**随机变量的方差:** 随机变量关于其期望的偏离程度.

定义: $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$为$X$的方差.

称 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 为$X$的标准差或 均方差.

注: 1) $D(X)\geq 0$ 2) $D(X)$是随机变量$X$的函数的数学期望.

方差常用计算公式: $D(X)=E(X^2)-E(X)^2$

注意: $E(X^2)=D(X)+E(X)^2$

$D(X)\leq E\left[(X-x)^2\right], x\in R$, 等式在$x=E(X)$时成立.

方差是随机变量 $X$ 关于任何值的偏离程度的最小值.

方差刻划了随机变量$X$围绕它的数学期望的偏离程度!

# 期望和方差的性质：

1）$E(cX+b)=cE(X)+b$　　特别地：$D(b)=0$

$D(cX+b)=c^2D(X)$　　$D(-X)=D(X)$

$E(E(X))=E(X)$

$D(E(X))=0$

2) $E(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)$,

$$\sum_{i=1}^{n}E\left\{\left[X_i-E\left(X_i\right)\right]^2\right\}+2\sum_{1\le j\ne i\le n}E\left\{\left[X_i-E\left(X_i\right)\right]\left[X_j-E\left(X_j\right)\right]\right\}$$

特别:$D\left(X\pm Y\right)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)\pm 2E\left\{\left[X-E\left(X\right)\right]\left[Y-E\left(Y\right)\right]\right\}$

若$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，则

$D(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}D(X_k)$,　　$E\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)$

3）$D(X)=0$ ⟺ $P\{X=E(X)\}=1$(方差为0的随机变量必为常数)

注1： 要防止计算中常见的两个错误!

$$D(cX)=cD(X) \qquad D(X\pm Y)=D(X)\pm D(Y)$$

改为：$D(cX)=c^2D(X)$

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

注2： $D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$

改为：此式只有在诸随机变量相互独立的条件下才成立.

## 典型分布的数学期望与方差：

1. $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X)=\lambda$ $D(X)=\lambda$

2. $X \sim B(n,p)$ 则 $E(X)=np$ $D(X)=np(1-p)$

3. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $E(X)=\mu$ $D(X)=\sigma^2$

4.均匀分布 $E(X)=(b+a)/2$ $D(X)=(b-a)^2/12$

5.指数分布 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

6. 超几何分布 $P\{X=m\}=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n$ $m=0,1,2,\ldots,n$ $n\le M\le N$

$$E(X)=\frac{nM}{N}$$

7. 负二项分布 $P\{X=j\}=C_{j-1}^{k-1}p^k(1-p)^{j-k}$ $j=k,k+1,\ldots$ $E(X)=\dfrac{k}{p}$

## 重要结论:

随机变量$X$的$E(X), D(X)$存在, 且$D(X)>0$,则$X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$

$$E(X^*)=0,\quad D(X^*)=1$$

2. 设随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立, 且$E(X_i)=a, D(X_i)=b$,

则: $E(\bar{X})=E\left(\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)\right)=a, D(\bar{X})=\dfrac{1}{n}b.$

**3.设$X, Y \sim N(0,1)$且$X, Y$相互独立, 则: $X^2+Y^2 \sim \chi^2(2)$.**

**两个随机变量间关系的数字特征: 协方差和相关系数**

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

## 一.协方差 (Covariance)

定义：若$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$存在，称

$$cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

为随机变量$X,Y$的协方差.

注1: 1) "协方差"名称的意思

特别地: $X=Y$时 $cov(X,X)=E\{[X-E(X)][X-E(X)]\}=D(X)$

注2: 协方差(Covariance)在概率论和统计学中用于衡量两个变量的总体误差。而方差是协方差的一种特殊情况，即当两个变量是相同的情况。

2) 协方差本质仍为随机变量的函数的数学期望

$$cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

3) 常用计算公式：

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

协方差的性质：

1.对称性 $cov(X,Y)=cov(Y,X)$；

2.齐性 $cov(aX,bY)=ab\,cov(X,Y)$，$a,b$是常数；

3.可加性 $cov(X_1+X_2,Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)$.

特别地：$cov(X,a)=E\{[X-E(X)][a-E(a)]\}=0$

**例4.3.1**：$(X,Y)$在以原点为圆心的单位圆内服从均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2<1;\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

求$Cov(X,Y)$.

