（3） 如G,H是公式，则（$G\wedge H$）、（$G\vee H$）、（$G\rightarrow H$）也是公式；

（4） 仅由有限步使用规则（1）、（2）、（3）后所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串才是命题公式。

2、【解析】设f是从集合A到B的函数，对任意x1、x2∈A，如果x1≠x2，有f(x1)≠f(x2)，则称f为从A到B的单射。

3、【解析】设有图G=<V,E>和图G1=< V1,E1 >，若V1=V，E1⊆E，则称G1是G的生成子图。

4、【解析】设<A,*>和<B，∘>为两个二元代数系统，ψ是A到B的双射。对任意x,y∈A，都有ψ（x*y）=ψ(x)∘ψ(y)，则称ψ是从<A，*>到<B，∘>的同构映射，此时称<A，*>与<B，∘>同构。

四、判断分析改错题（如果正确，说明理由，如果不正确，举例说明）（16分）

1、【解析】不正确。正确的推到应该是：

（1）$(\exists x)Q(x)$	P
（2）$Q(c)$	ES（1）
（3）$(\forall x)P(x)$	P
（4）$P(c)$	US（2）
（5）$P(c)\wedge Q(c)$	T（2）（4）I
（6）$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$	EG（5）

2、【解析】不一定。例如，A={1,2}，R={<1,2>}，S={<2,1>}，则R和S都是A上的反对称关系但R∪S={<1,2>,<2,1>}，不是A上的反对称关系。

3、【解析】不是，因为存在一条长度为奇数的回路$v_1v_2v_3v_1$。

4、【解析】<R,*>是半群。因为二元运算*满足结合律。因为∀a.b,c∈R,

（a*b）*c=(a+b-ab)*c=a+b-ab+c-(a+b-ab)c=a+b+c-ab-ac-bc+abc，

a*(b*c)=a+(b*c)-a(b*c)=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)=a+b+c-ab-ac-bc+abc

所以，（a*b）*c= a*(b*c)。

五、计算题（35分）

1、【解析】

该公式真值表如下：

P	Q	R	$(P\to Q)\wedge(\neg P\to R)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

该公式的主析取范式为：

$(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

分该公式的主合取范式为：

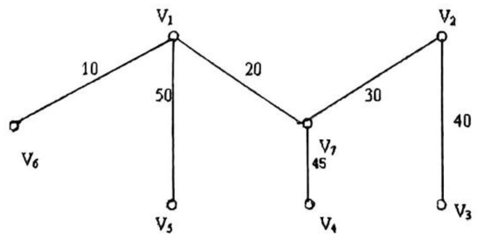
$(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$

2、【解析】A的最大元：h，最小元：a

B的特殊元素如下表：

	最大元	最小元	极大元	极小元	上确界	下确界
B	无	a	b,c,d	a	h	a

3、【解析】该图的最小生成树为



3）$(\forall x)(Q(x)\vee I(x)\rightarrow R(x))$ P

4）$Q(x)\vee I(x)\rightarrow R(x)$ US,3)

5）$\neg R(x)\rightarrow(Q(x)\vee I(x))$ T,4),E

6）$C(x)\rightarrow\neg(Q(x)\vee I(x))$ T,2),5),I

7）$C(x)\rightarrow\neg Q(x)\wedge\neg I(x)$ T,6),E

8）$(\forall x)(C(x)\rightarrow\neg Q(x)\wedge\neg I(x))$ UG,7)

2、【解析】

用数学归纳法证明，当 $n=1$ 时，显然有 $R^1\subseteq R$ 成立。
假设当 $n=k$ 时成立，即 $R^k\subseteq R$。

当 $n=k+1$ 时，有 $R^{k+1}=R^k oR$，

有复合的定义，可知对任意的$<x, y>\in R^{k+1}=R^k oR$,

存在 $z\in A$， 有$<x,z>\in R^k$,$<z,y>\in R$,

由归纳假设 $R^k\subseteq R$ 及$<x,z>\in R^k$ 可得， $<x,z>\in R$,

即$<x,z>\in R$， $<z,y>\in R$， R 传递，则$<x, y>\in R$。故 $R^{k+1}\subseteq$
R.即 $n=k+1$ 时， $R_{k+1}\subseteq R$。

