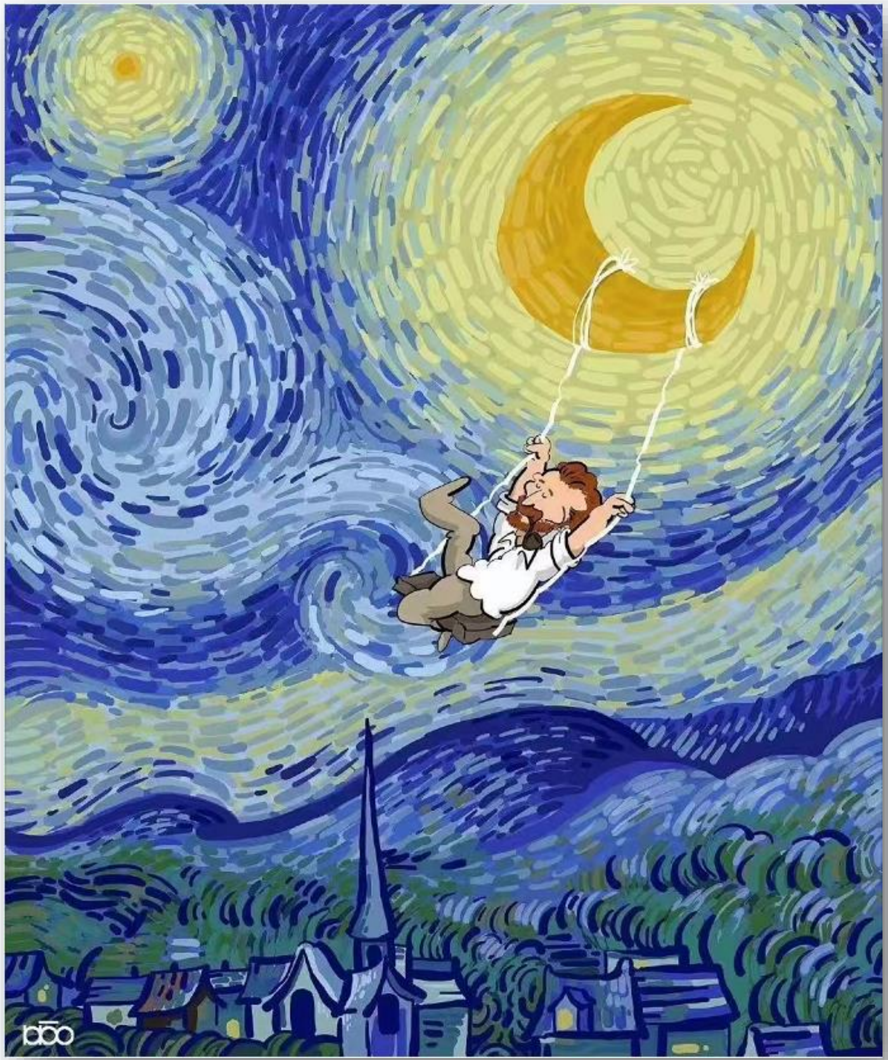
本次课的重点内容是:
二元函数的密度函数, 其中特殊函数函数：**和、极值分布及商的密度函数的计算.**

第4章期望开头

下次课内容:

要讲第四章期望, 随机变量及其函数的数学期望.



一、离散型随机变量的函数及其分布律

1.离散型随机变量的函数也是离散型随机变量

$$P\{Y=y_j\}=P\{g(X)=y_j\}=\sum_{x_i\in S_j}P\{X=x_i\}\quad j=1,2,\ldots$$

$$P\{Z=z_k\}=P\{G(X,Y)=z_k\}=\sum_{(x_i,y_j)\in T_k}P\{X=x_i,Y=y_j\},k=1,2,\ldots$$

二、连续型随机变量的函数及其概率密度

一元函数：(1)最基本的方法是"分布函数法"

(2)单调函数公式法

二元函数："分布函数法"求函数的概率密度$f_Z(z)$.

