

# 第一篇 预备知识

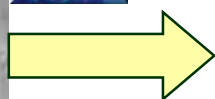
---

## 第一章 集合论

# 集合论的历史



康托尔



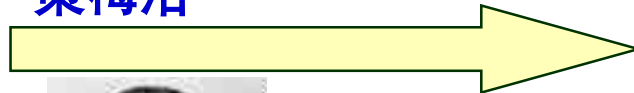
朴素集合论



策梅洛



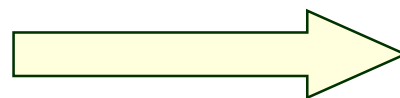
弗兰克尔



ZF公理集合论



斯科伦



ZFS公理集合论

# 1.0 内容提要

---

1

集合的概念和表示

2

集合间的关系

3

集合的运算

4

特殊集合

5

无限集的基本概念

# 1.1 本章学习要求

重点掌握

1

- 1 集合的概念及集合间关系
- 2 集合的表示
- 3 集合运算及定律
- 4 幂集 $P(A)$

一般掌握

2

- 1 集合的归纳法表示
- 2 集合的对称差运算

了解

3

- 1 集合的递归指定法表示
- 2 了解无限集的基本概念

## 1.2 集合

---

### 一、集合的概念

康托尔的集合定义：

By a "set" we mean any collection  $M$  into a whole of definite, distinct objects  $m$  (which are called the "elements" of  $M$ ) of our perception [anschauung] or of our thought.

教材定义：**集合** (SET) 由指定范围内的某些特定对象聚集在一起构成。指定范围内的每一个对象称为这个**集合的元素** (element)。

## 可有下列的集合：

---

- 1) 中国所有的人
- 2) 所有的华为手机
- 3) 在-1和1之间的所有有理数
- 4) 全体亚洲人
- 5) 所有欧洲人和松木椅子
- 6) 天安门广场所有的路灯和树
- 7) 所有C语言中的标识符