故得正。

3、【解析】

1） $\forall x, y\in G$，若 $f(x)=f(y)$,则有$a\circ x\circ a-1=a\circ y\circ a-1$，因此有 $x=y$，即 f 是单射；

$\forall y\in G$，$\exists x=a-1\circ y\circ a\in G$，使得 $f(x)=y$，因此 f 是满射。故 f 是双射。

2）$\forall x, y\in G$,
$f(x\circ y)=a\circ(x\circ y)\circ a-1=(a\circ x)\circ e\circ(y\circ a-1)$
$=(a\circ x)\circ(a-1\circ a)\circ(y\circ a-1)=(a\circ x\circ a-1)\circ(a\circ y\circ a-1)=f(x)\circ f(y)$
因此， f 是 G 上的自同态映射。
由 1） ,2）知， f 是 G 上的自同构映射。

4、试述循环群的定义。（2.5 分）

四、判断分析改错题（如果正确，说明理由，如果不正确，举例说明）（16 分）

1、公式$(P \to Q)\quad(Q \to P)$是永真公式吗？为什么？（4 分）

2、$A \subseteq C$ 且 $A \in C$ 可能同时成立吗？为什么？（4 分）

3、【解析】该图的邻接矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$ ----------------2 分

$A^2=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&1&2&1\\0&0&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&1&3&1\\0&0&1&0\\0&1&3&1\end{pmatrix}$ $A^4=\begin{pmatrix}0&1&4&1\\1&1&5&2\\0&0&1&0\\1&1&4&1\end{pmatrix}$ ----------------3 分

图中 b 到 c 长度为 3 的通路数为 3，长度为 4 的通路数为 5。 ----------------1 分

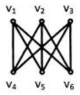
图中长度为 3 的回路总数为 4，长度为 4 的回路总数为 3。 ----------------1 分

4、【解析】运算表为对称的，则 $*$ 运算可交换； ----------------1 分

元素 a 所在的行和列都与行列表头相同，因而 a 为幺元； ----------------2 分

$a^{-1}=a$，$b^{-1}=d$，$d^{-1}=b$，$c^{-1}=c$ ----------------对一个得 1 分

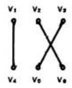
5、【解析】改画成偶图如下，



----------------3 分

互补结点子集为 $V1=\{v_1,v_2,v_3\}$ $V2=\{v_4,v_5,v_6\}$。 ----------------2 分

存在匹配如下：



----------------2 分

《离散数学》历年题

六、证明题（3×8=24 分）

1、【解析】证明：

设论域为人的集合，$H(x)$：x 参加会议； $D(x)$：x 是大学生

$C(x)$：x 是研究生 a：表示张三

则题中语句可符号化为：

$(\forall x)(H(x)\rightarrow D(x)\vee C(x))$，$H(a)\wedge\neg C(a)$，$\Rightarrow D(a)$ ----------------3 分

证明：

1）$(\forall x)(H(x)\rightarrow D(x)\vee C(x))$ P

2）$H(a)\rightarrow(D(a)\vee C(a))$ US 2） ----------------1 分

3）$H(a)\wedge\neg C(a)$ P

4）$H(a)$ T，3），I ----------------1 分

5）$\neg C(a)$ T，3），I ----------------1 分

6）$D(a)\vee C(a)$ T 2），4）I ----------------1 分

7）$D(a)$ T，5），6） ----------------1 分

2、【解析】证明：

根据等价关系定义，需证明 R 是自反，对称和传递的，已知 R 对称和传递，因此，只需证明 R 自反。 ----------------3 分

对 $x\in A$，由已知存在 $y\in A$，使得 $\langle x,y\rangle\in R$， ----------------1 分

又 R 对称，所以 $\langle y,x\rangle\in R$， ----------------2 分

即 $\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,x\rangle\in R$，又 R 传递，所以 $\langle x,x\rangle\in R$，故 R 是自反的。 ----------------2 分