(X, Y)为二维连续型随机变量的**三种特殊二元函数的分布**

当$Z = G(X, Y)$为三种特殊函数的概率密度$f_Z(z)$:

1. 极值分布(Extreme value):$M=max(X,Y)$, $N=min(X,Y)$

$$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{\max(X,Y)\le z\}$$
$$=P\{X\le z,Y\le z\}=F_{X,Y}(z,z)$$

$$F_N(z)=P\{\min(X,Y)\le z\}=1-P\{X>z,Y>z\}$$

若X与Y相互独立:$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

若X 与Y独立同分布:

$$F_M(z)=\left[F(z)\right]^2 \qquad F_N(z)=1-[1-F(z)]^2$$

小结: 三种积分, 实质上是解决带参变量积分的问题.

1.关于X 和Y 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

注:在 XOY平面上作出 $f(x,y)$ 的非零区域 G;

2. $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx \qquad y=z-x$$

步骤:

1) 在 XOZ平面上作出 $f(x,z-x)$ 的非零区域 G;

2) 将区域 G投影到Z轴上, 确定 $f_Z(z)$非零区间;

3)在 $f_Z(z)$非零区间中,逐段找x的积分上下限,确定$f_Z(z)$的表达式;

4) 写出 $f_Z(z)$的完整表达式.

3. $Z=X/Y$ 即商的分布 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(zy,y)\,dy$

注:在YOZ平面上作出 $f(zy,y)$ 的非零区域 G.

连续型卷积公式的应用:

若X与Y相互独立，$X \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_2^2)$,

则$X+Y \sim \mathrm{N}(\mu_1+\mu_1,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ (正态分布具有可加性)

应用单调函数公式法的一个重要结论:

教材例3.4.7:正态随机变量的线性函数也服从正态分布

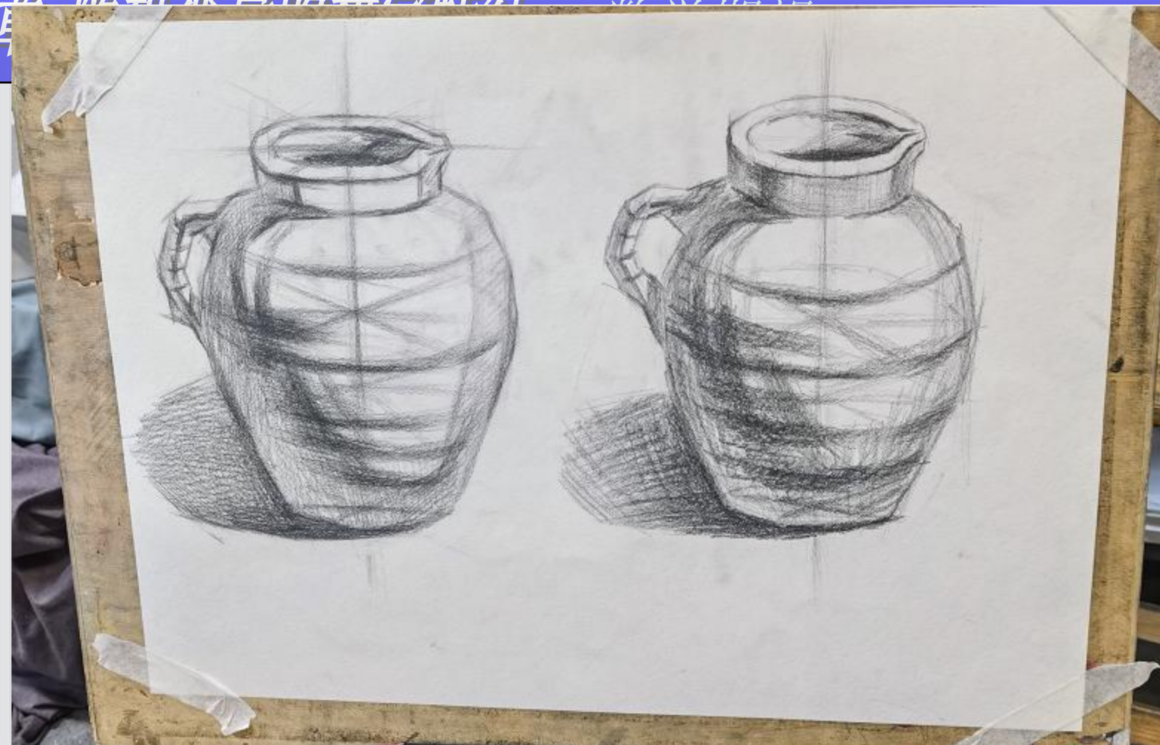
$$X \sim N(\mu,\sigma^2), Y = aX+b(a\neq 0) \Rightarrow Y \sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$$

