本次课的重点内容是：

条件分布律，
条件密度函数.

第三章的§3.4 随机变量的函数及其分布

下次课内容：

要讲到第三章的§3.4 随机变量的函数及其分布，包括离散型随机变量的函数及其分布律和连续型随机变量的函数及其概率密度.

一、离散型随机变量的函数及其分布律

1.离散型随机变量的函数也是离散型随机变量

$$P\{Y=y_i\}=P\{g(X)=y_i\}=\sum_{x_i\in S_j}P\{X=x_i\}\quad j=1,2,\ldots$$

$$P\{Z=z_k\}=P\{G(X,Y)=z_k\}=\sum_{(x_i,y_j)\in T_k}P\{X=x_i,Y=y_j\},k=1,2,\ldots$$

可加性:(再生性)

教材例3.4.3 泊松分布具有可加性

若X与Y相互独立，$X\sim \mathrm{P}(\lambda_1),Y\sim \mathrm{P}(\lambda_2)$,

则$X+Y\sim \mathrm{P}(\lambda_1+\lambda_1)$

离散卷积公式

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=0}^{m}p(k)q(m-k),$$
$m=0,1,2,..$

教材: 二项分布具有可加性

若X与Y相互独立,

$X\sim \mathrm{B}(\mathrm{n}_1,p),Y\sim \mathrm{B}(n_2,p)$,则$X+Y\sim \mathrm{B}(n_1+n_1,p)$

结论：若X_1，X_2，…，X_n相互独立,且$X_i \sim B(1, p)$则

$$X_1+X_2+\dots+X_n \sim B(n, p);$$

反之 若 $X \sim B(n, p)$，则存在相互独立的$X_i \sim B(1, p)$，使

$X = X_1+X_2+\dots+X_n$，这称为“再生性”.

一般，1）随机变量X_1，X_2，… X_n相互独立；

2）具有相同类型的分布；

若 $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的分布除参数变化，而分布类型不变，

称此种分布具有可加性.

例3.4.3: 二项分布具有可加性

泊松分布也具有可加性

泊松分布也具有可加性

$X_t \sim P(\lambda_0 t)$：(教材中泊松分布的参数$\lambda=\lambda_0 t$)

参数λ_0是单位时间内事件出现的平均次数

(平均到达率或强度).

例：设小轿车、大型客车，运输车三类车独立到达大型收费站该，这三类车在$[0, t)$时间内的到达数是强度分别为λ_1, λ_2及λ_3的泊松分布.

(1)汽车在$[0, t)$时间内的到达数的分布？

(2) 非小轿车在$[0, t)$时间内的到达数的分布？

二.连续型随机变量的函数及其概率密度

一元函数：

X是连续型随机变量, 而$Y= g(X)$ 也是连续型随机变量

1. 最基本的方法是"分布函数法"

$$F_Y(y) = P\{g(X) \le y\} = \int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} F'_Y(y) & f_Y(y)\text{的连续点} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

例3.4.3: 设$X\sim N(0,1)$, 求$Y=X^2$的概率密度.

分析: 一般是通过求分布函数得到的.

$$\{Y\le y\}=\{X^2\le y\},\qquad -\infty<y<+\infty$$

解: 当$y\le 0$ $\quad F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=0$

当$y>0$ $\quad F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$=\int_{\{x|g(x)\le y\}}f_X(x)dx$$

$$=\Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}(\sqrt{y})'-e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}}(-\sqrt{y})']$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ o & y\le 0\end{cases}$$

称Y服从自由度为1的χ^2分布

例3.4.4: 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$Y=e^X$的概率密度$f_Y(y)$.

解: $\{Y \le y\} = \{e^X \le y\}, -\infty < y < +\infty$

当$-\infty < x < +\infty$, $f_X(x) > 0 \Rightarrow y = e^x > 0$, $f_Y(y) > 0$

当$y \le 0$ $\quad F_Y(y) = P\{e^X \le y\} = 0$

当$y > 0$ $\quad F_Y(y) = P\{e^X \le y\} = \int_{\{x | g(x) \le y\}} f_X(x)dx$

$$= P\{X \le \ln y\} = \int_{-\infty}^{\ln y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0.$$

Y的对数即$\ln Y = X$服从正态分布,故称Y服从分布为对数正态分布.