3、【解析】证明：

任意a，$b \in Z$，$a * b = a + b - 2$并且是Z中惟一的整数，于是$*$是Z上的二元运算；--1分

对任意a，b，$c \in Z$，有

$$(a * b) * c = (a + b - 2) * c = (a + b - 2) + c - 2 = a + b + c - 4,$$

$$a * (b * c) = a * (b + c - 2) = a + (b + c - 2) - 2 = a + b + c - 4。$$

即有$(a * b) * c = a * (b * c)$，从而结合律成立； -------------------------1分

存在$2 \in Z$，使得对任意$a \in Z$，有

$$a * 2 = a + 2 - 2 = a，\ 2 * a = 2 + a - 2 = a$$

故2是$\langle Z, * \rangle$的幺元； ------------------------3分

对任意$a \in Z$，存在$4 - a \in Z$，使得

$$a * (4 - a) = a + 4 - a - 2 = 2，\ (4 - a) * a = 4 - a + a - 2 = 2$$

故a的逆元是$4 - a$。由a的任意性知，Z中没有元素都有逆元。 -----------------------------3

于是根据群的定义，$\langle Z, * \rangle$是群。

2017-2018 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、 单选题（10×1 =10 分）

1.【正解】2)

2.【正解】4)

3.【正解】3)

4.【正解】1)

5.【正解】3)

6.【正解】2)

7.【正解】4)

8.【正解】4)

9.【正解】1)

10.【正解】2)

二、 多项选择题（5×1 =5 分）

1.【正解】1) 3) 4)

2.【正解】2) 4)

3.【正解】1) 2) 3)

4.【正解】2) 3) 4)

5.【正解】3) 4)

三、 简答题（4×2=8 分）评分标准：答对大意给2分。

1.【解析】$(\forall x)G(x)\Rightarrow G(y)$，其中$G(x)$对$y$是自由的。推广形式：$(\forall x)G(x)\Rightarrow G(c)$，其中$c$为任意量。

2.【解析】设f是从集合A到集合B的函数，如果f的值域$ranf=B$（或：对$\forall y\in B$,一定存在$x\in A$,得$f(x)=y$），则f为从A到B的满射。

3.【解析】设G是一个有向图，若G中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的，称G是单向连通图。

4.【解析】设$\langle A,*\rangle$是一个二元代数系统。若存在$\theta\in A$，使得对任意$a\in A$,都有$a*\theta=\theta*a=\theta$，则θ是A中关于运算“*”的一个零元。

四、 判断分析改错题(如果正确，说明理由，如果不正确，举例说明)（3×5=15 分）评分标准判断正确给2分，理由正确给3分。判断错误则不给分。

1.【解析】不一定是等价关系。

设 $A=\{1,2,3\}$ ， R、S 为 A 上 的 关 系 ，$R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>\}$ ，$S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,3>,<3,1>\}$，可见$R$、$S$均满足自反性，对称性和传递性，因而是等价关系但$R\cup S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>\}$满足自反和对称性，但不满足传递性，当然不是等价关系。所以不成立。

2.【解析】表达式成立。

由于:$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)=(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)=(\neg P\wedge\neg Q)\vee R=\neg(P\vee Q)\vee R=(P\vee Q)\rightarrow R$

故表达式成立。

3.【解析】这种说法正确。因为树中不存在回路，当然不会存在长度为奇数的回路，因而是偶图。

五、 计算题（5×7 =35 分）

1.【解析】$G=(P\vee Q)\rightarrow(R\wedge\neg Q)$ ，真值表如下：——————————3 分（错2个扣1分）

P	Q	R	G
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0

主析取范式为:

（$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$）$\vee$（$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$）$\vee$（$P\wedge\neg Q\wedge R$）　　——————2分

主合取范式为:$(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\ (\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$

