第三篇 二元关系

第8章 函数

8.0 内容提要

1 函数的概念

2 特殊函数

3 函数的复合运算

4 函数的逆运算

5 函数的运算定理

8.1 本章学习要求

重点掌握 1

1 函数的概念
2 单射、满射和双射函数的概念
3 函数的复合运算和逆运算

一般掌握 2

1 单射、满射和双射函数的证明
2 置换的定义

了解 3

1 置换的计算

8.2函数

函数也叫映射、变换或对应。

函数是数学的一个基本概念。这里将高等数学中连续函数的概念推广到对离散量的讨论，即将函数看作是一种特殊的二元关系。

函数的概念在日常生活和计算机科学中非常重要。如各种高级程序语言中使用了大量的函数。实际上，计算机的任何输出都可看成是某些输入的函数。

8.2.1函数的定义

定义8.2.1 设f是集合A到B的关系，如果对每个x∈A，都存在**惟一的**y∈B，使得<x,y>∈f，则称关系f为A到B的**函数(Function)**(或映射(Mapping)、变换(Transform))，**记为f:A→B**。

A为函数f的**定义域**，记为domf=A；

f(A)为函数f的**值域**，记为ranf。

函数定义的示意图见图8.2.1。

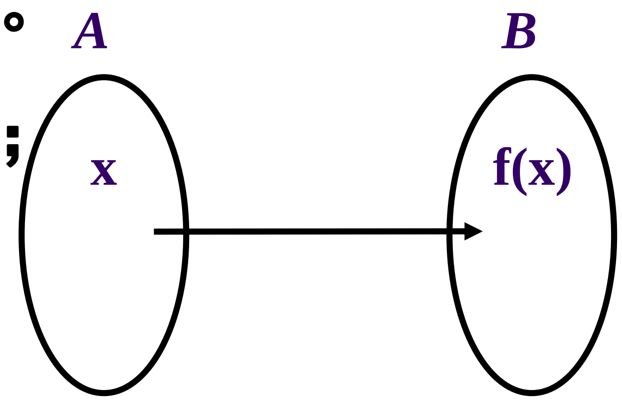


图8.2.1

结论

（1）$\langle x, y\rangle \in f \Leftrightarrow y=f(x)$；

（2）$\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y=z$；

（3）$|f|=|A|$；

（4）$f(x)$表示一个变值，f代表一个集合，因此$f \neq f(x)$。

如果关系f具备下列两种情况之一，那么f就不是函数：

（1）存在元素$a \in A$，在B中没有象；

（2）存在元素$a \in A$，有两个及两个以上的象。

例8.2.1

设A={1, 2, 3, 4}, B={a, b, c, d}，试判断下列关系哪些是函数。如果是函数，请写出它的值域。

（1）$f_1=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, c\rangle\}$；

（2）$f_2=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 4, c\rangle\}$；

（3）$f_3=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, c\rangle\}$；

（4）$f_4=\{\langle 2, b\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, c\rangle\}$。

例8.2.1 解

（1）在f_1中，因为A中每个元素都有唯一的象和它对应，所以f_1是函数。其值域是A中每个元素的象的集合，即$ranf_1=\{a,c,d\}$；

（2）在f_2中，因为元素2有两个不同的象a和d，与象的唯一性矛盾，所以f_2不是函数；

（3）在f_3中，因为A中每个元素都有唯一的象和它对应，所以f_3是函数。其值域是A中每个元素的象的集合，即$ranf_3=\{a,b,c,d\}$；

（4）在f_4中，因为元素1没有象，所以f_4不是函数。

例8.2.3

设A={a, b}, B={1, 2}，请分别写出A到B的不同关系和不同函数。

解 因为|A|=2, |B|=2，所以|A×B|=|A|×|B|=4，即A×B={<a, 1>, <a, 2>，<b, 1>, <b, 2>}，此时从A到B的不同的关系有2^4=16个。

例8.2.3 解（续）

分别如下：

$R_0=\Phi$； $R_1=\{\langle a, 1\rangle\}$，$R_2=\{\langle a, 2\rangle\}$，$R_3=\{\langle b, 1\rangle\}$，

$R_4=\{\langle b, 2\rangle\}$，$R_5=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$，$R_6=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$，

$R_7=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$，$R_8=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$，

$R_9=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle\}$，$R_{10}=\{\langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$，

从A到B的不同的函数仅有$2^2=4$个。分别如下：

$f_1=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$，$f_2=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$，

