联合分布、边缘分布、？三者之间的关系：

联合分布 $F(x,y)$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$$

边缘分布

？

$$F_X(x)=P\{X\le x\}$$

$$p_{ij} \longrightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij}=p_{i\cdot}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij}=p_{\cdot j}$$

如： $p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}$ (乘法公式)

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\underline{P\{Y=y_j|X=x_i\}}=p_{\cdot j}\underline{P\{X=x_i|Y=y_j\}}$$

$i,j=1,2,....$

例3.1.1(回忆): 在1,2,3,4 中随机取出一个数 X,再随机地从 1~X中取 一数Y, 求(X , Y)的联合分布律.

解: X 的分布律为: (n点均匀分布)

X	1	2	3	4
$P\{X=x\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}=P\left(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\right)$$

$$=P\{X=i\}P\{Y=j|X=i\}\ (\text{乘法公式})$$

$$\Rightarrow P\{Y=j|X=i\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{X=i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

$j=1,2,3,i$

对比: $p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}$

$i,j=1,2,\ldots.$

§3 条 件 分 布

一、条件分布律

设(X,Y)的联合分布律为:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad i,j=1,2,\ldots.$$

若$P\{Y=y_j\}>0$, 则在事件$\{Y=y_j\}$发生的条件下,

事件$\{X=x_i\}$, $i=1,2,\ldots$, 发生的条件概率为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \qquad i=1,2,\ldots. \quad (*)$$

此数列具有分布律的性质: $P(X=x_1 \mid Y=y_j), P(X=x_2 \mid Y=y_j), \ldots$

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad i=1,2,.... \quad (*)$$

此数列具有分布律的性质：$P(X=x_1|Y=y_j), P(X=x_2|Y=y_j),\ldots$

1) $P\{X=x_i|Y=y_j\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\geq 0, \quad i=1,2,....$

2) $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}P\{X=x_i|Y=y_j\}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}}{p_{\cdot j}}=1$

称(*)为在 $Y=y_j$ 的条件下,随机变量X 的**条件分布律.**

(*) 式可以等价地改写为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{Y=y_j\}P\{X=x_i|Y=y_j\}$$

$$i,j=1,2,....$$

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{Y=y_j\}P\{X=x_i \mid Y=y_j\}$$

$$(i,j=1,2,\ldots)$$

注：$P\{X=x_i, Y=y_j\}$是关于x_i, y_j的二元函数.

而在 $Y=y_j$ 的条件下,随机变量X 的条件分布律:

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad i=1,2,\ldots \quad (*)$$

注：固定Y值为y_j，$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}$是关于x_i的一元函数.

射击问题　　出生婴儿问题　　矿山事故问题

二维随机变量的独立： 设(X,Y)是二维随机变量，对任意实数对(x,y), $P\{X\le x, Y\le y\} = P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$

注：事件$\{X\le x\}$与事件$\{Y\le y\}$相互独立；

随机变量的独立性本质上是事件的独立性.

判断式：1. X与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ 对所有(x,y)均成立.

2. (离散型)X与Y相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\} \Leftrightarrow p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

对所有(x_i, y_j)均成立.

3. (连续型)X与Y相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

在平面上除去“面积”为0 的集合外成立.

多维随机变量的独立性 ($X_1, X_2, \ldots X_n$ 相互独立)

设 n 维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 若对任意实数$x_1, x_2, \ldots, x_n$均有 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$

思考: n个事件独立条件与多维随机变量的独立条件等价?
都是满足2^n-n-1等式.

定理: 若n 维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 相互独立, 则

1) 任意k个随机变量($2 \le k \le n$)也相互独立.

