离 散 数 学

电子科技大学 计算机科学与工程(网络空间安全)学院

罗亮 luoliang@uestc.edu.cn

2024年3月5日 星期二

第二篇 数理逻辑

- **数理逻辑（Mathematical Logic）**

——是研究演绎推理的一门学科，用**数学的方法**来研究**推理的规律**统称为数理逻辑。

亚里士多德

著作

1．逻辑学：《范畴篇》、《解释篇》、《前分析篇》、《后分析篇》、《论题篇》、《辩谬篇》，以上六篇逻辑学著作总称《工具论》。

2．形而上学：《形而上学》。

3．自然哲学：《物理学》、《气象学》、《论天》、《论生灭》。

4．论动物：《动物志》、《动物之构造》、《动物之运动》、《动物之行进》、《动物之生殖》、《尼各马克伦理学》、《158城邦制》。

5．论人：《论灵魂》、《论感觉和被感觉的》、《论记忆》、《论睡眠》、《论梦》、《论睡眠中的预兆》、《论生命的长短》、《论青年、老年及死亡》、《论呼吸》、《论气息》。

6．伦理学和政治学：《尼各马可伦理学》、《优台谟伦理学》、《政治学》、《雅典政制》、《大伦理学》、《欧代米亚伦理学》、《论美德和邪恶》《经济学》。

7．美学著作：《修辞学》、《诗学》、《亚历山大修辞学》。[4]

第二篇 数理逻辑

- 主要研究内容：推理

——着重于推理过程是否正确

——着重于语句之间的关系

- 主要研究方法：数学的方法

——就是引进一套符号体系的方法，所以数理逻辑又叫符号逻辑（Symbolic Logic）。

总结

什么是数理逻辑 ？

用数学的方法来研究推理的规律统称为数理逻辑。

为什么要研究数理逻辑?

程序＝算法＋数据

算法＝逻辑＋控制

第二篇　数理逻辑

主要研究内容

命题逻辑

命题的基本概念

命题联结词

命题公式

命题的范式

谓词逻辑

谓词的基本概念

谓词公式

公式的标准型

推理与证明技术

命题逻辑推理理论

谓词逻辑推理理论

数学归纳法

按定义证明法

第三章 命题逻辑

命题逻辑也称命题演算，或语句逻辑。

研究内容：以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系。

（1）研究什么是命题？

（2）研究如何表示命题？

（3）研究如何由一组前提推导一些结论？

第三章 命题逻辑

命题逻辑的特征：

在研究逻辑的形式时，我们把一个命题只分析到其中所含的命题成份为止，不再分析下去。不把一个简单命题再分析为非命题的集合，不把谓词和量词等非命题成份分析出来。

第三章 命题逻辑

1 命题基本概念

2 命题联结词

3 命题公式

4 命题范式

3.1 本章学习要求

重点掌握

1

1、五种基本联结词
2、24个基本的等价公式
3 掌握求命题范式的方法

一般掌握

2

公式的代入规则和替换规则

了解

3

联结词完备集的理解和学习

3.2 命题与命题联结词

3.2.1 命题

定义3.2.1　具有确切真值的陈述句称为命题，该命题可以取一个“值”，称为真值。

真值只有“真”和“假”两种，

分别用“T”（或“1”）和“F”（或“0”）表示。

例3.2.1

（1）太阳是圆的； T

（2）成都是一个旅游城市； T

（3）北京是中国的首都； T

（4）这个语句是假的； 非命题

（5）1＋1＝10； T/F

（6） $x + y > 0$； 非命题

（7）我喜欢踢足球； T/F

（8）3能被2整除； F

（9）地球外的星球上也有人； T/F

（10）中国是世界上人口最多的国家； T

（11）今天是晴天； T

例3.2.1（续）

（12）把门关上； 非命题

（13）出去！ 非命题

（14）你要出去吗？ 非命题

（15）今天天气真好啊！ 非命题

注意：

一切没有判断内容的句子都不能作为命题，如命令句、感叹句、疑问句、祈使句、二义性的陈述句等。

约定：

在数理逻辑中像字母“x”、“y”、“z”等字母总是表示变量。

结论：

- 命题一定是陈述句，但并非一切陈述句都是命题。
- 命题的真值有时可明确给出，有时还需要依靠环境、条件、实际情况时间才能确定其真值。

例3.2.2

下列语句是否是命题？并判断其真值结果？

（1）四川不是沿海省份；

（2）3既是素数又是奇数；

（3）张谦是大学生或是运动员；

（4）如果周末天气晴朗，则我们将到郊外旅游；

（5）2+2=4当且仅当雪是白的。

命题的分类

一般来说，命题可分两种类型：

1） 原子命题(简单命题)：不能再分解为更为简单命题的命题。

2） 复合命题：可以分解为更为简单命题的命题。而且这些简单命题之间是通过如“或者”、“并且”、“不”、“如果...则...”、“当且仅当”等这样的关联词和标点符号复合而构成一个复合命题。

例3.2.3

1） 今天天气很冷。

2） 今天天气很冷并且刮风。

3） 今天天气很冷并且刮风，但室内暖和。

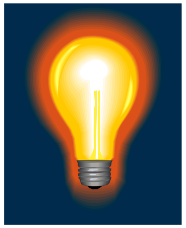
通常用大写的带或不带下标的英文字母A、B、C、...P、Q、R、... A_i、B_i 、C_i、...P_i、Q_i、R_i、...等表示命题

3.2.2 命题联结词

设命题P,Q表示任意两个命题,则最常见的命题联结词有:

联接词	记号	复合命题	读法	记法	真值结果
1. 否定	$\neg$	非P	P的否定	$\neg P$	$\neg P=1 \Leftrightarrow P=0$
2. 合取	$\wedge$	P并且Q	P与Q的合取	$P\wedge Q$	$P\wedge Q=1 \Leftrightarrow P=1$ 且 $Q=1$
3. 析取	$\vee$	P或者Q	P与Q的析取	$P\vee Q$	$P\vee Q=1 \Leftrightarrow P=1$ 或 $Q=1$
4. 蕴涵	$\rightarrow$	若P,则Q	P蕴涵Q	$P\rightarrow Q$	$P\rightarrow Q=0 \Leftrightarrow P=1, Q=0$
5. 等价	$\boxed{\leftrightarrow}$	P当且仅当Q	P等价于Q	$P\boxed{\leftrightarrow}Q$	$P\leftrightarrow Q=1 \Leftrightarrow P=1, Q=1$ 或 $P=0, Q=0$

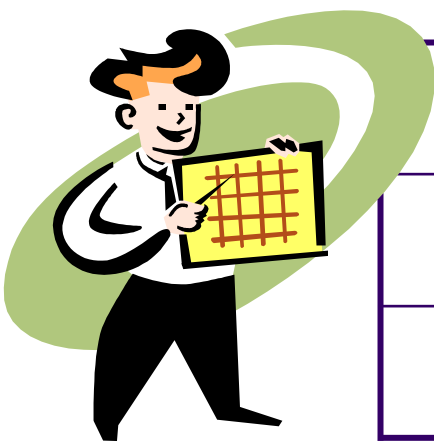
否定联结词



联结词“┐”是自然语言中的“**非**”、“**不**”和“**没有**”等的逻辑抽象；

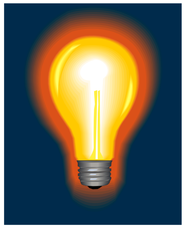
例： P： 2是素数

┐P： 2不是素数



P	┐P
0	1
1	0

析取联结词



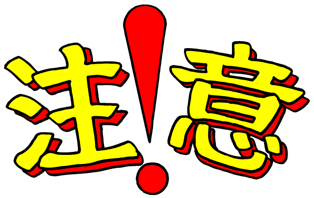
联结词"∨"是自然语言中的"**或**"、"**或者**"等逻辑抽象；

例： P:王红学过英语；

Q：王红学过法语；

则P∨Q:王红学过英语或法语；

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



- **析取联结词表示的“或”有“可兼或”、“不可兼或”两种。**

例如：

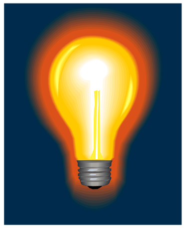
张晓强生于2000年或2001年。

若P：张晓强生于2000年

Q：张晓强生于2001年

P与Q不能同时为真，即为“不可兼或”。

合取联结词



“∧”是自然语言中的“并且”、“既…又…”、“但”、“和”、“与”、“不仅…而且…”、“虽然…但是…”、“一面…,一面…”等的逻辑抽象;

例：P:3是素数;

Q：3是奇数；

则P∧Q：3既是素数又是奇数;

P	Q	P ∧ Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 不是所有的“和”，“与”都要使用合取联结词表示。

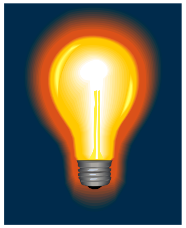
例如：

1）2和3的最小公倍数是6。

2）点a位于点b与点c之间

这两个命题都是简单命题，不能再进行划分。

蕴涵联结词



"→"是自然语言中的"如果…，则…"，"若…，才能…"、"除非…，否则…"、"只要…，就…"、"…仅当…"、"只有…才…"等的逻辑抽象；

例：P：角A和角B是对顶角；（前件）

Q：角A等于角B；（后件）

则P → Q:如果角A和角B是对顶角，则角A等于角B;

P	Q	P → Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

注!意

- 在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断。但对于数理逻辑中的蕴涵联结词来说，当前件P为假时，不管Q的真假如何，则P→Q都为真。此时称为“善意推定”；

注!意

- 在自然语言中，条件式中前提和结论间必含有某种因果关系，但在数理逻辑中可以允许两者无必然因果关系，也就是说并不要求前件和后件有什么联系；

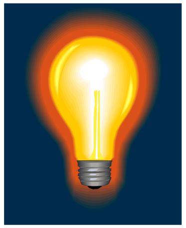
例如：

如果2是偶数，则天上就可以掉馅饼。

两个简单命题无任何关系，但此命题合法。

- 下面几个命题是等价的。
- 1）如果约翰学习微积分，则他是大学一年级学生。
- 2）约翰学习微积分仅当他是大学一年级学生。
- 3）只有约翰是大学一年级学生，他才能学习微积分。
- 4）除非约翰是大学一年级学生，否则他不学习微积分。

等价联结词



"↔"是自然语言中的"等价"、"充分必要条件"、"当且仅当"等的逻辑抽象；（双条件联结词）

例：P:成都是四川的省会；Q：鸟会飞；

则$P \leftrightarrow Q$:成都是四川的省会当且仅当鸟会飞。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

总结

P Q	┐P	P∧Q	P∨Q	P→Q	P$\boxed{\leftrightarrow}$Q
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