特别: $a=\dfrac{1}{\sigma}, b=-\dfrac{\mu}{\sigma}, Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$

(正态分布的线性不变性)

推广：$Z = X + Y$,即X, Y可以不全为连续型:

例: 设P{X=0}=P{X=1}=1/2,Y-U(0,1)且X,Y相互独立,求X+Y的概率分布.



双曲函数，它在历史上的出现极具传奇色彩。比如达芬奇的名画《抱银貂的女人》，她脖子上的项链形成的悬链线就是双曲余弦曲线，不用微分方程就可以用很直接的方法理解...

美术课-画鸡蛋/罐子中的数学. 如何理性地规化, 如何设计. 从圆规到椭圆规到双曲规再到卡西尼卵形线.

注: 卡西尼卵形线是由下列条件所定义的：
曲线上所有点到两定点（焦点）的距离之积为常数。卡西尼卵形线是由到两个定点（叫做焦点）距离之积为常数的所有那些点组成的图形。

随机变量的数学期望(期望)或随机变量的平均值(均值):

是随机变量取值的集中点或中常状态;

是唯一、确定的实数，具有客观的意义.

离散型随机变量：若$\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|p_i < +\infty$，则称：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p\{X_i = x_i\}$$

连续型随机变量：若：$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx < +\infty$，则称

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

注：$\sum_{i=1}^{+\infty} x_i f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$是积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$的渐近和式.

随机变量期望存在的条件？

级数绝对收敛或积分绝对可积.

一. 离散型随机变量的数学期望(期望)

定义：设 X是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i \qquad i=1,2,3....$$

若$\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|p_i<+\infty$，则称：$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}x_i p_i$

二. 连续型随机变量的数学期望(期望)

$$\sum_{i=1}^{+\infty}x_i f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$$

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$

若：$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx<+\infty$，则称

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 连续型随机变量数学期望(均值).

随机变量取值的集中点或中常状态；唯一、确定实数，具有客观的意义.

注：并非所有的随机变量都存在数学期望.

见教材例4.1.2和例 4.1.4.

离散型随机变量: $E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p\{X_i = x_i\}$

连续型随机变量: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

数学期望是唯一确定的实数(不是一般的随机变量).

1. $X \sim P(\lambda)$, 则 $E(X)=\lambda$ 证 明

2. $X \sim B(n,p)$, 则 $E(X)=np$ 证 明

3. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $E(X)=\mu$ 证 明

1. $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X)=\lambda$

证明: $P\{X=k\}=e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\qquad k=0,1,2,\ldots.$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

(令 $m=k-1$)

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}$$

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{\lambda}\right)$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

2. $X \sim B(n,p)$ 则 $E(X)=np$

证明: $P\{X=i\}=C_n^i(1-p)^{n-i}p^i,\ \ i=0,1,2,\dots,n$

$$E(X)=\sum_{i=0}^{n}\underline{iC_n^i}(1-p)^{n-i}p^i$$

$$iC_n^i=\frac{i\cdot n!}{i!\cdot(n-i)!}$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}C_{n-1}^{i-1}(1-p)^{n-i}p^i$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)!}{(i-1)!\cdot(n-i)!}$$

$$=nC_{n-1}^{i-1}$$

(令$k=i-1$)

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}(1-p)^{n-1-k}p^k$$

$$=np\left[p+(1-p)\right]^{n-1}=np$$

3. $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 则 $E(X)=\mu$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma t e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$

奇函数，积分区间对称

$$=\mu\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{\text{归一性}}=\mu$$

4. 两点分布

X	0	1
P	$1-p$	p

$$E(X)=p$$

5. 均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in(a,b)\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

6. 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{else}\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

注意: $E(X)$是确定的实数, 而不再是一般随机变量.

