古典概率的计算中常见的类型：

- (1) 随机取数：例1.2.2, 1.2.3, 1.2.8
- (2) 分(住)房，生日问题：例1.2.4
- (3) 抽球：例1.2.5(重点)

  注:古典概率的大部分问题都能形象化地用摸球模型来描述。
- (4) 配对(很少涉及)

判断样本空间与事件分别所包含的基本事件数目.

注:古典概率的计算在产品质量抽样检查等实际问题及理论物理的研究中都 有重要应用。

思考(概率历史上有名的生日问题)：

班上有n(n<365)个人，至少有两个人的生日在同一天的概率为多大？

n	10	20	23	30	40	50
P(A)	0.12	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97

$$1-\frac{P_{365}^{n}}{365^{n}}$$

实际：假如产品的好坏从外形上看不出来，而且我们又是随机抽样，那么任何一件产品被抽到的可能性都一样，这正是古典概率.

例: 将两颗均匀骰子抛掷一次, 求两颗骰子点数之和不为7, 11的概率.

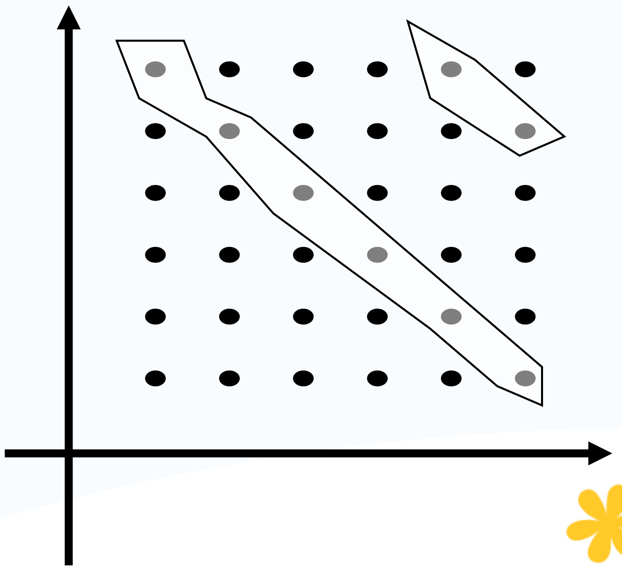
关键词：
试验、可能

事件：基于一定的试验目的进行试验。

如果试验目的就是关注点数之和, 样本空间为: Ω={2,….,12}

所求的概率：1-2/11=7/11.

此题试验目的关注具体的点数，否则“两颗骰子点数之差，或者之乘等”这些随机事件的可能性如何求？



- 解: 设Ω={(1,1)(1,2)…(6,6)}
- A={两颗骰子点数之和为7或11}
- P(A)=8/36=2/9

$$P(\overline{A})=\frac{36-8}{36}=1-P(A)=7/9$$

推广一般模型：一批同类产品共N件，其中有M件次品，从中随机抽取n件，求恰有m件次品的概率。

超几何函数级数展开

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(n)}b^{(n)}}{c^{(n)}}\cdot\frac{z^n}{n!}$$

B={有m件次品}

$$P(B)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\quad m=0,1,\cdots,l=\min\{M,n\}$$

超几何分布(Hypergeometric): 不放回抽样, 组合角度.

1)考虑顺序不放回抽取n件:

$$P(B)=C_n^m\frac{P_M^m P_{N-M}^{n-m}}{P_N^n}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

固定一次顺序

2) 题目改为有放回依次抽取n件:

$$P(B)=\frac{M^m\cdot(N-M)^{n-m}}{N^n}\cdot C_n^m=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\cdot\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m}$$

固定一次顺序

——二项分布

关系:当$N\to\infty$,超几何分布近似为二项分布.

例 (最大车牌号): 某城有N辆卡车，车牌号从1到N，有一个外地人到该城去，把遇到的*n*辆车子的牌号抄下（可能重复抄到某些车牌号），求抄到的最大号码正好为*k*的概率（$k=1,\dots,N$）

解 设每辆卡车被遇到的机会相同。

A_k ={最大的号码为*k*}　　B_k ={最大的号码不超过*k*}

$$B_k \supset B_{k-1} \qquad A_k = B_k - B_{k-1},$$

概率的单调性：$P(A_k) = P(B_k) - P(B_{k-1})$

$$P(B_k) = \frac{k^n}{N^n} \Rightarrow P(A_k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$$

注：这种方法曾在第二次世界大战中被盟军用来估计敌方的军火生产能力, 从被击毁的战车上的出厂号码推测其生产批量，得到相当精确的有用情报.