说明

1、联结词是句子与句子之间的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等地联结；

2、联结词是两个句子真值之间的联结，而非句子的具体含义的联结，两个句子之间可以无任何地内在联系；

说明

3、联结词与自然语言之间的对应并非一一对应；

联结词	自然语言
$\wedge$	既…又…、不仅…而且…、虽然…但是…、并且、和、与，等等；
$\rightarrow$	如P则Q、只要P就Q、P仅当Q、只有Q才P、除非Q否则$\neg$P，等等
$\leftrightarrow$	等价、当且仅当、充分必要、等等；
$\vee$	相容（可兼）的或

例3.2.4

符号化下列命题

（1）四川不是全国人口最多的省份；

（2）王超是一个德智体全面发展的好学生；

（3）教室的灯不亮可能是灯管坏了或者是停电了；

（4）如果周末天气晴朗，那么我们将去春游；

（5）两个三角形全等当且仅当三角形的三条边全部相等。

例3.2.4 解

（1）设P：四川是全国人口最多的省份。

则命题（1）可表示为$\neg P$。

（2）设P：王超是一个思想品德好的学生；

Q：王超是一个学习成绩好的学生；

R：王超是一个体育成绩好的学生。

则命题（2）可表示为$P \wedge Q \wedge R$。

（3）设P：教室的灯不亮可能是灯管坏了

Q：教室的灯不亮可能是停电了

则命题（3）可表示为$P \vee Q$。

例3.2.4 解(续)

（4）设P：周末天气晴朗；

Q：我们将去春游。

则命题（4）可表示为$P \rightarrow Q$。

（5）设P：两个三角形全等；

Q：三角形的三条边全部相等。

则命题（5）可表示为$P \leftrightarrow Q$。

约 定

为了不使句子产生混淆，作如下约定，**命题联结词之优先级**如下：

1. 否定→合取→析取→蕴涵→等价
2. 同级的联结词，按其出现的先后次序(从左到右)
3. 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。括号中的运算为最优先级。

例3.2.5

设命题 P：明天上午七点下雨；

Q：明天上午七点下雪；

可符号化为：

$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee$

$(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$。

可符号化为：$(P\vee Q)\rightarrow\neg R$。

可符号化为：$(\neg P\wedge\neg Q)\rightarrow R$。

例3.2.6

设命题P：你陪伴我；

Q：你代我叫车子；

R：我将出去。

符号化下述语句：

(1). 除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去

(2). 如果你陪伴我并且代我叫辆车子，则我将出去

(3). 如果你不陪伴我或不代我叫辆车子，我将不出去

$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$

例

设P:雪是白色的;Q:2+2=4。将下列命题符号化:

（1）因为雪是白色的，所以2+2=4；　$P \rightarrow Q$

（2）如果2+2=4，则雪是白色的；　$Q \rightarrow P$

（3）只有雪是白色的，才有2+2=4；　$Q \rightarrow P$

（4）只有2+2=4，雪才是白色的；　$P \rightarrow Q$

（5）只要雪不是白色的，就有2+2=4；　$\neg P \rightarrow Q$

（6）除非雪是白色的，否则2+2≠4；

$\neg P \rightarrow \neg Q$ 或 $Q \rightarrow P$

（7）雪是白色的当且仅当2+2=4；　$P \leftrightarrow Q$

3.2.4 命题联结词的应用

例 3.2.7 用复合命题表示如下图所示的开关电路：

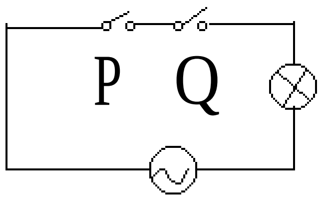


图3.2.1

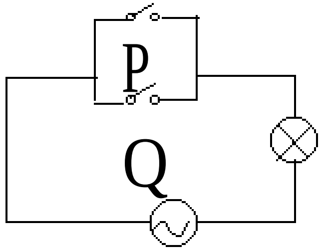


图3.2.2

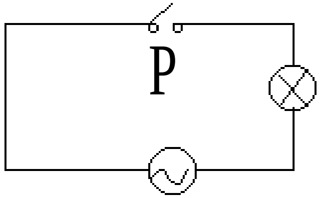


图3.2.3

设：　A：开关Ｐ闭合；B：开关Ｑ闭合。

$A \wedge B$　　　　$A \vee B$　　　　A

例 3.2.8

用复合命题表示如下图所示的逻辑电路：

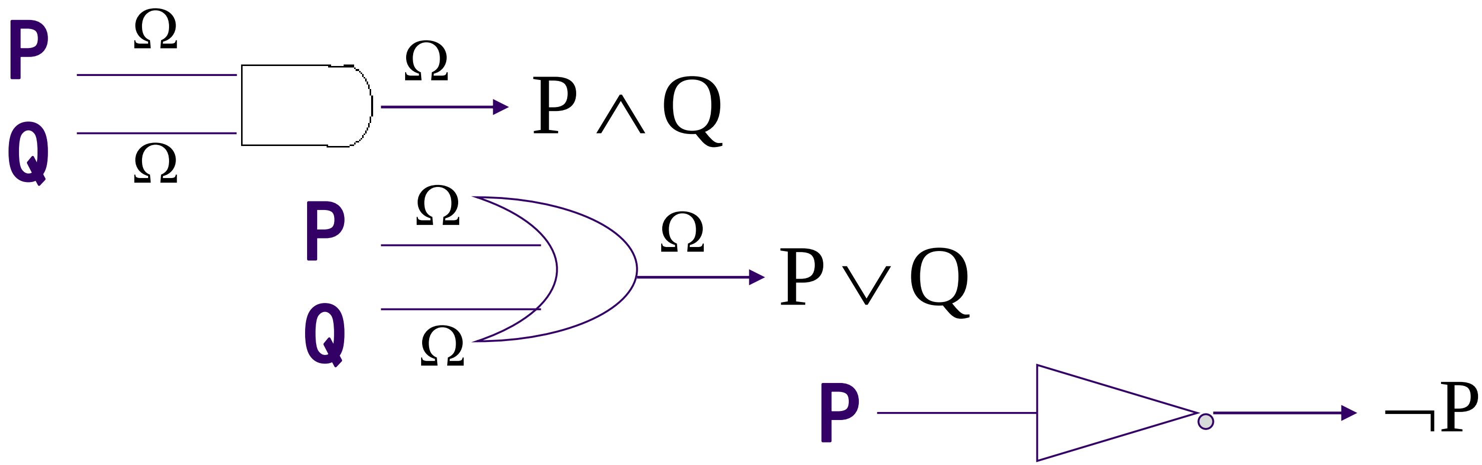


图3.2.4 图3.2.5 图3.2.6

解：设P：输入端P为高电位，Q：输入端Q为高电位，则

“与门”对应于P∧Q；

“或门”对应于P∨Q；

“非门”对应于P。

3.3 命题公式、解释与真值表

定义3.3.1 一个特定的命题是一个**常值命题**，它不是具有值“T”（“1”），就是具有值“F”（“0”）。

而一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题，常称它为**命题变量**(或**命题变元**)，该命题变量无具体的真值，它 … F}(或{0，1})

真值函数

注意

(1)复合命题为命题变元的“**函数**”，其函数值仍为"真"或“假”值。

(2)真值函数或命题公式，没有确切真值。

3.3.1命题公式

定义3.3.2（命题公式）

1. 命题变元本身是一个公式；
2. 如G是公式，则(¬ G)也是公式；
3. 如G，H是公式，则(G∧H)、(G∨H)、(G→H)、(G↔H)也是公式；
4. 仅由有限步使用规则1-3后产生的结果。该公式常用符号G、H、…等表示。

例3.3.1

符号串：$((P\wedge(Q\vee R))\rightarrow(Q\wedge(\neg S\vee R)))$；

$(\neg P\wedge Q)$；　$(P\rightarrow(\neg(P\wedge Q)))$；

$(((P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q))\leftrightarrow(P\rightarrow R))$。

等都是命题公式。

例3.3.2符号串：

$(P\rightarrow Q)\wedge\neg Q)$；　$(P\rightarrow Q$；

$(\neg P\vee Q\vee(R$；　$P\vee Q\vee$。

等都不是合法的命题公式。

例3.3.3

试用符号形式写出下列命题：

（1）虽然今天天气晴朗，老陈还是不来；

（2）除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去；

（3）停机的原因在于语法错误或者程序错误；

（4）若a和b是偶数，则a+b是偶数；

（5）我们要做到身体好、学习好、工作好，为建设祖国而奋斗。

例3.3.3 解

（1）P：今天天气晴朗,Q：老陈要来,则有：$P \wedge Q$;

（2）P：你陪伴我； Q：你代我叫车子；R：我出去。则有：$R \rightarrow P \vee Q$或$P \wedge Q \rightarrow R$;

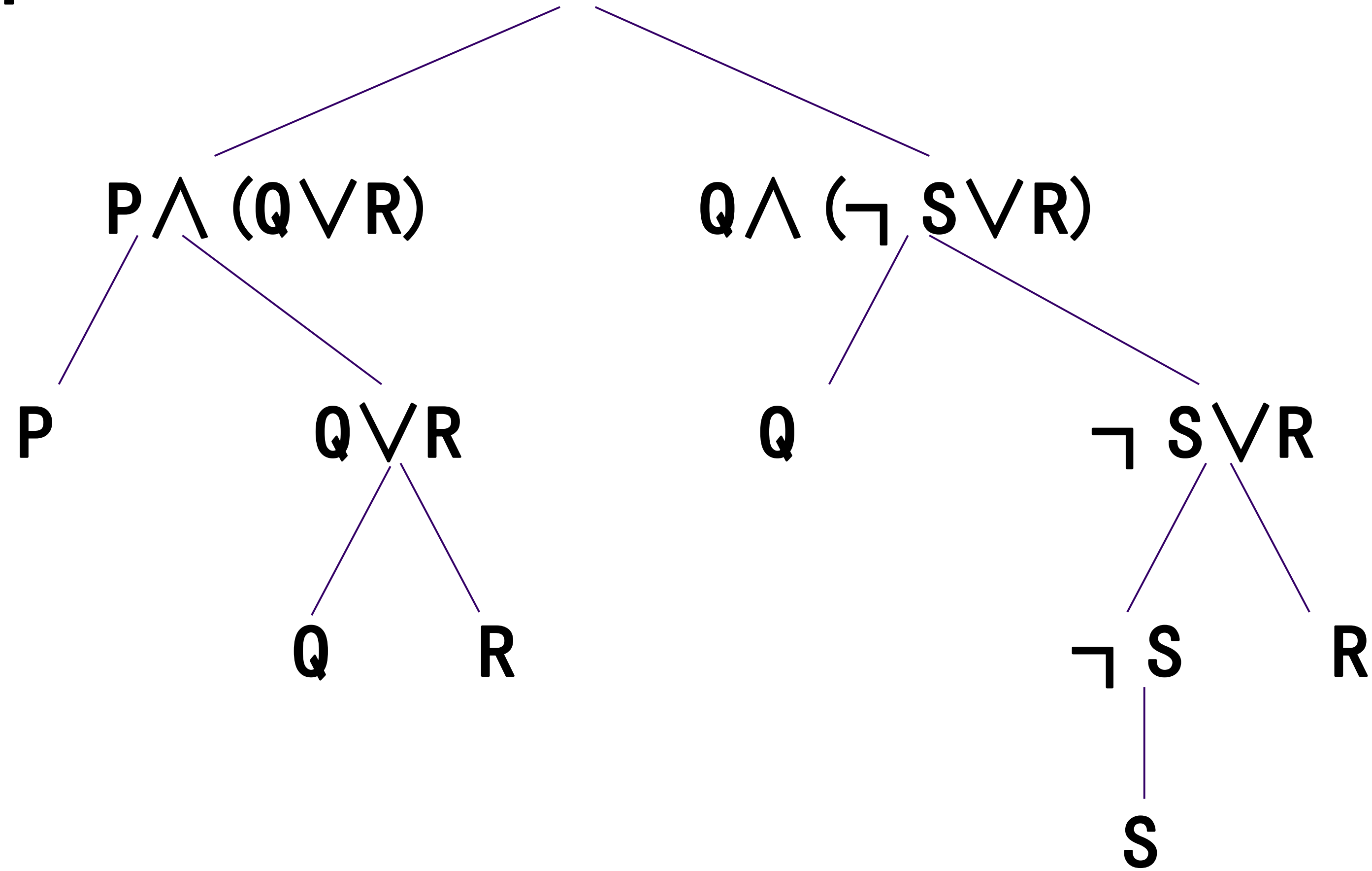
（3）P：停机的原因在于语法错误，Q：停机的原因在于程序错误，则有：$P \wedge Q$;