对数正态变量取非负值, 又能通过正态分布进行概率计算,很适合做某些现象的数学模型.

当代金融学用对数正态分布取代正态分布作为资产价格分布建立起了十分合理的理论.另外, 销售量, 元件寿命等也已普遍使用对数正态分布作为模型.

$$F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}=\int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} F_Y'(y) & f_Y(y)\text{的连续点} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

已知连续型随机变量X的概率密度, 求$Y=g(X)$的概率密度步骤为:

（1）先设法从X的概率分布求出Y的分布函数 $F_Y(y)$;

（2）再求 $F_Y(y)$ 对变量y的导数得Y的概率密度 $f_Y(y)$;

（3）最后按$Y=g(X)$的定义域所决定的值域,

确定出能使 $f_Y(y)>0$ 的y值,即得随机变量Y的可能值.

当$x_1<x<x_2$时, $f_X(x)>0$

$y=g(x)\in(y_1,y_2)$, $f_Y(y)>0$

例3.4.5: 对一个圆片的直径进行测量, 测量结果 $X\sim U(5,6)$,求圆片面积Y的概率密度$f_Y(y)$ (86页).

解：圆片面积 $Y=\pi(\frac{X}{2})^2=\frac{\pi}{4}X^2$

$$\{Y\le y\}=\left\{\frac{\pi}{4}X^2\le y\right\}=\left\{-\sqrt{4y/\pi}\le X\le\sqrt{4y/\pi}\right\}(y>0)$$

$X\sim U(5,6)$ Y的取值范围$(\frac{25}{4}\pi,9\pi)$ $f_Y(y)>0(\frac{25}{4}\pi<y<9\pi)$

当$y<\frac{25}{4}\pi$ $F_Y(y)=0$ 当$y\ge 9\pi$ $F_Y(y)=1$

当$\frac{25}{4}\pi<y<9\pi$ $F_Y(y)=P\left\{5\le X\le\sqrt{4y/\pi}\right\}=(\sqrt{4y/\pi}-5)\Big/(6-5)=\sqrt{4y/\pi}-5$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}F_Y'(y)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}} & \dfrac{25}{4}\pi<y<9\pi\\ o & else\end{cases}$$

例3.4.5: 对一个圆片的直径进行测量, 测量结果 $X\sim U(5,6)$,求圆片面积Y的概率密度$f_Y(y)$ (86页).

解：圆片面积 $Y=\pi(\frac{X}{2})^2=\frac{\pi}{4}X^2$　　$f_X(x)=\begin{cases}1, & 5<x<6\\ 0 & else.\end{cases}$

Y的取值范围$(\frac{25}{4}\pi,9\pi)$

$$F_Y(y)=P\left\{\frac{\pi}{4}X^2\le y\right\}=\begin{cases}0, & y<\frac{25}{4}\pi\\ P\left\{5\le X\le\sqrt{4y/\pi}\right\}=\sqrt{4y/\pi}-5, & \frac{25}{4}\pi<y<9\pi\\ 1, & y\ge 9\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}F_Y'(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi y}} & \frac{25}{4}\pi<y<9\pi\\ o & else\end{cases}$$

$f_X(x)=1>0$, 当5<x<6时 $\Rightarrow \frac{25}{4}\pi<y=\frac{\pi}{4}X^2<9\pi$时：$f_Y(y)>0$

二、连续型随机变量的函数及其概率密度

一元函数：

1. 最基本的方法是“分布函数法”

$$F_Y(y) = P\{g(X) \le y\} = \int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} F_Y'(y) & \underline{y_1 < y < y_2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

(1) 先设法从X的概率分布求出Y的分布函数$F_Y(y)$;

(2) 再求 $F_Y(y)$对变量y的导数得Y的概率密度 $f_Y(y)$;

(3) 最后按$Y=g(X)$的定义域所决定的值域,

确定出能使 $f_Y(y) > 0$ 的y值, 当$x_1 < x < x_2$时， $f_X(x) > 0$

即得随机变量Y的可能值. $y = g(x) \in (y_1, y_2)$, $f_Y(y) > 0$

二、连续型随机变量的函数及其概率密度

一维情况，即一元函数：

1. 最基本的方法是“分布函数法”

$$F_Y(y) = P\{g(X) \le y\} = \int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} F_Y'(y) & y_1 < y < y_2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

不需要求解完整的

$F(y)(-\infty < y < +\infty)$

当$x_1 < x < x_2$时，$f_X(x) > 0$

$F_Y(y)$

$y = g(x) \in (y_1, y_2)$, $f_Y(y) > 0$ 只求解：$(y_1 < y < y_2)$

例3.4.5: 对一个圆片的直径进行测量, 测量结果 $X \sim U(5,6)$,求圆片面积Y的概率密度$f_Y(y)$.

