性只能是一种近似.

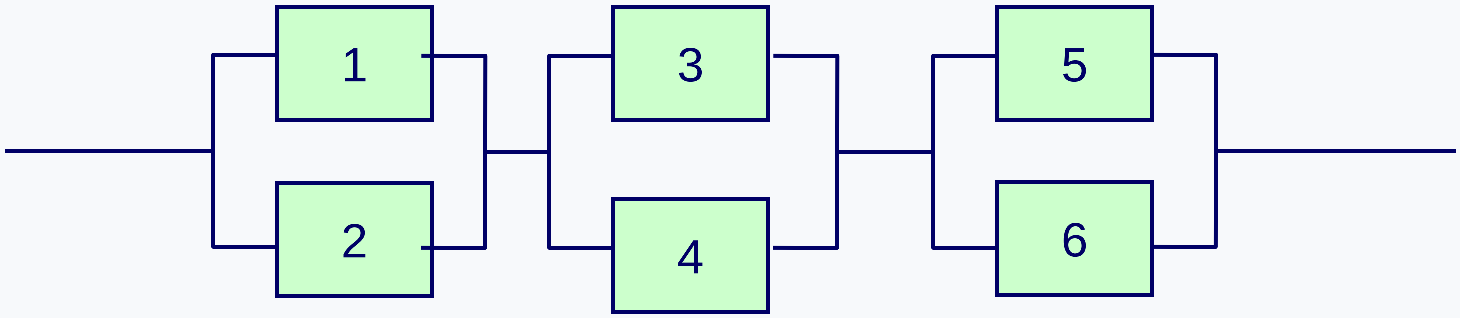
当把某种数学模型用于实际问题时, 这种近似是不可避免的.

因此，作为理论研讨时, 独立性必须按定义验证;

解决实际问题时, 独立性通常只是一种恰当的假定.

系统的可靠性设计

例4 (可靠性问题)设有6个元件，每个元件在单位时间内能正常工作的概率均为0.9(元件的可靠性)，且各元件能否正常工作是相互独立，试求下面系统能正常工作的概率(系统的可靠性)。



解：设A_k={第k个元件能正常工作}, k=1, 2,…, 6

A ={整个系统能正常工作}

$$=(A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4) \cap (A_5 \cup A_6)$$

例4 (可靠性问题)设有6个元件，每个元件在单位时间内能正常工作的概率均为0.9，且各元件能否正常工作是相互独立，试求下面系统能正常工作的概率。

A_1，A_2，…，A_6设相互独立，可以证明 ?

$B_1=A_1\cup A_2$, $B_2=A_3\cup A_4$, $B_3=A_5\cup A_6$也相互独立。

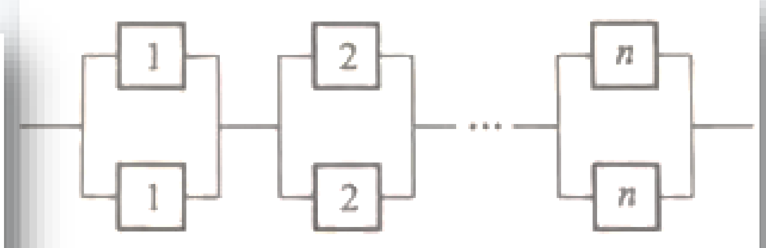
所以有

$$P(A)=P\{(A_1\cup A_2)\cap(A_3\cup A_4)\cap(A_5\cup A_6)\}$$

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1\cup A_2)P(A_3\cup A_4)P(A_5\cup A_6)\\
&=[1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})][1-P(\overline{A_3}\,\overline{A_4})][1-P(\overline{A_5}\,\overline{A_6})]\\
&=[1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})][1-P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})][1-P(\overline{A_5})P(\overline{A_6})]\\
&=[1-(1-0.9)^2]^3 = 0.970299
\end{aligned}
$$

系统的可靠性设计-可靠性理论

例4 (可靠性问题)如果构成系统的每个元件的可靠性(正常工作的概率)均为r, 0<r<1, 且各元件能否正常工作是相互独立的, 试求下面附加通路系统的可靠性。



(b)

[解] 每对并联元件的可靠性为

$$R' = 1-(1-r)^2 = r(2-r)$$

系统由各对并联元件串联而成，故其可靠性为

$$R_S' = (R')^n = r^n(2-r)^n$$

显然 $R_S' > R_C$. 因此用附加元件的方法同样也能增加系统的可靠性.