$f_3=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$，$f_4=\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$。

函数与关系的差别

函数是一种特殊的关系，它与一般关系比较具备如下差别：

1） 从A到B的不同的关系有$2^{|A|\times|B|}$个；但从A到B的不同的函数却仅有$|B|^{|A|}$个。（个数差别）

2） 关系的第一个元素可以相同；函数的第一元素一定是互不相同的。

（集合元素的第一个元素存在差别）

3） 每一个函数的基数都为|A|个（|f|=|A|），但关系的基数却为从零一直到|A|×|B|。

（集合基数的差别）

8.2.2函数的类型

定义8.2.2 设f是从A到B的函数，

对任意$x_1, x_2 \in A$，如果$x_1 \neq x_2$，有$f(x_1) \neq f(x_2)$，

则称f为从A到B的**单射**（不同的x对应不同的y）；

如果ranf＝B，则称f为从A到B的**满射**；

若f是满射且是单射，则称f为从A到B的**双射**。

若A＝B，则称f为A上的函数；当A上的函数f是双射时，称f为一个**变换**。

将定义8.2.2的描述数学化为

（1）$f:A\to B$是单射当且仅当对$x_1,x_2\in A$，若$x_1\neq x_2$，则$f(x_1)\neq f(x_2)$；

（2）$f:A\to B$是满射当且仅当对$y\in B$，一定存在$x\in A$，使得$f(x)=y$；

（3）$f:A\to B$是双射当且仅当f既是单射，又是满射；

（4）$f:A\to B$是变换当且仅当f是双射且$A=B$。

例8.2.4

确定下列函数的类型。

（1）设$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{a, b, c, d\}$。$f:A\to B$定义为：$\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, a\rangle, \langle 5, d\rangle\}$；

（2）设$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{a, b, c, d\}$。$f:A\to B$定义为：$f=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, b\rangle\}$；

（3）设$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2, 3\}$。$f:A\to B$定义为 $f=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$；

例8.2.4 解

（1）因为对任意y∈B，都存在x∈B，使得<x, y>∈f，所以f是满射函数；

（2）因为A中不同的元素对应不同的象，所以f是单射函数；

（3）因为f既是单射函数，又是满射函数，所以f是双射函数。又因为A=B，所以f还是变换。

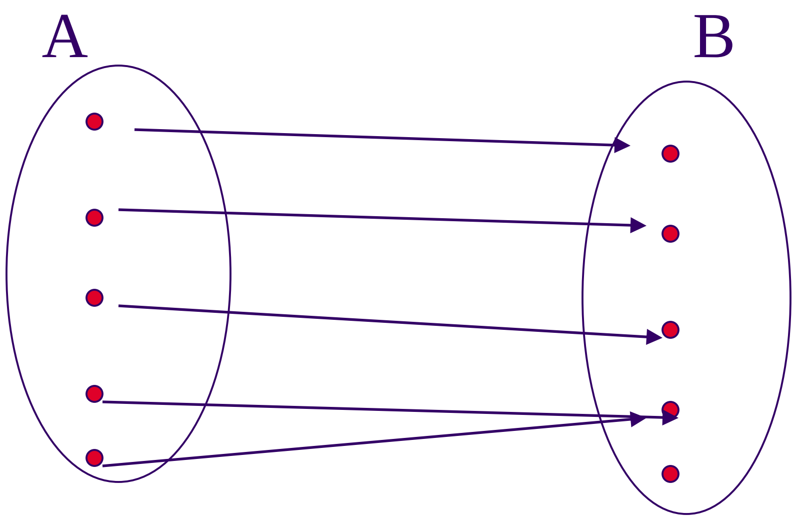
结论

设A，B为**有限集合**，f是从A到B的函数，则：

f是单射的必要条件为|A|≤|B|；

f是满射的必要条件为|B|≤|A|；

f是双射的必要条件为|A|=|B|。



定理8.2.1

设A，B是有限集合，且|A|=|B|，f是A到B的函数，则f是单射当且仅当f是满射。

证明必要性($\Rightarrow$)：

设f是单射。显然，f是A到f(A)的满射，故f是A到f(A)的双射，因此|A|=|f(A)|。由|f(A)|=|B|，且f(A)$\subseteq$B，得f(A)=B，故f是A到B的满射。