解：$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\underline{f(x,y)}dydx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\underline{f_X(x)}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}xdx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\int_{-1}^{1}\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi}dx=0$$

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2<1}\frac{xy}{\pi}dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}r^3\sin\theta\cos\theta d\theta dr=0$$

## 二、相关系数(Correlation coefficient)

定义：设二维随机变量$X,Y$的$D(X)>0,D(Y)>0$称

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为随机变量$X$与$Y$的相关系数.

注: 1) $$\rho_{XY}=E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\cdot\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right]$$

$$=E\left[X^*Y^*\right]-E[X^*]E[Y^*]=\operatorname{cov}\left(X^*,Y^*\right)$$

是标准化随机变量的协方差

相关系数又叫“标准尺度下的协方差”$(E[X^*]E[Y^*]=0)$

2) $\rho_{XY}$是一无量纲的量，不受所用单位的影响.

## 两个随机变量间关系的数字特征: 协方差和相关系数

随机变量$X,Y$的协方差: $cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

常用的计算公式: $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

协方差作为描述X和Y相关程度的量，在同一物理量纲之下有一定的作用，但同样的两个量采用不同的量纲使它们的协方差在数值上表现出很大的差异.

注: 协方差为$[X-E(X)][Y-E(Y)]$的均值, 依赖于$X,Y$的度量单位, 选择适当单位使$X,Y$的方差为1, 则协方差就是相关系数.

随机变量$X$与$Y$的相关系数: 设$D(X)>0,D(Y)>0$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\cdot\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right]=\operatorname{cov}(X^*,Y^*)$$

相关系数:更好地反映$X,Y$之间的关系,不受所用单位的影响.

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

性质：设随机变量$X,Y$的相关系数$\rho$存在，则

1） $|\rho|\le 1$ $\Rightarrow\{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]\}^2\le D(X)D(Y)$

2） $|\rho|=1$ $\Leftrightarrow$ $X$与$Y$依概率为1线性相关, 即

$$\exists\alpha,\beta\ (\alpha\ne 0)\ s.t$$
$$P\{Y=\alpha X+\beta\}=1$$

(X与Y必然存在线性函数关系)

3）若$\xi=a_1X+b_1$, $\eta=a_2Y+b_2$ 则

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{a_1a_2}{|a_1a_2|}\rho_{XY}$$

(线性变换不改变相关系数绝对值大小)

相关系数是衡量两个随机变量之间<u>线性相关程度</u>的数字特征, 也叫“线性相关系数”.

1) $|\rho_{XY}|\le 1$

借助$\rho_{XY}=\text{cov}\left(X^*,Y^*\right)$

$$\Rightarrow\{E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]\}^2$$
$$\le E[(X-E(X)]^2E[(Y-E(Y)]^2=D(X)D(Y)$$

好处：$E(X^*)=0,E(Y^*)=0 \qquad D(X^*),D(Y^*)=1$

证明：$D\left(X^*\pm Y^*\right)=D\left(X^*\right)+D\left(Y^*\right)\pm 2\text{cov}\left(X^*,Y^*\right)$

$$=2\pm 2\rho_{XY}=2\left(1\pm\rho_{XY}\right)\ge 0$$

$$\because 1\pm\rho_{XY}\ge 0$$

$$\therefore \left|\rho_{XY}\right|\le 1$$

2) $|\rho_{XY}|=1 \longleftrightarrow$ $X$与$Y$依概率为1 线性相关, 即

$$\exists\alpha,\beta\ (\alpha\ne 0)\quad s.t$$
$$P\{Y=\alpha X+\beta\}=1$$

$|\rho_{XY}|=1 \to X$与$Y$依概率为1 线性相关，即

$$\exists \alpha,\beta(\alpha\neq 0)\, s.t, P\{Y=\alpha X+\beta\}=1$$

证明："$\Rightarrow$" 必要性，

当$\rho_{XY}=-1$时，由1)中 $\because D\left(X^*+Y^*\right)=2\left(1+\rho_{XY}\right)$

$$\therefore D\left(X^*+Y^*\right)=0$$

由方差的性质：$E\left(X^*+Y^*\right)=E(X^*)+E(Y^*)=0$

$P\left\{X^*+Y^*=E\left(X^*+Y^*\right)\right\}=1$ 即

$P\left\{X^*+Y^*=0\right\}=1$ $\qquad X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ $\qquad \boxed{Y^*=\dfrac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}}$

$$P\left\{Y=\underbrace{-\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}}_{=\alpha}X+\underbrace{\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}E(X)+E(Y)}_{=\beta}\right\}=1$$