解：圆片面积 $Y=\pi(\frac{X}{2})^2=\frac{\pi}{4}X^2$ $\quad f_X(x)=\begin{cases}1, & 5<x<6\\ 0 & else.\end{cases}$

Y的取值范围$(\frac{25}{4}\pi, 9\pi)$

$$F_Y(y)=P\left\{\frac{\pi}{4}X^2\le y\right\}=\begin{cases}0, & y<\frac{25}{4}\pi\\ P\left\{5\le X\le\sqrt{4y/\pi}\right\}=\sqrt{4y/\pi}-5, & \frac{25}{4}\pi<y<9\pi\\ 1, & y\ge 9\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}F_Y'(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi y}} & \frac{25}{4}\pi<y<9\pi\\ o & else\end{cases}$$

$f_X(x)=1>0$, 当$5<x<6$时 $\Rightarrow \frac{25}{4}\pi<y=\frac{\pi}{4}X^2<9\pi$时：$f_Y(y)>0$

2.单调函数公式法

定理: 设随机变量X具有概率密度$f_X(x)$,当$a<x<b$时,

$f_X(x)>0$; $g(x)$处处可导, 且恒有$g'(x)>0$ (或$g'(x)<0$)

则$Y=g(X)$是连续型随机变量,其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[h(y)\right]\cdot\left|h'(y)\right| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

$$\alpha=\min\left(g(a),g(b)\right) \quad \beta=\max\left(g(a),g(b)\right)$$

其中$x=h(y)$是$y=g(x)$的反函数

证: 设 $h(y)$是$y=g(x)$的反函数并且

$g'(x)<0 \quad \Rightarrow h'(y)<0$ （反函数存在定理）

(单调函数公式法) **定理:** 设随机变量X 具有概率密度$f_X(x)$,当$a<x<b$时, $f_X(x)>0$; $g(x)$处处可导, 且恒有$g'(x)>0$ (或$g'(x)<0$),则$Y= g(X)$是连续型随机变量,其概率密度为

$$\alpha=\min\left(g(a),g(b)\right)$$

$$\beta=\max\left(g(a),g(b)\right)$$

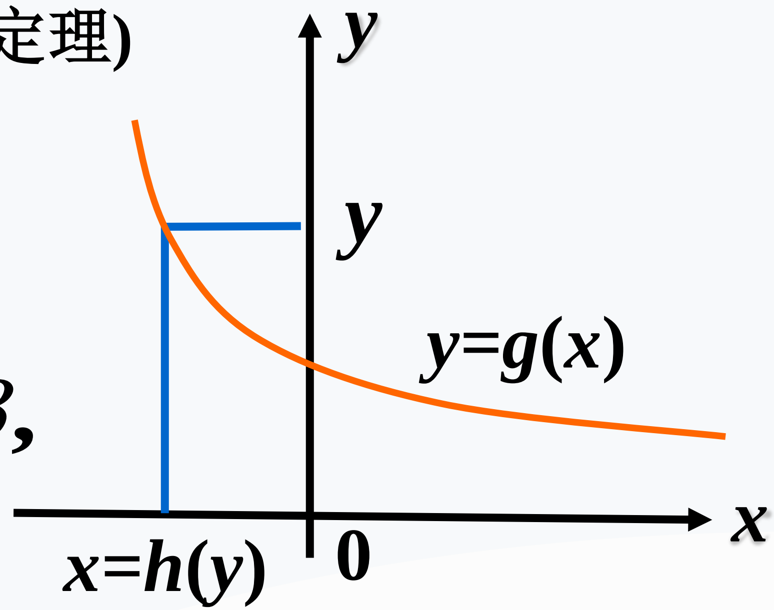
$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[h(y)\right]\cdot\left|h'(y)\right| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

其中$x=h(y)$是$y=g(x)$的反函数.