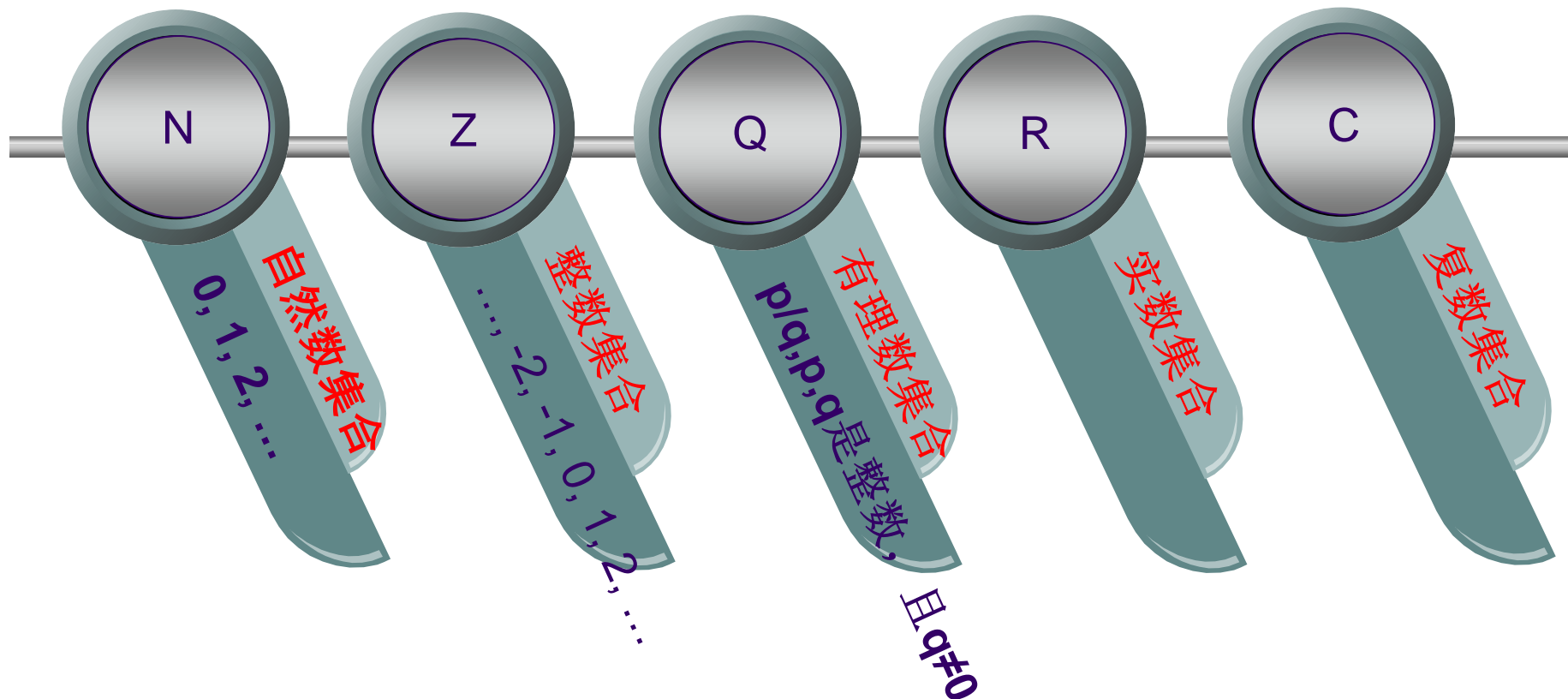
## 二、集合的记法

---

通常用带(不带)标号的大写字母 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $\dots$ 、 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ 、 $\dots$ 、 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 、 $\dots$ 表示**集合**；

通常用带(不带)标号的小写字母 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $\dots$ 、 $a_1$ 、 $b_1$ 、 $c_1$ 、 $\dots$ 、 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $\dots$ 表示**元素**。

# 常用集合





## 1.2.1 集合的表示方法

---

集合是由它包含的元素完全确定的，为了表示一个集合，通常有：

- ✓ 枚举法
- ✓ 隐式法（叙述法）
- ✓ 归纳法
- ✓ 递归指定
- ✓ 文氏图

# 1、枚举法（显式法）

——列出集合中全部元素或部分元素的方法叫**枚举法**

**适用场景：**

- ◆一个集合仅含有限个元素
- ◆一个集合的元素之间有明显关系

## 例1.2.1

$$(1) A = \{a, b, c, d\}$$

$$(2) B = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$$

# 枚举法的优缺点

---

是一种**显式表示法**

**优点：**具有**透明性**

**缺点：**在表示具有某种特性的集合或集合中元素过多时受到了一定的**局限**，而且，从计算机的角度看，显式法是一种“静态”表示法，如果一下子将这么多的“数据”输入到计算机中去，那将占据大量的“内存”。

## 2、隐式法（叙述法）

通过刻画集合中**元素所具备的某种特性**来表述集合的方法称为叙述法（隐式法）

X所具有的性质p

一般表示方法： $P = \{x | P(x)\}$

适用场景：

代表元

一个集合含有很多或无穷多个元素；

一个集合的元素之间有容易刻画共同特征

其**突出优点**是原则上不要求列出集合中全部元素，而只要给出该集合中元素的特性。

## 例1.2.2

---

(1)  $A = \{x \mid x \text{ 是 “discrete mathematics” 中的所有字母} \}$ ;

(2)  $Z = \{x \mid x \text{ 是一个整数} \}$ ;

(3)  $S = \{x \mid x \text{ 是整数, 并且 } x^2 + 1 = 0 \}$ ;

(4)  $Q^+ = \{x \mid x \text{ 是一个正有理数} \}$ 。

### 3、归纳法

归纳法是通过归纳定义集合，主要由三部分组成：

- 第一部分：基础。**指出某些最基本的元素属于某集合；
- 第二部分：归纳。**指出由基本元素造出新元素的方法；
- 第三部分：极小性。**指出该集合的界限。

**注意：**第一部分和第二部分指出一个集合至少包括的元素，第三部分指出一个集合至多要包含的元素

## 例1.2.3

---

**集合A按如下方式定义：**

- (1) 0和1都是A中的元素；
- (2) 如果a, b是A中的元素, 则ab, ba也是A中的元素；
- (3) 有限次使用(1)、(2)后所得到的字符串都是A中的元素。

**试指出其定义方式。并举出集合A中的3个元素**

## 4、递归指定集合

---

通过**计算规则**定义集合中的元素

例1.2.4 设  $a_0 = 1$ ,

$$a_{i+1} = 2a_i \quad (i \geq 0)$$

定义  $S = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

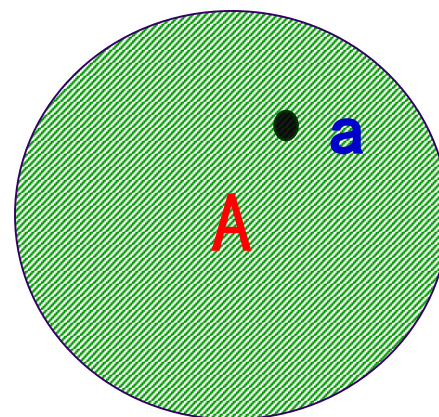
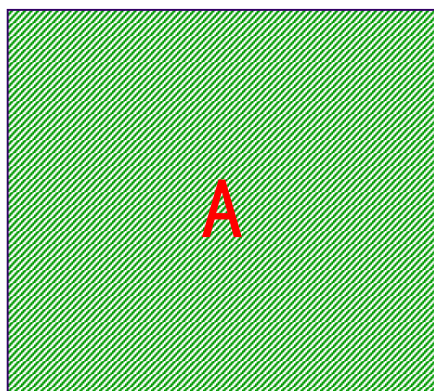
$$= \{a_k \mid k \geq 0\},$$

