假设检验(双侧)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $P\left\{w < w_{1-\alpha/2} \text{或} w > w_{\alpha/2}\right\} = \alpha$

统计假设	条件	检验统计量	拒绝域
$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	已知 σ^2	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$u > u_{\alpha/2}$ 或 $u < -u_{\alpha/2}$
$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	未知 σ^2	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$t > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $t < -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	已知 μ	$n\cdot\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n)$ 或 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$
$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	未知 μ	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\bar{X}}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

统计假设	条件	检验统计量	拒绝域
$H_0:\mu_1=\mu_2$ $H_1:\mu_1\neq\mu_2$	已知σ_1^2 与σ_2^2	$U=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\|u\|>u_{\alpha/2}$
$H_0:\mu_1=\mu_2$ $H_1:\mu_1\neq\mu_2$	未知σ_1^2 和σ_2^2 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\|t\|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	未知μ_1 和μ_2	$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$F>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	已知 μ_1 和μ_2	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\dfrac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\Big/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}\left(\dfrac{Y_j-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\Big/n_2}\sim F(n_1,n_2)$	$F>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$ 或 $F<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$

1 2 3 4

一、均值μ的检验（正态总体）

1. U 检验法 1) 单样本u 检验法：

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma_0^2)$中抽取的样本,σ_0^2 已知

检验 H_0: $\mu=\mu_0$ $(\mu-\mu_0=0)$ H_1:$\mu\neq\mu_0$ $(\mu-\mu_0\neq 0)$

原假设成立: $\boxed{U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)}$ 拒绝域: $\boxed{|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}}$

2)双样本u 检验法

$X_1,\ldots,X_{n1}$是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本,$Y_1,\ldots,Y_{n2}$是正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$中抽取的样本.

已知σ_1^2与σ_2^2, 检验

检验：H_0: $\mu_1=\mu_2$ (或$\mu_1-\mu_2=0$); H_1:$\mu_1\neq\mu_2$(或$\mu_1-\mu_2\neq 0$)

原假设H_0成立时,

$$\boxed{U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}}\boxed{=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)}$$

拒绝域为: $|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}$

但许多实际问题里,方差往往是未知的,如何检验关于正态总体均值的有关假设呢?

2. t 检验法

1) 单样本 t 检验法

$X_1,\ldots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,μ,σ^2 未知

检验 H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu\neq\mu_0$ $(\mu-\mu_0\neq 0)$

原假设成立时,

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

拒绝域为:

$$|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

2) 双样本 t 检验法

1. $X_1,\ldots,X_{n1}$ 是从正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$中抽取的样本,

2. $Y_1,\ldots,Y_{n2}$ 是从正态总体$N(\mu_2,\sigma^2)$中抽取的样本,

3. μ,σ^2 未知, 且两方差相等 (必须有这个条件)

检验: $H_0: \mu_1=\mu_2$, $H_1:\mu_1\neq\mu_2$ $(\mu_1-\mu_2\neq 0)$

原假设成立时，检验统计量

$$T=\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

拒绝域为: $|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$

$$S_w^2=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\right]=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i-\bar{X}\right)^2+\sum_{j=1}^{n_2}\left(Y_j-\bar{Y}\right)^2\right]$$

铁水温度的测量

例 炼钢厂为测定混铁炉铁水温度, 用测温枪(主要装置为一种热电偶)测温6次, 记录如下(单位：ºC):

1318	1315	1308	1316	1315	1312

若用更精确的方法测的铁水温度为1310ºC(可视为铁水真正温度), 问这种测温枪有无系统误差?

解：设测温枪测的铁水温度为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

根据题意要求, 需检验:

$$H_0:\ \mu=1310,\qquad H_1:\ \mu\neq 1310$$

由于σ^2未知, 故采用 t 检验法.

H_0成立时, 检验统计量: $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

拒绝域为: $\boxed{|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$

$$\because\ \overline{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=1314\quad s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=3.521$$

$$\therefore\quad t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n-1}}=\frac{1314-1310}{3.521/\sqrt{6}}=2.783$$

若取α=0.05, 查t 分布表可得: $t_{0.025}(5)=2.5706$

因为 $|t|=2.783>t_{0.025}(5)=2.5706$

所以在显著性水平0.05下, 拒绝H_0

即可认为该种测温枪有系统误差.