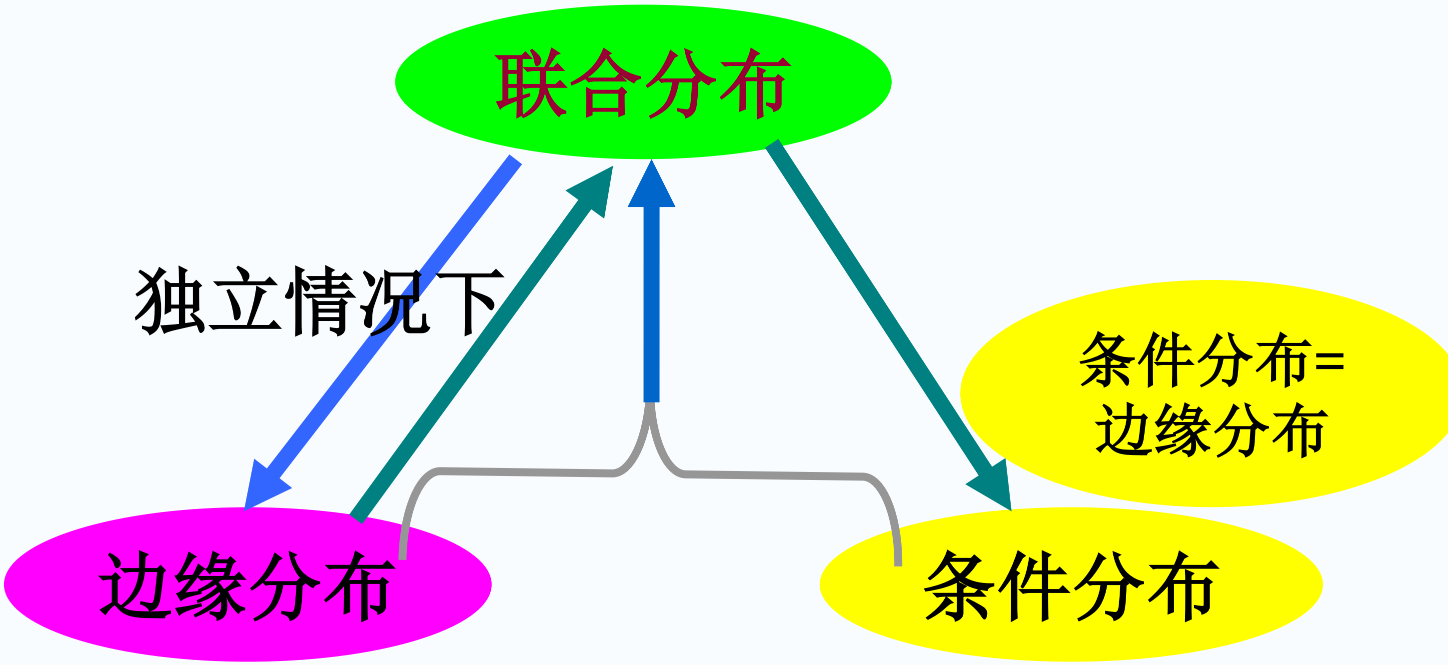
2) 随机变量 $g_1(X_1), g_2(X_2), \ldots, g_n(X_n)$ 也 相 互独立.

3) m维 随机向量$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 与$n-m$维 随机向量$(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$也 相 互独立.

4) 随机变量 $h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 与 $g(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$ 也 相 互独立.

随机变量的独立性本质上是事件的独立性

联合分布、边缘分布、条件分布三者之间的关系.



独立情况下：

相对应的边缘分布能唯一确定联合分布.

X与Y相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

1) $P_{ij}=P_{i.}P_{.j}$　　　　2) $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

条件概率 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$存在(本书): $P(B)>0$.

条件分布律:

$$P\left\{X=x_i \middle| Y=y_j\right\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \qquad i=1,2,\ldots.$$

$$P\left\{Y=y_j \mid X=x_i\right\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \qquad j=1,2,\ldots.$$

$P\left\{X=x_i, Y=y_j\right\}$关于$x_i$和$y_j$的二元函数;

$P\left\{X=x_i \middle| Y=y_j\right\}$关于$x_i$的一元函数, 且取值与$y_j$有关;

$P\left\{X=x_i\right\}$ 关于x_i的一元函数, 且取值与y_j无关;

以上三种分布律均具有分布律的性质: 非负性, 归一性.