对$\rho=1$ 同理可得。

$|\rho_{XY}|=1 \leftarrow X$与$Y$依概率为1 线性相关，即

$$\exists \alpha,\beta(\alpha\neq 0)\, s.t, P\{Y=\alpha X+\beta\}=1 \Rightarrow |\rho_{XY}|=1$$

证明：" $\Leftarrow$ " 充分性, $\exists \alpha,\beta(\alpha\neq 0)\, s.t$

$P\{Y=\alpha X+\beta\}=1$ 即 $Y=\alpha X+\beta$ a.s.

$$E(Y)=\alpha E(X)+\beta \qquad D(Y)=\alpha^2 D(X)$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E\{[X-E(X)]\cdot[\alpha X+\beta-E(\alpha X+\beta)]\}$$

$$=\alpha D(X)$$

还可以如何证明？ （协方差性质）

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}=\pm 1$$

3)若$\xi=a_1X+b_1$, $\eta=a_2Y+b_2$ 则：$\rho_{\xi\eta}=\frac{a_1a_2}{|a_1a_2|}\rho_{XY}$

证明：$D(\xi)=a_1^2D(X)\qquad D(\eta)=a_2^2D(Y)$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E\{[\xi-E(\xi)][\eta-E(\eta)]\}$$
$$=E\{[a_1X-a_1E(X)]\cdot[a_2Y-a_2E(Y)]\}$$
$$=a_1a_2E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}$$
$$=a_1a_2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=\frac{a_1a_2}{\sqrt{(a_1a_2)^2}}\rho_{XY}=\frac{a_1a_2}{|a_1a_2|}\rho_{XY}$$

注：线性函数不改变相关系数绝对值大小.

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

性质:设随机变量$X,Y$的相关系数$\rho$存在, 则

$$\Rightarrow\{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]\}^2 \le E[(X-E(X)]^2E[(Y-E(Y)]^2=D(X)D(Y)$$

1） $|\rho|\le 1$

Cauchy-Schwarz(柯西-施瓦茨)不等式

2） $|\rho|=1$ $\Leftrightarrow$ $X$与$Y$依概率为1线性相关, 即

$\exists\alpha,\beta\ (\alpha\neq 0)\ s.t$

$P\{Y=\alpha X+\beta\}=1$

(X与Y必然存在线性函数关系)

3）若$\xi=a_1X+b_1$, $\eta=a_2Y+b_2$ 则

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{a_1a_2}{|a_1a_2|}\rho_{XY}$$

(线性变换不改变相关系数绝对值大小)

相关系数是衡量两个随机变量之间线性相关程度的数字特征, 也叫“线性相关系数”.

定义：设随机变量$X, Y$的相关系数存在,

1）$\rho_{XY}=1$　　称 $X, Y$ 正相关;

2）$\rho_{XY}=-1$　称 $X, Y$ 负相关;

3）$\rho_{XY}=0$　　称 $X, Y$ 不相关.

参见教材例4.4.4

注：$\rho_{XY}=0$ 仅说明$X, Y$之间没有线性关系，但可以有其他非线性关系。

定理： 若随机变量$X$与$Y$相互独立，则$X$与$Y$不相关，即有$\rho_{XY}=0$.

注：1）此定理的逆定理不成立.

即由$\rho_{XY}=0$不能得到$X$与$Y$相互独立.

**例4.3.2**：**(*X*,*Y*)在以原点为圆心的单位圆内服从均匀分布。**

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

**判断独立性：**

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1\\ 0, else\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1\\ 0, \text{else}\end{cases}$$

有 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 当 $x^2+y^2<1$

$X$与$Y$不独立

已计算得 $Cov(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

可以验证 $D(X)>0, D(Y)>0$

从而 $\rho_{XY}=0$

两个随机变量不相关不一定相互独立！

**定理**：若随机变量$X$与$Y$相互独立，

则$X$与$Y$不相关，即有$\rho_{XY}=0$.

**注**：1) 此定理的**逆定理不成立**.

即由$\rho_{XY}=0$不能得到$X$与$Y$相互独立.