定理8.2.1（续）

充分性($\Leftarrow$)：

设f是满射。任取$x_1,x_2\in A$，$x_1\neq x_2$，假设$f(x_1)=f(x_2)$，由于f是A到B的满射，所以f也是$A-\{x_1\}$到B的满射，故$|A-\{x_1\}|\geqslant|B|$，即$|A|-1\geqslant|B|$，这与$|A|=|B|$矛盾。因此$f(x_1)\neq f(x_2)$，故f是A到B的单射。

例8.2.5

设X={0, 1, 2, …}， Y={1, 1/2, 1/3, …}，

f:X→Y的定义如下：

(1) $f_1=\{\langle 0, 1/2\rangle, \langle 1, 1/3\rangle, \cdots, \langle n, 1/(n+2)\rangle, \cdots\}$

(2) $f_2=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1/2\rangle, \cdots, \langle n, 1/n\rangle, \cdots\}$

(3) $f_3=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1/2\rangle, \cdots, \langle n, 1/(n+1)\rangle, \cdots\}$。

试判断它们的类型。

例8.2.5 解

（1）由已知得，$f(n)=\dfrac{1}{n+2},\quad n=0,1,2,\cdots$

根据函数$f_1(n)$的表达式和单射函数的定义知，f_1是单射函数；但是，Y中元素1没有原象，**所以f_1不是满射函数；**

（2）由已知得，

$$f(n)=\begin{cases}1, & 0,1\\ \dfrac{1}{n}, & n=2,3,\cdots\end{cases}$$

显然f_2是满射函数。但是，X中元素0和1有相同的象1，所以**f_2不是单射函数**；

例8.2.5 解

（3）由已知得，

$$f(n)=\frac{1}{n+1},\quad n=0,1,2,\cdots$$

显然，f是双射函数。

例8.2.6

设A=B=R(实数集)。试判断下列函数的类型。

（1）$f_1=\{\langle x, x^2\rangle | x\in R\}$；

（2）$f_2=\{\langle x, x+1\rangle | x\in R\}$；

（3）$f_3=\{\langle x, e^x\rangle | x\in R\}$；

解（1）f_1仅是一般函数；

（2）f_2是双射函数；

（3）f_3是单射函数。

8.2.3常用函数

定义8.2.3

（1）如果A=B，且对$\forall x\in A$，都有$f(x)=x$，则称f为A上的**恒等函数**，记为I_A。

（2）如果$\exists b\in B$，且对$\forall x\in A$，都有$f(x)=b$，则称f为**常值函数**。

（3）设A是全集$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$的一个子集，则子集A的**特征函数**定义为从U到$\{0,1\}$的一个函数，且

$$f_A(u_i)=\begin{cases}1 & u_i\in A\\ 0 & u_i\notin A\end{cases}$$

定义8.2.3（续）

（4）对有理数x，f(x)为大于等于x的最小的整数，则称f(x)为上取整函数(强取整函数)，记为 $f(x)=\lceil x \rceil$；

（5）对有理数x，f(x)为小于等于x的最大的整数，则称f(x)为下取整函数(弱取整函数)，记为 $f(x)=\lfloor x \rfloor$；

（6）如果f(x)是集合A到集合B={0,1}上的函数，则称f(x)为布尔函数。

例8.2.10

设A=B=R(实数集)。试指出下列函数的类型。

(1) $f_1=\{\langle x, x\rangle \mid x\in R\}$;

(2) $f_2=\{\langle x, a\rangle \mid x\in R, a\in R\}$;

(3) $f_3=\{\langle x, \lceil x\rceil\rangle \mid x\in R\}$;

(4) $f_4=\{\langle x, \lfloor x\rfloor\rangle \mid x\in R\}$。

解 (1) f_1是恒等函数，(2) f_2是常值函数，(3) f_3是上取整函数，(4) f_4是下取整函数。

8.2.5函数的应用

例8.2.11 设$A_n=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$是n个元素的有限集，$B_n=\{b_1 b_2 b_3\ldots b_n | b_i\in\{0,1\}\}$，**试建立$P(A_n)$到$B_n$的一个双射。**

解 $P(A_n)$到B_n可以按照如下的方式建立关系：对任意$S\in P(An)$，令

$$f(S)=b_1b_2b_3\ldots b_n,$$

其中：

$$b_i=\begin{cases}1, & \text{当} a_i\in S, \\ 0, & \text{当} a_i\notin S,\end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

例8.2.11(续)

(2) 证明f是双射。

1)证f是映射。显然，f是$P(A_n)$到B_n的映射。

2)证f是单射。任取$S_1, S_2 \in P(A_n)$，$S_1 \neq S_2$，则存在元素$a_j(1 \leqslant j \leqslant n)$，使得$a_j \in S_1, a_j \notin S_2$或$a_j \in S_2, a_j \notin S_1$。