试写出集合S中的所有元素。



## 5、文氏图解法

**文氏图解法**是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解。一般用平面上的**圆形或方形**表示一个**集合**。而集合中的**元素**用**小圆点**来表示。



## 1.2.2 集合与元素的关系

元素与集合之间的“属于关系”是“明确”的。

对某个集合 $A$ 和元素 $a$ 来说，

✓  $a$ 属于集合 $A$ ，记为 $a \in A$

✓ 或者

✓  $a$ 不属于集合 $A$ ，记为 $a \notin A$

两者必居其一且仅居其一。

例如，对元素 $2$ 和 $N$ ，就有 $2$ 属于 $N$ ，即 $2 \in N$ ，

对元素 $-2$ 和 $N$ ，就有 $-2$ 不属于 $N$ ，即 $-2 \notin N$ 。

## 罗素悖论

**例** 在一个很僻静的孤岛上，住着一些人家，岛上只有一位理发师，该理发师专给那些并且只给那些自己不刮脸的人刮脸。那么，谁给这位理发师刮脸？

**解：** 设  $C = \{x \mid x \text{ 是不给自己刮脸的人}\}$

$b$  是这位理发师

如  $b \in C$ ，则  $b \notin C$ ；

如  $b \notin C$ ，则  $b \in C$ 。

## 1.2.3 集合与集合的关系

### 一、集合的三大特征

1、**互异性**—集合中的元素都是不同的，凡是相同的元素，均视为同一个元素；

$\{1, 1, 2\}$  与  $\{1, 2\}$  是同一个集合。

2、**确定性**—能够明确加以“区分的”对象；

3、**无序性**—集合中的元素是没有顺序的。

$\{2, 1\}$  与  $\{1, 2\}$  是同一个集合。

## 例1.2.5

设  $E = \{x \mid (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}, x \in \mathbb{R}$

$F = \{x \mid (x \in \mathbb{Z}^+) \text{ 且 } (x^2 < 12)\}.$

试指出集合E和F中的元素。

解 集合  $E = \{1, 2, 3\}, F = \{1, 2, 3\}.$

显然，集合E, F中的元素完全相同，我们称这样的两个集合相等。

### 二、外延性原理

$A=B$ 当且仅当A与B具有相同的元素，否则， $A \neq B$ 。

## 例1.2.6

---

设  $A = \{C, C++, PYTHON\}$ ,

$B = \{PYTHON, C, C++\}$ ,

$C = \{PYTHON\}$

请判断A和B, C的关系。

解 根据集合元素的**无序性和外延性原理**可得,

$A = B; A \neq C。$

**C**中的所有元素都在**A**中，这种关系就是**包含**关系，  
可记做 **$C \subseteq A$** 。

### 三、包含和真包含关系

**定义1.2.1** 设 $A, B$ 是任意两个集合，如果  
 $B$ 的每个元素都是 $A$ 的元素，  
则称 $B$ 是 $A$ 的子集合，简称**子集** (Subset)，  
这时也称 **$A$ 包含 $B$** ，或 **$B$ 被 $A$ 包含**，记作 $A \supseteq B$  或  $B \subseteq A$ ，  
称“ $\subseteq$ ”或“ $\supseteq$ ”为**包含关系** (Inclusion Relation)。  
如果 $B$ 不被 $A$ 所包含，则记作 $B \not\subseteq A$ 。