（4）P：a是偶数；Q：b是偶数，R：a+b是偶数，则有：$P \wedge Q \rightarrow R$;

（5）P：我们要做到身体好,Q：我们要做到学习好， R：我们要做到工作好，S：我们要为建设祖国而奋斗，则有：$P \wedge Q \wedge R \leftrightarrow S$。

例3.3.4

公式$(P\wedge(Q\vee R))\rightarrow(Q\wedge(\neg S\vee R))$可表示如下：$(P\wedge(Q\vee R))\rightarrow(Q\wedge(\neg S\vee R))$



3.3.2 公式的解释与真值表

定义3.3.3 设P_1、P_2、…、P_n是出现在公式G中的所有命题变元，指定P_1、P_2、…、P_n一组真值，则这组真值称为G的一个**解释**，常记为 I 。

一般来说，若有 n 个命题变元，则应有2^n个不同的解释。

如果公式G在解释 I 下是真的，则称 I **满足**G；如果G在解释 I 下是假的，则称 I **弄假**G。

定义3.3.4 将公式G在其所有可能解释下的真值情况列成的表，称为G的**真值表**。

例3.3.5

求下面公式的真值表：

$$G=(P\rightarrow((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R))\vee Q$$

其中，P、Q、R是G的所有命题变元。

P Q R	$\neg P$	$\neg P\leftrightarrow Q$	$((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R$	$P\rightarrow((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R)$	G
0 0 0	1	0	0	1	1
0 0 1	1	0	0	1	1
0 1 0	1	1	0	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	0	0	0	1
1 1 1	0	0	0	0	1

例3.3.5（续）

进一步化简为：

P Q R	$(P\rightarrow((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R))\vee Q$
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

例3.3.6

求下面这组公式的真值表：

$$G_1 = \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P;$$

$$G_2 = (P \rightarrow Q) \wedge P;$$

$$G_3 = \neg(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)。$$

P Q	$\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow P$	$(P\rightarrow Q)\wedge P$	$\neg(P\wedge\neg Q)\leftrightarrow\neg(P\rightarrow Q)$
0 0	1	0	0
0 1	1	0	0
1 0	1	0	0
1 1	1	1	0

结论

从这三个真值表可以看到一个非常有趣的事实：

- 公式G_1对所有可能的解释具有“真”值
- 公式G_3对所有可能的解释均具有“假”值
- 公式G_2则具有“真”和“假”值

定义3.3.5

1. 公式G称为**永真公式**(**重言式**)，如果在它的所有解释之下都为“真”。
2. 公式G称为**永假公式**(**矛盾式**),如果在它的所有解释之下都为“假”。
3. 公式G称为**可满足的**，如果它不是永假的。

结论

从上述定义可知三种特殊公式之间的关系：

1） 永真式G的否定¬G是矛盾式；矛盾式G的否定¬G是永真式。

2） 永真式一定是可满足式，可满足式不一定是永真式

3） 可满足式的否定不一定为不可满足式(即为矛盾式)

例3.3.7

写出下列公式的真值表，并验证其公式是重言式、矛盾式、可满足公式。

（1）$G_1=(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$；

（2）$G_2=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(\neg(P\rightarrow Q)\vee\neg(Q\rightarrow P))$；

（3）$G_3=(P\rightarrow\neg Q)\vee\neg Q$。

例3.3.7 解

三个公式的真值表如下：

P Q	$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$	$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg(P\rightarrow Q)\vee\neg(Q\rightarrow P)$	$(P\rightarrow\neg Q)\vee\neg Q$
0 0	1	0	1
0 1	1	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	0	0

永真公式

永假公式

可满足公式

分析公式（1）

若将其看成两个公式，分别令：

$G = P \rightarrow Q$，　　$H = \neg P \vee Q$。

则 $G \leftrightarrow H$ 是一个永真公式，即这两个公式对任何解释都必同为真假，此时，说 G 和 H 相等，记为 $G = H$。为此可定义：

定义3.3.6 设G、H是公式，如果在任意解释 I 下，G与H的真值相同，则称公式G、H是**等价的**，记作 $G = H$。

定理3.3.1

公式G、H等价的充分必要条件是公式$G \leftrightarrow H$是永真公式

证明：“$\Rightarrow$”假定G，H等价，则G，H在其任意解释I下或同为真或同为假，于是由“$\leftrightarrow$”的意义知，$G \leftrightarrow H$在其任何的解释I下，其真值为“真”，即$G \leftrightarrow H$为永真公式。

“$\Leftarrow$”假定公式$G \leftrightarrow H$是永真公式，I是它的任意解释，在I下，$G \leftrightarrow H$为真，因此，G、H或同为真，或同为假，由于I的任意性，故有$G = H$。

“＝”与“↔”的区别

首先，双条件词“↔”是一种逻辑联结词，公式G↔H是命题公式，其中“↔”是一种逻辑运算，G↔H的结果仍是一个命题公式。而逻辑等价“＝”则是描述了两个公式G与H之间的一种逻辑等价关系，G＝H表示“命题公式G等价于命题公式H”，G＝H 的结果不是命题公式。

其次，如果要求用计算机来判断命题公式G、H是否逻辑等价，即G＝H那是办不到的，然而计算机却可“计算”公式G↔H是否是永真公式。

“=”的性质

由于“=”不是一个联结词，而是一种关系，为此，这种关系具有如下三个性质：

（1）自反性　G=G；

（2）对称性　若G=H，则H=G；

（3）传递性　若G=H，H=S，则G=S。

这三条性质体现了“=”的实质含义。

3.3.4 命题公式的基本等价关系

例3.3.8 证明公式G_1＝(P↔Q)与公式G_2＝(P→Q)∧(Q→P)之间是逻辑等价的。

解： 根据定理3.3.1，只需判定公式G_3＝(P↔Q)↔((P→Q)∧(Q→P))为永真公式。

P Q	G_3＝(P↔Q)↔((P→Q)∧(Q→P))
0 0	1 1 1 1 1
0 1	0 1 1 0 0
1 0	0 1 0 0 1
1 1	1 1 1 1 1

基本等价公式

设G，H，S是任何的公式，则：

1） E_1：$G \vee G = G$ （幂等律）

E_2：$G \wedge G = G$

2） E_3：$G \vee H = H \vee G$ （交换律）

E_4：$G \wedge H = H \wedge G$

3） E_5：$G \vee (H \vee S) = (G \vee H) \vee S$ （结合律）

E_6：$G \wedge (H \wedge S) = (G \wedge H) \wedge S$

4） E_7：$G \vee (G \wedge H) = G$ （吸收律）

E_8：$G \wedge (G \vee H) = G$

基本等价公式（续）

5） E_9：$G\vee(H\wedge S)=(G\vee H)\wedge(G\vee S)$ （分配律）

E_{10}：$G\wedge(H\vee S)=(G\wedge H)\vee(G\wedge S)$

6） E_{11}：$G\vee 0=G$ （同一律）

E_{12}：$G\wedge 1=G$

7） E_{13}：$G\vee 1=1$ （零律）

E_{14}：$G\wedge 0=0$

8） E_{15}：$G\vee\neg G=1$ （排中律）

9） E_{16}：$G\wedge\neg G=0$ （矛盾律）

基本等价公式（续）

10） E_{17}：$\neg(\neg G)=G$ （双重否定律）

11） E_{18}：$\neg(G\vee H)=\neg G\wedge\neg H$ （De MoRGan定律）

E_{19}：$\neg(G\wedge H)=\neg G\vee\neg H$。

12） E_{20}：$(G\leftrightarrow H)=(G\rightarrow H)\wedge(H\rightarrow G)$ （等价）

13） E_{21}：$(G\rightarrow H)=(\neg G\vee H)$ （蕴涵）

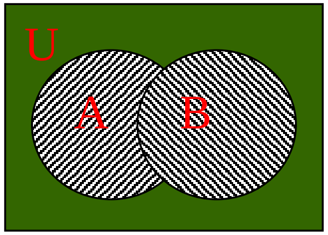
14） E_{22}：$G\rightarrow H=\neg H\rightarrow\neg G$。 （假言易位）

15） E_{23}：$G\leftrightarrow H=\neg G\leftrightarrow\neg H$。 （等价否定等式）

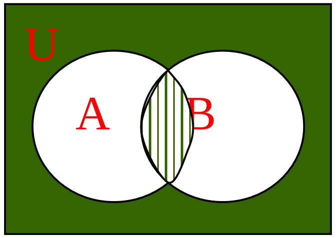
16） E_{24}：$(G\rightarrow H)\wedge(G\rightarrow\neg H)=\neg G$ （归谬论）

命题与集合之间的关系

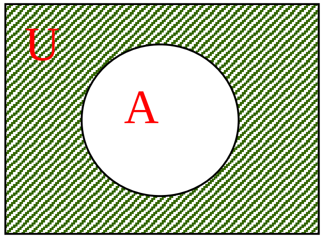
这种图是将G，H理解为某总体论域上的子集合，而规定G∧H为两集合的公共部分（交集合），G∨H为两集合的全部（并集合），┐G为总体论域（如矩形域）中G的补集，将命题中的真值“1”理解为集合中的总体论域（全集），将命题中的真值“0”理解为集合中的空集，则有：