——————2分

2.【解析】根据已知，可得

$[a]=\{a,b\}$,——————————————2分

$[c]=\{c,d\}$,——————————————2分

$[e]=\{e,f\}$, ——————————————2分

因此，商集$A/R=\{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$——————1 分

3.【解析】该图的邻接矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$——————2分，$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\2&1&1&1\\2&1&0&2\end{pmatrix}$$——————1分

$$A^3=\begin{pmatrix}2&1&0&2\\1&1&1&0\\3&2&2&3\\3&2&2&2\end{pmatrix}$$——————1分，$$A^4=\begin{pmatrix}3&2&2&2\\2&1&0&2\\6&4&3&4\\6&4&3&5\end{pmatrix}$$——————1分

a到e长度为3的通路条数6。 ——————2 分

4.【解析】有图可知共4个面，——————2 分

其中无限面边界：$abcbda$，长度为5；——————2 分

面边界：$abda$，长度3；——————1 分

面边界：$adea$，长度为3；——————1 分

面边界：$aeda$，长度为3：——————1 分

5.【解析】设e是幺元，则根据定义，对$\forall a\in Z$，可知

$a*e=a+e+5=a$，可得$e=-5$。——————1 分

显然对$\forall a\in Z$，有$a*(-5)=(-5)*a=a$，故$e=-5$为幺元；——————2 分

设a是幂等元，根据定义有$a*a=a+a+5=a$，可得$a=-5$。另一方面，显然$a=-5$是幂等元，

有惟一幂等元$a=-5$；——————2 分

设a的可逆元是b，则

$a*b=a+b+5=e=-5$，得，$b=-a-10$。另一方面，显然，

$a*(-a-10)=(-a-10)*a=-5=e$， 故a的逆元是$-a-10$。——————2 分

六、 证明题（3×9=27 分）

1.【解析】设 $A(x)$：x是桌上的书；$B(x)$：x是杰作；

$C(x,y)$：x写出了y； $D(x)$：x是天才； $E(x)$：x是不出名的人。——————1 分

则上述语句可符号化为：

前提：$(\forall x)(A(x)\to B(x))$，$(\forall x)(\forall y)(C(x,y)\wedge B(y)\to D(x))$，$(\exists x)(\exists y)(E(x)\wedge C(x,y)\vee A(y))$

结论：$(\exists x)(E(x)\wedge D(x))$。 ——————2 分

即证明

$(\forall x)(A(x)\to B(x)),(\forall x)(\forall y)(C(x,y)\wedge B(x)\to D(x)),(\exists x)(\exists y)(E(x)\wedge C(x,y)\wedge A(y))$

$\Rightarrow(\exists x)(E(x)\wedge D(x))$

证明： （1）$(\exists x)(\exists y)(E(x)\wedge C(x,y)\wedge A(y))$ P

（2）$E(a)\wedge C(a,b)\wedge A(b)$ ES，（1） ——————1 分

（3）$E(a)$ T，（2） I

（4）$C(a,b)$ T，（2） I

（5）$A(b)$ T，（2） I ——————1 分

（6）$(\forall x)(A(x)\to B(x))$ P

（7）$A(b)\to B(b)$ US（6）

（8）$B(b)$ T，（4），（7），I——————1 分

（9）$(\forall x)(\forall y)(C(x,y)\wedge B(y)\to D(x))$ P

（10）$C(a,b)\wedge B(b)\to D(a)$ US，（9）

（11）$D(a)$ T，（4），（8），（10），I——————1 分

（12）$E(a)\wedge D(a)$ T，（3），（11），I ——————1 分

（13）$(\exists x)(E(x)\wedge D(x))$ EG，（14） ——————1 分

2.【解析】证明：

（1）S是自反的：——————1 分

对任意$f\in F$，任意$x\in R$，显然有$f(x)-f(x)\geqslant 0$。根据已知得$<f,f>\in S$。即S是自反的。—1 分

（2）S是反对称的：——————1 分

对任意$f,g\in F$，若$<f,g>\in S$，$<g,f>\in S$，根据已知有，对任意$x\in R$，$f(x)-g(x)\geqslant 0$且$g(x)-f(x)\gg 0$。从而有$f(x)=g(x)$。即S是反对称的。 ——————2 分

（3）S是传递的： ——————1 分

对任意$f,h,g\in F$，若$<f,g>\in S$，$<g,h>\in S$，则由已知得$f(x)-g(x)\geqslant 0$并且$g(x)-h(x)\geqslant 0$,