上述包含定义的数学语言描述为：

$B \subseteq A \Leftrightarrow$  对任意 $x$ ，如 $x \in B$ ，则 $x \in A$ 。

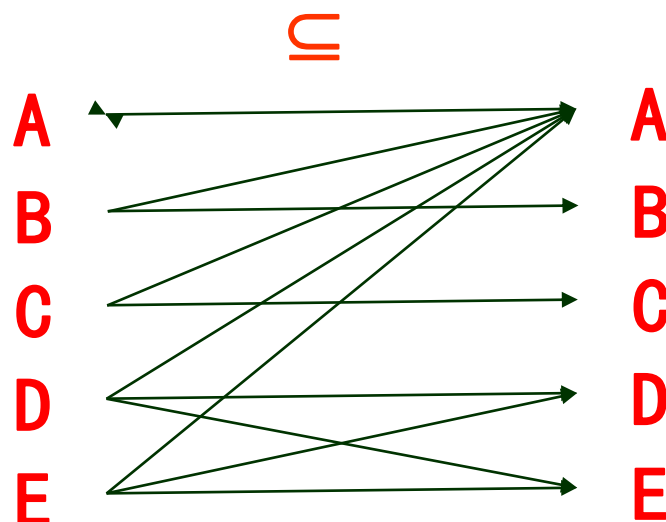
显然，对任意集合 $A$ ，都有 $A \subseteq A$ 。

## 例1.2.7

设  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{a, b, d\}$ ,  $C = \{c, d\}$ ,  
 $D = \{b, c\}$ ,  $E = \{c, b\}$ 。

请判断各集合之间的包含关系。

解





## 例1.2.7

设  $D = \{b, c\}$ ,

$E = \{c, b\}$ ,

根据集合间包含关系的定义知,  $D \supseteq E$  且  $D \subseteq E$ 。

根据外延性原理, 又知, 集合  $D = E$ , 于是我们有:

**定理1.2.2** 设  $A$ 、 $B$  是任意两个集合, 则

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

## 真包含关系

**定义1.2.2** 设 $A, B$ 是任意两个集合，如果

$$B \subsetneq A \text{ 并且 } A \neq B$$

则称 $B$ 是 $A$ 的**真子集** (Proper Subset)，记作 $B \subsetneq A$ ，  
称“ $\subsetneq$ ”为**真包含关系** (Properly Inclusion Relation)。

如果 $B$ 不是 $A$ 的真子集，则记作 $B \not\subsetneq A$ 。

上述真子集的数学语言描述为：

$B \subsetneq A \Leftrightarrow$  对任意 $x$ ，如 $x \in B$ ，则 $x \in A$ ，并且， $\exists y \in A$ ，  
但是 $y \notin B$

## 例1.2.8

---

判断下列集合之间是否具有真包含关系。

(1)  $\{a, b\}$  和  $\{a, b, c, d\}$  ;

(2)  $\{a, b, c, d\}$  和  $\{a, b, c, d\}$  。

**解** 根据真子集的定义，有

(1)  $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$  ;

(2) 因为  $\{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$  ,

所以  $\{a, b, c, d\}$  **不是**  $\{a, b, c, d\}$  的真子集。

## 例1.2.9

设 $A = \{a\}$ 是一个集合,  $B = \{\{a\}, \{\{a\}\}\}$ , 试问

$\{A\} \in B$ 和 $\{A\} \subseteq B$

同时成立吗?

**分析**  $\because \{A\} = \{\{a\}\}, \{\{a\}\} \in B$

$\therefore \{A\} \in B$ 成立;

$\because \{A\} = \{\{a\}\}, \{a\} \in B$

$\therefore \{A\} \subseteq B$ 成立。

**解**  $\{A\} \in B$ 和 $\{A\} \subseteq B$ 同时成立。

## 1.2.4 几个特殊集合

### 1、空集

**定义1.2.3** 不含任何元素的集合叫做空集 (Empty Set), 记作  $\Phi$ 。

空集可以符号化为

$$\Phi = \{x \mid x \neq x\}$$

空集是客观存在的。

### 定理1.2.3

- (1) 空集是一切集合的子集;
- (2) 空集是绝对唯一的。

## 定理1.2.3 (2) 的证明

对“唯一性”的证明通常采用反证法。

分析 即假设“不唯一”，得出矛盾，从而说明结论正确

假设  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  是两个空集，且  $\Phi_1 \neq \Phi_2$ ，

再证明  $\Phi_1 = \Phi_2$ ，出现矛盾，从而说明结论成立

那么怎么证明  $\Phi_1 = \Phi_2$ ？

与  $\Phi_1 \neq \Phi_2$  矛盾

根据定理1.2.2,  $\Phi_1 = \Phi_2 \Leftrightarrow \Phi_1 \subseteq \Phi_2, \Phi_2 \subseteq \Phi_1$