G∨H



G∧H



┐G

"∪"对"∨"与"∩"对"∧"的对比

等幂律	$A\cup A=A$；$A\cap A=A$	$G\vee G=G$　$G\wedge G=G$
交换律	$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$	$G\vee H=H\vee G$ $G\wedge H=H\wedge G$
结合律	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	$G\vee(H\vee S)=(G\vee H)\vee S$ $G\wedge(H\wedge S)=(G\wedge H)\wedge S$
恒等律	$A\cup\Phi=A$；$A\cap U=A$；	$G\vee 0=G$　$G\wedge 1=G$
零　律	$A\cup U=U$；$A\cap\Phi=\Phi$	$G\vee 1=1$　$G\wedge 0=0$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$　$A\cup(A\cap B)=A$	$G\vee(G\wedge H)=G$　$G\wedge(G\vee H)=G$
否定律	$\overline{\overline{A}}=A$	$\neg(\neg G)=G$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$G\vee(H\wedge S)=(G\vee H)\wedge(G\vee S)$ $G\wedge(H\vee S)=(G\wedge H)\vee(G\wedge S)$

定理3.3.2(代入定理)

设$G(P_1, P_2, \cdots, P_n)$是一个命题公式，其中：P_1、P_2、…、P_n是命题变元，$G_1(P_1, P_2, \cdots, P_n)$、$G_2(P_1, P_2, \cdots, P_n)$、...、$G_n(P_1, P_2, \cdots, P_n)$为任意的命题公式，分别用$G_1$、$G_2$…、$G_n$取代G中的$P_1$、$P_2$、…、$P_n$后得到新的命题公式：

$$G(G_1, G_2, \cdots, G_n) = G'(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

若G是永真公式（或永假公式），则G′也是一个永真公式（或永假公式）。

例3.3.9

设G（P， Q）＝（P∧（P→Q））→Q，证明公式G是一个永真公式。另有两个任意公式：

H（P， Q）＝（P∨¬Q）；

S（P， Q）＝（P↔Q）。

进一步验证代入定理的正确性。

解 建立公式G的真值表如右所示。可见为永真公式。

P Q	$(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	1

例3.3.9（续）

将H，S代入到G中分别取代G中的命题变元P、Q，所得到的公式G'为：

$$G'(P, Q) = G(H, S) = (H\wedge(H\rightarrow S))\rightarrow S$$

$$= ((P\vee\neg Q)\wedge((P\vee\neg Q)\rightarrow(P\leftrightarrow Q)))\rightarrow(P\leftrightarrow Q)$$

建立新公式G'(P, Q)的真值表。

P	Q	$((P\vee\neg Q)\wedge((P\vee\neg Q)\rightarrow(P\leftrightarrow Q)))\rightarrow(P\leftrightarrow Q)$
0	0	1 1 1 1 1 1 1 **1** 0
0	1	0 0 0 0 0 1 0 **1** 0
1	0	1 1 0 1 1 0 0 **1** 0
1	1	1 0 1 1 0 1 1 **1** 1

定理3.3.3(替换定理)

设G_1是G的子公式(即 G_1是公式G的一部分)，H_1是任意的命题公式，在G中凡出现G_1处都以H_1替换后得到新的命题公式H，若$G_1 = H_1$，则$G = H$。

利用24个基本等价公式及代入定理和替换定理，可完成公式的转化和等价判定。

例3.3.10

利用基本的等价关系，完成如下工作：

（1）判断公式的类型：

证明 $((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$是一个永真公式。

（2）证明公式之间的等价关系：

证明$P\to(Q\to R)=(P\wedge Q)\to R$

（3）化简公式：

证明$(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))=R$

例3.3.10 证明

(1) $((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee(Q\wedge R)))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$=((P\vee Q)\wedge((P\vee Q)\wedge(P\vee R)))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))=T$

即: $((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$

为永真公式;

例3.3.10 证明（续）

（2） $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=\neg P\vee(Q\rightarrow R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)$

$=(\neg P\vee\neg Q)\vee R=\neg(P\wedge Q)\vee R=(P\wedge Q)\rightarrow R$

即有： $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$；

（3） $(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))$

$=((\neg P\wedge\neg Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$

$=(\neg(P\vee Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$

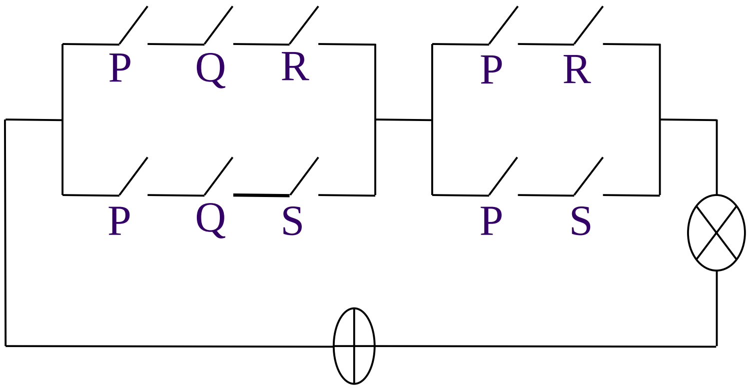
$=(\neg(P\vee Q)\vee(Q\vee P))\wedge R$

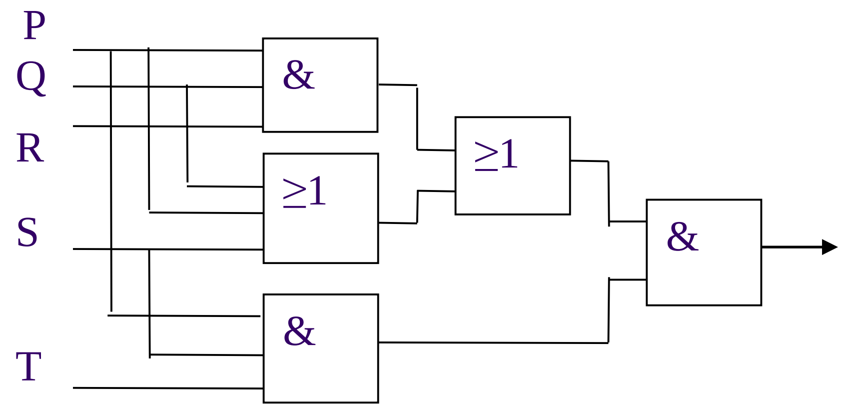
$=T\wedge R=R$

即有： $(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))=R$。

3.3.6 命题公式的应用

例3.3.11 利用基本的等价关系，化简下列电路图





解：上述电路图可描述为：

（1）$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge S))\wedge((P\wedge R)\vee(P\wedge S))$

（2）$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\vee Q\vee S))\wedge(P\wedge S\wedge T)$

例3.3.11（续）

利用24个基本等价关系，化简公式(1)、(2)可得：

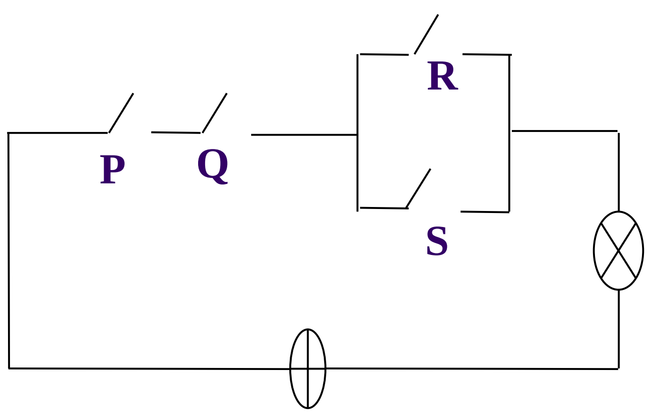
(1) $((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge S))\wedge((P\wedge R)\vee(P\wedge S))$

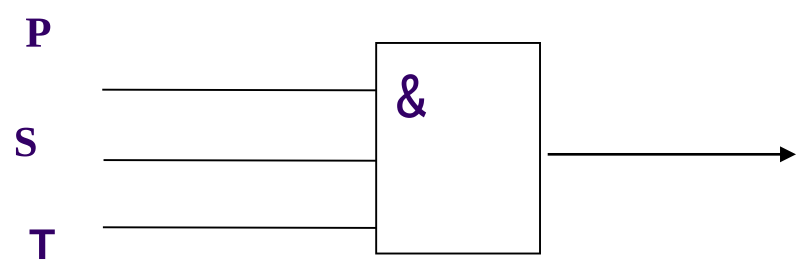
$= ((P\wedge Q\wedge(R\vee S))\wedge(P\wedge(R\vee S))$ (分配律)

$= P\wedge Q\wedge(R\vee S)$； (吸收律)

(2) $((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\vee Q\vee S))\wedge(P\wedge S\wedge T)$

$= (P\vee Q\vee S)\wedge(P\wedge S\wedge T) = P\wedge S\wedge T$ 。

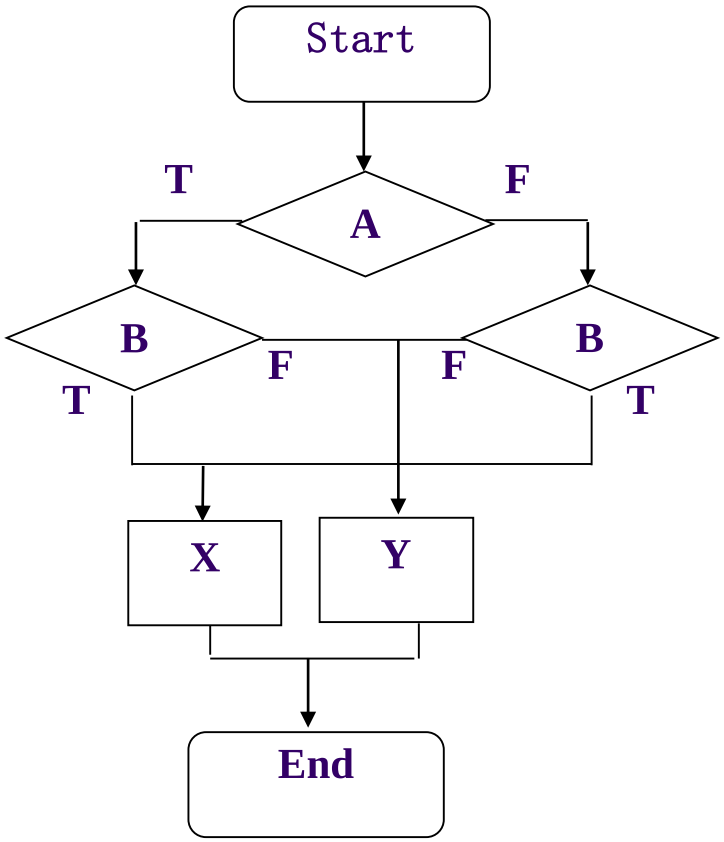




例3.3.12

将下面程序语言进行化简。

If A then if B then X else Y else if B then X else Y



解：执行X的条件为：

$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$

执行Y的条件为：

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

例3.3.12(续)

