专题一：时间复杂度的计算

1. 计算下列 4 个程序的时间复杂度。

```
void func1(int n) {
    int i = 1;
    while (i <= n) {
        i *= 2;
    }
}
```

答案：O(logn)，分析：找出基本运算 i=i*2,设执行次数为 t,则 2^t≤n,即 t≤logn,因此时间复杂度 T(n)=O(logn)。

```
void func2(int n) {
    int i = 1;
    while (i * i * i <= n) {
        i++;
    }
}
```

答案：O($\sqrt[3]{n}$)，分析：基本运算为 i++，设执行次数为 t，有 t*t*t<n，即 t^3<n。

故有$t \leq \sqrt[3]{n}$，则 T(n)=O($\sqrt[3]{n}$)。

```
void func3(int n) {
    int count = 0;
    for (int k = 1; k <= n; k *= 2) {
        for (int j = 1; j <= n; j++) {
            count++;
        }
    }
}
```

答案：O(nlogn)，分析：内层循环条件 j≤n 与外层循环的变量无关，各自独立，每执行一次 j 自增 1，每次内层循环都执行 n 次。外层循环条件 k≤n，增量定义为 k*=2，可知循环次数 t 满足 k= 2^t≤n，即 t≤logn。即内层循环的时间复杂度为 O(n)，外层循环的时间复杂度为 O(logn)。对于嵌套循环，根据乘法规则可知，该段程序的时间复杂度 T(n) = O(nlogn)。

```
void func4(int n) {
        int sum = 0;
        for (int i = 1; i < n; i *= 2) {
                for (int j = 0; j < i; j++) {
                        sum++;
                }
        }
}
```

答案：O(n)，分析：

当外层循环的变量 i 取不同值时，内层循环就执行多少次，因此总循环次数为 i 的所有取值之和。假设外层循环共执行 k 次，当 $i=1,2,4,8,\cdots,2^{k-1}$（$2^{k-1}<n\leqslant 2^k$）时，内层循环执行 i 次，因此总循环次数 $T=1+2+4+8+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$，即 $n<T<2n$，时间复杂度为 $O(n)$。

2.

2) 采用第二数学归纳法.

1°. $T(n)=1$, $T(2)=2T(1)+1=1\times2+1$
$(n=1)$

2°. 假设 $k<n$ 时, $T(k)\leq C_1k-C_2$, C_1, C_2为常数.

则 $T(n)=2T(\frac{n}{2})+1\leq 2[C_1(\frac{n}{2})-C_2]+1$

化简整理, 得 $T(n)\leq C_1n-(2C_2-1)\leq C_1n-C_2$ (当$C_2\geq1$)

命题得证.

3.

3). 假设 $k<n$ 时, 有 $T(k)\leq ck^2\log k$

则 $T(n)=9T(\frac{n}{3})+n^2\leq 9[c(\frac{n}{3})^2\log(\frac{n}{3})]+n^2$

化简整理, 得 $T(n)\leq cn^2\log(\frac{n}{3})+n^2$

$T(n)\leq cn^2(\log n-\log3)+n^2=cn^2\log(n)+(1-c\cdot\log3)n^2$

故 $T(n)\leq cn^2\log(n)$, 命题得证.

4. 解法如下

4). $T(n)=4T(\frac{n}{2})+n^2$

代入$T(\frac{n}{2})$： $= n^2+4[4T(\frac{n}{4})+\frac{n^2}{4}]$

$= 2n^2+16T(\frac{n}{4})$

$= \cdots = kn^2+4^kT(\frac{n}{2^k})$

当$2^k=n$时，$k=\log_2 n \Rightarrow T(n)=O(n^2 \cdot \log n)$

注意：找规律时写在草稿纸上，先保留幂项，找到规律后在试卷上可化简.

第 5、6、7 题 f(n)都是多项式，过于简单，直接使用主定理的推论可秒杀之。另外提醒你们注意，如果 f(n)是非多项式函数时，不一定满足主定理的使用条件（多项式级大于或小于），此时主定理会失效，不能使用！