从而$f(S_1)=b_1b_2b_3 \cdots b_n$中必有$b_j=1$，$f(S_2)=c_1c_2c_3 \cdots c_n$必有$c_j=0$或$f(S_1)=b_1b_2b_3 \cdots b_n$中必有$b_j=0$，$f(S_2)=c_1c_2c_3 \cdots c_n$必有$c_j=1$。所以$f(S_1) \neq f(S_2)$，即f是单射。

例8.2.11(续)

3) 证f是满射。任取二进制数$b_1b_2b_3\ldots b_n \in B_n$，对每一个二进制数$b_1b_2b_3\ldots b_n$，建立对应的集合$S \subseteq A_n$，$S=\{a_i \mid 若b_i=1\}$(即若$b_i=1$，令$a_i \in S$，否则$a_i \notin S$)，则$S \in P(A_n)$，从而$f(S)=b_1b_2b_3\ldots b_n$，故f是满射。

由1)、2)和3)知，f是双射。■

例如$A_3=\{a_1, a_2, a_3\}$，则有：

$\Phi \mapsto 000$，$\{a_1\} \mapsto 110$，$\{a_2\} \mapsto 010$，
$\{a_3\} \mapsto 001$，$\{a_1, a_2\} \mapsto 110$，$\{a_1, a_3\} \mapsto 101$，
$\{a_2, a_3\} \mapsto 011$，$\{a_1, a_2, a_3\} \mapsto 111$。

例8.2.12 Hash函数

假设在计算机内存中有编号从0到10的存储单元，见图8.2.2。图8.2.2表示了在初始时刻全为空的单元中，按次序15、558、32、132、102和5存入后的情形。现希望能在这些存储单元中存储任意的非负整数并能进行检索，试用Hash函数方法完成259的存储和558的检索。

132			102	15	5	259		558		32	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0

图8.2.2

解

因为h(259)=259mod11=6，所以257应该存放在位置6；

又因为h(558)=8，所以检查位置8，558恰好在位置8。

对于一个Hash函数H，如果H(x)=H(y)，但x≠y，便称冲突发生了。为了解决冲突，需要冲突消解策略。

例8.2.13

存在计算机磁盘上的数据或数据网络上传输的数据通常表示为字节串。**每个字节由8个字组成**，要表示100字位的数据需要多少字节。

解 因为s= $\lceil 100/8 \rceil = 13$，所以表示100字位的数据需要13字节。

例8.2.14

在异步传输模式(ATM)下，**数据按53字节分组，每组称为一个信元。**以速率每秒500千字位传输数据的连接上一分钟能传输多少个ATM信元。

解因为一分钟能够传输的字节数为 $\frac{500\times 60}{8}$ =3750000，所以一分钟能传输的信元数为 $\left\lfloor\frac{3750000}{53}\right\rfloor=70754$ 。

8.3函数的运算

8.3.1函数的复合运算

定义8.3.1 考虑f：A→B，g：B→C是两个函数，则f与g的复合运算

$$f \circ g = \{\langle x, z\rangle \mid x \in A \wedge z \in C \wedge (\exists y)(y \in B \wedge xfy \wedge ygz)\}$$

是从A到C的函数，记为fog：A→C，称为函数f与g的复合函数。

注意

（1）函数f和g可以复合⇔ranf=domg；

（2）dom(fog)=domf，ran(fog)=rang；

（3）对任意x∈A，有fog(x)=g(f(x))。

例8.3.1

设A={1, 2, 3, 4, 5}, B={a, b, c, d}, C={1, 2, 3, 4, 5}, 函数f:A→B, g:B→C定义如下：

$f=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, c\rangle, \langle 5, b\rangle\}$；

$g=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 5\rangle, \langle d, 2\rangle\}$。

求fog。

解 $f \circ g=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 3\rangle\}$

例8.3.2

设$f:R\rightarrow R$, $g:R\rightarrow R$, $h:R\rightarrow R$，满足$f(x)=2x$, $g(x)=(x+1)^2$, $h(x)=x/2$。计算：

（1）fog，gof；

（2）(fog)oh，fo(goh)；

（3）foh，hof。

解（1）$fog(x)=g(f(x))=g(2x)=(2x+1)^2$;

$gof(x)=f(g(x))=f((x+1)^2)=2(x+1)^2$;