执行X的条件可化简为：

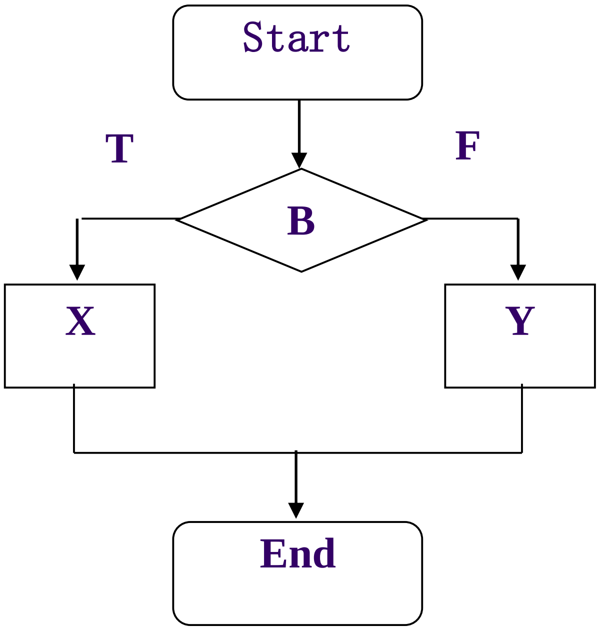
$(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge B)$

$=B\wedge(A\vee\neg A)=B$

执行Y的条件可化简为：

$(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$

$=\neg B\wedge(A\vee\neg A)=\neg B$



程序可简化为：If B then X else Y

例3.3.14

一家航空公司，为了保证安全，用计算机复核飞行计划。每台计算机能给出飞行计划正确或有误的回答。由于计算机也有可能发生故障，因此采用三台计算机同时复核。由所给答案，再根据“少数服从多数”的原则作出判断，试将结果用命题公式表示，并加以简化，画出电路图。

例3.3.14 解

设C_1，C_2，C_3分别表示三台计算机的答案。

S表示判断结果。

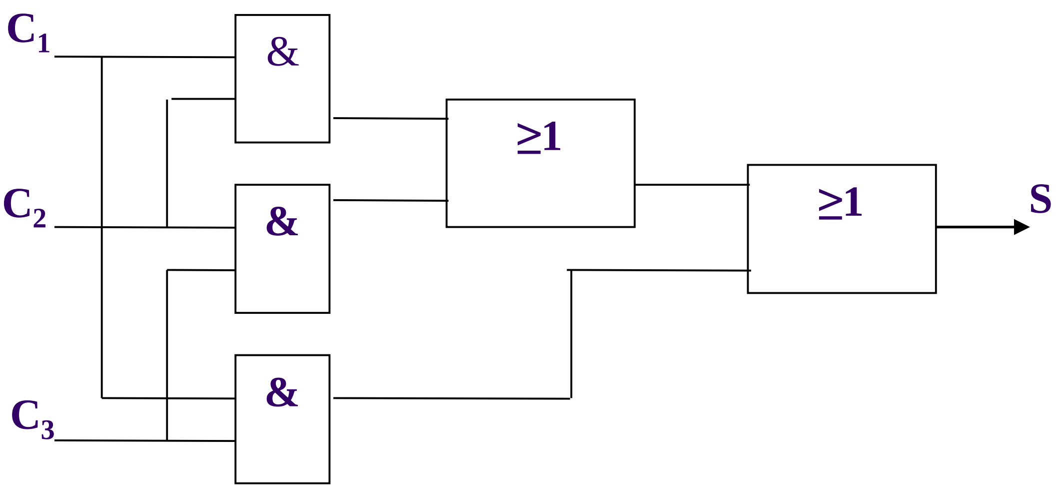
则根据真值表，利用联结词的定义，S可用C_1，C_2，C_3所对应的命题公式表示出来，同时可画出该命题公式所对应的电路图。

真值表

C_1 C_2 C_3	S
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

例3.3.14 解（续）

$$S=(\neg C_1\wedge C_2\wedge C_3)\vee(C_1\wedge\neg C_2\wedge C_3)$$
$$\vee(C_1\wedge C_2\wedge\neg C_3)\vee(C_1\wedge C_2\wedge C_3)$$
$$=((C_1\vee\neg C_1)\wedge C_2\wedge C_3)\vee(C_1\wedge(C_2\vee\neg C_2)$$
$$\wedge C_3)\vee(C_1\wedge C_2\wedge(C_3\vee\neg C_3))$$
$$=(C_2\wedge C_3)\vee(C_1\wedge C_3)\vee(C_1\wedge C_2)$$



3.5 公式的标准型——范式

3.5.1 析取范式和合取范式

定义3.5.1

（1）命题变元或命题变元的否定称为**文字**

（2）有限个文字的析取（∨）称为**析取式**(也称为**子句**）

（3）有限个文字的合取（∧）称为**合取式**(也称为**短语**）

（4）P与¬ P称为**互补对**。

例子

（1） P、¬P是文字；

（2） P∨Q∨R是子句；

（3） P∧Q∧R是短语。

¬ P是一个子句，这种说法正确么？

一个命题变元或者其否定既可以是简单的子句，也可以是简单的短语。

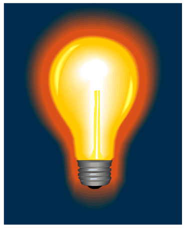
因此， P，¬P不但是文字，也是子句、短语

定义3.5.2

（1）有限个短语(合取式)的析取式（∨）称为析取范式，$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\vee Q\vee S))\wedge(P\wedge S\wedge T)$

（2）有限个子句（析取式）的合取式（∧）称为合取范式，

$((P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee S))\wedge(P\vee S\vee T)$



一个不含最外层括号的短语（子句）也可以是析取范式（合取范式）。

提示：

$P\vee Q\vee R$ 是子句；

$P\wedge Q\wedge R$ 是短语。

例子

（1）P、$\neg P$是析取范式、合取范式；

（2）$P \lor Q \lor \neg R$是子句、析取范式、合取范式，

$(P \lor Q \lor \neg R)$仅是子句、合取范式；

（3）$\neg P \land Q \land R$是短语、析取范式、合取范式，

$(P \land Q \land R)$仅是短语、析取范式；

（4）$(P \land Q) \lor (\neg P \land Q)$是析取范式；

（5）$(P \lor Q) \land (\neg P \lor Q)$是合取范式；

（6）句子$P \lor (Q \lor \neg R)$、$\neg(Q \lor R)$既不是析取范式也不是合取范式

总结

（1）单个的文字是子句、短语、析取范式，合取范式

（2）单个的子句是析取范式；

（3）单个的短语是合取范式；

（4）若单个的子句（短语）无最外层括号，则是合取范式（析取范式）；

（5）析取范式、合取范式仅含联结词集{¬，∧，∨}

（6）“¬”联结词仅出现在命题变元前。

范式的求解方法

定理3.5.1 对于任意命题公式，都存在与其等价的析取范式和合取范式。

转换方法：

（1）利用等价公式中的等价式和蕴涵式将公式中的→、↔用联结词¬、∧、∨来取代，这可利用如下等价关系：

$(G \to H) = (\neg G \vee H)$；

$(G \leftrightarrow H) = (G \to H) \wedge (H \to G)$

$= (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$。

范式的求解方法(续)

（2）重复使用德•摩根定律将否定号移到各个命题变元的前端，并消去多余的否定号，这可利用如下等价关系：$\neg(\neg G) = G$；

$$\neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H；$$

$$\neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H。$$

（3）重复利用分配律，可将公式化成一些合取式的析取，或化成一些析取式的合取，这可利用如下等价关系：$G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$；

$$G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)。$$

例3.5.1

求公式：$(P\rightarrow\neg Q)\vee(P\leftrightarrow R)$的析取范式和合取范式

解 $(P\rightarrow\neg Q)\vee(P\leftrightarrow R)$

$= (\neg P\vee\neg Q)\vee((\neg P\vee R)\wedge(\neg R\vee P))$

$= ((\neg P\vee\neg Q)\vee(\neg P\vee R))$

$\wedge((\neg P\vee\neg Q)\vee(\neg R\vee P))$

$= (\neg P\vee\neg Q\vee\neg P\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\vee P)$

$= (\neg P\vee\neg Q\vee R)$——合取范式

$= \neg P\vee\neg Q\vee R$——析取范式

范式的不惟一性

考虑公式：

$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$，

其与之等价的析取范式：

$P \vee (Q \wedge R)$；

$(P \wedge P) \vee (Q \wedge R)$；

$P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$；

$P \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$。

这种不惟一的表达形式给研究问题带来了不便。

3.5.2 主析取范式和主合取范式

1　极小项和极大项

定义 3.5.3　在含有n个命题变元P_1、P_2、P_3、…、P_n的短语或子句中，若每个命题变元与其否定不同时存在，但二者之一恰好出现一次且仅一次，则称此短语或子句为关于P_1、P_2、P_3、…、P_n的一个极小项或极大项。

对于n个命题变元，可构成2^n个极小项和2^n个极大项

例子

（1）一个命题变元P，

对应的极小项有两项：P、¬ P；

对应的极大项有两项：P、¬ P。

（2）两个命题变元P、Q，

对应的极小项有四项：

$P\wedge Q$、$\neg P\wedge Q$、$P\wedge\neg Q$、$\neg P\wedge\neg Q$；

对应的极大项有四项：

$P\vee Q$、$\neg P\vee Q$、$P\vee\neg Q$、$\neg P\vee\neg Q$。

例子（续）

（3）三个命题变元P、Q、R，

对应的极小项有八项：

$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$、$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$

$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$、$\neg P\wedge Q\wedge R$、$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$

$P\wedge\neg Q\wedge R$、$P\wedge Q\wedge\neg R$、$P\wedge Q\wedge R$；

对应的极大项有八项：

$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$、$\neg P\vee\neg Q\vee R$

$\neg P\vee Q\vee\neg R$、$\neg P\vee Q\vee R$、$P\vee\neg Q\vee\neg R$

$P\vee\neg Q\vee R$、$P\vee Q\vee\neg R$、$P\vee Q\vee R$。

两个命题变元的所对应极小项真值表

P Q	┐P∧┐Q	┐P∧Q	P∧┐Q	P∧Q
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

注

¬P ∧¬Q → {0 0} 为真 → {0 0} → m_{00} (m_0)

¬P ∧ Q → {0 1} 为真 → {0 1} → m_{01} (m_1)

P ∧ ¬Q → {1 0} 为真 → {1 0} → m_{10} (m_2)

P ∧ Q → {1 1} 为真 → {1 1} → m_{11} (m_3)

两个命题变元的所对应极大项真值表

P Q	┐P∨┐Q	┐P∨Q	P∨┐Q	P∨Q
0 0	1	1	1	0
0 1	1	1	0	1
1 0	1	0	1	1
1 1	0	1	1	1

P∨Q → {0 0}为假→ {0 0} → M_{00} (M_0)