柯氏(Kolmogorov)公理(1933年)(重点):

每个事件A对应于唯一一个实数$P(A)$(客观性), 其对应规则为

1. (非负性) 有$0\le P(A)\le 1$;　　2. (规范性) $P(\Omega)=1$;

3. (可列可加性) E的事件列$A_1, A_2,\ldots,$ 互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

性质:

1. 不可能事件的概率为0, 即$P(\phi)=0$;

2. (有限可加性)若试验E的事件组 $A_1,\cdots,\ A_m$ 互不相容, 则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i)$

3. 对立事件概率和为1, 即$P(A)+P(\overline{A})=1$;

4. (概率单调性)若满足$A\subset B$,则$P(A)\le P(B)$。

例1.2.7 古典概率是公理化定义的特例。

几个概率公式:

概率减法公式:若事件A和B满足$A \subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

A与B之间是任意关系情况下:

$$(1) P(A-B)=P(A)-P(AB);$$

$$(2) P(A-B)=P(A \cup B)-P(B).$$

概率加法公式: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)$$

$$-P(B_1B_2)-P(B_2B_3)-P(B_1B_3)+P(B_1B_2B_3)$$

概率乘法公式: $P(AB)=P(A)P(B|A) \quad (P(A)>0)$

$$=P(B)P(A|B) \quad (P(B)>0)$$

§1.3 条 件 概 率

对概率的讨论通常是在一组固定的条件限制下进行。

例如: 考虑有两个孩子的家庭, 假定男女出生率一样, 则两个孩子(依大小排列)的性别为(男, 男), (男, 女), (女, 男), (女, 女)的可能性是一样。

A={随机选取一个家庭中一男孩, 一女孩}
B={这家庭至少有一个女孩},

（1）考虑事件A发生的可能性大小?

（2）事件B已发生, 问事件A发生的可能性大小?

我们把这种已知事件B发生的条件下, 事件A发生的可能性的客观度量称为条件概率, 记为$P(A|B)$。

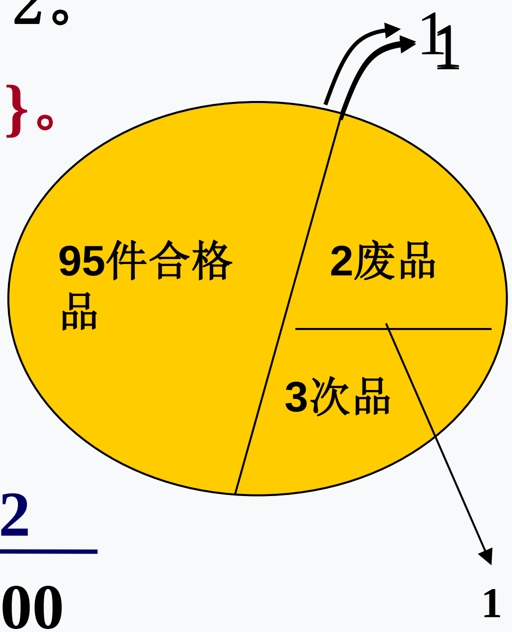
例如: 产品抽检试验

产品抽检试验 例1: 100件产品中有5件不合格, 其中3 件是次品, 2 件是废品，现从中任取一件，试求

（1）抽得废品的概率p_1;

（2）已知抽得不合格品，它是废品的概率p_2。

解：令A={抽得废品}，　B={抽得不合格品}。



有 $$p_1 = P(A) = \frac{2}{100}$$

$$p_2 = P(A \mid B) = \frac{2}{5}$$

注意到 $$P(B) = \frac{5}{100},\ P(AB) = \frac{2}{100}$$

$$P(A \mid B) = \frac{2}{5} = \frac{2/100}{5/100} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

条件概率(Conditional probability):

同一试验中，一个事件发生与否对其它事件发生的可能性大小如何影响

定义：$P(B)>0$， $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

为在事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率。

$P(A)$：试验、可能（事件A）

$P(A|B)$：试验、现实（事件B）、可能（事件A）

明确语句：指明B已经在A之前已经发生的情况下

张签中有三张幸运签,3人依次各抽一张签,第一个人抽到幸运签,假若第二人也抽到,问第二人抽到幸运签的概率?