例1(射击问题)：某射手进行射击, 击中目标2次则停止射击, 每次的命中率为p ($0<p<1$), 令X表示他第一次命中目标的射击次数, 令Y表示第二次命中目标的射击次数, 求(X,Y)的联合分布律、X和Y的边缘分布律, 及条件分布律 $P\{X=i \mid Y=j\}$.

~~($i=1,2,3,\ldots$; $j=2,3,\ldots$)~~

1	2	…	i	…	j

解：$P\{X=i, Y=j\}=p^2(1-p)^{j-2}$，($1\le i<j=2,3,\ldots$)

$P\{X=i\}=p(1-p)^{i-1}$, ($i=1,2,\ldots$) (几何或首次分布)

$$P\{Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}P\{X=i, Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}p^2(1-p)^{j-2}$$

$$=(j-1)p^2(1-p)^{j-2},\quad (j=2,3,\ldots)$$

负二项(或帕斯卡(Pascal))分布 $P\{Y=t\}=C_{t-1}^{k-1}p^k q^{t-k}$,

$t=k,k+1,\ldots.$

例1(射击问题)：某射手进行射击，击中目标两次则停止射击，每次的命中率为p ($0<p<1$)，令X表示第一次命中目标的射击次数，令Y表示第二次命中目标的射击次数，求条件分布律 $P\{X=i \mid Y=j\}$.

当固定j ($j=2$或 3或4,或 …)时，$P\{Y=j\}>0$,

$$P\{X=i \mid Y=j\} = P\{X=i, Y=j\}/P\{Y=j\}$$

$$= p^2(1-p)^{j-2} / (j-1)\, p^2 (1-p)^{j-2}$$

$$(i=1,2,3,\ldots,j-1)$$

$$=1/(j-1)\ ,$$

$\cancel{(i=1,2,3,\ldots; j=2,3,\ldots)}$

$\cancel{(1\le i<j=2,3,\ldots)}$

满足归一性

例2(出生婴儿问题): 记X为某医院一天出生的婴儿个数, 记Y为男婴的个数. 设(X,Y)的联合分布律为:

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{e^{-14}(7.14)^j(6.86)^{i-j}}{j!(i-j)!}\quad \begin{matrix} j=0,1,\dots,i \\ i=0,1,\dots \end{matrix}$$

求: 1) 边缘分布律； 2) 条件分布律; 3)X=20时Y的条件分布律.

解: 1) $P\{X=i\}=P\{X=i,Y\le i\}$ $\quad X\sim P(14)$

$$=\sum_{j=0}^{i}p_{ij}=\frac{e^{-14}}{i!}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!(7.14)^j(6.86)^{i-j}}{j!(i-j)!}$$

$$=\frac{e^{-14}}{i!}(7.14+6.86)^i=\frac{14^i}{i!}e^{-14}\qquad i=0,1,\dots$$

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{e^{-14}(7.14)^j(6.86)^{i-j}}{j!(i-j)!}\quad \begin{array}{l} j=0,1,\ldots,i \\ i=0,1,\ldots \end{array}$$

$$P\{Y=j\}=P\{X\ge j,Y=j\}$$

$$=\sum_{i=j}^{+\infty}p_{ij}=\frac{e^{-14}\cdot(7.14)^j}{j!}\cdot\sum_{i=j}^{+\infty}\frac{(6.86)^{i-j}}{(i-j)!}$$

令 $i-j=k$

$$=\frac{e^{-14}}{j!}(7.14)^j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{6.86^k}{k!}\qquad \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}\right)$$

$$=\frac{(7.14)^j}{j!}e^{-7.14}\qquad j=0,1,\ldots$$

$Y\sim P(7.14)$

$$P\{Y=j\}=\frac{(7.14)^j}{j!}e^{-7.14}\qquad P\{X=i\}=\frac{14^i}{i!}e^{-14}$$

$j=0,1,\dots$　　$i=0,1,\dots$

2)当固定j (j＝0或1或2或3或, …)时，$P\{Y=j\}>0$,

$$P\{X=i\mid Y=j\}=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}=\frac{e^{-6.86}(6.86)^{i-j}}{(i-j)\,!}$$