证：$g'(x)<0 \Rightarrow h'(y)<0$ (反函数存在定理)

$$F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}=P\{X\ge h(y)\}$$

$$=\int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx$$



$\because a<x<b$

$\therefore f_X(x)>0 \Rightarrow \alpha<y=g(x)<\beta,$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=-f_X[h(y)]h'(y)$$

$$=f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|$$

例3.4.6:设随机变量X的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$,

求随机变量$Y=e^X$的概率密度$f_Y(y)$.

解: $Y=g(X)=e^X$严格单调且处处可导

$$\alpha=e^0=1, \beta=e^{+\infty}=+\infty$$

$$\Rightarrow 1<y<+\infty$$

$$x=h(y)=\ln y$$

$$h'(y)=\frac{1}{y}\neq 0$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}e^{-\ln y}=\dfrac{1}{y^2}, & y>1 \\ 0, & y\le 1 \end{cases}$$

$g(x)$处处可导, 且恒有 $g'(x)>0$ (或$g'(x)<0$),

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\cdot|h'(y)| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$a<x<b, f_X(x)>0$$

$$\alpha=\min(g(a),g(b))$$

$$\beta=\max(g(a),g(b))$$

$x=h(y)$是$y=g(x)$的反函数

单调函数公式法的应用：

教材例3.4.7:正态随机变量的线性函数也服从正态分布

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), Y = aX + b (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$$

注意：

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} \exp\left\{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}\right\},$$

$-\infty < y < +\infty.$

$$\text{特别}: a = \frac{1}{\sigma}, b = -\frac{\mu}{\sigma}, Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

例3.4.7:若$X\sim U(-\pi/2, \pi/2)$的均匀分布, $Y=\mathrm{tg}X$, 求随机变量Y的概率密度$f_Y(y)$.

解: $y=tgx$, 则$x=tg^{-1}y$,

$$\alpha=-\infty, \beta=+\infty$$

$$\Rightarrow -\infty < y < +\infty$$

$$x=h(y)=tg^{-1}y$$

$$h'(y)=\frac{1}{1+y^2}\neq 0$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2},\quad -\infty<y<\infty$$

$g(x)$处处可导, 且恒有 $g'(x)>0$ (或$g'(x)<0$),

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\cdot|h'(y)| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$a<x<b, f_X(x)>0$$

$$\alpha=\min(g(a),g(b))$$

$$\beta=\max(g(a),g(b))$$

$x=h(y)$是$y=g(x)$的反函数

注: 柯西分布，这是概率论中有名的分布之一.

2.单调函数公式法

定理: 设随机变量X 具有概率密度$f_X(x)$,当$a<x<b$时, $f_X(x)>0$; $g(x)$处处可导, 且恒有$g'(x)>0$ (或$g'(x)<0$) 则$Y= g(X)$是连续型随机变量,其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[h(y)\right]\cdot\left|h'(y)\right| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

$$\alpha=\min\left(g(a),g(b)\right)\quad \beta=\max\left(g(a),g(b)\right)$$

其中$x=h(y)$是$y=g(x)$的反函数

(2) 若 $g(x)$ 在不相重叠的区间 $I_1, I_2, \cdots$ 上逐段严格单调,其反函数分别为 $h_1(y), h_2(y), \cdots$ 而且 $h'_1(y), h'_2(y), \cdots$ 均为连续函数,那么 $\eta=g(\xi)$ 是连续型随机变量,其密度函数为

$$p[h_1(y)]\,|h'_1(y)|+p[h_2(y)]\,|h'_2(y)|+\cdots \qquad (3.3.14)$$

如果随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且单调增加，而随机变量$X \sim U(0,1)$, 令$Z=F^{-1}(X)$, 那么Z与Y同分布，请说明理由.

4. 理由：因为$X \sim U(0,1)$，所以

$$F_Z(y) = P\{Z \le y\} = P\{F^{-1}(X) \le y\} = P\{X \le F(y)\}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

所以：$= F_X(F(y)) = F(y)$　或者$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & else. \end{cases}$

设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且单调增加，求证: 随机变量$Y=F(X) \sim U(0,1)$.