2) $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma^2_1;\mu_2,\sigma^2_2;\rho)$，则

$X,Y$相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$

参见书上教材例4.4.6

**练习**：将一枚硬币重复抛掷$n$次，$X, Y$分别表示正面朝上和反面朝上的次数，

则$\rho_{XY}=\ -1$ $\qquad\qquad$ $Y=n-X$

**例4.3.3** 设二维随机变量（$X$，$Y$）在矩形

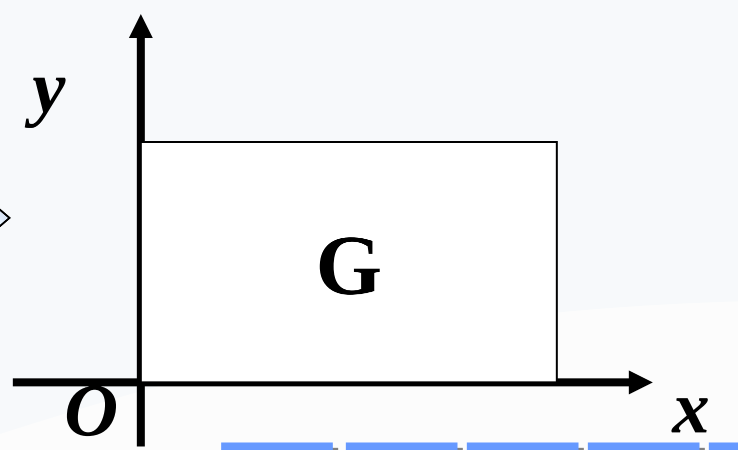
$G=\{(x，y)|0\le x\le 2，0\le y\le 1\}$上服从均匀分布.记

$$U=\begin{cases}0 & X\le Y\\ 1 & X>Y\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0 & X\le 2Y\\ 1 & X>2Y\end{cases}$$

求$\rho_{UV}$

分析：$$\rho_{UV}=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{E(UV)-E(U)E(V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}$$

关键是求$E(UV)$




可先求出$UV$分布律

随机变量函数的分布律

例4.3.3 设二维随机变量（$X$，$Y$）在矩形$G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$上服从均匀布.

求 $\rho_{UV}$

$$U=\begin{cases}0 & X\le Y\\ 1 & X>Y\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0 & X\le 2Y\\ 1 & X>2Y\end{cases}$$

$UV$ 的分布律为：

(随机变量函数的分布律)

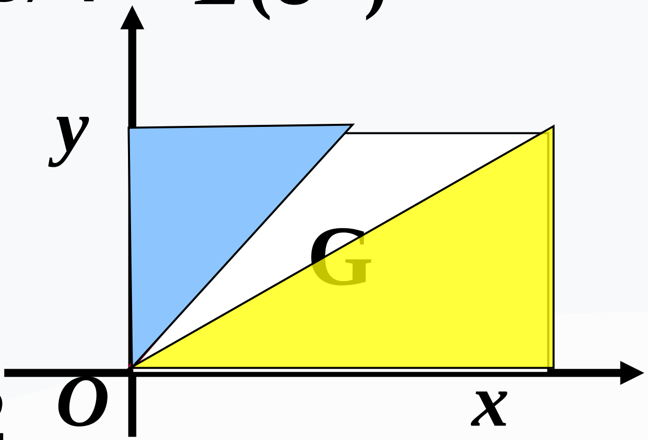
$$UV=\begin{cases}0 & X\le 2Y\\ 1 & X>2Y\end{cases}=V$$

$$E(U)=0\times P\{X\le Y\}+1\times P\{X>Y\}=3/4=E(U^2)$$

$$D(U)=E(U^2)-[E(U)]^2=\frac{3}{4}-\frac{9}{16}=\frac{3}{16}$$

同理 $E(V)=1/2=E(V^2)$

$D(V)=1/4$ 故$E(UV)=E(V)=1/2$



例4.3.3 设二维随机变量（$X$，$Y$）在矩形$G$={（$x$，$y$）|$0\le x\le 2$，$0\le y\le 1$}上服从均匀布.

求$\rho_{UV}$

$$U=\begin{cases}0 & X\le Y\\ 1 & X>Y\end{cases} \qquad V=\begin{cases}0 & X\le 2Y\\ 1 & X>2Y\end{cases}$$

$$E(U)=\frac{3}{4} \qquad D(U)=\frac{3}{16} \qquad E(V)=1/2 \qquad D(V)=1/4$$

$$E(UV)=E(V)=1/2$$

$$\rho_{UV}=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{E(UV)-E(U)E(V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

例4.3.4 某集装箱中放有100件产品，其中一、二、三等品分别为80、10、10件。现从中任取一件，记

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{抽到}i\text{等品} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad i = 1,2,3 \quad \text{求}\rho_{X_1X_2}$$

需求

$$\rho_{X_1X_2} = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}} = \frac{E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}$$

关键是求$E(X_1X_2)$ ⟶ 求出$X_1X_2$分布律

三、定义: 设$n$维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的协方差

$$C_{ij} = cov(X_i, X_j)$$

均存在. 称矩阵

$$C = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{array} & \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{array} \end{array}$$

对称阵

为$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$的协方差矩阵.

