例1：女士品茶试验

Sir RA Fisher
(1890. 2. 17-1962. 7. 29)

- B. A. in Math, Cambridge University, 1912
- Rothamsted Experimental Station, 1919-1933
- Professor of eugenics at University College London, 1933-1943
- Balfour Chair of Genetics at Cambridge, 1943

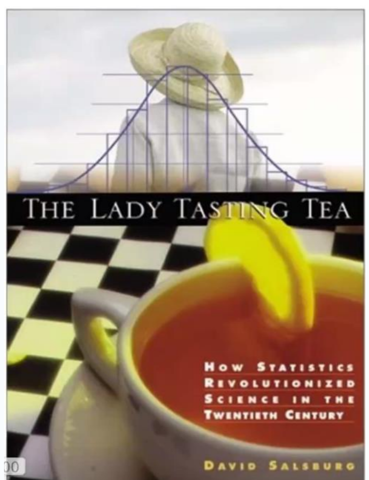
- RA Fisher(1925). *Statistical Methods for Research Workers*, Edinburgh, Oliver and Boyd
- RA Fisher(1930). *The Genetical Theory of Natural Selection*. The Clarendon Press

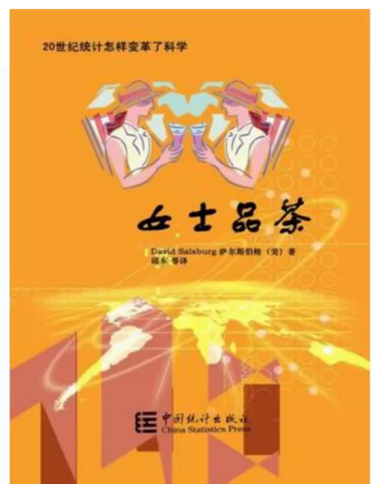
20 世纪 20 年代末一个夏日的午后，在英国剑桥，一群大学教员、他们的妻子以及一些客人围坐在室外的一张桌子周围喝下午茶。一位女士坚持认为，将茶倒进牛奶里和将牛奶倒进茶里的味道是不同的。在座的科学家都觉得这种观点很可笑，没有任何意义。这能有什么区别呢？他们觉得两种液体的混合物在化学成分上不可能有任何区别。此时，一个又瘦又矮、戴着厚厚的眼镜、留着尖髯的男子表情变得严肃起来，这个问题让他陷入了沉思。

“让我们检验这个命题吧。”他激动地说。他开始规划一个实验，让声称两种茶存在区别的女士按顺序品尝若干杯饮品，其中有些是加了茶的牛奶，有些是加了牛奶的茶。

——戴维·萨尔斯伯格 《女士品茶》

萨斯伯格(2004). 女士品茶—20世纪统计学怎样变革了科学, 中国统计出版社(邱东译)





给其8杯(茶奶、奶茶各4杯) 实验结果，该女士说对了8杯。

➢ 第一步：Fisher首先引进一个假设：

H：此女士无鉴别力

➢ 第二步：给其8杯(茶奶、奶茶各4杯)。当假设H成立时，以X记此女士说对茶奶的杯数，则由概率论知

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{4}{k}\binom{4}{4-k}}{\binom{8}{4}},\ k=1,2,3,4.$$

➢ 第三步：由上述分布知，全部说对的概率为1/70

小概率事件实际不发生原理:

概率很小的事件, 在一次试验中几乎是不可能发生的, 从而在实际中可看成不可能事件.

统计与赌球

某人陆续收到一个人的Email告之明天足球比赛的结果，连续五次都预测对了。第六次时他要求付200块给他以知明天的比赛结果。你相信此人确有预测比赛的能力吗？

如果此人是猜的话，连续猜对五场的概率是

$1/2^5=0.031$

(何书元(2006). 概率论与数理统计，高等教育出版社)

复习: 抽样分布定理(正态总体的统计量分布)

定理6.2.4 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差，则

(1) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立; $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$; (2) $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$;

(3) $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$; $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$; (4) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

定理6.2.5: 设正态总体 X 与 Y 相互独立，

(1) $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

(2) 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

令 $n_1=n_2=n$, 成对抽取 $Z_i=X_i-Y_i, i=1,\cdots,n$

$\therefore \overline{Z}=\overline{X}-\overline{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{1}{n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2))$

枢轴变量 $T=\frac{\overline{Z}}{S_z/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

其中 $S_z=\frac{1}{10-1}\sum_{1}^{n}(z_i-\overline{z})^2$.