$i=j,j+1,\dots$

当固定i (i＝0或1或2或 3或 …)时，$P\{X=i\}>0$,

$$P\{Y=j\mid X=i\}=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(X=i)}=C_i^j\left(\frac{7.14}{14}\right)^j\left(\frac{6.86}{14}\right)^{i-j}$$

$j=0,1,\dots i$

例2: 记X为某医院一天出生的婴儿个数, 记Y为男婴的个数. 求X=20时Y的条件分布律.

$$3)P\{Y=j|X=20\}=\frac{P(X=20,Y=j)}{P(X=20)}\quad(P\{X=20\}>0)$$

$$=C_{20}^{j}\left(\frac{7.14}{14}\right)^{j}\left(\frac{6.86}{14}\right)^{20-j}\quad j=0,1,\ldots 20$$

$$Y\sim B\left(20,\frac{7.14}{14}\right)$$

思考：随机变量 X与Y是否相互独立? 不相互独立.

$$P\{Y=j\}\neq P\{Y=j|X=i\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{X=i\}}$$

$$P\{Y=j\}=\frac{(7.14)^{j}}{j!}e^{-7.14}$$

例3.1.1(回忆): 在1,2,3,4 中随机取出一个数 X,再随机地从 1~X中取 一数Y,
求: 1)(X , Y)的联合分布律; 2) Y 的边缘分布律.

思考：求Y的分布律:

$$1.\ p_{ij} = P\{X = i, Y = j\} \longrightarrow P\{Y = j\} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij}$$

$$= p_{\bullet j}$$

2. 全概率公式:

$$P\{Y = j\} = \sum_{i=1}^{4} P\{ X = i, Y = j \}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} P\{X = i\} P\{Y = j | X = i\}$$

$$j = 1,2,3,4.$$

由广义全概率公式可以应用到:

联合分布律可确定随机变量 X, Y 的分布律.

结果　　划分

$$P\{X = x_i\} = P\left\{\underline{(X = x_i)} \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} \underline{(Y = y_j)}\right\}$$

$$= P\left\{\bigcup_{j=1}^{\infty} (X = x_i, Y = y_j)\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} P\{|X = i, Y = j\}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P\{Y = j\} \underline{P\{X = i | Y = j\}}, \quad i = 1,2,\ldots$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = i\} \underline{P\{Y = j | X = i\}}$$

$$j = 1,2,\ldots$$

例3(矿山事故)：某矿山一年内发生的事故总数$X \sim P(\lambda)$,一个事故是致命的概率为p $(0<p<1)$, 设一年内发生致命事故的次数为Y, 试写出Y的分布律.

解：已知 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $(k=0,1,2, \ldots)$

在发生 k 次事故的条件下, 致命事故次数Y为m (即$\{X=k\}$已发生), Y 的条件分布律为

$$P\{Y=m \mid X=k\} = C_k^m p^m (1-p)^{k-m}, \quad (m=0,1,2, \ldots k)$$

故(X, Y) 的联合分布律为

$$P\{X=k, Y=m\} = P\{X=k\} P\{Y=m \mid X=k\}$$

$$P\{X=k,\ Y=m\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}C_k^m p^m(1-p)^{k-m},$$

$$(0\le m\le k=1,2,\dots)$$

Y 的分布律为

$$P\{Y=m\}=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}C_k^m p^m(1-p)^{k-m}$$

$$=\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{-\lambda}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{k-m}}{(k-m)!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} \qquad \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}=e^{\lambda}\right)$$

$$=\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{-\lambda p} \qquad (m=0,1,2,\dots)$$

宇 宙 粒 子

已知运载火箭在飞行中,进入它的仪器舱的宇宙粒子数服从参数为λ的泊松分布, 而进入仪器舱的每个粒子落到仪器的重要部位的概率等于p,试求恰有k个粒子落到仪器重要部位的概率.