而$f(x)-h(x)\geqslant 0$。根据已知得$<f,h>\in S$，即S是传递的。 ———————— 2 分

由(1), (2)和(3)知,S是A上的一个等价关系。 ————————1 分

3.【解析】证明:

(a) 因为e是左幺元，所以有

$b=e*b=(a^{-1}*a)*b=a^{-1}*(a*b)$ ———————— 2 分

$=a^{-1}*(a*c)=(a^{-1}*a)*c=e*c=c$ ———————— 2 分

(b) 对任意$x\in A$，

因为$x^{-1}*(x*e)=(x^{-1}*x)*e=e*e=e=x^{-1}*x$($e$是左幺元)，所以$x*e=x$，即$e$是右幺元，因

是幺元。 ———————— 2 分

因为$x^{-1}*(x*x^{-1})=(x^{-1}*x)*x^{-1}=e*x^{-1}=x^{-1}=x^{-1}*e$，所以$x*x^{-1}=e$，从而有

$x^{-1}*x=x*x^{-1}=e$。即任意的$x\in A$都有逆元。 ——————— 2 分

根据群的定义$<A,*>$是一个群。 ————————1分

2011-2012 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题(20 分，每题 2 分，共 10 题)

1、【正解】2^n

【解析】n 元集合 A 的子集个数应该有 2^n 个。

【考点延伸】集合的子集个数

2、【正解】4

【解析】$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 4$

【考点延伸】集合论

3、【正解】如果小王不是通信专业的学生，那么小李不是数学学院学生

【解析】本题考查命题逻辑。题中用到了蕴涵联结词，在转换成自然语言时需要使用"如果……那么……"。

【考点延伸】命题逻辑

4、【正解】$(\forall x)\Big(F(x) \to (\forall y)\big(G(y) \wedge L(x,y)\big)\Big)$

【解析】本题考查谓词逻辑的符号化。"火车都比汽车快"中隐含了量词"任意"，在符号化的时候要记得加上。

【考点延伸】谓词逻辑

5、【正解】$(\forall x)P(x,y) \wedge R(z) \vee \mathrm{B}$

【解析】本题考查量词辖域的收缩。需要使用到量词辖域的收缩律。

【考点延伸】量词辖域的扩张和收缩

6、【正解】6；7

【解析】本题考查序偶。由两个元素按照一定的次序组成的二元组称为序偶，两个序偶<a, b> = <c, d>当且仅当 **a=c, b=d**。因而可得$\mathrm{x} = \mathrm{y} - 1$①；$\mathrm{y} + 5 = 2\mathrm{x}$②。由①②两式可得 x=6，y=7。

【考点延伸】序偶

7、【正解】2^{n^2}

【解析】本题考查有限集合的二元关系数量。当集合 A，B 都是有限集时，A×B 共有$|A| \times |B|$个不同的元素，这些元素将会产生$2^{|A|\times|B|}$个不同的子集。即从 A 到 B 的不同的关系共有$2^{|A|\times|B|}$个。

【考点延伸】有限集合的二元关系的数量

2019-2020 学年第二学期期末考试 B 卷参考答案

一、单选题（10×1=10 分）评分标准：对 1 个给 1 分

1、【正解】（3）
2、【正解】（1）
3、【正解】（1）
4、【正解】（1）
5、【正解】（2）
6、【正解】（1）
7、【正解】（4）
8、【正解】（4）
9、【正解】（3）
10、【正解】（2）

二、多项选择题（5×1=5 分）评分标准：完全正确 1 个给 1 分，否则不给分

1、【正解】（3、4、5）

2、【正解】（1、3）

3、【正解】（1、2、3、4、5）

4、【正解】（2、3、4、5）

5、【正解】（1、4、5）

三、简答题（4×2.5=10 分）评分标准：答对大意给 2.5 分

1、【解析】给定一个合适公式G，若变元x出现在使用变元的量词的辖域之内，则称变元x的出现为约束出现，此时的变元x称为约束变元。

2、【解析】设R是集合A上的关系。对任意的x，y，$z\in A$，如果$\langle x, y\rangle\in R$且$\langle y, z\rangle\in R$，那么$\langle x, z\rangle\in R$，则称关系R是传递的，或称R具有传递性。