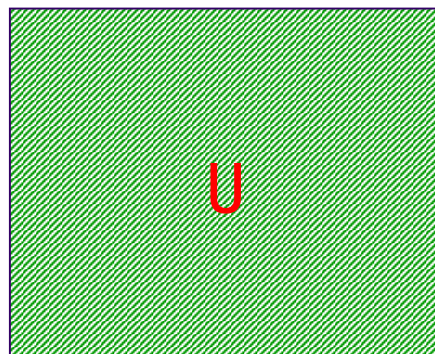
根据定理1.2.3 (1) 空集是一切集合的子集

$\therefore \Phi_1 \subseteq \Phi_2, \Phi_2 \subseteq \Phi_1$ ,

## 2、全集

**定义1.2.4** 在一个**相对固定的范围内**，包含此范围内所有元素的集合，称为**全集或论集** (Universal Set)，用 $U$ 或 $E$ 表示。

用文氏图描述如下：



## 例1.2.12

---

- (1) 在立体几何中，全集是由空间的全体点组成；
- (2) 在我国的人口普查中，全集是由我国所有人组成。

**定理1.2.5 全集是相对唯一的.**



## 有限集和无限集

- 集合A中元素的数目称为集合A的**基数** (base number)，记为  $|A|$ 。
- 如  $|A|$  是有限的，则称集合A为**有限集**，
- 如  $|A|$  是无限的，则称集合A为**无限集**。

**例1.2.13** 求下列集合的基数。

$$(1) A = \Phi ; \quad (2) B = \{\Phi\};$$

$$(3) C = \{a, b, c\}; \quad (4) D = \{a, \{b, c\}\}.$$

**解**  $|A| = 0$ ,  $|B| = 1$ ,  $|C| = 3$ ,  $|D| = 2$ 。

## m元子集

**定义1.2.6** 如果一个集合A含有n个元素，则称集合A为**n元集**，称A的含有m个 ( $0 \leq m \leq n$ ) 元素的子集为**A的m元子集**。  
任给一个n元集，怎样求出它的全部m元子集？

**例1.2.14** 设 $A = \{1, 2\}$ ，求出A的全部m元子集。

**分析**  $\because n = |A| = 2, m \leq n$

$\therefore m = 0, 1, 2$ 。

$\therefore$  当  $m = 0$  时，得到0元子集： $\Phi$ ；

当  $m = 1$  时，得到1元子集： $\{1\}, \{2\}$ ；

当  $m = 2$  时，得到2元子集： $\{1, 2\}$ 。

**解** A的全部m元子集是 $\Phi$ 、 $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 和 $\{1, 2\}$ 。

# 子集总数

---

一般来说，对于 $n$ 元集 $A$ ，它的 $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) 元子集有 $C_n^m$ 个，  
所以不同的子集总数有：

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

所以， $n$ 元集共有 $2^n$ 个子集。

## 幂集

**定义1.2.7** 设A为任意集合，把A的所有不同子集构成的集合叫做A的**幂集** (power set)，记为 **$P(A)$**  或  **$2^A$** 。其符号化表示为

$$P(A) = \{x \mid \text{一切 } x \subseteq A\}$$

该集合又称为**集族** (family of set)。

对集族的研究在数学方面、知识库和表处理语言以及人工智能等方面都有十分重要的意义。

## 例1.2.15 计算下列幂集

(1)  $P(\Phi)$ ; (2)  $P(\{\Phi\})$ ; (3)  $P(\{a, \{b, c\}\})$ 。

**解**

$$(1) P(\Phi) = \{\Phi\};$$

$$(2) P(\{\Phi\}) = \{\Phi, \{\Phi\}\};$$

$$(3) P(\{a, \{b, c\}\}) = \{\Phi, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\}。$$

显然，若集合  $A$  有  $n$  个元素，则集合  $A$  共有  $2^{|A|}$  个子集，即：

$$|P(A)| = 2^{|A|}。$$

## 1.2.5 集合的运算

**定义1.2.8** 设A、B是两个集合，

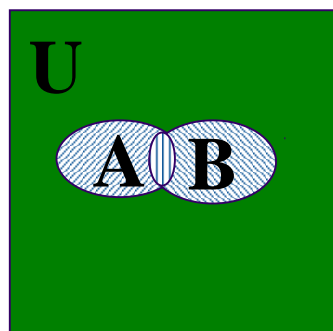
(1) 并集  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

(2) 交集  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

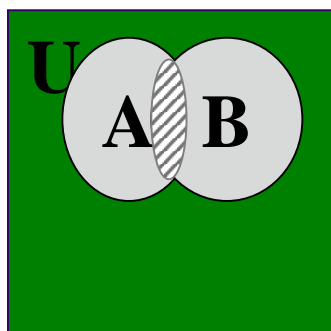
(3) 差集  $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$

(4) 补集  $\bar{A} = U - A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$  ( $A'$ ,  $\sim A$ ,  $A^c$ )

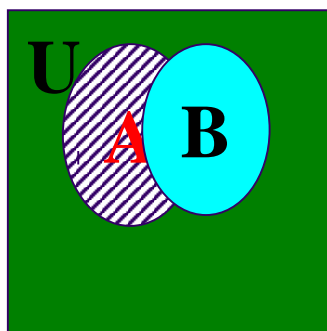
(5) 对称差集  $A \oplus B = \{x \mid (x \in A) \text{ 且 } (x \notin B) \text{ 或 } (x \in B) \text{ 且 } (x \notin A)\}$