分析：粒子落到仪器重要部位的试验是由前后相关联的两个试验所组成：

第一个试验是宇宙粒子进入仪器舱，进入的粒子数服从泊松分布；

再是进入仪器舱的这些粒子落到仪器舱重要部位，其数目服从二项分布；

这类问题可用全概率公式求解。

已知运载火箭在飞行中,进入它的仪器舱的宇宙粒子数服从参数为λ的泊松分布.而进入仪器舱的每个粒子落到仪器的重要部位的概率等于p,试求恰有k个粒子落到仪器重要部位的概率.

解:

设 X表示宇宙粒子进入仪器舱的个数。

由题设X~P(λ) 即 $P\{X=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \quad ,m=0,1,2,....$

显然 {X=m} ,(m=0,1,2,..)构成样本空间的一个划分

（回忆：样本空间的有限划分如何定义？）

设 Y表示落到重要部位的粒子数，由题意知

$$P\{Y=k|X=m\}=C_m^k p^k(1-p)^{m-k},\quad k=0,1,2,....,m$$

由全概率公式得所求概率为

$$P\{Y=k\}=\sum_{m=k}^{+\infty}P\{X=m\}P\{Y=k|X=m\}$$

$$P\{Y=k\}=\sum_{m=k}^{+\infty}P\{X=m\}P\{Y=k|X=m\}$$

$$=\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}*C_m^k p^k(1-p)^{m-k} \qquad (m\geq k)$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-k}(1-p)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$\underline{\underline{n=m-k}}\ \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}*e^{\lambda(1-p)}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p} \qquad k=0,1,2,\ldots.$$

落到仪器重要部位的粒子数服从参数为λp 的泊松分布。

条件概率

$P(A|B)= P(AB)/ P(B)$存在(本书): $P(B)>0$.

条件分布律:

$$P\left\{X = x_i \middle| Y = y_j\right\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

$$P\left\{Y = y_j \mid X = x_i\right\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \qquad j = 1, 2, \ldots.$$

$P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}$关于$x_i$和$y_j$的二元函数;

$P\left\{X = x_i \middle| Y = y_j\right\}$关于$x_i$的一元函数, 且取值与$y_j$有关;

$P\left\{X = x_i\right\}$ 关于x_i的一元函数, 且取值与y_j无关;

以上三种分布律均具有分布律的性质: 非负性, 归一性.

条件概率

P(A|B)= P(AB)/ P(B)存在(本书): P(B)>0

条件分布律:

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad i=1,2,\ldots.$$

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad j=1,2,\ldots.$$

离散型分布函数:

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_i|Y=y_j\}=\sum_{x_i\le x}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

$$P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(u)du$$

连续型分布函数?

$$P\{X\le x|Y=y\}=P\{X\le x,Y=y\}/\underline{P\{Y=y\}}$$ =? 存在?

注意: $P\{X\le x|Y>y\},P\{X\le x|Y\le y\},P\{X\le x|z<Y\le y\}$都不是条件分布函数

二、条件概率密度

$$P\{Y=y\}=\lim_{\Delta y\to 0^+}P\{y-\Delta y<Y\le y\}$$
$$=F(y)-F(y-0)$$

$P\{X\le x|Y=y\}=P\{X\le x,Y=y\}/P\{Y=y\}$ 存在？

由于不能保证$P\{Y=y\}>0$. 所以在一般情况下, 就不能用条件概率的定义(定义1.3.1)来直接定义这个条件概率.

定义: 给定 $y\in R$, 对任意$\Delta y>0$ 有$P\{y-\Delta y<Y\le y\}>0$

且对任意$x\in R$, 极限

$$\lim_{\Delta y\to 0^+}P\{X\le x|y-\Delta y<Y\le y\}$$
$$=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{P\{X\le x,y-\Delta y<Y\le y\}}{P\{y-\Delta y<Y\le y\}}$$

存在, 称此极限函数为在$Y=y$的条件下, 随机变量X的条件分布函数, 记作 $F_{X|Y}(x|y)$.