其中，$c_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$

$$c_{ii} = \mathrm{cov}(X_i, X_i) = D(X_i)$$

协方差矩阵的性质：$(c_{ij} = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\})$

1) $c_{ii} = D(X_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n$

2) $c_{ij} = c_{ji} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$

对称阵

3) C是非负定矩阵

$\forall t_j \in R,$

$\sum_{j,k} c_{ij} t_j t_k = E[\sum_{j=1}^{n} t_j (X_j - EX_j)]^2 \geq 0$

4) $c_{ij}^2 \leq c_{ii} \cdot c_{jj} \quad i,j = 1,2,\ldots,n$

根据矩阵理论，C 的所有$k$ 阶主子式均非负，特别

$k$=2 有 $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \geq 0$

即 $c_{11}c_{22} \geq c_{12}^2$

$|\rho| \leq 1$

?

$\{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]\}^2 \leq D(X)D(Y)$

# 四. 矩(Moment)

数学期望, 方差, 协方差是随机变量最常用的数字特征, 它们都是某种矩. 矩是最广泛使用的一种数字特征.

最常用的两种矩: 原点矩和中心矩.

定义: 设$X$为随机变量, 若$E(|X|^k) < +\infty$, 则称

$\gamma_k = E(X^k)$, $k$=1,2,3….. 为$X$的 $k$ 阶原点矩.

$\alpha_k = E(|X|^k)$, $k$=1,2,3… 为$X$的 $k$ 阶绝对原点矩.

定义: 设 $X$ 为随机变量, 若$E[|X-E(X)|^k] < +\infty$, 则称

$\mu_k = E\{[X-E(X)]^k\}$, $k$=1,2,3….. 为$X$的$k$阶中心矩.

$\beta_k = E[|X-E(X)|^k]$, $k$=1,2,3….. 为$X$ 的$k$阶绝对中心矩.

随机变量的矩实质是随机变量函数的期望

$\gamma_k = E(X^k)$　　$k=1,2,3\ldots\ldots$　为 $X$ 的 $k$ 阶原点矩.

$\alpha_k = E(|X|^k)$　　$k=1,2,3\ldots\ldots$　为 $X$ 的 $k$ 阶绝对原点矩.

$\mu_k = E\{[X - E(X)]^k\}$　$k=1,2,3\ldots\ldots$　为 $X$ 的 $k$ 阶中心矩.

$\beta_k = E[|X - E(X)|^k]$　$k=1,2,3\ldots\ldots$　为 $X$ 的 $k$ 阶绝对中心矩.

补充：$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$:二阶混合中心矩;

$E(XY)$: 二阶混合原点矩.

其中，$\gamma_1=E(X)$,　　$\gamma_2=E(X^2)$

$\mu_1=E[X-E(X)]=0$,　　$\mu_2=D(X)$

$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2$

上式可写为: $\mu_2=\gamma_2-\gamma_1^2$

$\gamma_k = E(X^k)$ $\mu_k = E\{[X - E(X)]^k\}$ $k=1,2,3\ldots\ldots$

$\gamma_k$ 与 $\mu_k$ 的关系：

$$\gamma_k = E\left(X^k\right) = E\left\{\left[X - E\left(X\right) + E\left(X\right)\right]^k\right\} = E\left\{\left[\left(X - \gamma_1\right) + \gamma_1\right]^k\right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i \gamma_1{}^i E\left[\left(X - \gamma_1\right)^{k-i}\right]$$

数学期望线性性质

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i \gamma_1{}^i \mu_{k-i}$$

特别 $k=2$：$\gamma_2 = E\left(X^2\right) = C_2^0 \mu_2 + C_2^1 \gamma_1 \mu_1 + C_2^2 \gamma_1{}^2$

$=D(X)+[E(X)]^2$

同理有：$\mu_k = E\{[X - E(X)]^k\} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \gamma_i (-1)^{k-i} \gamma_1^{k-i}$

假设期望、方差、协方差和相关系数均存在，

下述命题**相互等价**

1) $cov(X,Y)=0$

2) $\rho_{XY}=0$

3) $E(XY)=E(X)E(Y)$

4) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

**随机变量的矩是数！！！**