证明：由于$F(\cdot)\uparrow$，$F^{-1}(\cdot)$存在，$Y=F(X):\Omega \to [0,1]$

当$0<y<1$时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{F(X) \le y\}$

$$= P\{X \le F^{-1}(y)\} = F(F^{-1}(y)) = y$$

均匀分布的特殊地位:若随机变量X的分布函数$F(x)$,因为$F(x)$是非降函数,对任意$0=<y=<1$, 可定义$F^{-1}(y)=\inf\{x:F(x)>y\}$作为$F(x)$的反函数. 下面考虑随机变量$Y=F(X)$的分布, 这里$F(x)$是连续函数.

证明: 由于$F(\cdot)\uparrow$, $F^{-1}(\cdot)$存在, $Y=F(X):\Omega\to[0,1]$

$$\text{当}0\le y\le 1, F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}$$

$$=F_X(F^{-1}(y))=y$$

则随机变量$Y=F(X)\sim U(0,1)$.这个结论在统计中起重要作用.

反之$Y\sim U(0,1)$, 对任意分布函数$W(x)$, 令 $X=W^{-1}(Y)(*)$

$$P\{X\le x\}=P\{W^{-1}(Y)\le x\}=P\{Y\le W(x)\}=W(x)$$

则随机变量X服从分布函数$W(x)$ 的随机变量.

注: 只要我们能产生[0,1]中均匀分布的随机变量的样本(均匀分布随机数), 那么我们也能通过(*)产生分布函数为$W(x)$的随机变量的样本, 这结论在蒙特卡罗方法中具有基本的重要性.

通常的做法是利用数学或物理的方法产生[0,1]中均匀分布随机变量的样本(均匀分布随机数), 再利用(*)得到任意分布$W(x)$的随机数.

2、连续型随机变量的函数是离散型(补充)

例：设X服从区间[-1,9]上的均匀分布，随机变量Y是X的函数

$$Y=\begin{cases}-1, & X<1\\ 1, & X=1\\ 2, & 1<X\le 6\\ 3, & 6<X\le 9\end{cases}$$,求Y的概率分布.

解：Y可能取值为一1，1，2，3

$P(Y=-1)=P(X<1)=0.2$　　$P(Y=1)=P(X=1)=0$

$P(Y=2)=P(1<X<=6)=0.5$　　$P(Y=3)=P(6<X<=9)=0.3$

注：分布律的归一性.

二.连续型随机变量的函数及其概率密度

二元函数:

应用“分布函数法”求$Z = G(X, Y)$的概率密度$f_Z(z)$:

1)先求出 Z 的分布函数$F_Z(z)$;

$$F_Z(z) = P\{G(X,Y) \le z\} = \iint\limits_{\{(x,y):G(x,y)\le z\}} f(x,y)\,d\sigma$$

2)对$F_Z(z)$微分得到$f_Z(z)$.

教材例3.4.6

$$f_Z(z) = \begin{cases} F_Z'(z), & \text{在} f_Z(z)\text{的连续点;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

注意: N(0,1;0,1;0)的密度函数

例3.4.8: 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)} & x,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

若$G\subset R^2$,有

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)d\sigma$$

求随机变量$Z=X+2Y$的分布函数和概率密度.

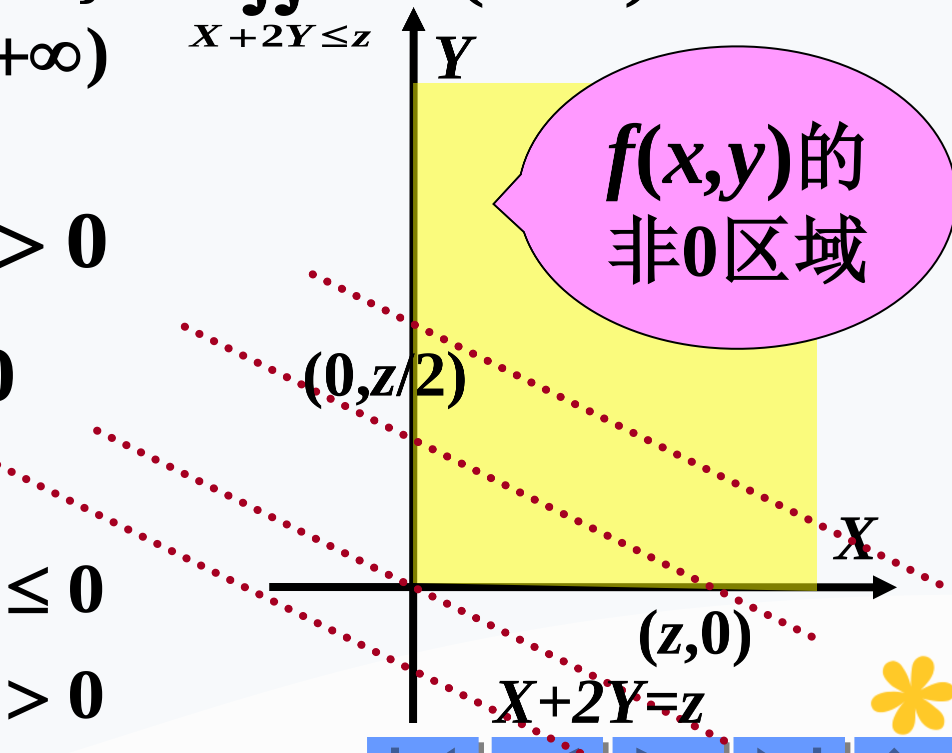
解: $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}=\iint_{X+2Y\le z} f(x,y)d\sigma$