注意: $P\{X\le x|Y>y\},P\{X\le x|Y\le y\},P\{X\le x|z<Y\le y\}$都不是条件分布函数

$$P\{Y=y\}=\lim_{\Delta y\to 0^+}P\{y-\Delta y<Y\le y\}=F(y)-F(y-0)$$

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{P\{X\le x,y-\Delta y<Y\le y\}}{P\{y-\Delta y<Y\le y\}}$$

$$\overset{\text{相容性}}{=}\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{F(x,y)-F(x,y-\Delta y)-F(-\infty,y)+F(-\infty,y-\Delta y)}{F_Y(y)-F_Y(y-\Delta y)}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y-\Delta y}^{y}f(u,v)dudv}{\int_{y-\Delta y}^{y}f_Y(v)dv}$$

若(X,Y)是连续型随机变量，且满足$f(x,y)$, $f_Y(y)$ 在(x,y)附近连续，且 $f_Y(y)>0$，由积分中值定理可得

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y-\theta_1\Delta y)du}{f_Y(y-\theta_2\Delta y)},0<\theta_i<1,i=1,2.$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

若(X,Y)是连续型随机变量, 且满足$f(x,y)$, $f_Y(y)$ 在(x,y)附近连续, 且 $f_Y(y)>0$则有

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$ (证明过程也见教材)

注：1. $$\left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}g(t)dt\right]'=\varphi_1'(x)g(\varphi_1(x))-\varphi_2'(x)g(\varphi_2(x));$$

称 $$f_{X|Y}(x|y)=F'_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在$Y=y$ 的条件下随机变量X 的条件概率密度.

注: $f(x, y)$是关于x和y的二元函数.

固定Y值为y, $f_{X|Y}(x|y)$是关于x的一元函数.

条件概率密度满足密度函数的性质:

$$(1)\ f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\geq 0;$$

$$(2)\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}{f_Y(y)}=1$$

在"$Y=c$"的条件下, 随机事件$\{a<X\leq b\}$的条件概率为

$$P\{a<X\leq b|Y=c\}=\int_a^b f_{X|Y}(x|c)dx$$

注:初看起来可以用条件概率的定义(第一章 知识)求解,但这时会出现分母为0 .

$$\neq\frac{P\{a<X\leq b,Y=c\}}{P\{Y=c\}}$$

条 件 密 度　　条 件 概 率 计 算

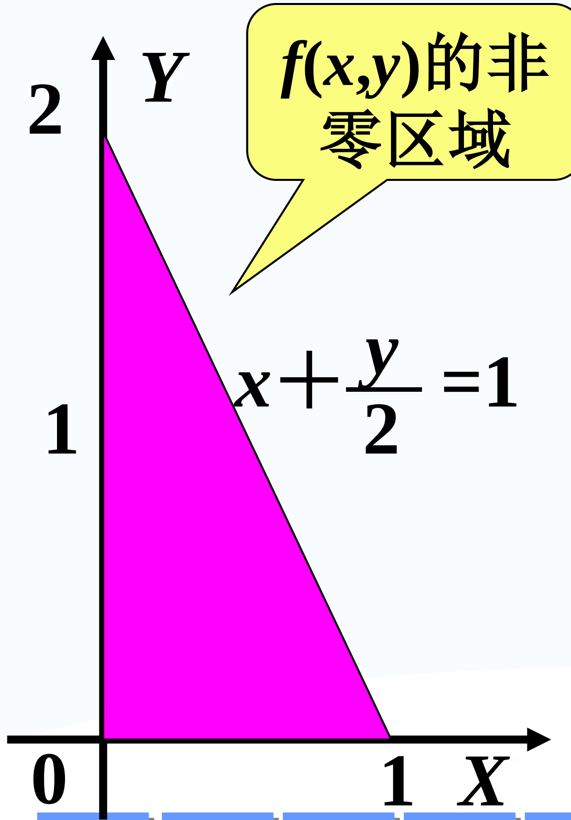
例3:条件密度 设随机变量（X, Y）在D上服从均匀分布

$$D=\{(x,y):\ 0\le x,\ 0\le y,\ x+\frac{y}{2}\le 1\}$$

试求 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 和$f_{Y|X}(y\mid x)$

解:

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{2(1-x)}1dy=2(1-x), & 0\le x\le 1\quad;\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