若取α=0.01, 查t 分布表可得: $t_{0.005}(5)=4.0322$

所以在显著性水平0.01下, 接受H_0

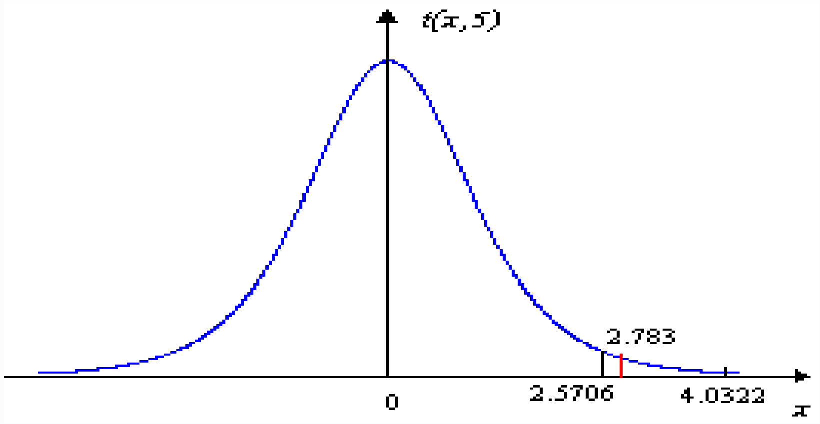
即可认为该种测温枪没有系统误差.

$$\therefore t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n-1}}$$

$$=\frac{1314-1310}{3.521/\sqrt{6}}$$

$$=2.783$$

$$t_{0.025}(5)=2.5706$$



•采用不同的显著性水平α，常得到不同的结论。

•即检验的结果依赖于显著性水平α的选择。

成年人红细胞数与性别的关系1

例: 为研究正常成年男、女红细胞的平均数之差别, 检查某地正常成年男子 156名, 正常成年女子74名, 计算得男性红细胞平均数为465.13万/mm³, 样本标准差为54.976万/mm³; 女性红细胞平均数为422.16万/mm³,样本标准差为49.536万/mm³。

试检验该地正常成年人的红细胞平均数是否与性别有关(α=0.01).

解: 设X表示正常成年男性的红细胞数, $X \sim N(\mu_1,\sigma^2)$

Y表示正常成年女性的红细胞数, $Y \sim N(\mu_2,\sigma^2)$

需作检验: H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

由于σ^2 未知, 故采用 t 检验法, 取检验统计量为:

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

H_0成立, 则 $$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$\because\quad n_1=156,\quad \bar{x}=465.13\text{万}/mm^3,\quad s_1=54.976\text{万}/mm^3$$

$$n_2=74,\quad \bar{y}=422.16\text{万}/mm^3,\quad s_2=49.536\text{万}/mm^3$$

$$\therefore S_w = \sqrt{\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\right]} = 53.295$$

$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{465.13-422.16}{53.295\sqrt{\frac{1}{156}+\frac{1}{74}}} = 5.712$$

$\alpha=0.01$时可得: $t_{\alpha/2}=t_{0.005}(228)=$ 2.575

(查标准正态分布表: $u_{0.005}=2.575$)

于是, $|t|=5.712>2.575$

所以拒绝假设H_0, 即认为正常成年男、女性红细胞数有显著差异.

二、方差σ^2的检验

1. 单样本χ^2检验法 1) μ已知

$X_1,\dots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,

检验H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$; H_1 : $\sigma^2\neq\sigma_0^2$

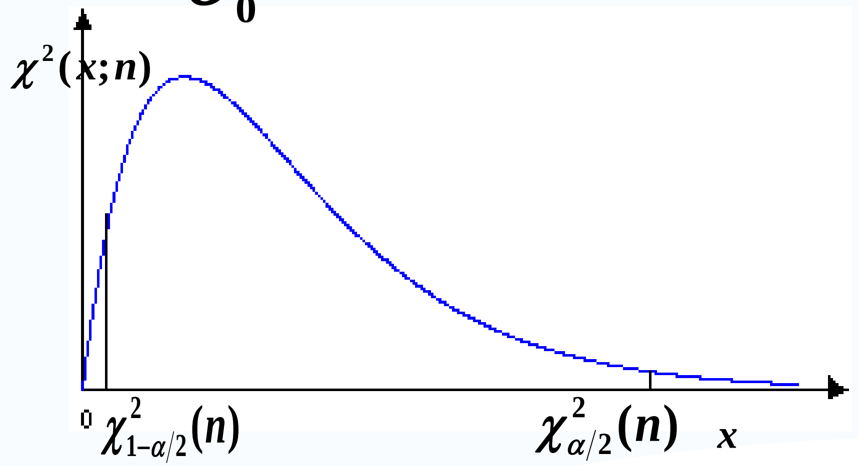
当H_0成立时:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2=n\cdot\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$$