例8.3.2 （续）

（2） $((f\circ g)\circ h)(x)=h((f\circ g)(x))=h(g(f(x)))$

$=h(g(2x))=h((2x+1)^2)=(2x+1)^2/2$；

$(f\circ(g\circ h))(x)=(g\circ h)(f(x))=h(g(f(x)))$

$=h(g(2x))=h((2x+1)^2)=(2x+1)^2/2$ ；

（3） $f\circ h(x)=h(f(x))=h(2x)=x$；

$h\circ f(x)=f(h(x))=f(x/2)=x$；

函数的复合不满足交换律，但满足结合律。

定理8.3.1

设f和g分别是A到B和从B到C的函数，则：

如f,g是满射，则fog也是从A到C满射；

如f,g是单射，则fog也是从A到C单射；

如f,g是双射，则fog也是从A到C双射。

证明：1） 对∀c∈C，由于g是满射，所以存在b∈B，使得g(b)＝c。对于b∈B，又因f是满射，所以存在a∈A，使得f(a)＝b。

从而有 fog(a)＝g(f(a))＝g(b)＝c。

即存在a∈A，使得：fog(a)＝c，所以fog是满射。

定理8.3.1(续)

2） 对任意$a_1, a_2 \in A$，$a_1 \neq a_2$，由于f是单射，所以$f(a_1) \neq f(a_2)$。

令$b_1 = f(a_1)$，$b_2 = f(a_2)$，由于g是单射，所以$g(b_1) \neq g(b_2)$，即$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$。

从而有$f \circ g(a_1) \neq f \circ g(a_2)$，

所以fog是单射。

3)是1)、2)的直接结果。■

定理8.3.2

设f和g分别是从A到B和从B到C的函数，则

（1）如fog是从A到C的满射，则g是从B到C的满射；

（2）如fog是从A到C的单射，则f是从A到B的单射；

（3）如fog是从A到C的双射，则g是从B到C的满射，f是从A到B的单射。

8.3.2函数的逆运算

定义8.3.2设f:A→B的函数。如果

$f^{-1}=\{\langle y,x\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\wedge \langle x,y\rangle\in f\}$

是从B到A的函数，则称f^{-1}：B→A的**逆函数。**

由定义8.3.2可以看出，**一个函数的逆运算也是函数。即逆函数f^{-1}存在当且仅当f是双射。**

例8.3.3

试求出下列函数的逆函数。

（1）设A={1, 2, 3}, B={1, 2, 3}。f_1: A→B定义为 $f_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$；

（2）$f_2=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,1/2\rangle,\cdots,\langle n,1/(n+1)\rangle,\cdots\}$

（3）$f_3=\{\langle x,x+1\rangle \mid x\in R\}$。

解

(1) 因$f_1=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$，所以

$$f_1^{-1}=\{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\};$$

(2) 因$f_2=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1/2\rangle, \cdots, \langle n, 1/(n+1)\rangle, \cdots\}$, 所以$f_2^{-1}=\{\langle 1, 0\rangle, \langle 1/2, 1\rangle, \cdots, \langle n, 1/(n+1)\rangle, \cdots\}$;

（3）因为$f_3=\{\langle x, x+1\rangle | x\in R\}$，所以

$$f_3^{-1}=\{\langle x+1, x\rangle | x\in R\}。$$

定理8.3.3

设f是A到B的双射函数，则：

$f^{-1}of = I_B = \{\langle b, b\rangle \mid b \in B\}$；

$fof^{-1} = I_A = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$；

$I_Aof = foI_B = f$。

定理8.3.4

若f是A到B的双射，则f的逆函数f^{-1}也是B到A的双射。

证明（1）证明f是满射。

因为$\mathrm{ran}f^{-1}=\mathrm{dom}f=A$，所以$f^{-1}$是B到A的满射。

（2）说明f是单射。

对任意$b_1,b_2\in B$，$b_1\neq b_2$，假设$f^{-1}(b_1)= f^{-1}(b_2)$，即存在$a\in A$，使得$\langle b_1,a\rangle\in f-1,\langle b_2,a\rangle\in f^{-1}$，即$\langle a,b_1\rangle\in f,\langle a,b_2\rangle\in f$，这与f是函数矛盾，因此$f^{-1}(b_1)\neq f^{-1}(b_2)$，故$f^{-1}$是B到A的单射。