P∨¬Q → {0 1}为假→ {0 1} → M_{01} (M_1)

¬P∨Q → {1 0}为假→ {1 0} → M_{10} (M_2)

¬P∨¬Q → {1 1}为假→ {1 1} → M_{11} (M_3)

三个命题变元的极小项和极大项

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	$m_0=\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	$M_0=P\vee Q\vee R$
0	0	1	$m_1=\neg P\wedge\neg Q\wedge R$	$M_1=P\vee Q\vee\neg R$
0	1	0	$m_2=\neg P\wedge Q\wedge\neg R$	$M_2=P\vee\neg Q\vee R$
0	1	1	$m_3=\neg P\wedge Q\wedge R$	$M_3=P\vee\neg Q\vee\neg R$
1	0	0	$m_4=P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	$M_4=\neg P\vee Q\vee R$
1	0	1	$m_5=P\wedge\neg Q\wedge R$	$M_5=\neg P\vee Q\vee\neg R$
1	1	0	$m_6=P\wedge Q\wedge\neg R$	$M_6=\neg P\vee\neg Q\vee R$
1	1	1	$m_7=P\wedge Q\wedge R$	$M_7=\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$

极小项和极大项的性质

1）任意两个极小项的合取必为假；
2）任意两个极大项的析取必为真；
3）极大项的否定是极小项；
4）极小项的否定是极大项；
5）所有极小项的析取为永真公式；
6）所有极大项的合取是永假公式。

$m_i \wedge m_j = F$

$M_i \vee M_j = T$

$\neg M_i = m_i$

$M_i = \neg m_i$

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1;$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0。$$

2 主析取范式和主合取范式

定义3.5.4

（1）在给定的析取范式中，每一个短语都是极小项，则称该范式为主析取范式。

（2）在给定的合取范式中，每一个子句都是极大项，则称该范式为主合取范式。

（3）如果一个主析取范式不包含任何极小项，则称该主析取范式为“空”；如果一个主合取范式不包含任何极大项，则称主合取范式为“空”。

定理3.5.2

任何一个公式都有与之等价的主析取范式和主合取范式。

证明（1）利用定理3.5.1先求出该公式所对应的**析取范式和合取范式；**

（2）在析取范式的短语和合取范式的子句中重复出现的命题变元，将其化成只出现一次；

（3）去掉析取范式中的所有永假式（ $P\wedge\neg P$ ），

去掉合取范式中所有永真式（ $P\vee\neg P$ ）

定理3.5.2 证明（续）

（4）若析取范式的某一个短语中缺少该命题公式中所规定的命题变元，则可用 $(\neg P \vee P) \wedge Q = Q$ 将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的短语，此时得到的短语将是标准的极小项

若合取范式的某一个子句中缺少该命题公式中所规定的命题变元，则可用公式：$(\neg P \wedge P) \vee Q = Q$ 将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的子句，此时得到的子句将是标准的极大项；

证明（续）

（5）利用等幂律将相同的极小项和极大项合并，同时利用交换律进行顺序调整，由此可转换成标准的主析取范式和主合取范式。

3 求主析取范式和主合取范式的方法

主范式

公式转换法

利用基本等价公式进行变换（证明见定理3.5.2)

真值表技术

对公式的真值结果进行分解，分解成等价的极小项的析取或者极大项的合取

例3.5.2

利用等价公式转换法求公式$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R)$的主析取范式和主合取范式 。

解 （1）求主析取范式

$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R) = \neg(\neg P\vee Q)\vee(Q\wedge R)$

$=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R)$ ——析取范式

$=(P\wedge\neg Q\wedge(R\vee\neg R))\vee((P\vee\neg P)\wedge Q\wedge R)$

$=(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$=(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$ ——主析取范式

例3.5.2（续）

（2）求主合取范式

$$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R)=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R)$$

$$=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)$$

$$=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$$——合取范式

例3.5.2（续）

$$=(P\vee Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge$$

$$((P\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R)$$

$$=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)$$

$$\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge((P\vee\neg Q\vee R)\ \wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$$

$$=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$$

$\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$ ——主合取范式

需要说明

求任何一个公式的主析取范式和主合取范式不仅要取决于**该公式**，而且取决于该公式所包含的**命题变元**。

如公式：

$$G_1 = (P \rightarrow Q) \wedge Q,$$

$$G_2(P, Q, R) = (P \rightarrow Q) \wedge Q。$$

前者是依赖于两个命题变元的，后者应依赖于三个命题变元。

如何用极小项来构成主析取范式？

P Q	m_0	m_1	m_2	m_3	P->Q	备 注
0 0	1	0	0	0	1	m_0必须包含在主析取范式中
0						在 中
1						包含 在主析取范式中
1 1	0	0	0	1	1	m_3必须包含在主析取范式中

主析取范式中必须且只能包含使得公式真值为真的那些解释对应的极小项。

如何用极大项来构成主合取范式？

P Q	M_0	M_1	M_2	M_3	P↔ Q	备　注
0 0	0	1	1	1	1	M_0一定不能包含在主合取范式中
0						
1						主合取范式中
1 1	1	1	1	0	1	M_3一定不能包含在主合取范式中

主合取范式中必须且只能包含使得公式真值为假的那些解释对应的极大项。

真值表技术

（1）列出公式对应的真值表，选出公式的真值结果为真的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个解释所对应的极小项，将这些极小项进行析取即可得到相应的主析取范式。

（2）列出公式对应的真值表，选出公式的真值结果为假的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个解释所对应的极大项，将这些极大项进行合取即可得到相应的主合取范式。

例3.5.4

利用真值表技术求公式G = ┐（P→Q）∨R的主析取范式和主合取范式。

P Q R	P→Q	┐（P→Q）	┐（P→Q）∨R
0 0 0	1	0	0
0 0 1	1	0	1
0 1 0	1	0	0
0 1 1	1	0	1
1 0 0	0	1	1
1 0 1	0	1	1
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	0	1

例3.5.4（续）

（1）求主析取范式

找出真值表中其真值为真的行：

2.　0　0　1；　4.　0　1　1；

5.　1　0　0；　6.　1　0　1；

8.　1　1　1。

这些行所对应的极小项分别为：

$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$，$\neg P \wedge Q \wedge R$，$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$，

$P \wedge \neg Q \wedge R$，$P \wedge Q \wedge R$。

例3.5.4（续）

将这些极小项进行析取即为该公式G的主析取范式。

$$G = \neg(P \rightarrow Q) \vee R$$

$$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee$$

$$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

例3.5.4（续）

（2）求主合取范式

找出真值表中其真值为假的行：

1．0 0 0； 3．0 1 0； 7．1 1 0。

这些行所对应的极大项分别为：

$P \vee Q \vee R$、$P \vee \neg Q \vee R$、$\neg P \vee \neg Q \vee R$

将这些极大项进行合取即为该公式G的主合取范式：

$$G = (P \rightarrow Q) \vee R$$

$$= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

4 主析取范式和主合取范式之间的转换

（1）已知公式G的主析取范式，求公式G的主合取范式

（a）求¬G的主析取范式，即G的主析取范式中没有出现过的极小项的析取，若

$$G = \bigvee_{i=1}^{k} m_{l_i}$$

为G的主析取范式，则

$$\neg G = \bigvee_{i=1}^{2^n-k} m_{j_i}$$

为¬G的主析取范式。其中，m_{j_i} (i=1, 2, ..., 2^n−k) 是 m_i (i=0, 1, 2, ..., 2n−1) 中去掉 m_{l_i} (i=1, 2, ..., k) 后剩下的极小项。

主析取范式⇒主合取范式

（b）G=¬(¬G)即是G的主合取范式。即，

$$G = \neg\neg G = \neg\left(\bigvee_{i=1}^{2^n-k} m_{j_i}\right) = \bigwedge_{i=1}^{2^n-k} \neg m_{j_i} = \bigwedge_{i=1}^{2^n-k} M_{j_i}$$

——为G 的主合取范式。

主合取范式⇒主析取范式

（2）已知公式G的主合取范式，求公式G的主析取范式

（a）求¬G的主合取范式，即G的主合取范式中没有出现过的极大项的合取，若

$$G=\bigwedge_{i=1}^{k} M_{l_i}$$

为G的主合取范式，则

$$\neg G=\bigwedge_{i=1}^{2^n-k} M_{l_i}$$

为¬G的主合取范式。

其中，m_{j_i}（i=1, 2, …, 2^n−k）是M_i（i=0，1，2，…，2^n−1）中去掉m_{l_i}（i=1，2，…，k）后剩下的极大项。

主合取范式⇒主析取范式

（b）G=¬(¬G)即是G的主析取范式。即，

$$G=\neg\neg G=\neg(\bigwedge_{i=1}^{2^n-k} M_{j_i})=(\bigvee_{i=1}^{2^n-k}\neg M_{j_i})=(\bigvee_{i=1}^{2^n-k} m_{j_i})$$

——为G 的主析取范式。

例3.5.5

设$G=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)$，求其对应的主析取范式和主合取范式。

解 $G=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)$

$=(P\wedge Q\wedge(R\vee\neg R))\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge R)$

$\quad\vee((P\vee\neg P)\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$=(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\quad\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$=(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\quad\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$=m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_6\vee m_7$ ——主析取范式

例3.5.5（续）

$\neg G = m_2 \vee m_5$

$G = \neg\neg G = \neg(m_2 \vee m_5) = \neg m_2 \wedge \neg m_5 = M_2 \wedge M_5$

$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

—主合取范式

3.5.3 范式中的难点

1、如何正确的理解范式定义中的**“有限个文字”、“有限个短语”、“有限个子句”**的概念是很关键的，“有限个”∈N={0，1，2，…，n，…}；

2、使用真值表技术求主范式时注意**正确地建立真值表，正确地掌握真值解释还原成子句和短语的方法；**

3.5.3 范式中的难点

3、使用公式转换法求主范式时，需要增加某一个命题变元，此时注意关于该变元的永真公式和永假公式的正确加入，同时注意公式的正确化简；

4、利用主析取求主合取或者利用主合取求主析取时，注意是“G”的主析取范式的否定或“G”的主合取范式的否定，而非直接是G的否定。

3.5.4 范式的应用

定理3.5.3

（1）公式G为永真式 <=> G的合取范式中每个简单的析取式至少包含一个命题变元及其否定；

（2）公式G为永假式 <=> G的析取范式中每个简单的合取式至少包含一个命题变元及其否定；

3.5.4 范式的应用

例3.5.6 判断下面公式为何种类型的公式。

（1）$(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$

（2）$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$

（3）$\neg(P \rightarrow \neg Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

例3.5.6 解

(1) $(P\wedge\neg Q)\leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)$

$=((P\wedge\neg Q)\rightarrow\neg(\neg P\vee Q))\wedge(\neg(\neg P\vee Q)\rightarrow(P\wedge\neg Q))$