检验

H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$;

H_1 :$\sigma^2\neq\sigma_0^2$ (或$\dfrac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\neq 1$)



拒绝域为: $\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$

2) μ未知

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的样本,

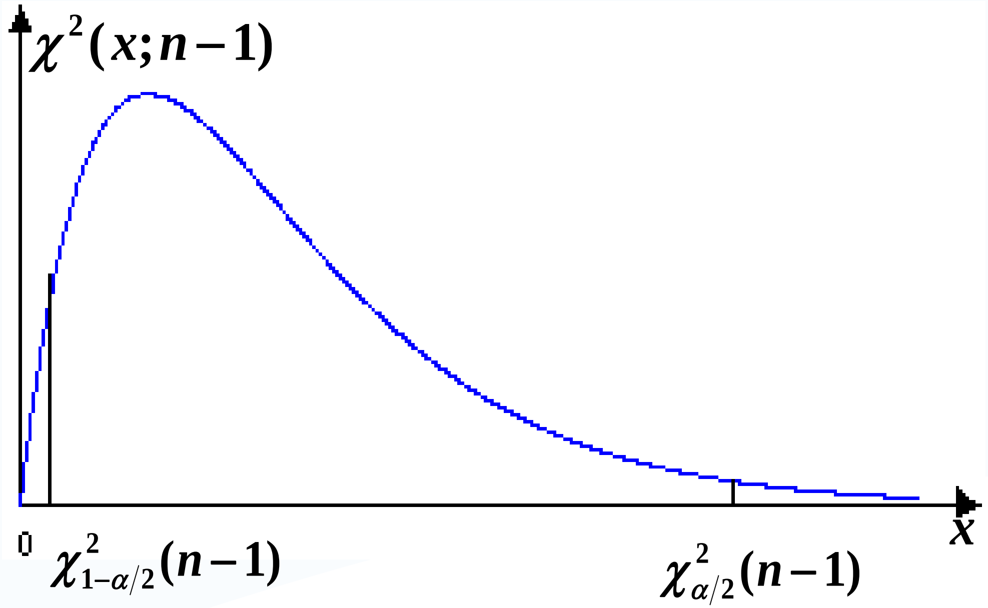
检验 H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$; H_1: $\sigma^2\neq\sigma_0^2$ (或 $\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\neq 1$)

原假设成立时, $\chi^2=(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域为:

$\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或

$\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$



车 床 加 工 精 度

车 床 加 工 精 度

一自动车床加工的零件长度$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，原加工精度$\sigma_0=0.424$，经过一段时间后要检验此车床是否保持原加工精度，测得31个零件的长度数据如下

长度x_i：	10.1	10.3	10.6	11.2	11.5	11.8	12
频数y_i：	1	3	7	10	6	3	1

取$\alpha=0.05$。

解：检验假设 $H_0: \sigma=\sigma_0=0.424$，$H_1: \sigma\neq\sigma_0$

若原假设H_0成立, 则有

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim \chi^2(n-1)$$

计算得 $$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i=11.084$$

$$(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 - n\bar{x}^2 = 3816.42-3808.418=8.002$$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{8.002}{0.424^2}=44.51$$

查表得 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(30)=16.791$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(30)=46.979$$

因 $\chi^2_{0.975}(30) < \chi^2 < \chi^2_{0.025}(30)$

故在显著性水平$\alpha=0.05$下, 不能拒绝原假设H_0

即可认为车床保持了原加工精度.