$P(AB)$：？

定义：设A，B是随机试验E的两个随机事件，

且$P(B)>0$, 称 $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率。

条件概率的性质(教材的性质1.3.1):

1) $0\le P(A|B)\le 1$

2) $P(\Omega|B)=1$

3) 若事件列$A_1, A_2, \cdots$互不相容, 有$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)$

条件概率是一种概率, 满足概率公理化定义的三个基本性质, 故而概率的性质同样适用于条件概率。

参见教材的性质1.3.3

$$1)\ P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$$

$$2)\ P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$$

注意：条件概率易与概率混淆

问题: (1)判断所求的概率是否是条件概率？

(2)判断题目中概率数据是否是条件概率？

解决问题的关键词：试验、现实、可能。

例如：

肝癌检查

掷硬币试验

掷硬币试验

例1 掷一枚均匀硬币直到出现三次正面才停止，问正好在第六次停止的情况下，第五次也是正面的概率？

解 令 A_k={第 k 次出现正面}, $k=1,2,\ldots$

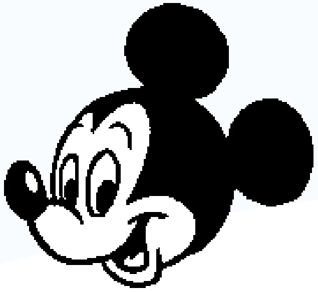
B={第六次停止投掷} ={第六次出现第三次正面}

则 $P(B)=C_5^2/2^6$

1	2	3	4	5	6
				正	正

$P=P(A_5 \mid B)=P(A_5B)/P(B)$

$$=\frac{C_4^1/2^6}{C_5^2/2^6}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$



肝癌检查

例2：在肝癌普查中发现，某地区的自然人群中，每十万人内平均有40人患原发性肝癌，有34人甲胎球蛋白高含量，有32人既患原发性肝癌又出现甲胎球蛋白高含量。求：

(1)患原发性肝癌的人中呈现其甲胎球蛋白的可能性多大？

(2)甲胎球蛋白的测定下，患原发性肝癌的人可能性多大？

解：令A={患原发性肝癌}，　　B={甲胎球蛋白}，

$$P(A)=0.0004 \quad P(B)=0.00034 \quad P(AB)=0.00032$$

所求条件概率为：(1)$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.00032}{0.0004}=0.8$

(2)$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.00032}{0.00034}=0.9412$

注：患原发性肝癌的人有80%其甲胎球蛋白呈现出高含量，

而甲胎球蛋白的测定大大有助于发现原发性肝癌患者：若出高含量，则有94%以上的概率对患原发性肝癌作出正确诊断.

二：乘法公式

定理： 设$P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

若$P(A)>0$，有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)。$$

条件概率定义的改写

更一般地有，若$P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

注：该公式是概率计算中的重要公式。

关键是分清题目中所给数据是否为条件概率。

抽签的公平性 空战试验 波利亚坛子(传染病)模型

抽签的公平性

例3 （抽签的公平性）

袋中有10 个球，9 个白色的，1个红色的，10 个人依次不放回的各取一球，问每个人取到红球的概率各为多少？

对比：有10个人通过抽签决定其中某一个人明天去超市买东西。要求每一个人抽签后亮出结果并放回,有人抽中就结束抽签。那么这种抽签方式是否公平?

解：设A*i* =｛第 *i* 人取到红球｝，*i* =1，2，…，10

$$P(A_1)=\frac{1}{10};\ P(A_2)\text{还是}?P(A_2|\bar{A}_1)$$

$$P(A_2)=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$$

$$=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10};$$

抽签的公平性

例3(抽签的公平性)袋中有10 个球，9 个白色的，1个红色的，10 个人依次不放回的各取一球，问每个人取到红球的概率各为多少？

$$P(A_{10}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_9A_{10})$$

$$= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_{10}|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_9)$$

$$= \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{10}$$

有 $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_{10})$.