3、【解析】若无向图$G=\langle V, E\rangle$的结点集V能够划分为两个子集V_1，V_2，满足$V_1\cap V_2=\Phi$，且$V_1\cup V_2=V$，使得G中任意一条边的两个端点，一个属于V_1，另一个属于V_2，则称G为偶图或二

分图。

4、【解析】在群$\langle G, *\rangle$中，若存在一个元素$g\in G$，使得对$\forall a\in G$，都有：$a=gi$（$i\in Z$，Z为整数集合），则称$\langle G, *\rangle$为循环群。

四、判断分析改错题（如果正确，说明理由，如果不正确，举例说明）（4×4=16 分）评分标准：判断正确给 2 分，理由正确给 2 分。判断错误则不给分。

1、【解析】不是。因为当P和Q的真值不同时，公式$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(Q\rightarrow P)$的值为假，所以不是永真公式。

2、【解析】可能。例如：$A=\{a\}$，$C=\{\{a\}, a\}$。

3、【解析】不是。因为删除节点 f 后有 2 个连通分支

4、【解析】不是，因为不满足式。例如：$f(1+2)=f(3)=2*3-1=5$，而$f(1)+f(2)=2*1-1+2*2-1=4$，故$f(1+2)\neq f(1)+f(2)$。

五、计算题（5×7=35 分）

1、【解析】$(\exists x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow P(y,x))$

$=(\forall y)(P(a,y)\rightarrow P(y,a))\vee(\forall y)(P(b,y)\rightarrow P(y,b))$————————2 分

$=((P(a,a)\rightarrow P(a,a))\wedge(P(a,b)\rightarrow P(b,b)))\vee((P(b,a)\rightarrow P(a,b))\wedge(P(b,b)\rightarrow P(b,b)))$

————————2 分

$=((0\rightarrow 0)\wedge(1\rightarrow 1))\vee((0\rightarrow 1)\wedge(1\rightarrow 1))$————————1 分

$=1$ ————————1 分

因此，在解释I下公式$(\exists x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow P(y,x))$的真值为 1。 ————————3 分

2、【解析】$P(A)=P(\{\Phi, 1, \{2\}\})$ ————————对一个元素给 1 分

$=\{\Phi, \{\Phi\}, \{1\}, \{\{2\}\}, \{\Phi,1\}, \{\Phi,\{2\}\}, \{1,\{2\}\},\{\Phi,1,\{2\}\}\}$

生成树的权值 W(T)=10+50+20+45+30+40=195。

4、【解析】

根据群的性质：8 阶剩余类加群的生成元为 1

G=<1>={0,1,2,…，7}

对任意的 $y=1^x\in G$，只要（n，x）=1，则 y 一定是生成元，因此，G 的所有生成元为{1，3，5，7}

而 8 的一切因子 d 都可对应产生一个 d 阶子群，并且其生成元为 $1^{8/d}$。8 的因子为 1，2，4，8，因此 G 有四个子群，分别如下：

G_1={0},生成元为 0；

G_2={0,4},生成元为 4；

G_3={0,2,4,6},生成元为 2；

G_4=G={0,1,2,…，7},生成元为 1；

5、【解析】

强分图：由{v_1,v_2,v_3,v_4}，{v_5}，{v_6}，{v_7}，{v_8}导出的子图

单向分图：由{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5}，{v_5,v_6,v_7},{ v_6,v_8}导出的子图

弱分图：该图本身，即由{$v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8$}导出的子图

六、证明题（24 分）

1、【解析】

设 Q(x)：x 是有理数；I(x)：x 是无理数；R(x)：x 是实数；C(x)：x 是虚数；则题中语句可符号化为：

$(\forall x)(Q(x)\vee I(x)\to R(x))$，$(\forall x)(C(x)\to \neg R(x))$

$\Rightarrow(\forall x)(C(x)\to \neg Q(x)\wedge\neg I(x))$

证明：

1）$(\forall x)(C(x)\to \neg R(x))$　　P

2）$C(x)\to \neg R(x)$　　US,1)

2019-2020 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、单选题(共 10 分，共 10 题，每题 1 分)

1、【正解】(1)