利用数学归纳法不难证明当 $n \geq 2$ 时，$(2-r)^n > 2-r^n$，即 $R_S' > R_S$. 因此虽然上面两个系统同样由 $2n$ 个元件构成，作用也相同，但是第二种构成方式比第一种方式可靠性来得大. 寻找可靠性较大的构成方式也是可靠性理论的研究课题之一.

从上述讨论可以看出，元件与系统的可靠性是用概率来定义的，所以概率论是研究可靠性理论的重要工具.

试求A_1，A_2，…，A_n至少有一个发生的概率，其中$0 < P(A_i)=p_i < 1$，

若（1）A_1，A_2，…，A_n 互不相容，

（2）A_1，A_2，…，A_n相互独立。

(1)若A_1，A_2，…，A_n 互不相容，由概率的有限可加性

$$P= P(A_1)+ P(A_2)+ \dots + P(A_n)=p_1+p_2+ \dots +p_n$$

(2)若A_1，A_2，…，A_n相互独立，由对偶律可得

$$P = P\{ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \}$$

$$= 1 - P\{ \overline{A_1}\, \overline{A_2} \dots \overline{A_n} \}$$

$$= 1 - P\{ \overline{A_1} \} P\{ \overline{A_2} \} \dots P\{ \overline{A_n} \}$$

$$= 1 - \prod_{i}^{n} (1 - p_i)$$

试求A_1，A_2，…，A_n至少有一个发生的概率，其中$0 < P(A_i)=p_i < 1$，

若（1）A_1，A_2，…，A_n 互不相容，

（2）A_1，A_2，…，A_n相互独立。

特别，当 $P(A_i)= p$，$i=1, 2, \dots, n$，有

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\} = 1 - (1 - p)^n$$

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\} = \lim_{n\to\infty}[1-(1-p)^n] = 1$$

小米加步枪战胜敌人的理论解释。

注：事件的互不相容性在求和事件的概率时很重要，而事件的相互独立性在求积事件的概率时也很重要。

独立事件与互不相容(互斥)事件的关系：

1)事件*A*与*B*相互独立，不一定互不相容：

例2、 设同时掷两个均匀的四面体一次，每一个四面体的四面分别标有号码1，2，3，4。

令*A*={甲四面体向下的一面是偶数}，
B={乙四面体向下的一面是奇数}，
C={两个四面体向下的一面同为奇数或偶数}。

设Ω={(偶，奇)，(奇，偶)，(奇，奇)，(偶，偶)}

$$P(A) = P(B) = P(C) = 8/16 = 1/2$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = 1/4$$

但是，A∩B＝{(偶，奇)} $\neq \phi$

所以，事件A与B相互独立，但是不互不相容。

A与B相互独立，表示其中一个事件发生与否与另一事件发生与否无关，它并不表示A与B不能同时发生。

2) 事件A与B互斥，不一定相互独立：

$$A \cap B = \phi, \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

不一定有 $P(A)P(B) = 0$

若事件A与B互不相容，则意味这一个事件(例如A)的发生，必然导致另一事件(例如B)的不发生，即它们之间可能有一定的联系，A与B不一定相互独立。

3) 若P(A)>0, P(B)>0,

则事件A与B互斥与相互独立不能同时成立.

本次课的重点是：

熟练掌握全概率公式和Bayes公式的计算问题，利用事件的独立性计算相关的概率问题，注意独立事件与互斥事件区别.

下次课内容：

要讲到第二章的§2.1 随机变量的分布函数，其中包括随机变量的定义，分布函数的定义及相关判断性质.