五种分布的数学期望:

1. $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X)=\lambda$ 证 明

2. $X \sim B(n,p)$ 则 $E(X)=np$ 证 明

特别地: 0-1分布, 则 $E(X)=p$

3. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $E(X)=\mu$ 证 明

4. 均匀分布 $E(X)=(b+a)/2$

5. 指数分布 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

数学期望是唯一确定的实数, 而不是随机变量.

思考:几何分布和负二项分布的呢?

在进行社区大规模核酸检测时，分成几人一组进行混检效率最高?

假如需要对 n 个人进行检测，病毒的携带率为 p 。为了减少工作量，一次性将 k 个人的唾液样本混合。如果混合样本为阴性，则说明这 k 个人都没有患病。如果混合样本为阳性，说明这 k 个人中至少有1个人是阳性，那么接下来对这 k 个人的唾液分别做检测。这样的方法能够提高检测效率。

接下来求每个人的检测次数 X 的数学期望 $E(X)$ 。 如果$E(X)$ 小于1，说明平均每个人做的检测次数小于1，即混合样本检测的方法能够提高效率。

X 的取值只有两种可能： $\frac{1}{k}$ 和 $1+\frac{1}{k}$ ， X 服从伯努利分布，具体的分布律是：

$$P(X=\tfrac{1}{k})=(1-p)^k \qquad P(X=1+\tfrac{1}{k})=1-(1-p)^k$$

$$E(X)=\frac{1}{k}(1-p)^k+(1+\frac{1}{k})[1-(1-p)^k]=1-(1-p)^k+\frac{1}{k}$$

套在现实的例子中：在2020年初，武汉约1000万人口，约8万人感染新冠病毒，感染率 p 约为0.008，四舍五入 $p=0.01$ 。

于是$E(X)=1-0.99^k+\frac{1}{k}$ 为了节约次数，希望$E(X)$ 越小越好。这是一个简单的求极值问题。

求得 $k=11$ 时， $E(X)$ 取最小值，为0.205，也就是说平均个人只需要检测0.205次，这节省了约80%的成本。

也正是一次性将10个人的样本混合在一起检测。

[例 7]（彩票）彩票的发行，数额巨大，其实质如何呢？请看一则实例：发行彩票 100 万张，每张 5 元. 设头等奖 5 个，奖金 31.5 万元；二等奖 95 个，奖金各 5 000 元；三等奖 900 个，奖金各 300 元；四等奖 9 000 个，奖金各 20 元.

还是算算每张彩票的期望所得. 这时分布列为

η	315 000	5 000	300	20	0
P	$\frac{5}{100\text{万}}$	$\frac{95}{100\text{万}}$	$\frac{900}{100\text{万}}$	$\frac{9\ 000}{100\text{万}}$	*

(4.1.9)

其中一等奖的金额本来另行摇出，此地为简便计，用其均值；至于 *，无需细算.

花 5 元买来的一张彩票，从摇奖中的期望所得为

$$E\eta = 315\ 000\times\frac{5}{100\text{万}}+5\ 000\times\frac{95}{100\text{万}}+300\times\frac{900}{100\text{万}}+20\times\frac{9\ 000}{100\text{万}}$$
$$=2.5(\text{元}).$$

即大约能收回一半. 因此这实质上也是一种于购买者不利的非公平博弈，所以历来博彩并称. 显然不能把购买彩票当作一种投资渠道.

在我国，彩票的发行严格由民政部门管理，只有当收益主要用于公益事业时才允许，如福利彩票与体育彩票.

二、随机变量的函数的数学期望

设X是随机变量, $Y=g(X)$也是随机变量, 如何计算$E[g(X)]$?

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy \text{ 或 } =\sum_{i=1}^{+\infty} y_i P\{Y=y_i\}$$

可先确定$g(X)$的分布$F_Y(y)$ ⟶ $E[g(X)]=?$

定理: 设 Y 是随机变量X的函数$Y=g(X)$($g(x)$为连续函数)

1) X是离散型随机变量, 其分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i,\ i=1,2,3\ldots.$$

若: $\sum_{i=1}^{+\infty}|g(x_i)|p_i<+\infty$, 则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)P\{X=x_i\}$$

1) X是离散型随机变量, 其分布律为

$$\text{若}\sum_{i=1}^{+\infty}|g(x_i)|p_i<+\infty,\ \text{则}\quad E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{+\infty}g(x_i)p_i$$

2) X是连续型随机变量, 其概率密度为$f(x)$

$$\text{若}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f(x)dx<+\infty,\text{则}$$

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

例 4.1.1 例 4.1.2

注: 在计算随机变量函数(Y=g(X))的数学期望时可以带来很大的方便, 我们无须先计算函数Y的密度函数或分布律(回忆第三章的繁复)再求其数学期望, 而可以直接从X的分布函数出发, 利用上述定理来计算.

