本次课的内容是：

条件概率，乘法公式，全概率公式。

重点：全概率公式。

下次课内容：

§1.3 中的Bayes公式，

§1.4中独立事件，结束第一章。

条件概率：

同一试验中，一个事件发生与否对其它事件发生的可能性大小如何影响

定义：$P(B)>0$， $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

为在事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率。

教材的性质1.3.1可知条件概率是一种概率。

(Kolmogorov公理(概率公里化): 非负性、规范性和可列可加性)

教材的性质1.3.3:

1) $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$

2) $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$

无条件概率$P(A)$: 试验、可能 (事件A)

条件概率 $P\left(A|B\right)$：试验, 现实（事件B), 可能(事件A)

明确语句：指明B已经在A之前已经发生的情况下

张签中有三张幸运签,3人依次各抽一张签,第一个人抽到幸运签, 问第二人抽到幸运签的概率?

$P(AB)$： 试验、可能（事件A和B同时都发生）

没有明确语句指明B在A之前已经发生

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B|A) \\ &= P(B)P(A|B) \end{aligned} \le P\left(A|B\right)$$

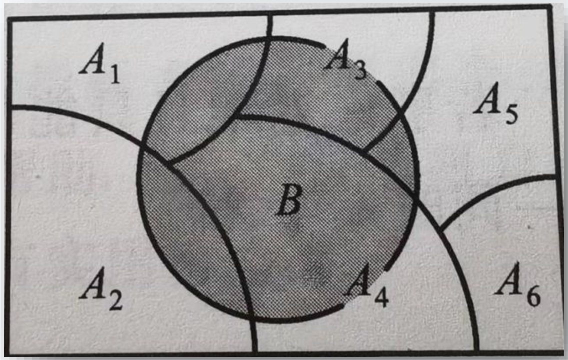
乘法公式：条件概率定义的改写

全概率公式 (又称为事前概率): 常用在预测推断中由“原因” $A_1, \ldots, A_n$ (有限划分或完备事件组)

求（或预测）事件(试验结果)B的$P(B)$。

$$B = B\cap \Omega = B\cap (A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n}(BA_i)$$



$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

注1：概括了一种普通的解题策略:各个击破或分而食之

注2：乘法公式和加法公式的综合应用；

全概率公式本质是关于无条件概率的计算；

关键搞清楚试验如何做的，来分清原因与结果。

例1 设袋中有n个红球，m个白球。三人依次不放回地各取出一个球。求他们取得红球的概率各为多少？

解：设A_i={第 i 个人取到红球}，i=1,2,3

$$P(A_1)=\frac{n}{m+n},$$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$$

$$=\frac{n}{m+n}\times\frac{n-1}{m+n-1}+\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n-1}$$

$$=\frac{n}{m+n}$$

求$P(A_3)$时，我们把 A_1A_2, $\overline{A_1}A_2$, $A_1\overline{A_2}$, $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$这四个事件构成一个有限划分，由全概率公式可得

例1 设袋中有n个红球，m个白球。三人依次不放回地各取出一个球。求他们取得红球的概率各为多少？

$$P(A_3)=P(A_1A_2)P(A_3\mid A_1A_2)+P(A_1\overline{A_2})P(A_3\mid A_1\overline{A_2})$$
$$+P(\overline{A_1}A_2)P(A_3\mid \overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(A_3\mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})$$
$$=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)+P(A_1)P(\overline{A_2}\mid A_1)P(A_3\mid A_1\overline{A_2})$$
$$+P(\overline{A_1})P(A_2\mid \overline{A_1})P(A_3\mid \overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid \overline{A_1})P(A_3\mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})$$
$$=\frac{n}{m+n}\times\frac{n-1}{m+n-1}\times\frac{n-2}{m+n-2}+\frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}\times\frac{n-1}{m+n-2}$$
$$+\frac{m}{m+n}\times\frac{m-1}{m+n-1}\times\frac{n}{m+n-2}=\frac{n}{m+n}$$

有 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)$.