$=(\neg(P\wedge\neg Q)\vee\neg(\neg P\vee Q))\wedge((\neg P\vee Q)\vee(P\wedge\neg Q))$

$=(\neg P\vee Q\vee(P\wedge\neg Q))\wedge((\neg P\vee Q)\vee(P\wedge\neg Q))$

$=(\neg P\vee Q\vee P)\wedge(P\vee Q\vee\neg Q))\wedge(\neg P\vee Q\vee P)\wedge(P\vee Q\vee\neg Q)$

——合取范式

由于该合取范式中每个简单析取式至少包含一个命题变元及其否定，由定理3.5.3知，该公式为永真公式。

例3.5.6（续）

（2） $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R = ((\neg P\vee Q)\rightarrow R)\wedge(R\rightarrow(\neg P\vee Q))$

$= (\neg(\neg P\vee Q)\vee R)\wedge(\neg R\vee(\neg P\vee Q))$

$= ((P\wedge\neg Q)\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg P\vee Q)$

$= (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg P\vee Q)$——合取范式

例3.5.6（续）

$$= (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg P)$$
$$\vee(P\wedge\neg Q\wedge Q)\vee(P\wedge\neg R\wedge R)\vee(P\wedge R\wedge\neg P)\vee$$
$$(P\wedge R\wedge Q)\vee(R\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge\neg Q\wedge\neg P)\vee$$
$$(R\wedge\neg Q\wedge Q)\vee(R\wedge\neg R\wedge R)\vee(R\wedge R\wedge\neg P)\vee(R\wedge R\wedge Q)$$
$$= (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge R\wedge Q)\vee(R\wedge\neg Q\wedge\neg P)$$
$$\vee(R\wedge\neg P)\vee(R\wedge Q))$$

——析取范式

由于该公式所对应的合取范式及析取范式都不满足定理3.5.3中的条件，所以它既不是永真公式，也不是永假公式，而是一个可满足公式。

例3.5.6（续）

（3） $(P\rightarrow Q)\wedge(P\wedge\neg Q)=(\neg P\vee Q)\wedge(P\wedge\neg Q)$

$=(\neg P\wedge P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge P\wedge\neg Q)$——析取范式

由于该公式所对应的析取范式中的每一个简单的合取式至少包含一个命题变元及其否定，根据定理3.5.3知，该公式是一个永假公式。

定理3.5.4

（1）如果命题公式是永真公式它的主析取范式包含所有的极小项，此时无主合取范式或者说主合取范式为“空”。

（2）如果命题公式是永假公式它的主合取范式包含所有的极大项，此时无主析取范式或者说主析取范式为“空”。

（3）两个命题公式是相等的它们对应的主析取范式之间相等，或者(可兼或)它们对应的主合取范式之间相等。

例3.5.7

求证 $(P\to Q)\wedge(P\to R)=P\to(Q\wedge R)$

证明 左式 $=(P\to Q)\wedge(P\to R)=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$

$=(\neg P\vee Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(\neg P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)$

$=(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge$
$(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$=(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$=M_4\wedge M_5\wedge M_6$

例3.5.7 解（续）

右式$=P\rightarrow(Q\wedge R)=\neg P\vee(Q\wedge R)$

$=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)=M_4\wedge M_5\wedge M_6$

两个公式具有相同的主合取范式，故两公式等价。

3.6 命题逻辑的推理理论

概念

描述问题的句子；

判断

对概念的肯定与否定的判断；

推理

从一个或多个前提推出结论的思维过程。

推理的有效性和结论的真实性

有效的推理不一定产生真实的结论；

而产生真实结论的推理过程未必是有效的。

有效的推理中可能包含为“假”的前提，

而无效的推理却可能得到为“真”的结论 。

推理的有效性和结论的真实性

所谓**推理有效**，

指的是**它的结论是它前提的合乎逻辑的结果**。

即，如果它的**前提都为真，那么所得的结论也必然为真**，而并不是要求前提或结论一定为真或为假；

如果推理是有效的话，那么不可能它的前提都为真时，而它的结论为假。

3.6.1 推理的基本概念和推理形式

定义3.6.1 设G_1，G_2，…，G_n，H是公式，称H是G_1，G_2，…，G_n的逻辑结果(G_1，G_2，…，G_n共同蕴涵H)，当且仅当H 是$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$的逻辑结果(logic conclusion)。记为G_1，G_2，…，$G_n \Rightarrow H$，此时称G_1，G_2，…，$G_n \Rightarrow H$为有效的(efficacious)，否则称为无效的（inefficacious）。G_1，G_2，…，G_n称为一组前提(Premise)，有时用集合Γ来表示，记Γ = {G_1，G_2，…，G_n}。H称为结论(conclusion)。又称H是前提集合的逻辑结果。记为$\Gamma \Rightarrow H$。

判定定理

定理3.6.1 公式H是前提集合Γ={G_1, G_2, …, G_n}的逻辑结果当且仅当$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \to H$为永真公式。

证明： “$\Rightarrow$”若G_1, G_2, …, $G_n \Rightarrow H$，但$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \to H$不是永真式。于是，必存在$G_1$, G_2, …, G_n，H的一个解释I，使得$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$为真，而H为假，因此对于该解释I，有$G_1$, G_2, …, G_n都为真，而H为假，这就与推理形式G_1, G_2, …, $G_n \Rightarrow H$是有效的相矛盾，故：$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \to H$是永真公式。

判定定理（续）

"$\Leftarrow$" 若$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \rightarrow H$是永真式，但$G_1$，$G_2$，$\cdots$，$G_n \Rightarrow H$不是有效的推理形式，故存在$G_1$，$G_2$，$\cdots$，$G_n$，H的一个解释I，使得$G_1$，$G_2$，$\cdots$，$G_n$都为真，而H为假，故$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$为真，而H为假，即是说$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \rightarrow H$为假，这就与$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \rightarrow H$是永真式相矛盾，所以$G_1$，$G_2$，$\cdots$，$G_n \Rightarrow H$是有效的推理形式。

“⇒”与“→”的不同

1. “→”仅是一般的**蕴涵联结词**，G→H的结果仍是一个公式，而“⇒”却描述了两个公式G，H之间的一种逻辑蕴涵关系，G ⇒ H的“结果”，是非命题公式；

2. 用计算机来判断G ⇒ H是办不到的。然而计算机却可“计算”公式G→H是否为永真公式。

3.6.2 判断有效结论的常用方法

要求

$\Gamma = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ $\Gamma \Rightarrow H$

也就是

$G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n \rightarrow H$ 为永真公式

因而

真值表技术、演绎法和间接证明方法

1、真值表技术

设$P_1, P_2, \cdots, P_n$是出现在前提$G_1, G_2, \cdots, G_n$和结论H中的一切命题变元，如果将$P_1, P_2, \cdots, P_n$中所有可能的解释及$G_1, G_2, \cdots, G_n$, H的对应真值结果都列在一个表中，根据“→”的定义，则有判断方法如下:

1. 对所有$G_1, G_2, \cdots, G_n$都具有真值T的行(表示前提为真的行)，如果在每一个这样的行中，H也具有真值T，则H是$G_1, G_2, \cdots, G_n$的逻辑结果。
2. 对所有H具有真值为F的行(表示结论为假的行)，如果在每一个这样的行中，$G_1, G_2, \cdots, G_n$中至少有一个公式的真值为F(前提也为假)，则H是$G_1, G_2, \cdots, G_n$的逻辑结果.

例3.6.1

判断下列H是否是前提G_1, G_2的逻辑结果

(1) H：Q； G_1：P；G_2：$P\rightarrow Q$；

(2) H：$\neg P$； G_1：$P\rightarrow Q$；G_2：$\neg Q$；

(3) H：Q； G_1：$\neg P$；G_2：$P\rightarrow Q$。

解

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1
(1)				

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0
(2)				

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1
(3)				

2 推理定律

1) I_1: $G \wedge H \Rightarrow G$ （简化规则）

I_2: $G \wedge H \Rightarrow H$

2) I_3: $G \Rightarrow G \vee H$ （添加规则）

I_4: $H \Rightarrow G \vee H$

3) I_5: $\neg G \Rightarrow G \rightarrow H$

I_6: $H \Rightarrow G \rightarrow H$

4) I_7: $\neg (G \rightarrow H) \Rightarrow G$

I_8: $\neg (G \rightarrow H) \Rightarrow \neg H$

5) I_9: $G, H \Rightarrow G \wedge H$

2 推理定律(续)

6）I_{10}: $\neg G, G \vee H \Rightarrow H$ （选言三段论）

I_{11}: $\neg G, G \overline{\vee} H \Rightarrow H$

7）I_{12}: $G, G \rightarrow H \Rightarrow H$ （肯定前件式）

8）I_{13}: $\neg H, G \rightarrow H \Rightarrow \neg G$ （否定后件式）

9）I_{14}: $G \rightarrow H, H \rightarrow I \Rightarrow G \rightarrow I$ （假言三段论）

10）I_{15}: $G \vee H, G \rightarrow I, H \rightarrow I \Rightarrow I$ （二难推论）

例子

1)、前提：

1. 如果明天天晴，我们准备外出旅游。 $P \rightarrow Q$
2. 明天的确天晴。 P

结论：我们外出旅游。 Q

可描述为：$P \rightarrow Q$，$P \Rightarrow Q$ （分离规则）

2)、前提：

1. 如果一个人是单身汉，则他不幸福。 $P \rightarrow Q$
2. 如果一个人不幸福，则他死得早。 $Q \rightarrow R$

结论：单身汉死得早。 $P \rightarrow R$

可描述为：$P \rightarrow Q$，$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ （假言三段论）

例子(续1)

3)、某女子在某日晚归家途中被杀害，据多方调查确证，凶手必为王某或陈某，但后又查证，作案之晚王某在工厂值夜班，没有外出，谁是凶手？

根据上述案情可得前提：

1. 凶手为王某或陈某 $P \vee Q$
2. 如果王某是凶手，则他在作案当晚必外出 $P \rightarrow R$
3. 王某案发之晚并未外出。 $\neg R$

结论：陈某是凶手。 Q

则可描述为：$P \rightarrow R, \neg R \Rightarrow \neg P$（否定后件式）

$P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$（选言三段论）

例子(续2)