例4.1.1：设随机变量X的数学期望存在.

$Y=g(X)=(X)^2$

证明：$E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2$

$Y=g(X)=[X-E(X)]^2$

且设X为连续型

设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x<0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

试求$E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$.

证明：$E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]^2 f(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{x^2-2E(X)x+\left[E(X)\right]^2\right\}f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-2E(X)\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx+\left[E(X)\right]^2\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

$$=E(X^2)-2\left[E(X)\right]^2+\left[E(X)\right]^2=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

例4.1.1: 设随机变量X的数学期望存在.

证明: $E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2$ (方差$D(X)$)

设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x<0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

试求 $E\{[X-E(X)]^2\}$

$\because E(X)=0$ (参见书上教材例4.1.3)

$$\therefore E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx$$

$$=1/6$$

例4.1.2: 设球的直径$X \sim U(a, b)$, 求球的体积的数学期望.

解：体积$Y=g(X)=(\pi/6)X^3$, 可得

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx=\int_a^b \frac{\pi}{6}x^3\frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2)$$

$g(x)$处处可导, 且$g'(x)>0$ (或 $g'(x)<0$)

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[h(y)\right]\cdot\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\alpha=\min\left(g(a),g(b)\right)\quad \beta=\max\left(g(a),g(b)\right)$$

另解：体积$Y=(\pi/6)X^3$, 可得

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}\left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\pi}{6}a^3<y<\frac{\pi}{6}b^3 \\ 0\qquad, & \text{else} \end{cases}$$

则：$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy=\frac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2)$$

1) X是离散型随机变量, 其分布律为

$$\text{若}\sum_{i=1}^{+\infty}|g(x_i)|\,p_i<+\infty,\ \text{则}\quad E(Y)=E\left[g(X)\right]=\sum_{i=1}^{+\infty}g(x_i)\,p_i$$

2) X是连续型随机变量, 其概率密度为$f(x)$

$$\text{若}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\,f(x)dx<+\infty,\text{则}$$

$$E(Y)=E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,f(x)dx$$

思考: 可否将前定理推广到二维 甚至更多维的情况?

参见教材定理4.1.2

定理4.1.2: 设(X,Y)是二维随机变量, $Z=G(X,Y)$也是随机变量.

(1) 若(X,Y)是离散型随机变量, 其联合分布律为:

$$P\left\{X=x_i, Y=y_j\right\}=p_{ij}, \quad (i=1,2,\ldots; j=1,2,\ldots),$$

则当$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|G(x_i,y_j)\right|p_{i,j}<+\infty$时,

$$E(Z)=E\left[G(X,Y)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}G(x_i,y_j)p_{i,j} \qquad (4.1.5)$$

(2) 若(X,Y)是连续型随机变量, 其联合密度$f(x,y)$,则当

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(x,y)\right|f(x,y)dxdy<+\infty$,有

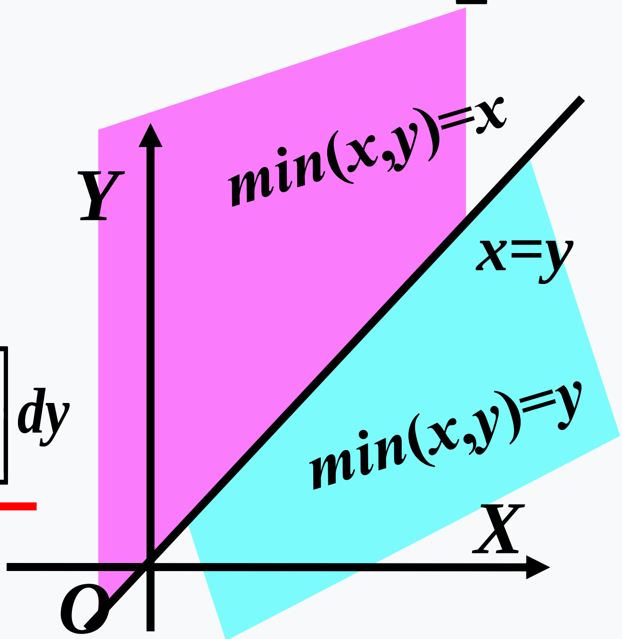
$$E(Z)=E\left[G(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y)f(x,y)dxdy \qquad (4.1.6)$$