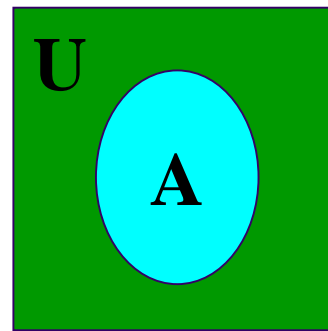
并集



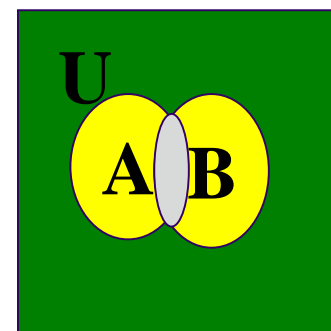
交集



差集



补集



对称差集

# 推广

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \\ = \{x \mid (x \in A_1) \text{ 或 } (x \in A_2) \text{ 或 } \dots \text{ 或 } (x \in A_n)\}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \\ = \{x \mid (x \in A_1) \text{ 且 } (x \in A_2) \text{ 且 } \dots \text{ 且 } (x \in A_n)\}$$

当n无限增大时，可以记为：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

## 定理1.2.5

---

1. 等幂律:  $A \cup A = A$ ;  $A \cap A = A$ ;
2. 交换律:  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$ ;
3. 结合律:  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ;  
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;
4. 恒等律:  $A \cup \Phi = A$ ;  $A \cap U = A$ ;
5. 零律:  $A \cup U = U$ ;  $A \cap \Phi = \Phi$ ;
6. 分配律:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. 吸收律:  $A \cap (A \cup B) = A$ ;  $A \cup (A \cap B) = A$ ;



## 定理1.2.5(续)

8.  $A - A = \Phi$ ;      9.  $A - B = A - (A \cap B)$ ;

10.  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ ;

11.  $A \cup (B - A) = A \cup B$ ; 12.  $A - B = A \cap \bar{B}$ ;

13. 否定律:  $\overline{\bar{A}} = A$ ;

14. DeMorgan律:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ;

15. 矛盾律:  $A \cap \bar{A} = \Phi$ ;

16. 排中律:  $A \cup \bar{A} = U$ 。

# 证明:

**DeMorgan律:**  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

## 分析

**定理1.2.2** 设A、B是任意两个集合，则

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$$

$$(1) \quad \overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(2) \quad \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

## 证明 (a) :

$$\textcircled{1} \quad \forall x \in \overline{A \cup B}$$

$$\Rightarrow \forall x \notin A \cup B$$

$$\Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B$$

$$\Rightarrow x \in \bar{A} \text{ 且 } x \in \bar{B}$$

$$\Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\textcircled{2} \quad \forall x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\Rightarrow x \in \bar{A} \text{ 且 } x \in \bar{B}$$

$$\Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B$$

$$\Rightarrow \forall x \notin A \cup B$$

$$\Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$$

$$\Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

由①、②知,  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

## 证明 (b) :

(b) 在  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  中, 用  $\bar{A}$  和  $\bar{B}$  分别取代A和B, 则有

$$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \overline{\bar{A}} \cap \overline{\bar{B}} = A \cap B$$

$$\Rightarrow \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \overline{\bar{A} \cap B}$$

$$\Rightarrow \overline{\bar{A} \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

## 1.3 无限集

---

有限集  $\longrightarrow$  无限集  
量 变  $\longrightarrow$  质 变

无限集合无法用确切的个数来描述，因此，无限集合有许多有限集合所没有的一些特征，而有限集合的一些特征也不能任意推广到无限集合中去，即使有的能推广，也要做某些意义上的修改。

## 1.3.1 可数集合和不可数集合

---

问题1：  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  与集合  $\{1, 4, 9\}$  那个包含的元素个数多？

问题2： 集合  $\{1, 2, 3, \dots\}$  与  $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$  哪个集合的元素更多？

## 1.3.1 可数集合与不可数集合

### 引入：自然数集合

二十世纪初，集合成为数学的基本概念之后，由冯·诺依曼（Von Neumann, J.）用集合的方式来定义自然数取得了成功，提出了用序列  $\Phi$ ,  $\{\Phi\}$ ,  $\{\Phi, \{\Phi\}\}$ ,  $\{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$ ,  $\dots$  来定义自然数。

## 自然数集合N的定义

$\Phi \in N$ ,

若  $n \in N$ , 则  $n' := n \cup \{n\} \in N$ 。

也即:  $0 := \Phi$ ,

$1 := \{\Phi\} = \{0\}$ ,

$2 := \{\Phi, \{\Phi\}\} = \{0, 1\}$

...