思考: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 时的情况？提示：$n_1=n_2$ (成对抽取)

区间估计(双侧)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $P\{w_{1-\alpha/2} \le W \le w_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$

被估参数	条件	枢轴变量 原则:选取最简单的优良估计量	优良估计量 原则:无偏、有效、相合
μ	已知 σ^2	$U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\overline{X}$
μ	未知 σ^2	$T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\overline{X}$
σ^2	已知 μ	$\dfrac{n}{\sigma^2} \cdot \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$	$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$
σ^2	未知 μ	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$	$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

被估参数	条件	枢轴变量	优良估计量
$\mu_1-\mu_2$	已知σ_1^2与σ_2^2	$U=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\bar{X}-\bar{Y}$
$\mu_1-\mu_2$	未知σ_1^2和σ_2^2 $(\sigma_1^2=\sigma_2^2)$	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$	$\bar{X}-\bar{Y}$
$\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	未知μ_1和μ_2	$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\dfrac{X_i-\bar{X}}{\sigma_1}\right)^2\Big/n_1-1}{\sum_{j=1}^{n_2}\left(\dfrac{Y_j-\bar{Y}}{\sigma_2}\right)^2\Big/n_2-1}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\dfrac{S_2^2}{S_1^2}=\dfrac{\dfrac{1}{n_1-1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2}{\dfrac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2}$
$\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	已知μ_1和μ_2	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\dfrac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\Big/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}\left(\dfrac{Y_j-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\Big/n_2}\sim F(n_1,n_2)$	$\dfrac{\dfrac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}{\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}$

样本: $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

(1) X_i与<u>总体X</u>相同分布; (2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立.

$E(X_i) = E(X)$, $D(X_i) = D(X)$

如果矩存在的话: $E(X_i^k) = E(X^k)$, $E[X_i - E(X_i)]^k = E[X - E(X)]^k$

$E(\overline{X}_n) = E(X)$ $\quad D(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} D(X)$ $\quad \Leftarrow \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

统计学中最常用的公式

(1) $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = 0$; (2) $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$(计算多用右式)

$\overline{X}$ 和S^2分别是μ(总体均值)和σ^2(总体方差)的最小方差无偏估计。

μ已知, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$是$\sigma^2$的无偏估计; $M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$不是$\sigma^2$的无偏估计;

在一次社交聚会中， 一位女士宣称她能区分在熬好的咖啡中, 是先加奶还是先加糖, 并当场试验，结果 8 杯中判断正确 7 杯．但因它未完全说正确，有人怀疑她的能力！该如何证明她的能力呢？

在场的一位统计学家给出了如下的**推理思路**:

设该女士判断正确的概率为p

原 假 设H_0：p=1/2, 即该女士凭猜测判断;

对立假设H_1：p>1/2, 即该女士确有判断力.

在假设H_0下， 8杯中猜对7杯以上的概率为 0.0352 （用二项分布计算）

若H_0正确，则小概率事件发生！

•--------故拒绝H_0

即认为该女士确有鉴别能力.

小概率事件实际不发生原理:
概率很小的事件, 在一次试验中几乎是不可能.从而在实际中可看成不可能事件.

在一次社交聚会中，一位女士宣称她能区分在熬好的咖啡中，是先加奶还是先加糖，并当场试验，结果 8 杯中判断正确 7 杯(记为A事件)。但因它未完全说正确，有人怀疑她的能力！该如何证明她的能力呢？

(小概率事件原理)

一次试验中，A发生 → A不为小概率事件

(相当于已知条件)

原假设H_0条件使A为小概率事件(P(A)<= α)

矛盾原因：H_0造成 → 拒绝H_0

界限：显著性水平α

实质：拒绝小概率事件当场发生。

思路：概率性质的反证法。

解决问题

- Q1: H_0和H_1的确定(顺序)？
- Q2: 拒绝域的确定？
- Q3: 误判的类型及原因？
- Q4: 显著性水平α作用？
- Q5(补充)：不拒绝=接受？

第八章　假设检验(Hypothesis Testing)

§8.1　假设检验的基本思想与步骤

一. 假设检验的基本思想

小概率事件实际不发生原理:

概率很小的事件, 在一次试验中几乎是不可能发生的, 从而在实际中可看成不可能事件.