例4.1.4: X,Y相互独立,且服从$N(0,1)$分布,试求$E[min(X,Y)]$.

$$\text{解}: E\left[\min\left(X,Y\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y}xf\left(x,y\right)dx\right]dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y}^{+\infty}yf\left(x,y\right)dx\right]dy$$

$$\because f\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(\left(x,y\right)\in R^2\right)$$



$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y}^{+\infty}yf\left(x,y\right)dx\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y}^{+\infty}y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\right]dy=\int_{-\infty}^{+\infty}y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}\underline{\left[\int_{y}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]}dy$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y}xf\left(x,y\right)dx\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\right]dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}\left[-\int_{-\infty}^{y}de^{-\frac{x^2}{2}}\right]dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{2\pi}e^{-y^2}dy$$

$$E[\min(X,Y)]=\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y} xf(x,y)dx\right]dy}+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y}^{+\infty} yf(x,y)dx\right]dy$$

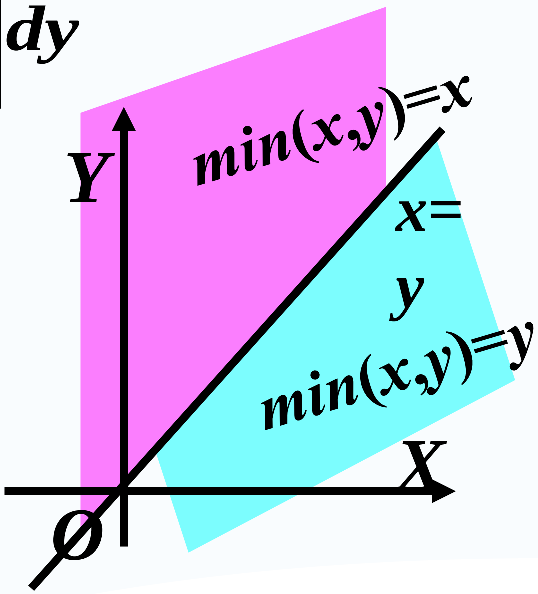
$$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y}^{+\infty} yf(x,y)dx\right]dy \quad =\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{x} yf(x,y)dy\right]dx}$$

$$\because f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left((x,y)\in R^2\right)\text{关于}x,y\text{对称}$$

$$\therefore E[\min(X,Y)]=2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y} xf(x,y)dx\right]dy$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y} x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\right]dy$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{2\pi}e^{-y^2}dy=-\frac{1}{\pi}\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$



思考：$E(X+Y)=?$

注: X,Y相互独立,且服从$N(0,1)$分布,则$X+Y$服从?

例4.1.5: 设随机变量X与Y相互独立,且$X,Y\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$

则 $E\left(|X-Y|\right)=$ ________

解: $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\pi}e^{-\left(x^2+y^2\right)},(x,y)\in R^2$

$$E\left(|X-Y|\right)=\iint_{R^2}|x-y|f(x,y)d\sigma=\cdots\cdots\cdots=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

另解:

$$\left.\begin{array}{l} X,-Y\text{相互独立} \\ (\text{教材定理}3.2.3) \\ -Y\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{正态分布具有可加性}} X+(-Y)=X-Y\sim N(0,1)$$

$X\sim N(\mu,\sigma^2),Y=aX+b(a\neq 0)$(正态分布线性不变性)

$$\Rightarrow Y\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$$

例4.1.5: 设随机变量X与Y相互独立,且$X,Y \sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$

则 $E\left(|X-Y|\right)=$ ________

令$Z=X-Y \sim N(0,1)$

$$E\left(|Z|\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[-e^{-\frac{z^2}{2}}]_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

思考: $E(X+Y)=?$

注: X,Y相互独立,且服从$N(0,1)$分布,则$X+Y$服从?