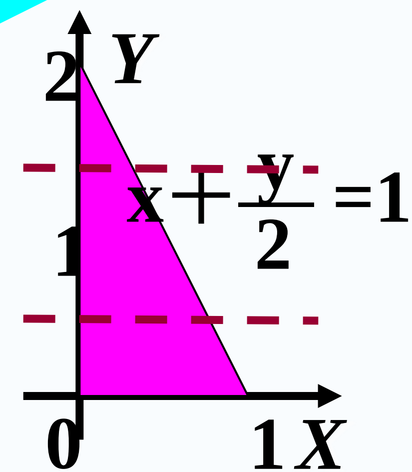
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{1-\frac{y}{2}} 1dx=1-\dfrac{y}{2}, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

满足归一性

当$0\le y<2$ 时，$f_Y(y)>0$,

$\cancel{0<x<1}$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\frac{y}{2}}, & 0<x<1-\frac{y}{2};\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$



当$y\notin[0,2)$时，$f_Y(y)=0$，故$f_{X|Y}(x|y)$不存在.

当$0\le x<1$时，$f_X(x)>0$,

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-x)}, & 0<y<2(1-x);\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

$\cancel{0<y<2}$

当$x\notin[0,1)$时，$f_X(x)=0$，故$f_{Y|X}(y|x)$不存在.

例4条件概率：设(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 2, max(0,x-1)\le y\le min(1,x);\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

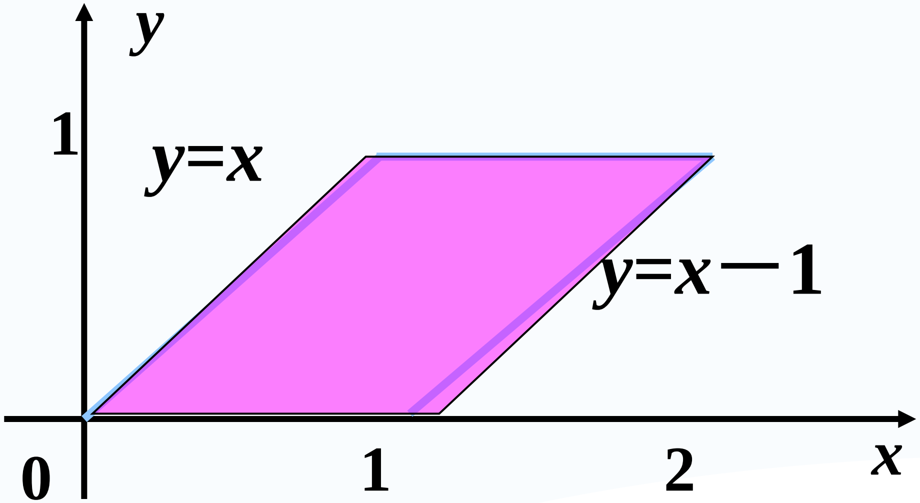
试求:$f_{Y|X}(y|x)$,并计算概率 $P\{0<Y<0.5|X=0.5\}$和 $P\{0<Y<0.5|X=1.2\}$.

分析：解题困难

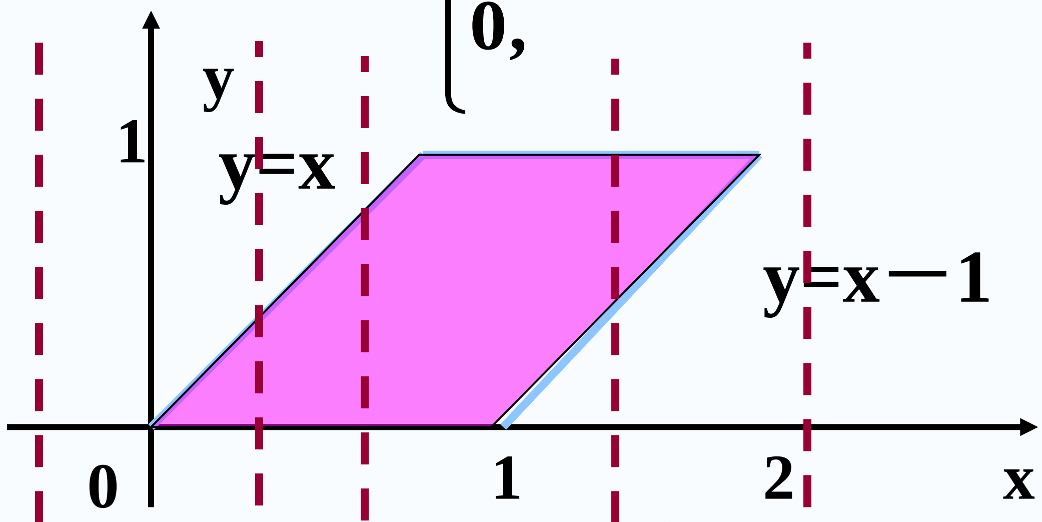
1) 求$f_{Y|X}(y|x)$;

