图论及其应用作业一

1. C 2010 年考研真题，题干要求在“任何情况”下都是连通的，考虑最极端的情形，即图 G 的 6 个顶点构成一个完全无向图，再加上一条边后，第 7 个顶点必然与此完全无向图构成一个连通图，所以最少边数 6x5/2+1=16。若边数 n 小于或等于 15，可以使这 n 条边仅连接图 G 中的某 6 个顶点，从而导致第 7 个顶点无法与这 6 个顶点构成连通图(不满足“任何情况”)。
2. B 2017 年考研真题，无向图边数的 2 倍等于各顶点度数的总和。为求至少的顶点数，应使每个顶点的度取最大，由于其他顶点的度均小于 3,可以设它们的度都为 2,设它们的数量是 x,列出方程 4*3 + 3*4 +2x = 16*2.解得 x=4。因此至少包含 4+4+3=11 个顶点。
3. D 在有向图中，顶点的度等于入度与出度之和。n 个顶点的有向图中，任意一个顶点最多还可以与其他 n-1 个顶点有一对指向相反的边相连。注意数据结构中仅讨论简单图。
4. B n 个顶点的无向图最多有 n(n-1)/2 条边，每条边在邻接表中存储两次，所以边表结点最多为 n(n-1)个。
5. C 利用深度优先遍历可以判断图 G 中是否存在回路。对于无向图来说，若深度优先遍历过程中遇到了回边，则必定存在环;对于有向图来说，这条回边可能是指向深度优先森林中另一棵生成树上的顶点的弧;但是，从有向图的某个顶点 v 出发进行深度优先遍历时，若在 DFS(v)结束之前出现一条从顶点 u 到顶点的回边，且 u 在生成树上是 v 的子孙，则有向图必定存在包含顶点 v 和顶点 u 的环。
7. D 2013 年考研真题，只要掌握 DFS 和 BFS 的遍历过程，便能轻易解决。逐个代入，手工模拟，选项 D 是深度优先遍历，而不是广度优先遍历。
8. D 2016 年考研真题

对于本题，只需按深度优先遍历的策略进行遍历。对于 A：先访问 V_1，然后访问与 V_1 邻接
且未被访问的任意一个顶点（满足的有 V_2, V_3 和 V_5），此时访问 V_5，然后从 V_5 出发，访问与 V_5
邻接且未被访问的任意一个顶点（满足的只有 V_4），然后从 V_4 出发，访问与 V_4 邻接且未被访问的
任意一个顶点（满足的只有 V_3），然后从 V_3 出发，访问与 V_3 邻接且未被访问的任意一个顶点（满
足的只有 V_2），结束遍历。B 和 C 的分析方法与 A 相同，不再赘述。对于 D，首先访问 V_1，然后
从 V_1 出发，访问与 V_1 邻接且未被访问的任意一个顶点（满足的有 V_2, V_3 和 V_5），然后从 V_2 出发，
访问与 V_2 邻接且未被访问的任意一个顶点（满足的只有 V_5），按规则本应该访问 V_5，但 D 却访问
了 V_3，错误。

9. B，基本概念
10. C

图论及其应用作业二

1. B 2016 年考研真题

根据 Dijkstra 算法，从顶点 1 到其余各顶点的最短路径如下表所示。

顶　点	第 1 轮	第 2 轮	第 3 轮	第 4 轮	第 5 轮
2	5 $v_1 \to v_2$	5 $v_1 \to v_2$			
3	∞	∞	7 $v_1 \to v_2 \to v_3$		
4	∞	11 $v_1 \to v_5 \to v_4$	11 $v_1 \to v_5 \to v_4$	11 $v_1 \to v_5 \to v_4$	11 $v_1 \to v_5 \to v_4$
5	4 $v_1 \to v_5$				
6	∞	9 $v_1 \to v_5 \to v_6$	9 $v_1 \to v_5 \to v_6$	9 $v_1 \to v_5 \to v_6$	
集合 S	{1, 5}	{1, 5, 2}	{1, 5, 2, 3}	{1, 5, 2, 3, 6}	{1, 5, 2, 3, 6, 4}

2. 见下

1）该图的邻接矩阵为

$$
A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 3 & 3 & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 0 & 4 & \infty & 5 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 0 & \infty & 4 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 5 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\
\infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

得到的深度优先遍历序列为 1, 2, 3, 5, 7, 4, 6。

2）解题思路：当某个顶点只有出弧而没有入弧时，其他顶点无法到达这个顶点，不可能与其他顶点和边构成强连通分量（这个单独的顶点构成一个强连通分量）。

① 顶点 1 无入弧构成第一个强连通分量。删除顶点 1 及所有以之为尾的弧。

② 顶点 2 无入弧构成一个强连通分量。删除顶点 2 及所有以之为尾的弧。

③ ……

以此类推，最后得到每个顶点都是一个强连通分量，故强连通分量数目为 7。

3）该图的两个拓扑序列如下：

① 1, 2, 4, 6, 3, 5, 7

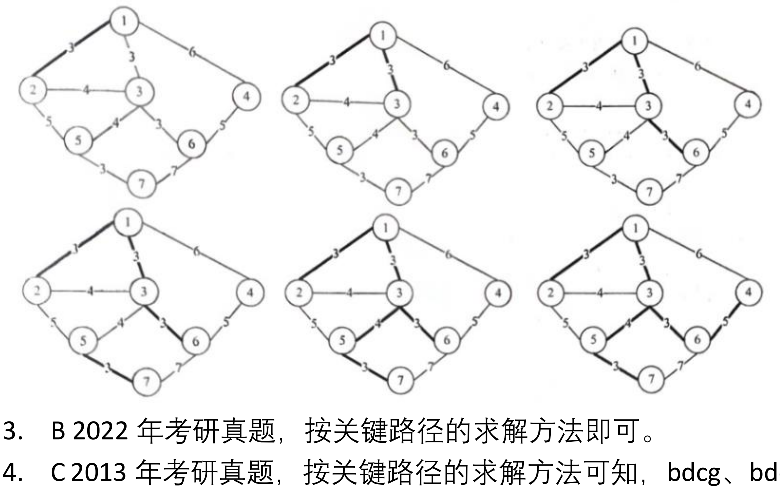
② 1, 4, 2, 6, 3, 5, 7

4）若视该图为无向图：

用 Prim 算法生成最小生成树的过程如下：

1—2，1—3，3—6，3—5，5—7，6—4（图略）。

用 Kruskal 算法生成最小生成树的过程如下图所示。



3. B 2022 年考研真题，按关键路径的求解方法即可。
4. C 2013 年考研真题，按关键路径的求解方法可知，bdcg、bdeh 和 bfh 为关键路径，ABD 并不包含在所有的关键路径中，仅 C 包含。
5. 见 ppt