本次课的重点内容是：随机变量函数(离散型和连续型)的数学期望公式及函数的定义和计算.

下次课内容：

数学期望的性质，

方差的定义和性质.

三、随机变量的数学期望的性质

设$X, X_1, X_2, \ldots, X_n$是随机变量, c和b 是常数.

1) 线性性质: $E(cX+b) = cE(X)+b$

当$b=0$时， $E(cX) = cE(X)$

当$c=0$时， $E(b) = b$ 特别:$E(E(X)) = E(X)$

推广: $E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i EX_i + b$, 其中:任意常数$a_i\,(i=1,\ldots,n), b$

2) 加法性质: $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

3)(乘法性质) 若$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立, 则

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

例4.1.6

证明：$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$

证明：

$$\text{左边}=E\{XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)\}$$

$$=E(XY)-E(Y)E(X)$$

$$-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

特别：当$Y=X$时，$E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2=D(X)$

例4.1.7: 随机变量X的分布律为(超几何分布):

$P\{X=m\}=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n, m=0,1,2,\ldots,n; n\le M\le N$,试求 $E(X)$.

原始模型: N个球中有M个红球, 余下为白球,

从中任取n个球, n个球中的红球数为X.

分析: 1)直接计算是一件很困难的:

$$E(X)=\sum_{m=0}^{n} m\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}=?$$

考虑用数学期望的性质$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$ 进行求解.

2) 设想这n个球是逐个不放回抽取的, 共取了n次

令X_i表示第 i 次取到红球的个数, $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$;

$X_i \sim (0-1)$, $i=1,2,..n$

3)抽签的公平性(全概率公式): $P=P\{X_1=1\}=M/N=P\{X_i=1\}$

例4.1.7: 随机变量X的分布律为(超几何分布):

$$P\{X=m\}=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n \quad m=0,1,2,\ldots,n \quad n\le M\le N$$

试求 $E(X)$.

解: 设想这n个球是逐个不放回抽取的, 共取了n次.

令X_i表示第i次取到红球的个数, $i=1,2,..n$,

则$X=X_1+X_2+\ldots.+X_n$

由抽签的公平性有: $P\{X_i=1\}=M/N$

从而$E(X_i)=1\times M/N+0\times(1-M/N)=M/N$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{nM}{N}$$ (超几何分布的数学期望)

注: 与二项分布的均值对比?

对于一个伯努利试验，我们常考察如下问题：

(1) 事件A 首次发生时的试验次数Z；

$P\{Z=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\ldots,$几何分布或首次分布.

(2) 事件A 发生k 次时的试验次数Y；

$P\left\{Y=t\right\}=C_{t-1}^{k-1}p^k q^{t-k},\quad t=k,k+1,\ldots.$

称Y 服从负二项分布(或帕斯卡(Pascal)分布)

负二项分布可看作几何分布的更一般情况。

(3) n 次试验中事件A 发生的总次数X, 服从二项分布.

$$P\{X=k\}=P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\ldots,n.$$

(2) 事件A 发生k 次时的试验次数Y; $P\{Y=t\}=C_{t-1}^{k-1}p^kq^{t-k},t=k,k+1,\ldots$

为了检查某厂产品的废品率p大小,有两个试验方案可采取:
一是从该厂产品中抽出若干个,检查其中的废品数X,这一方案导致二项分布,已于前述.
另一个方案是先指定一个自然数k.一个个地从该厂产品中抽样检查, 直到发现第k个废品为止.以W记到当时为止已检出的合格品个数.