假设检验基本思想:

提出统计假设，根据小概率事件原理对其进行检验. 具有概率性质的反证法.

二、基本概念

(1) 参数与分布(属于非参数)的假设检验

1)关于总体参数的假设检验，如 $H_0:\mu=\mu_0$

2)关于总体分布的假设检验，如 $H_0: F(x)=\Psi(x;\mu,\sigma^2)$

(2) 原假设与备择假设

根据问题的需要首先提出的假设称为

原假设或零假设, 记为H_0；(Null Hypothesis)

(常规假设或维持原状);或一般没有充分理由不能轻易否定的命题.

与原假设H_0相对立的假设称为 (Alternative hypothesis)

对立假设或备择假设, 记为H_1. (新事物或新情况)

判断统计假设H_0的方法称为假设检验

参数的假设检验, 通常根据备择假设分成:

1. H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu\neq\mu_0$; (双侧假设检验)

2. H_0: $\mu\leq\mu_0$, H_1: $\mu>\mu_0$;

H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu<\mu_0$; ……..(单侧假设检验)

（3）检验统计量: 用做检验统计推断的统计量.

(与枢轴变量形式一致,但枢轴变量不是统计量)

（4）假设检验的接受域和拒绝域

假设检验目的: 根据样本去推断是否拒绝原假设H_0

拒绝域: 使H_0被否定的检验统计量取值的区域R.

注: 确定H_0的拒绝域(有利准则:有利H_1成立的区域作为拒绝域)

接受域: 使H_0得以接受的检验统计量取值的区域A.

假设检验的基本步骤:

1. 提出原假设: (Null Hypothesis)

根据实际问题提出原假设H_0(常规假设或维持原状)

和备择假设H_1;(新事物或新情况) (Alternative hypothesis)

2. 建立检验统计量: (与枢轴变量形式一致)

并在H_0成立的条件下，确定它的分布(或近似分布);

3. 确定H_0的拒绝域(有利准则:H_1成立有利的区域作为拒绝域)

根据实际问题选定显著性水平α，依据检验统计量的分布与H_1的内容，确定H_0的拒绝域;

4. 对H_0作判断:

依赖显著性水平α

根据样本值算出检验统计量的统计值,

判断统计值是否落在拒绝域, 以确定拒绝或不拒绝H_0 .

包装机工作正常与否的判断

例: 某车间有一台罐头自动包装机，额定标准为每袋重500克. 设每只产品重量$X \sim N(\mu,15^2)$, 某天开工后, 为了检验包装机工作是否正常, 随机取得9只罐头, 称得重量为(单位：克):

497	506	518	524	498	511	520	515	512

问：这天包装机是否工作正常?

分析: 作出罐头重量服从正态分布$N(\mu,15^2)$的判断, 是过去长期生产经验的积累, 除非有十分充足的反面证据是不能轻易否定的, 况且一作出生产过程不正常的结论就必然导致生产过程的中断及大量检测和维修工作的进行, 花费是巨大的.

$\mu=500$是产品质量标准之一. 生产中可能因机件的老化,原材料的变化等等因素而改变.若μ偏小,损害了客户的利益,长此以往也将损害厂家的信誉;反之,若μ偏大,则厂方要增加生产成本.

所以, 这个实际问题引出检验

$H_0:\mu=500=\mu_0$ (包装机工作正常)是否成立?

提出统计假设：$H_0:\mu=500=\mu_0(\mu-\mu_0=0)$ $H_1:\mu\neq\mu_0\ (\mu-\mu_0\neq 0)$

其次, 构造适当的检验统计量

有利原则

由于 $\overline{X}$ 是μ的良好估计量, 且$\sigma_0^2=15^2$

$\mu-\mu_0<0$或$\mu-\mu_0>0$

当H_0成立时, 有 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

然后, 确定$H_0\ (\mu-\mu_0=0)$的拒绝域(H_1成立有利的区域)

$\overline{X}-\mu_0<0$或

$\overline{X}-\mu_0>0$

由于 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 是总体均值μ的估计, 因此,

$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<C_1$或$>C_2$

$\overline{X}$的值越接近500，越有利于原假设的成立；

而 $\overline{X}$ 的值离500越远，对H_0的成立越不利.