4)、前提：

1. 如果某同学为省二级以上运动员，则他将被大学录取。 $P \to R$

2. 如果某同学高考总分在560分以上，则将被大学录取。 $Q \to R$

3. 某同学高考总分在560分以上或者是省二级运动员。 $P \vee Q$

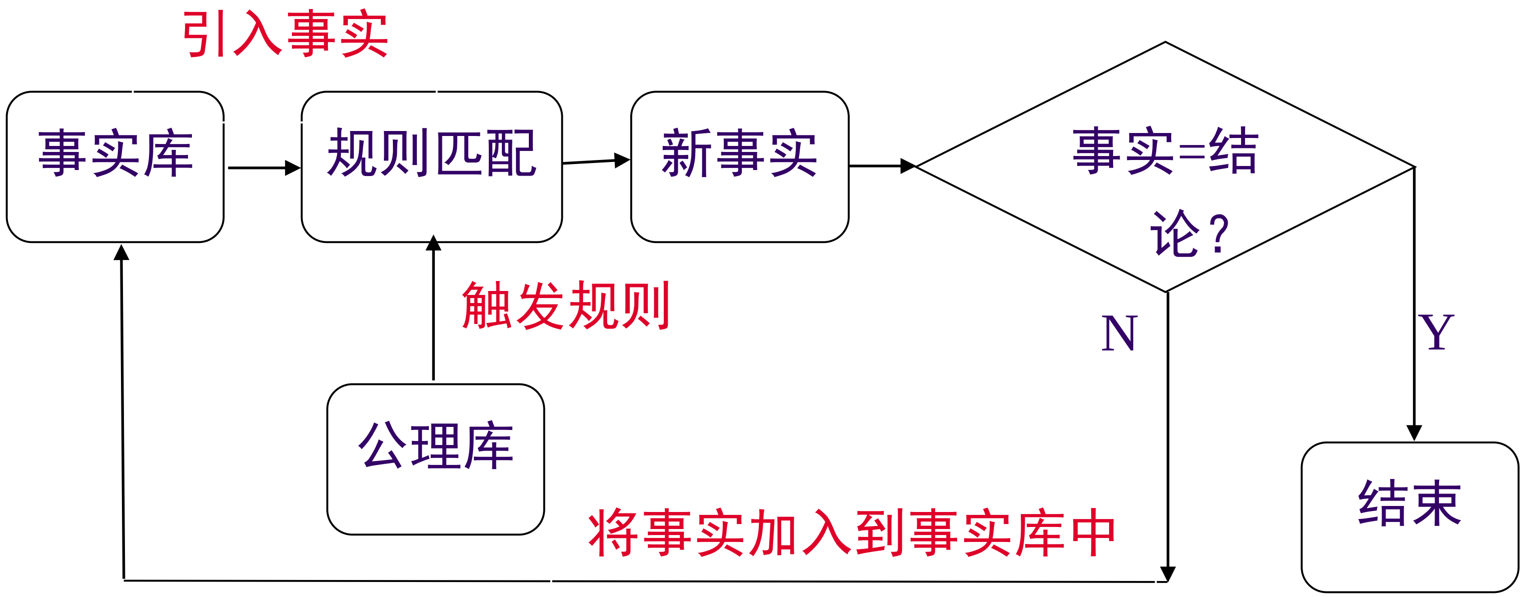
结论：该同学被大学录取。 R

则上述例子可描述为：

$P \vee Q,\ P \to R,\ Q \to R \Rightarrow R$ （二难推论）

3 演绎法

演绎法是从前提(假设)出发，依据公认的推理规则和推理定律，推导出一个结论来。



引入推理规则

在数理逻辑中，主要的推理规则有：

① P规则（称为前提引用规则）：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提；

② 规则T（逻辑结果引用规则）：在推导的过程中，可以随时引入公式S，该公式S是由其前的一个或多个公式推导出来的逻辑结果。

③ 规则CP（附加前提规则）：如果能从给定的前提集合Γ与公式P推导出S，则能从此前提集合Γ推导出P→S。

演绎的定义

定义3.6.2

从前提集合Γ推出结论H的一个演绎是构造命题公式的一个有限序列：

$$H_1, \ H_2, \ \cdots\cdots, \ H_n$$

其中，H_i或者是Γ中的某个前提，或者是前面的某些H_j（j<i）的有效结论，并且H_n就是H，则称公式H为该**演绎**的有效结论，或者称从前提Γ能够**演绎**出结论H来。

例3.6.2

设前提 $\Gamma=\{P\vee Q, P\leftrightarrow R, Q\rightarrow S\}$，$G=S\vee R$。证明 $\Gamma\Rightarrow G$。

证明1

(1)	$P\vee Q$	P
(2)	$\neg P\rightarrow Q$	T, (1), E
(3)	$Q\rightarrow S$	P
(4)	$\neg P\rightarrow S$	T, (2), (3), I
(5)	$\neg S\rightarrow P$	T, (4), E
(6)	$P\leftrightarrow R$	P
(7)	$(P\rightarrow R)\wedge(R\rightarrow P)$	T, (6), E
(8)	$P\rightarrow R$	T, (7), I
(9)	$\neg S\rightarrow R$	T, (5), (8), I
(10)	$S\vee R$	T, (9), E

例3.6.2 (续)

证明2

(1)	$\neg S$	P(附加前提)
(2)	$Q\rightarrow S$	P
(3)	$\neg Q$	T, (1), (2), I
(4)	$P\vee Q$	P
(5)	P	T, (3), (4), I
(6)	$P\leftrightarrow R$	P
(7)	$(P\rightarrow R)\wedge(R\rightarrow P)$	T, (6), E
(8)	$P\rightarrow R$	T, (7), I
(9)	R	T, (5), (8), I
(10)	$\neg S\rightarrow R$	CP, (1), (9)
(11)	$S\vee R$	T, (10), E

例3.6.3

设$\Gamma=\{P\rightarrow(Q\rightarrow S),\neg R\vee P,Q\}$， $G=R\rightarrow S$。证明：$\Gamma\Rightarrow G$。

证

(1)	R	P(附加前提)
(2)	$\neg R\vee P$	P
(3)	P	T, (1), (2), I
(4)	$P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	P
(5)	$Q\rightarrow S$	T, (3), (4), I
(6)	Q	P
(7)	S	T, (5), (6), I
(8)	$R\rightarrow S$	CP, (1), (7)

4 间接证明法（反证法）

前面使用过的一些证明方法都是**正向推理**。但在数学领域中，经常会遇到一些问题，当采用正向推理时很难从前提为真推出结论为真。

P⇒Q等价于¬Q⇒¬P，因此，为了间接地证明P⇒ Q，可以假设Q为假(¬Q)，然后证明P为假(¬P)。

定义5.2.3

假设$G_1, G_2, \cdots, G_n$是一组命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$

$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$是矛盾式当且仅当

$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \Rightarrow R \wedge \neg R$，

其中，R可为任意公式，$R \wedge \neg R$为一矛盾式。

为“假”，则称公式$G_1, G_2, \cdots, G_n$是不一致的。或者说$G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n$是一个矛盾式。

间接证明方法

将结论的否定加入到前提集合中构成一组新的前提，然后证明这组新的前提集合是不相容的，即蕴涵一个矛盾式。

■ $G_1, G_2, \cdots, G_n, \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$

定理3.6.2 设命题公式集合$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$是一致的，于是从前提集合出发可以逻辑地推出公式H的充要条件是从前提集合$\{G_1, G_2, \cdots, G_n, \neg H\}$出发，可以逻辑地推出一个矛盾（永假）式来。

例3.6.6

用反证法证明二难推论 $P\vee Q,\ P\rightarrow R,\ Q\rightarrow R \Rightarrow R$

证明

(1)	$P\rightarrow R$	P
(2)	$\neg R$	P（附加前提）
(3)	$\neg P$	T, (1), (2), I
(4)	$Q\rightarrow R$	P
(5)	$\neg Q$	T, (2), (4), I
(6)	$P\vee Q$	P
(7)	P	T, (5), (6), I
(8)	$P\wedge\neg P$	T, (3), (7), I

三种证明方法之间的关系

$G_1, G_2, \cdots, G_n, \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$ 反证法

$\overset{CP}{\Leftrightarrow} G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow \neg H \to (R \wedge \neg R)$ CP规则证明法

$\Leftrightarrow G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow \neg\neg H \vee (R \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$ 直接证明法

3.6.3 命题逻辑推理的难点

1、弄清楚蕴涵式P→Q的逻辑关系及其真值，这里Q是P的必要条件。无论蕴涵关系如何表述，都要仔细地区分出蕴涵式的前件和后件。

2、推理过程中推理规则、基本等值式和逻辑蕴涵式的引用要适当，逻辑思维要清晰。

3.6.3 命题逻辑推理的难点

3、弄清楚几种推理方法的区别与联系，对于命题逻辑推理而言，任何一个问题的推理，都可以采取三种推理方法中的任何一种来证明，针对不同的问题选用不同的推理方法。一般而言，对于结论是蕴涵式或析取式的，大多可以采取带CP规则的直接证明方法。

3.6.4 命题逻辑推理的应用

例3.6.7 符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。

或者明天下午是天晴，或者是下雨；如果明天下午是天晴，则我将去看电影；如果我去看电影，我就不看书。如果我看书，则天在下雨。

设P：明天下午天晴； Q：明天下午下雨；

R：明天下午去看电影；S：明天下午看书。

则上述命题可符号化为：

$$P\overline{\vee}Q,\ P\to R,\ R\to\neg S \Rightarrow S\to Q。$$

例3.6.7 证明

（1）	S	P（附加前提）
（2）	$R \rightarrow \neg S$	P
（3）	$\neg R$	T，（1），（2），I
（4）	$P \rightarrow R$	P
（5）	$\neg P$	T，（3），（4），I
（6）	$P \overline{\vee} Q$	P
（7）	Q	T，（5），（6），I
（8）	$S \rightarrow Q$	CP，（1），（7）

例3.6.8

一个公安人员审查一件盗窃案，已知的事实如下：

A或B盗窃了x；

若A盗窃了x，则作案时间不能发生在午夜前；

若B证词正确，则在午夜时屋里灯光未灭；

若B证词不正确，则作案时间发生在午夜前；

午夜时屋里灯光灭了。B盗窃了x。

例3.6.8 证明

设 P：A盗窃了x；Q：B盗窃了x；

R：作案时间发生在午夜前；

S：B证词正确；

T：在午夜时屋里灯光灭了。

则上述命题可符号化为：

$$P\vee Q,\ P\rightarrow\neg R,\ S\rightarrow\neg T,\ \neg S\rightarrow R,\ T\Rightarrow Q$$

例3.6.8 证明（续）

证明1　采用直接证明方法（反证法请学生完成）

(1)	T	P
(2)	$S\rightarrow\neg T$	P
(3)	$\neg S$	T，(1)，(2)，I
(4)	$\neg S\rightarrow R$	P
(5)	R	T，(3)，(4)，I
(6)	$P\rightarrow\neg R$	P
(7)	$\neg P$	T，(5)，(6)，I
(8)	$P\vee Q$	P
(9)	Q	T，(7)，(8)，I

第二次作业（第三章课后习题）

3. (2), (4), (6), (10), (11)
4. (3), (4), (5)
5. (1), (3)
6. (3), (4)
7. 1), 3), 5), 7), 9)
8. 1), 3)
9. 1), 4)
10. 3), 4), 7)
11. 1), 4), 5), 7)

17. 2), 4), 6)　　18. 2), 4), 6)

19. 1), 3), 5)

Thank You !

http://202.115.21.136:8080/lssx