现实意义：解决“僧多粥少”问题。

直观考虑：10个人依次随机抽出一球，在效果上等同于把这10个球随意排成一列，每种排法有等可能性。因此，把这10个球自1至10编上号，不妨把1个红球编成1号，再把10个人自1至10编上号。把10个球自左至右随意排成一列，让1号人取最左边的球，2号人取次左的球，以此类推，10个人的地位完全是对等的，因而有一样的机会拿到红球，即1/10.

例3(抽签的公平性)

袋中有10 个球，9 个白色的，1个红色的，10 个人依次不放回的各取一球, 问每个人取到红球的概率各为多少？

对比：

思考：有10个人通过抽签决定其中某一个人明天去超市买东西。要求每一个人抽签后亮出结果并放回，有人抽中就结束抽签。那么这种抽签方式是否公平?

例4(波利亚坛子(传染病)模型): 坛子中有a个白球, b个黑球, 任意取出一球，看后放回，并加入与抽取的球同色的c个球，如此进行了四次.问前两次出现黑球、后两次出现白球的概率是多少?

解：设A_j={第j次取到黑球}, j=1,2,3,4,

$$P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\bar{A}_3\mid A_1A_2)P(\bar{A}_4\mid A_1A_2\bar{A}_3)$$

$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+2c}\cdot\frac{a+c}{a+b+3c}$$

$$P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{a+c}{a+b+2c}\cdot\frac{b+c}{a+b+3c}$$

注: 只与白球及黑球出现次数有关，而与出现的顺序无关.

这个模型曾被波利亚用来作为描述传染病的数学模型.

这是很一般的摸球模型:

特别取c=0, 则是有放回摸球；取c=-1, 则是不放回摸球.

例4(波利亚坛子(传染病)模型): 坛子中有a个白球, b个黑球, 任意取出一球，看后放回，并加入与抽取的球同色的c个球，如此进行了n次.问前$n1$次出现黑球、后$n2=n-n1$次出现白球的概率是多少？

推广: A_1表示第一次摸出黑球事件,..., A_{n_1}表示第n_1次摸出黑球事件，

A_{n_1+1}表示第n_1+1次摸出白球事件, . . . , A_n表示第n次摸出白球事件。

$$P(A_{n_1} \mid A_1 \cdots A_{n_1-1}) = \frac{b+(n_1-1)c}{a+b+(n_1-1)c} \qquad P(A_{n_1+1} \mid A_1 \cdots A_{n_1}) = \frac{a}{a+b+n_1 c}$$

$$P(A_{n_1+2} \mid A_1 \cdots A_{n_1+1}) = \frac{a+c}{a+b+(n_1+1)c} \qquad P(A_n \mid A_1 \cdots A_{n\text{-}1}) = \frac{a+(n_2\text{-}1)c}{a+b+(n\text{-}1)c}$$

$$P(A_1 \cdots A_{n\text{-}1}A_n) = \frac{b}{b+a} \cdot \frac{b+c}{b+a+c} \frac{b+2c}{b+a+2c} \cdots$$

$$\frac{b+(n_1\text{-}1)c}{a+b+(n_1\text{-}1)c} \cdot \frac{a}{a+b+n_1 c} \frac{a+c}{a+b+(n_1+1)c} \cdots \frac{a+(n_2\text{-}1)c}{a+b+(n\text{-}1)c}$$

空战试验

例5 两架飞机进行空战，甲机首先开火，击落乙机的概率为0.2，若乙机未被击落，进行还击，击落甲机的概率为0.3，若甲机又未被击落，它再次向乙机开火，并击落它的概率为0.4。试求这几个回合中

（1）甲机被击落的概率$p1$；

（2）乙机被击落的概率$p2$。

条件概率

分析

甲机 → 乙机 1

乙机 → 甲机

甲机 → 乙机 2

解：设A={甲机首次攻击击落乙机}

B={乙机击落甲机}，

C={甲机第二次攻击击落乙机}

有$P(A)=0.2$,

$P(B\mid A)=0.3$,

$P(C\mid AB)=0.4$

解：设A={甲机首次攻击击落乙机}，B={乙机击落甲机}，

C={甲机第二次攻击击落乙机}

$P(A)=0.2$，$P(B\mid\bar{A})=0.3$，$P(C\mid\bar{A}\bar{B})=0.4$

（1）甲机被击落的概率

$$p_1=P(B)=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})=0.8\times0.3=0.24$$