商场销售一批智能电视机共50 台，其中有15台次品, 35台正品. 两顾客依次任选一台, 则第二名顾客购买到正品的概率是_____。

设选择题有四个答案，只有一个是正确的。懂的学生能够准确回答，不懂的学生从四个答案中随机选择。假定一个学生懂与不懂的概率都是 0. 5. 试计算

（1） 随机抽取一位学生，他答对的概率；

（2） 一位答对的学生对该题不懂的概率。

B与B构成一个样本空间的划分。

解：设随机事件 A={回答正确} B={对该题不懂}

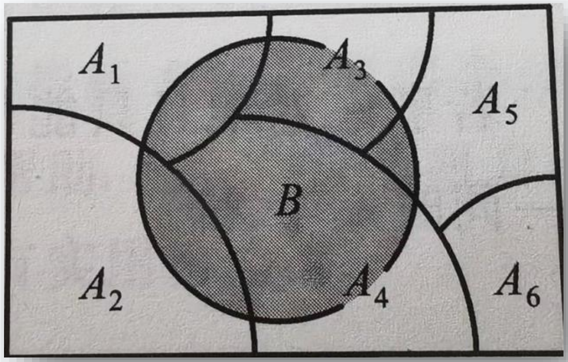
（1）由全概率公式：$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$

$$=0.5*0.25+0.5*1=0.625$$

$$P\left(\bar{B}|A\right)=?$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{0.5*0.25}{0.625}=0.2$$

例2(抽检试验) 某工厂有4个车间生产同一种产品,其产品分别占总产量的15%、20%、30%和35%，在各车间里的次品率依次为0.05、0.04、0.03及0.02。现从出厂产品中任取一件，为次品的概率是多少？



解：设A={任取一件，恰好取到次品}

B_i={恰好取到第 i 个车间的产品},

i=1,2,3,4 构成一个样本空间的划分。

$$P(B_1)=0.15, P(B_2)=0.20, P(B_3)=0.30, P(B_4)=0.35.$$

$$P(A\mid B_1)=0.05, P(A\mid B_2)=0.04, P(A\mid B_3)=0.03, P(A\mid B_4)=0.02.$$

由全概率公式可得 $P(A)=\sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A\mid B_i)=0.0315$

如上例中抽检试验中，如果已抽到一件次品，需追究有关车间的责任，你如何考虑？

在应用中,我们常遇到:
在已知结果已经发生的条件下,去找出最有可能导致它发生的原因。

例3 某工厂有4个车间生产同一种产品,其产品分别占总产量的15%、20%、30%和35%，各车间的次品率依次为0.05、0.04、0.03及0.02。现从出厂产品中任取一件，发觉该产品是次品而且其标志已脱落，厂方应如何处理此事较为合理?

分析 设 A={恰好取到次品},

B_i={恰好取到第 i 个车间的产品}, i=1,2,3,4

构成一个样本空间的划分。

事件A已成为现实，需考虑是哪一个“原因”所致的可能性大小，

即求条件概率 $P(B_k \mid A)$.

例2 某工厂有4个车间生产同一种产品,其产品分别占总产量的15%、20%、30%和35%，各车间的次品率依次为0.05、0.04、0.03及0.02。现从出厂产品中任取一件，发觉该产品是次品而且其标志已脱落，厂方应如何处理此事较为合理?

解：$P(B_1)=0.15, P(B_2)=0.20, P(B_3)=0.30, P(B_4)=0.35.$

$P(A\mid B_1)=0.05, P(A\mid B_2)=0.04, P(A\mid B_3)=0.03, P(A\mid B_4)=0.02.$

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(A_1B)}{P(A)}=\frac{P(B_1)(A\mid B_1)}{P(A)}=\frac{0.15\times 0.05}{0.0315}=\frac{15}{63}$$

同理：

$$P(B_2\mid A)=\frac{P(B_2)P(A\mid B_2)}{P(A)}=\frac{16}{63}$$

$$P(B_3\mid A)=\frac{18}{63} \qquad P(B_4\mid A)=\frac{14}{63}$$

次品最有可能来自第3个车间。

如上例中抽检试验中，如果已抽到一件次品，需追究有关车间的责任，你如何考虑？

应计算以下概率： 追究责任问题

$P(B_i|A)=?$　　$i=1, 2, 3,4.$ 并比较其大小。

这类概率称为事后概率。

这 一类应用问题：把事件A看成“结果”，事件B_1，B_2，…，B_n看成导致该结果的可能“原因”，在已知A发生的条件下,去找出最有可能导致它发生的”原因”. 即$P(B_j|A)$为“原因”B_j导致该结果发生的概率.

这一类问题称为贝叶斯(Bayes)问题。

Thomas Bayes, 英国神学家、数学家、说理统计学家和哲学家

(1702-1763)

(Thomas Bayes 18世纪英国人)

托马斯·贝叶斯简介

托马斯·贝叶斯 (Thomas Bayes),英国神学家、数学家、说理统计学家和哲学家，1702年出生于英国伦敦，做过神甫；1742年成为英国皇家学会会员；1763年4月7日逝世.