$(-\infty<z<+\infty)$

$$=\begin{cases}0 & z\le 0\\ \int_0^z\left[\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-(x+2y)}dy\right]dx, & z>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & z\le 0\\ 1-e^{-z}-ze^{-z} & z>0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ ze^{-z} & z>0\end{cases}$$



本次课的主要内容是：

1.离散型随机变量函数的分布律;2.连续型随机变量函数的密度函数的计算，**单调函数公式法，正态分布线性变化的性质，3. 二元函数的密度函数。**

下次课内容：

二元函数的密度函数,特殊函数中极值分布，和，商的分布.

三.几种特殊函数的分布(二元函数)

1. 极值分布(Extreme value distribution):

$$M = \max(X, Y), N = \min(X, Y)$$

若 X 与 Y 相互独立有：

$$F_M(z) = F_X(z) F_Y(z)$$

若 X 与 Y 相互独立且具有相同分布有：

$$F_M(z) = [F(z)]^2$$

$f_M(z) = 2F(z)f(z)$ $\quad$ $f_M(z)$在点z连续

思考： $N = \min(X,Y)$

若 X 与 Y 相互独立有：

$$F_N(z) = 1 - P\{X > Z\}P\{Y > Z\}$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

若 X 与 Y 相互独立且具有相同分布有：

$$f_N(z) = 2[1 - F(z)]f(z)$$

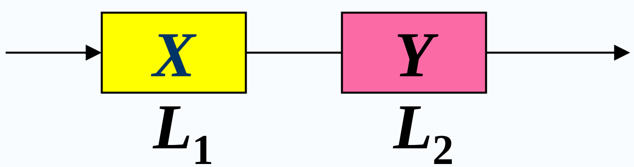
$f_N(z)$在点z连续.

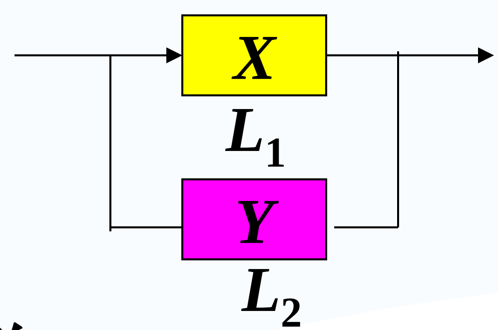
例3.4.9: 设系统L由两个功能相似且相互独立的子系统L_1, L_2连接而成, 连接的方式分别为:1) 串联 2) 并联. 如图所示. 设L_1, L_2的寿命分别为X,Y.它们的概率密度分别为:

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$\alpha,\beta>0\quad \alpha\neq\beta$$

试求出在以上2种连接方式下系统寿命T的概率密度.





教材例3.4.9, 随机系统的串并联.

思考：极值随机变量的联合分布及极差.

$M = max(X, Y)$, $N = min(X, Y)$ (X 与 Y 独立且同分布)

1.(N, M)的联合分布$G(x, y)$

2. 极差分布：$R = M - N$

注：极值分布在统计中常被用到. 在实际应用中, 极值分布与“百年一遇”等概念经常出现在灾害性天气预报中, 例如暴雨, 洪水预报, 以及水库、桥梁等大型工程建筑规范中.