由小概率事件原理：
拒绝小概率事件发生

于是, 有一个合理的准则, 当$\left|\overline{X}-500\right|$超过

$P\{U<C_1$或$U>C_2\}=\alpha$

一定的界限, 就拒绝H_0, 否则, 就接受H_0 .

如何确定这个界限？ **实质：拒绝小概率事件当场发生.**

假定我们认为<u>概率值小于α</u>的事件为小概率事件，

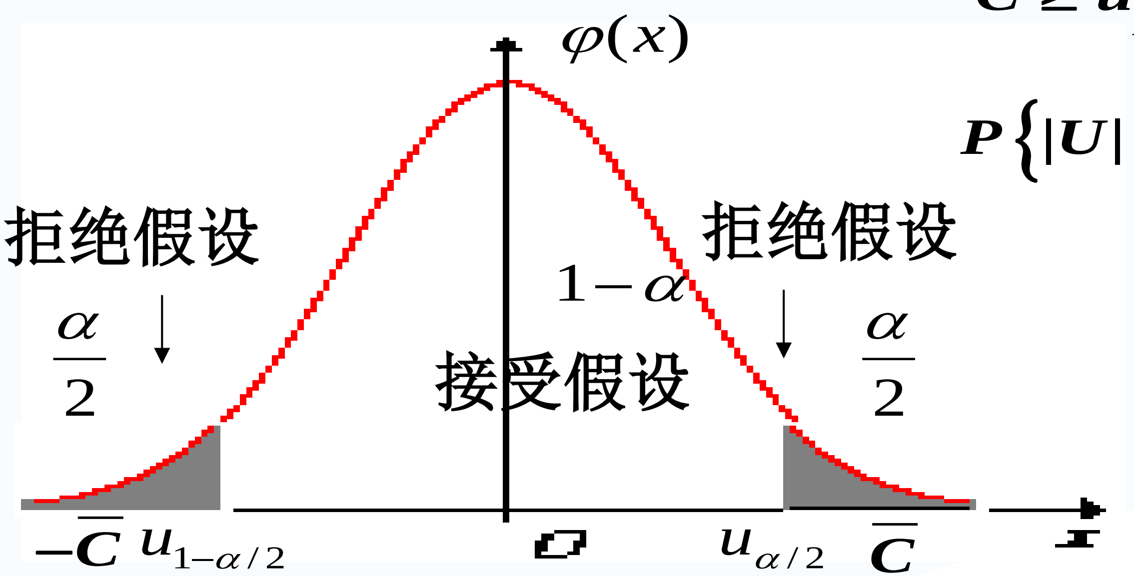
对给定的显著水平$\alpha(0<\alpha<1)$，由正态分布

表可查得$u_{\alpha/2}$，使得 $P\{|U|>u_{\alpha/2}\}=\alpha$

于是H_0的拒绝域为：$(-\infty,\ -u_{\alpha/2})\cup(u_{\alpha/2},\ \infty)$

$$\overline{C}\ge u_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$P\{|U|>\overline{C}\}\le P\left\{|U|>u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\alpha$$



即

$$P\{|U|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

最后，做出结论判断

对给定的样本值x_1，…，x_n，算出U 的具体值

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}, \text{其中} \bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i$$

若 $\lvert u \rvert > u_{\alpha/2}$ 则拒绝H_0 而接受H_1;	否则接受H_0 。

该例中，若取α=0.05，查表得 $u_{\alpha/2}$=1.96,由样本可算得:

$$|u|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|=\frac{|511-500|}{15/3}=\frac{11}{5}=2.2$$

因为原假设H_0成立的条件，使得{$\lvert U \rvert > u_{\alpha/2}$}发生的概率为:

$$P\{\lvert U \rvert > u_{\alpha/2}\}=\alpha$$

现小概率事件当场发生，有理由怀疑原假设H_0是错误的

由于$\lvert u \rvert$=2.2> 1.96, 故在显著性水平α=0.05 之下拒绝H_0，即认为包装机工作不正常.

假设检验的基本步骤:

1. 提出原假设:

根据实际问题提出原假设H_0(常规假设或维持原状)

和备择假设H_1;(新事物或新情况)

2. 建立检验统计量: (与枢轴变量形式一致)

并在H_0成立的条件下，确定它的分布(或近似分布);

3. 确定H_0的拒绝域(有利准则:H_1成立有利的区域作为拒绝域)

根据实际问题选定显著性水平α，依据检验统计量的分布与H_1的内容，确定H_0的拒绝域;

4. 对H_0作判断:

依赖显著性水平α

根据样本值算出检验统计量的统计值,

判断统计值是否落在拒绝域, 以确定拒绝或不拒绝H_0 .