2、【正解】(2)

3、【正解】(3)

4、【正解】(4)

5、【正解】(3)

6、【正解】(4)

7、【正解】(2)

8、【正解】(2)

9、【正解】(3)

10、【正解】(2)

二、多项选择题(共 5 分，共 5 题，每题 1 分)

1、【正解】(2、3、5)

2、【正解】(1、4、5)

3、【正解】(2、3)

4、【正解】(2、3、4)

5、【正解】(3、4)

三、简答题（10 分）

1、【解析】

命题演算的合式公式，又称命题公式（简称公式）,可按如下规则生成：

(1) 命题变元本身是一个公式；

(2) 如 G 是公式，则（$\neg$G）也是一个公式；

【考点延伸】推理证明

2、【解析】

证明：要证 T 为$A\times B$上得偏序关系，只需证 T 是自反的、反对称的、传递的：

(1) 任取$<a_1,b_1>\in A\times B$，

由 R 和 S 为偏序集，故a_1Ra_1，b_1Sb_1，

由条件知$a_1Ra_1\wedge b_1Sb_1\Leftrightarrow<a_1,b_1>T<a_1,b_1>$，

由自反性的定义知 T 是自反的。

(2) 任取$<a_1,b_1>,<a_2,b_2>\in A\times B$，

若$<a_1,b_1>T<a_2,b_2>$且$<a_2,b_2>T<a_1,b_1>$，则有，

$a_1Ra_2\wedge b_1Sb_2$，

$a_2Ra_1\wedge b_2Sb_1$，

$\therefore a_1Ra_2\wedge a_2Ra_1$，又 R 是偏序关系，具有反对称性，$\therefore a_1=a_2$，

同理可得$b_1=b_2$，

$<a_1,b_1>=<a_2,b_2>$，

由反对称的定义知 T 是反对称的。

(3) 任取$<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_3>\in A\times B$，

若$<a_1,b_1>T<a_2,b_2>$且$<a_2,b_2>T<a_3,b_3>$，则有，

$<a_1,b_1>T<a_2,b_2>\Leftrightarrow a_1Ra_2\wedge b_1Sb_2$，

$<a_2,b_2>T<a_3,b_3>\Leftrightarrow a_2Ra_3\wedge b_2Sb_3$，

$\therefore a_1Ra_2\wedge a_2Ra_3$，又 R 是偏序关系，具有传递性，$\therefore a_1Ra_3$，

同理可得b_1Sb_3，

$a_1Ra_3\wedge b_1Sb_3\Leftrightarrow<a_1,b_1>T<a_3,b_3>$

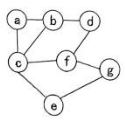
由传递的定义知 T 是传递的。

综上所述,由偏序关系的定义知 T 为$A\times B$上得偏序关系。

【考点延伸】偏序关系的证明

五、应用题（6 分）

1、【解析】



用语言的集合来表示结点，边表示两个结点有相同的语言元素，因此问题可以转化为求该图的哈密顿回路的问题，得到 abdfgec。

【考点延伸】哈密顿回路

(2)

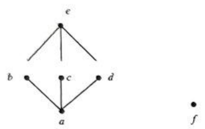
$r(R)=\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<0,3>,<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2><2,3>,<3,3>\}$

$s(R)=\{<0,1>,<0,2>,<0,3>,<1,0>,<1,2>,<1,3>,<2,0>,<2,1>,<2,3>,<3,0>,<3,1>,<3,2>\}$

【考点延伸】关系的运算

3、【解析】

(1)



(2)

极大元：e,f;

极小元：a,f;

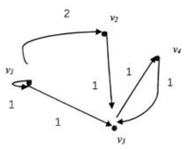
最大元：无;

最小元：无.