需要的条件?

$$(1-x)^{-r}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{-r}^{i}(-x)^i=\sum_{i=0}^{\infty}C_{i+r-1}^{i}x^i=\sum_{i=0}^{\infty}C_{i+r-1}^{r-1}x^i$$

$$P\{W=w\}=C_{w+k-1}^{k-1}p^k(1-p)^w,\ w=0,1,2,\ldots.$$

令$x=1-p$,并两边乘以p^r,得$1=p^r[1-(1-p)]^{-r}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{i+r-1}^{r-1}p^r(1-p)^i$

注:由于例中所描述的试验方式,它与二项分布比是“反其道而行之”:二项分布是定下总抽样个数n而把废品个数X作为变量;
负二项分布则相反,它定下废品个数r而把总抽样次数减去r作为变量. 负二项分布的名称来由:由于“负指数二项展开式”.

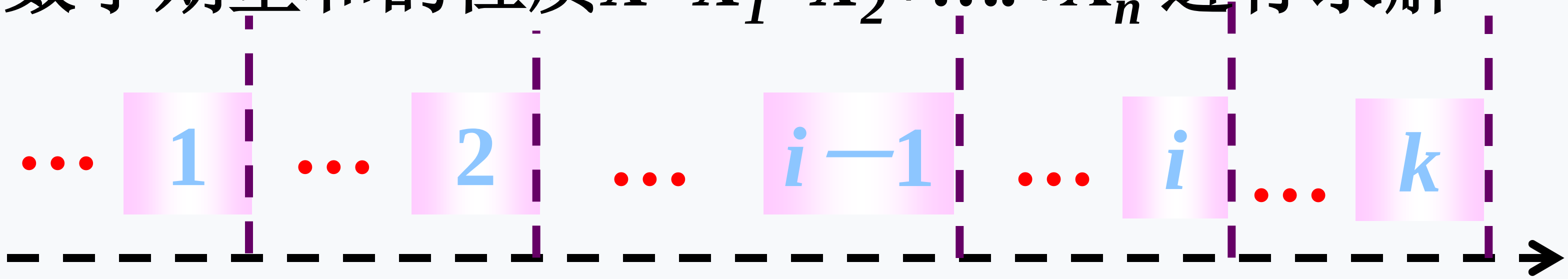
例4.1.8： 向某一目标进行射击，直至命中k次为止，已知命中率为$p>0$. 求射击次数X 的平均值.

分析：X的分布律为： 负二项分布?

$$P\{X=j\}=C_{j-1}^{k-1}p^k(1-p)^{j-k}\quad j=k,k+1,\ldots$$

$$E(X)=\sum_{j=k}^{+\infty}jC_{j-1}^{k-1}p^k(1-p)^{j-k}$$

用数学期望和的性质$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$ 进行求解



X_i表示第$i-1$次命中以后，到第 i 次命中的射击次数.

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_k$$

X_i表示第$i-1$次命中以后,到第 i 次命中的射击次数.

X_i的分布律为:

X_i	1	2	…..	m	……
$P\{X_i=m\}$	p	$(1-p)p$	…..	$(1-p)^{m-1}p$	……

$$E(X_i)=\sum_{m=1}^{+\infty} m(1-p)^{m-1}p$$

$$=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty} m x^{m-1}\right]_{x=1-p} = p\left[\sum_{m=1}^{+\infty} x^{m}\right]'_{x=1-p}$$

$$=p\left[\frac{x}{1-x}\right]'_{x=1-p} = p\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]_{x=1-p} = \frac{1}{p}$$

例4.1.8: 向某一目标进行射击, 直至命中k次为止. 已知命中率为$p>0$, 求射击次数X的平均值.

X_i表示第$i-1$次命中以后,到第 i 次命中的射击次数.

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_k \qquad E(X_i)=\frac{1}{p}$$

从而 $$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_k)$$

$$=\frac{1}{p}k$$

模型与书上的教材的例4.1.13一样.

$$E(X)=\sum_{j=k}^{+\infty} jC_{j-1}^{k-1}p^k(1-p)^{j-k}$$

$$=\frac{k}{p}\sum_{j=k}^{+\infty} C_{j+1-1}^{k+1-1}p^{k+1}(1-p)^{(j+1)-(k+1)}$$

$$=\frac{k}{p}\sum_{\bar{j}=\bar{k}}^{+\infty} C_{\bar{j}}^{\bar{k}}p^{\bar{k}}(1-p)^{\bar{j}-\bar{k}}$$

$=\dfrac{k}{p}\bullet 1$(负二项的分布律的归一性)