例 1:若检验 $H_0:\mu=\mu_0$， $H_1:\mu\neq\mu_0$; (方差已知)

检验统计量$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

有利原则

给定α, H_0的拒绝域确定：$\mu-\mu_0<0$或$\mu-\mu_0>0$

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<C_1<0\text{或}$$

$$\bar{x}-\mu_0<0\text{或}$$

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}>C_2>0$$

$$\bar{x}-\mu_0>0$$

由小概率事件原理：
拒绝小概率事件发生

$$P\{U<C_1\text{或}U>C_2\}=\alpha$$

$$\begin{cases}C_1=u_{1-\frac{\alpha}{2}}\\ C_2=u_{\frac{\alpha}{2}}\end{cases}$$

给定α,拒绝域为： $|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}$

例 2:若检验 $H_0:\mu=\mu_0$， $H_1:\mu<\mu_0$; (方差已知)

检验统计量$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

有利原则

$\mu-\mu_0<0$

给定α，H_0的拒绝域确定：

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<C<0 \Longleftrightarrow \bar{x}-\mu_0<0$$

由小概率事件原理：
拒绝小概率事件发生

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<C\right\}=\alpha \Longrightarrow C=u_{1-\alpha}=-u_\alpha$$

给定α，H_0的拒绝域为： $(-\infty,-u_\alpha)$

例3：检验 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$； $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (μ未知)

有利原则

检验统计量$\chi^2 = (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} > 1 \text{或} \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} < 1$$

给定α，H_0的拒绝域确定：

$$\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} < C_1$$

$$\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1 \text{或} \frac{S^2}{\sigma_0^2} < 1$$

$$\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} > C_2$$

由小概率事件原理：
拒绝小概率事件发生

$$P\left\{\chi^2 < C_1 \text{或} \chi^2 > C_2\right\} = \alpha$$

给定α,拒绝域为： $\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或$\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

提出统计假设的基本原则:

1.提出原假设H_0的原则：常规假设或保护原来情况；或一般没有充分理由不能轻易否定的命题.

2. 提出备择假设H_1原则(确定拒绝域,有利准则):

1) 新事物或新情况出现时作为备择假设:

例如: 为判断今天生产的保险丝融化时间的方差是否超过400?

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \sigma^2 \le 400;\ \ H_1: \sigma^2 > 400 \\ H'_0: \sigma^2 = 400;\ H'_1: \sigma^2 > 400 \end{array}\right\}\text{(相同拒绝域)}$$

2) 历史经验提出;

3) 严重错误(弃真, 不符合常规的)作为第一类错误.

（练习）工件直径的假设检验

工厂生产的工件直径标准为μ_0=2（cm)，现从采用新工艺生产的产品中抽取出100个，算得直径 $\overline{X}$ = 1.978（cm)，问 $\overline{X}$ 与μ_0的差异，是否反映了工艺条件的改变引起工件直径偏小？(已知$\sigma=\sigma_0=0.1$)

例如：若检验 H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu<\mu_0$；

给定α，H_0的拒绝域为：

$$\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<-u_\alpha$$

例中：$\overline{x}-2=-0.022<-\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}u_{0.05}=-0.0165$

拒绝H_0, 即认为新工艺使工件直径偏小.

四、两类错误

1）(检验的原理)假设检验的主要依据是“小概率事件原理”，而小概率事件并非绝对不发生.

2）(样本的随机性)假设检验方法是依据样本去推断总体，样本只是总体的一个局部，不能完全反映整体特性.

无论接受或拒绝原假设H_0都可能做出错误的判断

错误可分为两类：

判断 \ 真实情况 / 判断的正误	H_0 真	H_1 真
拒绝H_0	犯第一类错误（弃真）	判断正确
接受H_0	判断正确	犯第二类错误（纳伪）

样本容量固定时,不可能使两类错误同时都尽可能小！
减小一类错误，必然使另一类错误增大。

假设检验的通常做法是按照奈曼—皮尔逊(**Neyman-Pearson**)提出的原则：先控制犯第一类错误的概率α，然后再使犯第二类错误的概率尽可能地小$\beta(\mu)$.