【考点延伸】偏序关系

4、【解析】

(1)



注：v_1处有自环。

(2)题目所给邻接矩阵为权图的邻接矩阵，在计算可达性时应当先将矩阵中正数置为 1，再进行运算。重新建立邻接矩阵：

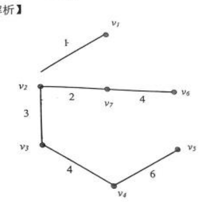
$$A'(D)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

则$P(D)=A'\vee A'^{(2)}\vee A'^{(3)}\vee A'^{(4)}$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

【考点延伸】可达性

5、【解析】



【考点延伸】最小生成树

四、证明题（ 共 14 分）

1、【解析】

证明：应当指出，该问题默认论域是人，否则无意义。故可以有如下推理：

①$\neg\forall x(F(x)\to H(x))$

②$\exists x(F(x)\to\neg H(x))$

③$F(c)\to\neg H(c)$

④$\forall x(F(x)\to G(x))$

⑤$F(c)\to G(c)$

⑥$F(c)\wedge G(c)\wedge\neg H(c)$

⑦$\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

8、【正解】$kn/2$

【解析】本题考查 n 阶 k-正则图的边数。k-正则图即每个顶点 k 个邻点，所以所有顶点的总度数为 kn，又因为一条边关联两个点，所以边数为 kn/2。

【考点延伸】正则图

9、【正解】0

【解析】本题考查点连通度。求点连通度需要找出把 G 变成不连通图或者平凡图所需去掉的最少顶点数，这里图已经不连通所以答案为 0

【考点延伸】图的点连通度

10、【正解】7

【解析】本题考查两结点间距离。两结点间的短程线的长度称为两结点间的距离。由观察法可知，a、b 两点间距离为 7。即 1+1+3+2=7。

【考点延伸】线图中两点间距离

二、选择题(20 分，每题 2 分，共 10 题)

1、【正解】C

【解析】本题考查蕴涵联结词。P→Q 可用**除非 Q，否则¬P**表示。

【考点延伸】蕴涵联结词

2、【正解】A

【解析】本题考查合取范式。题中P∨¬Q 可以看作子句，有限个子句的合取式称为合取范式。

【考点延伸】合取范式

3、【正解】A

【解析】本题考查公式等价。A 选项通过量词辖域的收缩律可以得到；B 选项等号两端公式不等价，应改为$\neg(\forall x)A(x)=(\exists x)\neg A(x)$；C 选项存在量词不满足对合取的分配律；D 选项量词有明显错误。故该题选 A。

【考点延伸】公式等价

4、【正解】B

【解析】本题考查集合间关系。题中 A 是 B 的子集，所以 A 选项 B−A 不一定为空集；B 选项正确；C 选项，A∩B=A；D 选项，A∪B=B。故该题选 B。

【考点延伸】集合之间的关系

5、【正解】D

【解析】本题考查关系的闭包。D 选项应该改为$s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$。

【考点延伸】关系的闭包

6、【正解】BD

【解析】本题考查复合运算。若 f 和 g 都是满射，则 $f\circ g$ 是满射。若 f 和 g 都是单射，则 $f\circ g$ 是单射。由函数复合运算的保守性可知。

【考点延伸】函数的复合运算

7、【正解】D

【解析】本题考查欧拉图。含有一条欧拉回路的图称为欧拉图，欧拉图所有结点的度数均为偶数。图中只有 D 符合。

【考点延伸】欧拉图

8、【正解】B

【解析】本题考查哈密顿图。含有一条哈密顿回路的图称为哈密顿图。图中只有 B 不是哈密顿图。

【考点延伸】哈密顿图

9、【正解】B

【解析】本题考查平面图。任何两边都不会在非结点处交叉的图称为平面图。图中只有 B 满足平面图的条件。

【考点延伸】平面图

10、【正解】B

【解析】本题考查偶图。根据偶图的定义。图中只有 B 不是偶图。

【考点延伸】偶图

三、计算题（ 共 40 分）

1、【解析】

$(P\vee Q)\vee(\neg P\wedge R)$

$=\big(P\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge(R\vee\neg R)\big)\vee\big((P\vee\neg P)\wedge Q\wedge(R\vee\neg R)\big)\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge R)$

$=(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$ ……………………………………………主析取范式

从而，主合取范式为$(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$。

【考点延伸】主范式

2、【解析】

(1)

$R\circ R=\{<0,2>,<0,3>,<1,3>\}$

$R^{-1}=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>,<2,1>,<3,1>,<3,2>\}$