$n := \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$

...

故  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$



## 等势的概念

**定义1.3.1** 设A, B是两个集合, 若在A, B之间存在**1-1对应**的关系:

$$\psi : A \rightarrow B$$

则称A与B是**等势的** (equipotential), 记为:  **$A \sim B$** 。

也称集合A与B**等势** (equipotent)。

注意: 若 $A=B$ , 则  $A \sim B$ . (✓)

若 $A \sim B$ , 则  $A=B$  (✗)

## 可数集合(可列集)

**定义1.3.2** 凡是与**自然数集合**等势的集合, 统称为**可数集合**(可列集)(Countable Set)。

记为:  $\aleph_0$  (读作**阿列夫零**)。

**例1.3.1** 下列集合都是可数集合:

- 1)  $O^+ = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ 是奇数}\};$
- 2)  $P = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ 是素数}\};$
- 3) 有理数集合 $Q$ .

解：1)

---

在 $0^+$ 与 $N$ 之间建立1-1对应的关系  $f: N \rightarrow 0^+$  如下：

$N$      $0$      $1$      $2$      $3$      $4$      $\dots$      $n$      $\dots$

$f$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\dots$      $\downarrow$      $\dots$

$0^+$      $1$      $3$      $5$      $7$      $9$      $\dots$      $2n+1$      $\dots$

所以， $0^+$ 是可数集合。

## 2)

在P与N之间建立1-1对应的关系

$f: N \rightarrow P$ 如下:

N    0    1    2    3    4    ...

f    ↓    ↓    ↓    ↓    ↓    ...

P    2    3    5    7    11    ...

所以, P是可数集合。



## 定理1.3.1

---

两个有限集合等势当且仅当它们有相同的元素个数；

有限集合不和其任何真子集等势；

可数集合可以和其可数的真子集等势。

# 不可数集合

---

## 定义1.3.3

开区间  $(0, 1)$  称为不可数集合，其基数设为  $\aleph$  (读作阿列夫)；

凡是与开区间  $(0, 1)$  等势的集合都是不可数集合。

- 例1.3.2 (1) 闭区间  $[0, 1]$  是不可数集合；  
(2) 实数集合  $\mathbb{R}$  是不可数集合。

## 例1.3.2 解

(1) 在闭区间 $[0, 1]$ 和开区间 $(0, 1)$ 之间建立如下对应关系:

$$R : \begin{cases} 0 \rightarrow 1/4, \\ 1 \rightarrow 1/2, \\ \frac{1}{2^n} \rightarrow \frac{1}{2^{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots), \\ n \rightarrow n \quad (\text{其他 } n \in (0, 1)). \end{cases}$$

则上述对应是**一一对应**的关系。所以 $[0, 1]$ 与 $(0, 1)$ 一定是等势的, 即 **$[0, 1]$ 是不可数集合**。



## 例1.3.2 解（续）

---

(2) 在实数集  $\mathbb{R}$  和开区间  $(0, 1)$  之间建立如下对应关系：

$$n \rightarrow \tan \pi \left( \frac{2n-1}{2} \right)$$

显然此对应关系是**一一对应**关系，即  $(0, 1)$  与  $\mathbb{R}$  之间是等势的，所以 **$\mathbb{R}$ 是一个不可数集合**。

## 1.4 集合的应用

**例1.4.1** 用H代表硬币正面，T代表硬币反面。试写出当扔出三个硬币时可能出现的结果所组成的集合。

**解：**8种可能： $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ 。但这三个硬币没有顺序之分，即HHT和HTH是同一个元素，所以

$$A = \{HHH, HHT, HTT, TTT\}。$$

## 例1.4.2

一个正三角形被均分为三个小三角形，如图1.4.1所示。现**用黑、白二色**对其小三角形着色，假设**经旋转能使之重合的图像算一种**。试写出由不同图像构成的集合。