18世纪概率论理论创始人, 贝叶斯统计学的创立者，“归纳地”运用数学概率，即“从非凡推论一般、从样本推论全体”的第一人. 贝叶斯曾是对概率论与统计的早期发展有重大影响的两位（贝叶斯和布莱斯·帕斯卡Blaise Pascal）人物之一.

Thomas Bayes, 英国人
(1702-1763)

贝叶斯的贡献

贝叶斯在数学方面主要研究概率论. 他首先将归纳推理法用于概率论基础理论，并创立了贝叶斯统计理论，对于统计决策函数、统计推断、统计的估算等做出了贡献。1763年发表了这方面的论著，对于现代概率论和数理统计都有很重要的作用。贝叶斯的另一著作《机会的学说概论》发表于1758年.贝叶斯所采用的许多术语被沿用至今.

他对统计推理的主要贡献是使用了"逆概率"这个概念，并把它作为一种普遍的推理方法提出来。贝叶斯定理原本是概率论中的一个定理，这一定理可用一个数学公式来表达，这个公式就是闻名的贝叶斯公式。

他对统计推理的主要贡献是使用了"逆概率"这个概念，并把它作为一种普遍的推理方法提出来。贝叶斯定理原本是概率论中的一个定理，这一定理可用一个数学公式来表达，这个公式就是闻名的贝叶斯公式。

贝叶斯公式是他在1763年提出来的：

假定$B_1, B_2, \ldots\ldots$是某个过程的若干可能的前提，则$P(B_i)$是人们事先对各前提条件出现可能性大小的估计，称之为先验概率；

假如这个过程得到了一个结果A，那么贝叶斯公式提供了我们根据A的出现而对前提条件做出新评价的方法；

$P(B_i|A)$既是对前提B_i的出现概率的重新熟悉，称 $P(B_i|A)$为后验概率。

经过多年的发展与完善，贝叶斯公式以及由此发展起来的一整套理论与方法，已经成为概率统计中的一个冠以“贝叶斯”名字的学派，在自然科学及国民经济的许多领域中有着广泛应用。

四、贝叶斯公式 (Thomas Bayes 18世纪英国人)

定理（贝叶斯公式）：设随机试验E的样本为Ω, $A\subset\Omega$, $B_1,B_2,\ldots,B_n$为Ω的一个有限划分,且$P(B_i)>0$, $i=1,2,\ldots,n$；则有

$$P\left(B_j\middle|A\right)=\frac{P(B_j)P\left(A\middle|B_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P\left(A\middle|B_i\right)}$$

证明：
$$P\left(B_j\middle|A\right)=\frac{P\left(AB_j\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P(B_j)P\left(A\middle|B_j\right)}{P\left(A\right)}$$

注：*Bayes*公式重要的现实意义。

追究责任问题

解： $P(B_1)=0.15, P(B_2)=0.20, P(B_3)=0.30, P(B_4)=0.35.$

$P(A\mid B_1)=0.05, P(A\mid B_2)=0.04, P(A\mid B_3)=0.03, P(A\mid B_4)=0.02.$

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.15\times 0.05}{0.0315}=\frac{15}{63}$$

同理：

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{16}{63}\qquad P(B_3|A)=\frac{18}{63}\qquad P(B_4|A)=\frac{14}{63}$$

次品最有可能来自第3个车间。

先看$P(B_1)$，…，$P(B_n)$它是在没有进一步的信息(不知事情A发生)的情况下，人们对事件组B_1，…，B_n发生可能性大小的认识(先验概率)。

现在有了新的信息(知道A发生)，人们对B_1，…，B_n发生可能性大小有了新的估价(后验概率)。

先看$P(B_1)$，…，$P(B_n)$它是在没有进一步的信息（不知事情A发生）的情况下，人们对事件组B_1，…，B_n发生可能性大小的认识。

现在有了新的信息（知道A发生），人们对B_1，…，B_n发生可能性大小有了新的估价。

追究责任问题

从数量上刻画了一种变化：原以为不甚可能的一种情况，可因某种事件的发生而变得甚为可能，或相反。

贝叶斯公式用来计算事后概率,即“结果推原因”。

而全概率公式用于计算事前概率,即“原因推结果”。

例如：病情诊断试验　自动识别系统

回忆-肝癌检查

例2：在肝癌普查中发现, 某地区的自然人群中, 每十万人内平均有40人患原发性肝癌, 有34人甲胎球蛋白高含量, 有32人既患原发性肝癌又出现甲胎球蛋白高含量。求：

(1)患原发性肝癌的人中呈现其甲胎球蛋白的可能性多大?