2）确定条件概率密度存在的区间；

3）求条件概率.



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x dy=x, & 0\le x\le 1;\\ \int_{x-1}^1 dy=2-x, & 1<x\le 2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



当$0<x\le 1$时，$f_X(x)>0$，$\cancel{0<y<1}$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x;\\ 0, & \text{else}.\end{cases}$$

满足归一性

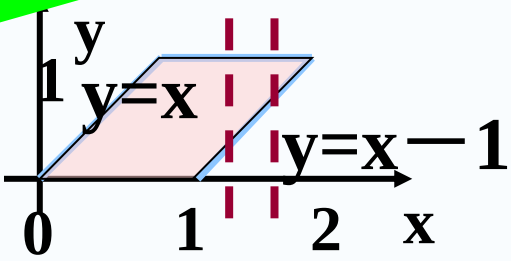
当$0 < x \le 1$时，$f_X(x) > 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

满足归一性

当$1 < x < 2$时，$f_X(x) = 2 - x > 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x-1 < y < 1; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$



当$x \notin (0,2)$时，$f_X(x) = 0$, 故$f_{Y|X}(y|x)$不存在.

$$P\{0 < Y < 0.5 | X = 0.5\} = \int_0^{0.5} f_{Y|X}(y|X = 0.5)dy = \int_0^{0.5} \frac{1}{0.5} dy = 1.$$

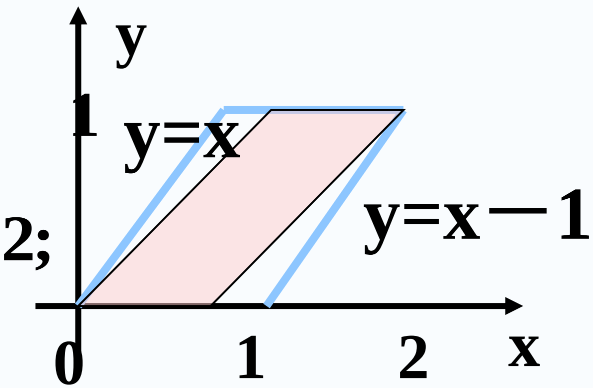
$$P\{0 < Y < 0.5 | X = 1.2\} = \int_0^{0.5} f_{Y|X}(y|X = 1.2)dy$$

注意下限的确定

$$= \int_{0.2}^{0.5} \frac{1}{0.8} dy = 0.375.$$

纠正错误：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1; \\ 2-x, & 1<x\le 2; \\ 0, & else \end{cases}$$



$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

当$x=c\in(0,1]$，$x=c\in(1,2)$时，

$$=\begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<1(0<x\le 1); \\ \frac{1}{2-x}, & 0<y<1(1<x<2); \\ 0, & else. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<1; \\ \frac{1}{2-x}, & 0<y<1; \\ 0, & else. \end{cases}$$

本次课的重点内容是：

条件分布律，
条件密度函数.

第三章的 § 3.4 随机变量的函数及其分布

下次课内容：

要讲到第三章的 § 3.4 随机变量的函数及其分布，包括离散型随机变量的函数及其分布律和连续型随机变量的函数及其概率密度.