（2）乙机被击落的概率

$$p_2=P(A\cup C)=P(A\cup\bar{A}\bar{B}C)$$

$$=P(A)+P(\bar{A}\bar{B}C)$$

$$=P(A)+P(\bar{A})P(\bar{B}\mid\bar{A})P(C\mid\bar{A}\bar{B})$$

$$=P(A)+[1-P(A)][1-P(B\mid\bar{A})]P(C\mid\bar{A}\bar{B})$$

$$=0.2+(1-0.2)(1-0.3)\times0.4=0.424$$

$P(A)$：试验、可能（事件A）

$P(A|B)$：试验、现实（事件B）、可能（事件A）

明确语句：指明B已经在A之前已经发生的情况下

$P(AB)$：试验、可能（事件A和B同时都发生）

没有明确语句指明B在A之前已经发生

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)\le P(A|B)$$

分清题目中所给数据是否为条件概率

摸球试验

例4 甲盒中有5个红球，6个白球；乙盒中有3个红球，4个白球。抛一枚均匀硬币，出现正面，则从甲盒中任取一球，反之从乙盒中任取一球。试求取出白球的概率*p*.

解：设A={取出白球}，　　B={甲盒中任取一球}={H}

A={从甲盒中取出一白球}∪{从乙盒中取出一白球}

$=(AB)\cup(A\overline{B})$

有限可加

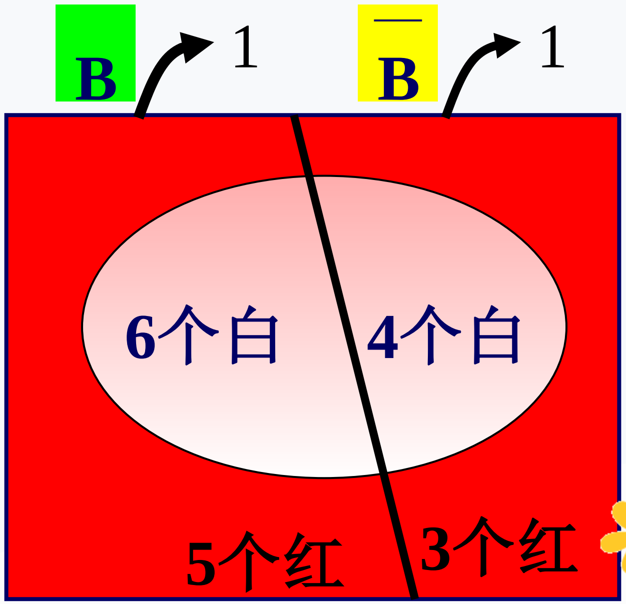
于是

$$p=P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$$

$$=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid \overline{B})P(\overline{B})$$

乘法公式

$$=\frac{6}{11}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{43}{77}\approx 0.5584$$



三：全概率公式

有时，事件的概率计算可能很复杂，我们可以将复杂事件分解为若干不相容的简单事件来计算。

摸球试验

定义：设Ω为随机试验E的样本空间，

B_1，B_2，…，B_n为E的一组事件，若

(1) $B_i \cap B_j = \phi$，$i \neq j$；

(2) $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$。

称B_1，B_2，…，B_n为Ω的一个有限划分，或称完备事件组）。注：样本空间的划分不唯一。

思考：有限划分是基本事件组吗？

定理（全概率公式）：设随机试验E的样本为Ω, $A\subset\Omega$， B_1，B_2，…，B_n为Ω的一个有限划分，且 $P(B_i)>0, i=1,2,\dots,n$；则有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

证明：B_1，B_2，…，B_n为Ω的一个有限划分

$$\Rightarrow \Omega=B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n$$

从而有 $A=A\cap\Omega=A\cap(B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n)$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)$$

吸收律

分配律

又因为 $(AB_i)\cap(AB_j)=A\cap(B_iB_j)=A\phi=\phi,\ i\neq j$

由概率的有限可加性

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{n}AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)$$

因为$P(B_i)>0,\ i=1,2,\ldots,n$，利用乘法公式得

$$P(\mathrm{A})=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

注：注意基本思想.