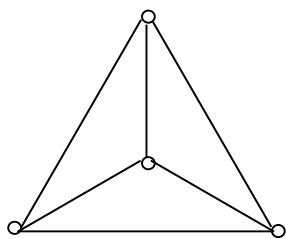


图1.4.1

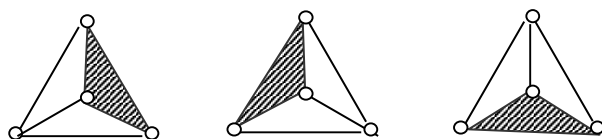
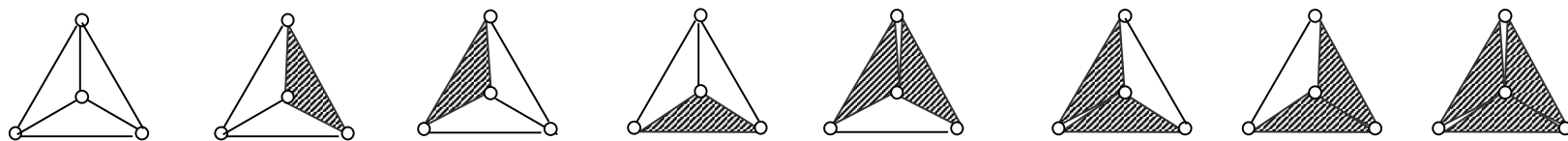


图1.4.2



1

2

3

4

5

6

7

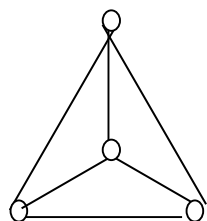
8

图1.4.3

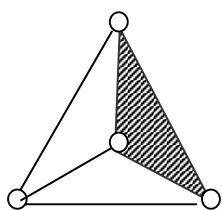
## 例1.4.2 解

因为每个小三角形均可着色，三个小三角形共有  $2 \times 2 \times 2 = 8$  种着色方案，所以可得8种不同的图像。

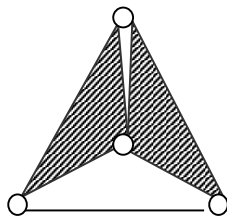
又因为经旋转能使之重合的图像算一种，如图1.4.2，所以共有4种不同的着色方案。因此由不同图像构成的集合为  $\{1, 2, 5, 8\}$ 。



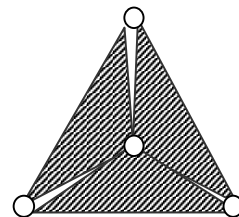
1



2



5



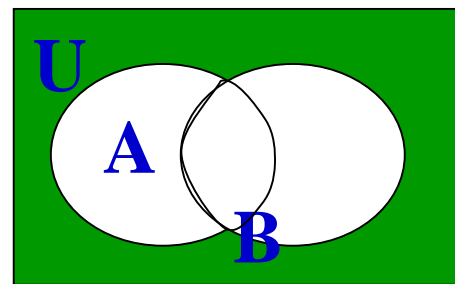
8

## 例1.4.4

在20个大学生中，有10人爱好音乐，有8人爱好美术，有6人既爱好音乐又爱好美术。问不爱好音乐又不爱好美术的学生有多少个？

**解** 设所有的大学生的集合为 $U$ ，爱好音乐的学生集合为 $A$ ，爱好美术的学生集合为 $B$ ，既爱好音乐和又爱好美术的学生组成的集合为 $A \cap B$ ，则既不爱好音乐又不爱好美术的学生组成的集合为 $\bar{A} \cap \bar{B}$ 。

如右图：



## 例1.4.4解（续）

根据已知有  $|U| = 20$ ,  $|A| = 10$ ,  $|B| = 8$ ,

$$|A \cap B| = 6$$

又因为,  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$$= 10 + 8 - 6 = 12$$

从而,  $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |A \cup B| = 20 - 12 = 8$

即不爱好音乐又不爱好美术的学生有8个。

## 1.5 本章总结

---

- 1、**与集合相关的概念和特殊集合：**集合的定义、集合的表示、属于和不属于、子集、真子集、包含和真包含、幂集、空集、全集、基数、有限集、无限集等；
- 2、**与集合运算相关的概念和定理：**集合的交、并、差、补和对称差等五种运算的定义及相关定理。

## 习题类型

---

- (1) **基本概念题**：涉及集合的表示；
- (2) **判断题**：涉及元素与集合、集合与集合间的关系；
- (3) **计算题**：涉及集合的运算和幂集的计算；
- (4) **证明题**：涉及集合相等以及集合间包含关系的证明。



## 习题（第一次作业）

---

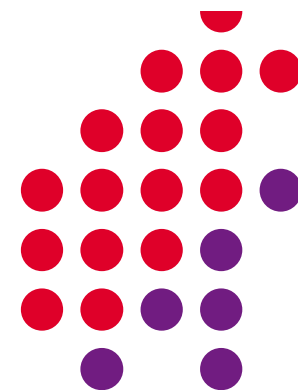
7. 1) 3) 5) 7) ; 9.

13. 2) 4) 6) 8) 10) 12) 14) 16)

23. 1) 3) 5) ;      24. 1) 3)

25.                      29 (1) , (3)

31



# Thank You !

---