综上，f^{-1}是B到A的双射。

8.3.4函数运算的应用

例8.3.4 假设f的定义如下表。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
D	E	S	T	I	N	Y	A	B	C	F	G	H
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
J	K	L	M	O	P	Q	R	U	V	W	X	Z

即f(A)=D, f(B)=E, f(C)=S, …等等。

试找出给定密文“QAIQORSFDOOBUIPQKJBYAQ”对应的明文。

8.3.4函数运算的应用

解由表8.3.1知，f^{-1}如如下表所示。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
H	I	J	A	B	K	L	M	E	N	O	P	Q
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
F	R	S	T	U	C	D	V	W	X	Y	G	Z

将密文“QAIQORSFDOOBUIPQKJBYAQ”中的**每一个字母在f^{-1}中找出其对应的象**就可得出对应的明文：“THETRUCKARRIVESGONIGHT”。

例8.3.5

设按顺序排列的13张红心纸牌，

A2345678910JQK

经过1次洗牌后牌的顺序变为

38KA410QJ57629

再经两次同样方式的洗牌后牌的顺序是怎样的？

例8.3.5 解

对应结果见下表。

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
f	3	8	K	A	4	10	Q	J	5	7	6	2	9
fof	K	J	9	3	A	7	2	6	4	Q	10	8	5
fofof	9	6	5	K	3	Q	8	10	A	2	7	J	4

8.4置换函数

当A是有限集合时，这种情况具有特殊重要性。有限集合上的双射函数在数学、计算机科学和物理学中有着非常广泛的应用。

8.4.1基本概念

定义8.4.1 设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是有限集合。从A到A的双射函数称为A上的置换或排列(Permutation)，记为$P:A\rightarrow A$，n称为置换的阶(Order)。

n阶置换P:A→A常表示为:

$$P=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ P(a_1) & P(a_2) & P(a_3) & \cdots & P(a_n) \end{pmatrix}$$

第一行是集合A的元素按顺序列出,

第二行是A中元素对应的函数值。

显然序列$P(a_1),P(a_2),\cdots,P(a_n)$恰好是A中元素的重排，在2.3.1节的意义下它恰好对应N的一个排列。

例8.4.1

解 A上的所有置换P如下：

$$P_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\quad P_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\quad P_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$P_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\quad P_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\quad P_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

例8.4.2

试求出例8.4.1中的置换P_2, P_4的逆置换，并计算P_2, P_4的复合运算以及它们的逆的复合运算。

解 根据已知有$P_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$，

$P_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$。

（1）$P_2^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$，

$P_4^{-1}=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$；

（2）$P_2 \circ P_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，

$P_2^{-1} \circ P_4^{-1}=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$。

8.4.3置换函数的应用

例8.4.3 等边三角形如图8.4.1所示。求经过旋转和翻转能使之重合的所有置换函数。

解 能使三角形重合的置换有6个：

（1）三角形绕中心A反时针旋转120°、240°和360°对应的置换分别为：

$$P_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\quad P_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\quad P_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

（2）绕中线1A, 2A, 3A翻转对应的置换分别为：

$$P_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\quad P_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\quad P_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

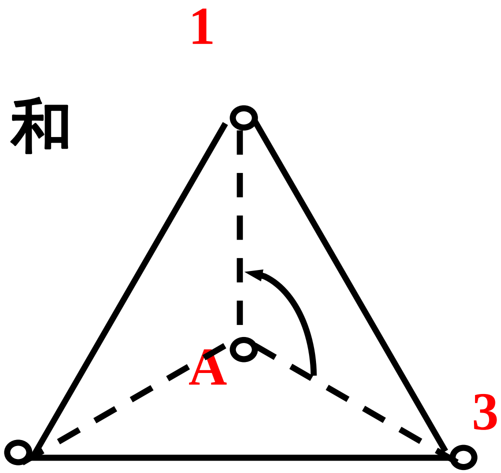


图8.4.1

8.5 本章总结

（1）函数的概念。注意函数与关系的区别和联系；

（2）单射、满射和双射函数的概念，数学描述形式；

（3）特殊函数的基本概念；

（4）函数的复合运算，逆运算及运算性质。

习题类型

（1）**基本概念题：**涉及函数、单射、满射、双射的基本概念；

（2）**判断题：**涉及函数及函数类型的判定；

（3）**计算题：**涉及函数做复合运算，求逆运算；

（4）**证明题：**涉及单射函数、满射函数或者双射函数。

第五次作业（第八章课后习题）

6.　8.　　12.　13.　15

Thank You !

http://202.115.21.136:8080/lssx