概括了一种普通的解题策略:各个击破或分而食之.

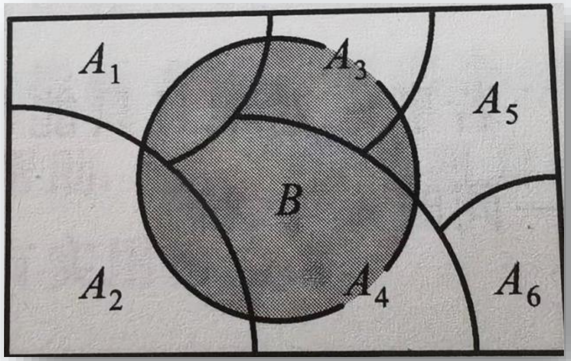
实际应用：常用在预测推断中，又称为事前概率。

例如: 抽检试验 抽签的公平性

抽检试验

例5:某工厂有4个车间生产同一种产品,其产品分别占总产量的15%、20%、30%和35%，在各车间里的次品率依次为0.05、0.04、0.03及0.02。现从出厂产品中任取一件，为次品的概率是多少？

解：设B={任取一件，恰好取到次品}



A_i={恰好取到第 i 个车间的产品}, i=1,2,3,4

构成一个样本空间的划分。

$$P(A_1)=0.15, P(A_2)=0.20, P(A_3)=0.30, P(A_4)=0.35.$$

$$P(B\mid A_1)=0.05, P(B\mid A_2)=0.04, P(B\mid A_3)=0.03, P(B\mid A_4)=0.02.$$

由全概率公式可得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.0315$$

抽签的公平性

例6 设袋中有n个红球，m个白球。三人依次不放回地各取出一个球。求他们取得红球的概率各为多少?

解：设A_i={第 i 个人取到红球}，i=1,2,3

$$P(A_1)=\frac{n}{m+n},$$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid \overline{A_1})$$

$$=\frac{n}{m+n}\times\frac{n-1}{m+n-1}+\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n-1}$$

$$=\frac{n}{m+n}$$

求$P(A_3)$时，我们把 $A_1A_2, \overline{A_1}A_2, A_1\overline{A_2}, \overline{A_1}\,\overline{A_2}$这四个事件构成一个有限划分，由全概率公式可得

$$
\begin{aligned}
P(A_3) &= P(A_1A_2)P(A_3 \mid A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2)P(A_3 \mid \overline{A_1}A_2) \\
&\quad + P(A_1\overline{A_2})P(A_3 \mid A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(A_3 \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2}) \\
&= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) + P(\overline{A_1})P(A_2 \mid \overline{A_1})P(A_3 \mid \overline{A_1}A_2) \\
&\quad + P(A_1)P(\overline{A_2} \mid A_1)P(A_3 \mid A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(A_3 \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2}) \\
&= \frac{n}{m+n} \times \frac{n-1}{m+n-1} \times \frac{n-2}{m+n-2} + \frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)} \times \frac{n-1}{m+n-2} \\
&\quad + \frac{m}{m+n} \times \frac{m-1}{m+n-1} \times \frac{n}{m+n-2} = \frac{n}{m+n}
\end{aligned}
$$

设选择题有四个答案，只有一个是正确的。懂的学生能够准确回答，不懂的学生从四个答案中随机选择。假定一个学生懂与不懂的概率都是 0. 5. 试计算

（1） 随机抽取一位学生，他答对的概率；

（2） 一位答对的学生对该题不懂的概率。

解：设随机事件 A=｛回答正确｝ B=｛对该题不懂｝

（1）由全概率公式：

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\bar{B})P(A\mid \bar{B})$$

$$=0.5*0.25+0.5*1=0.625$$

B与$\bar{B}$构成一个样本空间的划分

（2）由贝叶斯公式：

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\bar{B})P(A\mid \bar{B})}=\frac{0.5*0.25}{0.625}=0.2$$

本次课的内容是：

条件概率，乘法公式，全概率公式。

重点：全概率公式。

下次课内容：

§1.3 中的Bayes公式，

§1.4中独立事件，结束第一章。