2. F 检验法（双样本）

* $X_1,\dots,X_{n1}$是从正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$中抽取的样本,
* $Y_1,\dots,Y_{n2}$是从正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$中抽取的样本,
* 检验 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

（或 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$）

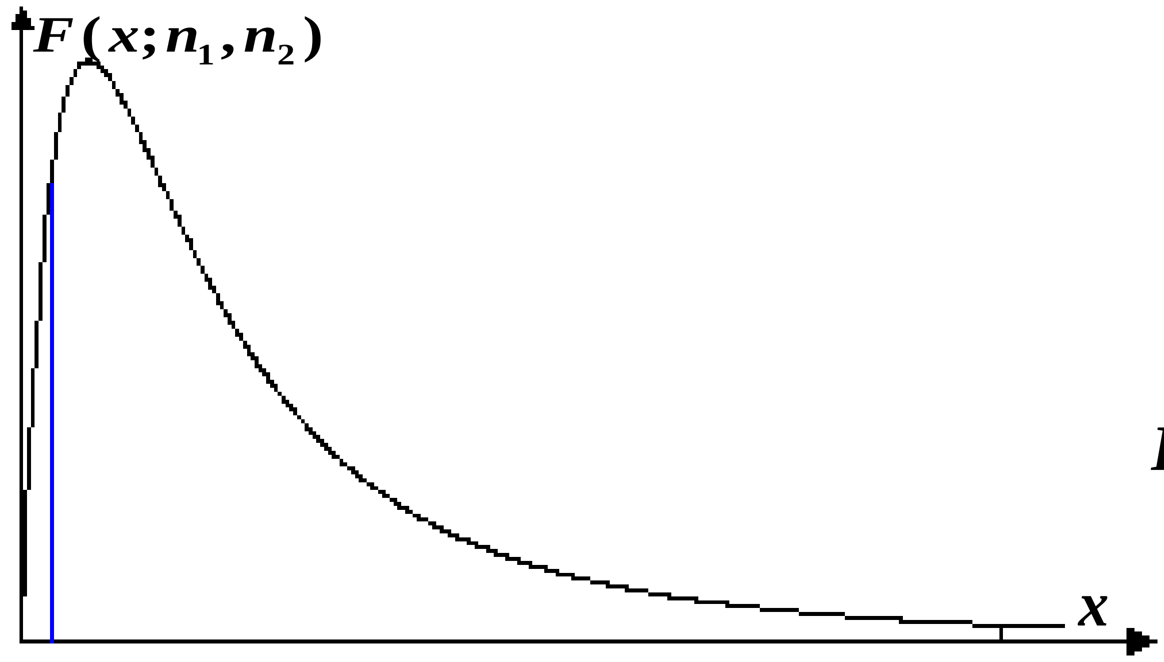
1) μ_1、μ_2 已知

原假设成立

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Big/ n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{Y_j-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \Big/ n_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2 \Big/ n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2 \Big/ n_2} \sim F(n_1,n_2)$$

* 检验 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(或 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$)



$F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)$ $\quad$ $F_{\alpha/2}(n_1,n_2)$

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2 \Big/ n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2 \Big/ n_2}$$

拒绝域为: $F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$ 或 $F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$

2) μ_1、 μ_2 未知

原假设成立时，

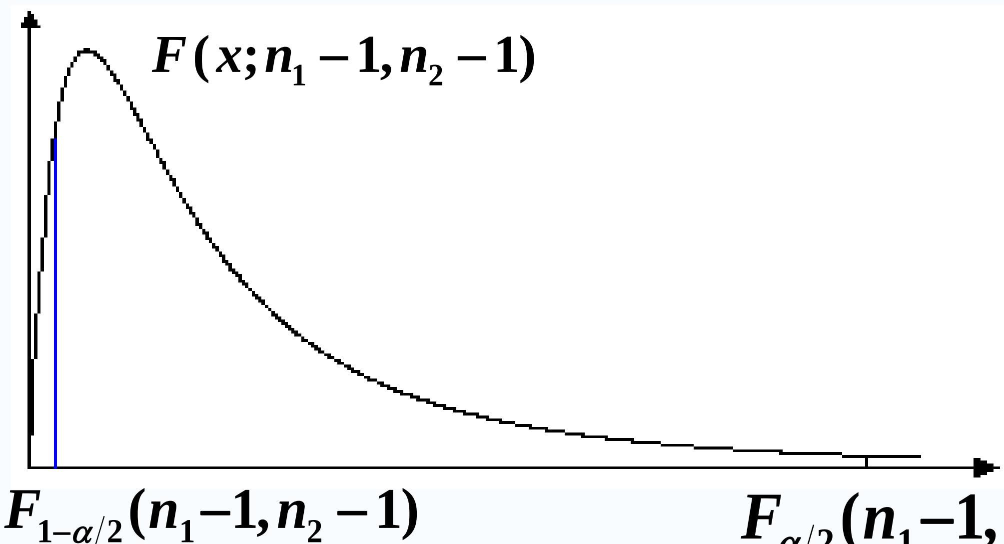
$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