错误可分为两类：

判断的真实情况 / 判断正误	H_0 真	H_1 真
拒绝H_0	犯第一类错误（弃真）	判断正确
接受H_0	判断正确	犯第二类错误（纳伪）

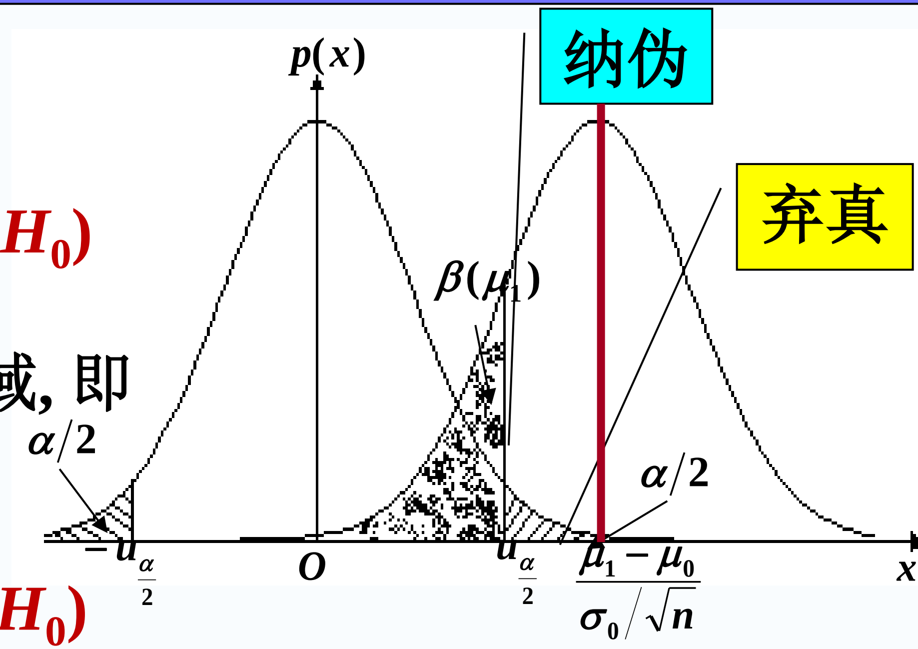
例：总体$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$

检验假设 H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu\neq\mu_0$；

当H_0成立时，$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

总体 $X \sim N(\mu,\sigma_0^2)$

检验假设 H_0: $\mu=\mu_0$， H_1: $\mu\neq\mu_0$



I. 第一类错误: 弃真(H_0真, 拒绝H_0)

H_0真, $U \sim N(0,1)$,

但U落入(判断的N(0,1)的拒绝域, 即

$$P_{\mu_0}\{|U| > u_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$$

II. 第二类错误: 纳伪(H_0假, 接受H_0)

H_0假, U不服从$N(0,1)$, 落在$N(\dfrac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}},1)$(真实分布)的拒绝域,

但在$N(0,1)$ (判断)的接受域,

$$U = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}},1)$$

$$P_{\mu}\{|U| \le u_{\frac{\alpha}{2}}\}(\text{落在}N(0,1)\text{接受域}) \overset{\text{真实}}{=} \Phi(u_{\alpha/2}-\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}})-\Phi(-u_{\alpha/2}-\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}) \neq 1-\alpha$$

即斑点阴影部分面积为犯第二类错误的概率.

解决问题

Q1： H_0和H_1的确定？

H_0 :(常规假设或维持原状);或一般没有充分理由不能轻易否定的命题.

H_1 :对立假设或备择假设. (新事物或新情况)

Q2: 拒绝域的确定？ Q3: 误判的类型及原因？

Q4： 显著性水平α作用？ Q5(补充)：不拒绝=接受？

例(补充思考):1. 司法(现在)：H_0 : 无罪(避免冤家错案)； H_1 : 有罪

司法(以前)：H'_0 : 有罪(有利于法官)； H'_1 : 无罪

2. 不拒绝≠接受； → 不依赖样本：所有样本成立

↙ 一次样本得出结论

注：1) 假设检验只提供拒绝H_0的证据，没提供判断正确H_0的证据，即 不拒绝≠接受；

2) 判断是否拒绝:一次观察, 检验统计量值落入拒绝域 → 拒绝