* 检验

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$;

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$(\text{或}\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1)$$



拒绝域为：

$$F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$$ 或 $$F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$$

TIPS

成年人红细胞数与性别的关系
(F检验法)

成年人红细胞数与性别的关系 2

例　为研究正常成年男、女红细胞的平均数之差别，检查某地正常成年男子 156名，正常成年女子74名，计算得男性红细胞平均数为465.13万/mm³，样本标准差为54.976万/mm³；女性红细胞平均数为422.16万/mm³，样本标准差为49.536万/mm³。

试检验该地正常成年男子与女子的红细胞数标准差是否相等(α=0.1)。

思考：试检验该地正常成年人的红细胞平均数是否与性别有关(α=0.1)？

解：设X表示正常成年男性的红细胞数，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

Y表示正常成年女性的红细胞数，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

需作检验： $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$； $H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

由于μ_1和μ_2未知，故采用 F 检验法:

原假设成立时，$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

$\because \quad n_1=156 \quad s_1=54.976\text{万}/mm^3$

$n_2=74 \quad s_2=49.536\text{万}/mm^3$

$$\therefore F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{54.976^2}{49.536^2}=1.232$$

$$\therefore F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{54.976^2}{49.536^2} = 1.232$$

α=0.1 时可得：$F_{\alpha/2}=F_{0.05}(155,73) \quad =1.41$

$F_{1-\alpha/2}=F_{0.95}(155,73) \quad = 1/F_{0.05}(73,155) = 0.726$

(软件计算)

α=0.1 时查表：

$F_{1-\alpha/2}=F_{0.95}(120,60)= 1/ F_{0.05}(60,120) = 1/1.43$

于是， $F_{0.95}(155,73)<F< F_{0.05}(155,73)$

所以不能拒绝假设H_0 ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), 即可认为成年男女的红细胞数的标准差无显著的差异.

三、 参数假设检验与区间估计

将区间估计与参数假设检验对照分析, 可帮助理解与记忆.

区间估计: 构造随机区间以较大概率包含待估参数;

$$P\left\{\hat{\theta}_1(X_1,\ldots,X_n)\le\theta\le\hat{\theta}_2(X_1,\ldots,X_n)\right\}=1-\alpha$$

假设检验: 提出统计假设, 根据小概率事件原理对其进行检验.

相似点: 枢轴变量与检验统计量的构造方法相似.
选取待估参数θ的优良估计量:

$$\overline{X}\to\mu,\quad S^2\to\sigma^2$$

例: 枢轴变量

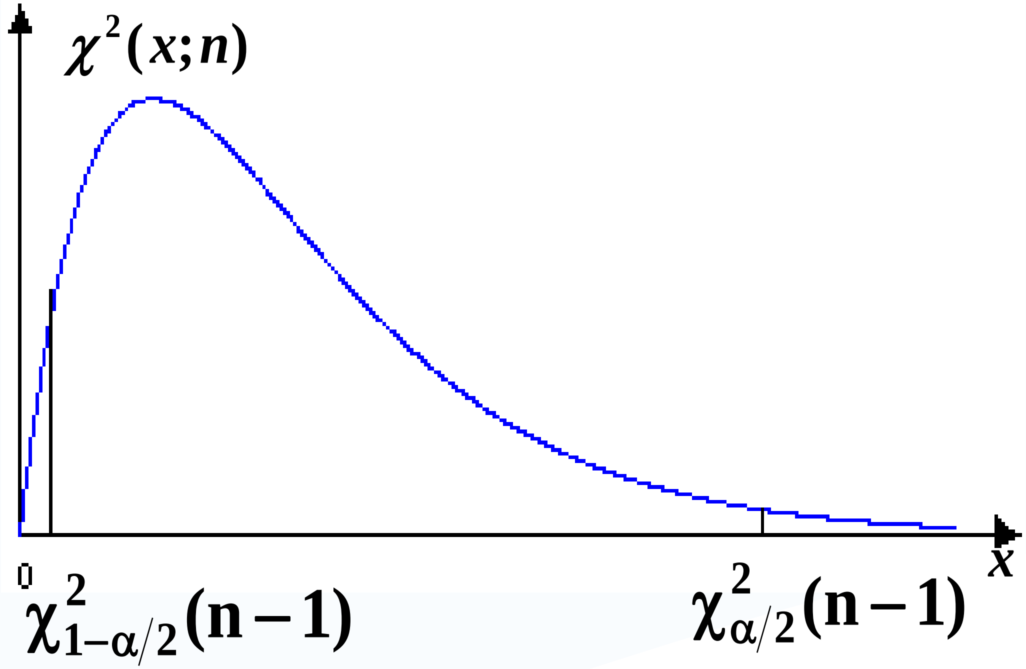
$$\chi^2=\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$$

σ^2是待估参数，μ未知

检验统计量取

$$\chi^2=(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}$$

检验$\sigma=\sigma_0$



区间估计由大概率事件的概率式

$$\boxed{P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha}$$

解出关于σ^2的不等式 (即旋转).

$$\{(n-1)S^2 / \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \le \sigma^2 \le (n-1)S^2 / \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}$$

该事件对应确定假设检验的接受域.

其对立事件就能确定假设检验的拒绝域.

拒绝域为: $\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

大样本检验方法

实际问题中，有时找到了比较合理的检验统计量，其精确分布却求不出

根据中心极限定理，当样本容量*n*无限增大时，某些统计量的极限分布是已知的，从而使我们有可能用容量充分大的样本，近似解决一些统计推断问题

大样本假设检验问题（练习）

大样本假设检验问题

某系统中装有1024个同类元件, 对系统进行一次周期性检查，更换了其中18个元件, 是否可认为该批元件的更新率p为0.03(取α=0.01).

解: 用Y表示1024个元件中需更换的个数,

则$Y \sim B(1024,\ p)$

1) 需检验 H_0：$p=0.03$; H_1: $p \neq 0.03$.

2) 若H_0为真, 则有：$Y \sim B(1024,\ 0.03)$

由D-L中心极限定理 $U=\dfrac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N（0,1）$ 近似成立.

3) 对给定α(0<α<1), 有

$$P\{|U|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}=P\{\left|\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}\approx\alpha$$

当α=0.01， $u_{\alpha/2}=u_{0.005}=2.575$,

H_0的拒绝域为:

（－∞，－2.575）∪（2.575，＋∞）

4）统计量U的统计值

$$u=\frac{y-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{18-1024\times0.03}{\sqrt{1024\times0.03\times0.97}}=-2.330$$

$-2.330 \in (-2.575, 2.575)$

无理由拒绝H_0, 即在$\alpha=0.01$的显著性水平下, 可认为元件更新率为0.03.

若取$\alpha=0.05$， $u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$, 则因

$-2.330 \notin$（-1.96，1.96）无理由接受H_0,

即认为更新率不是0.03.

思考: 1. 置信度为1-α的区间估计？(仿教材例7.3.7)

2. 题目改为:

.....是否可认为每更新一次的更新率p为0.03(取$\alpha=0.01$)，总体的分布？

例1：在两个工厂生产的蓄电池中，分别取10个蓄电池测得其电容量（单位：安培小时）如下：

甲厂:140,141,135,142,140,143,138,137,142,137

乙厂:141,143,139,139,140,141,138,140,142,138

试检验两厂蓄电池的性能有无显著差异（取显著水平α=0.0.5）。

例2.(1)问该日生产的保险丝熔化时间的方差时否不超过400（α=0.01).

(2)检验甲枪弹的平均速度比乙枪弹的平均速度是否显著的大（α=0.05)

⑶ 能否认为灯泡的平均寿命在采用新工艺后有明显提高（α=0.01）