(2)甲胎球蛋白的测定下, 患原发性肝癌的人可能性多大?

解：令A={患原发性肝癌}，　　B={甲胎球蛋白}，

$$P(A)=0.0004 \quad P(B)=0.00034 \quad P(AB)=0.00032$$

所求条件概率为：$(1)P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.00032}{0.0004}=0.8$

$(2)P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.00032}{0.00034}=0.9412$

注: 患原发性肝癌的人有80%其甲胎球蛋白呈现出高含量,

而甲胎球蛋白的测定大大有助于发现原发性肝癌患者:

若出高含量, 则有94%以上的概率对患原发性肝癌作出正确诊断.

例4(病情诊断试验) 假定用血清甲胎球蛋白法诊断肝癌，由于各种原因，被诊断为患有肝癌的患者未必患有肝癌。

令 A={被检查者诊断为患有肝癌}, B={被检查者确实患有肝癌}.

假设 $P(B)=0.0004$ (自然人群比率),

$P(A|B)=0.95$ (对肝癌病人的诊断准确率很高),

$P(\bar{A}|\bar{B})=0.9$ (对非肝癌病人的诊断准确率也很高),

现有一病人被该方法诊断为肝癌, 求此人确是患者的概率, 即$P(B|A)$.

解:从题设 $P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.0004$， $P(A|\bar{B})=1-0.9$.

根据贝叶斯公式有

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+(1-0.0004)\times(1-0.9)}\approx0.0038$$

病情诊断试验

令 A={被检查者诊断为患有肝癌}, B={被检查者确实患有肝癌}.

假设 $P(B)=0.0004$, $P(A|B)=0.95$ $P(\bar{A}|\bar{B})=0.9$ $P(B|A)\approx 0.0038$

$$P(B|A)=\frac{0.0004\times 0.95}{0.0004\times 0.95+(1-0.0004)\times(1-0.9)}\approx 0.0038$$

先验概率$P(B)$很小.对自然人群来讲肝癌毕竟是一种罕见病.假如对十万人进行普查,肝癌患者约40人,用该法检查,可正确查出约38人,漏掉2人;

但对于99960个正常者,虽然该法的误检率只有10%,却要错判9996人,因此在38+9996=10034人个嫌疑者中,每个事实上只有38/10034=0.0038的可能性真的患有肝癌.

如果我们检查的是一个肝癌的可疑人群,譬如一批普查中筛选出的甲胎球蛋白高含量者,这时相应的先验概率就高得多,例如就取例中的0.9412,那么

$$P(B|A)=\frac{0.9412\times 0.95}{0.9412\times 0.95+(1-0.9412)\times 0.1}\approx 0.9935$$

相应的后验概率大大提高.

实际上, 从预防医学的普查到治疗医学的诊断正是如此一级一级筛选的.

病情诊断试验

例4(病情诊断试验) 假定用血清甲胎球蛋白法诊断肝癌，由于各种原因，被诊断为患有肝癌的患者未必患有肝癌。

令 A={被检查者诊断为患有肝癌}, B={被检查者确实患有肝癌}.

假设 $P(B)=0.0004$, $P(B|A)\approx 0.0038$

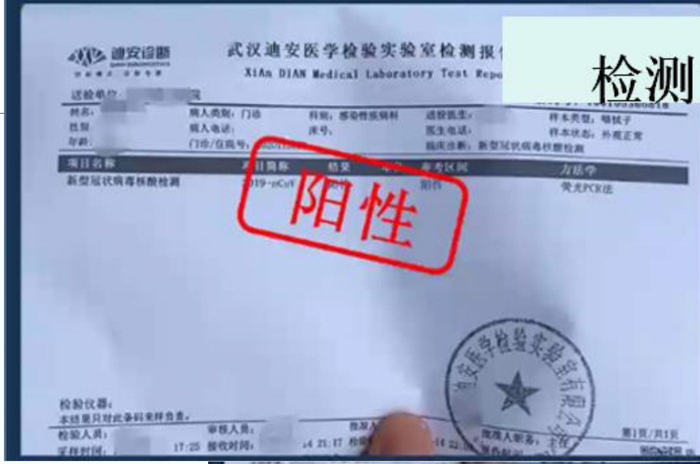
假设 $P(B)=0.9412$, $P(B|A)\approx 0.9935$

这个数值例子最大的启示是: 后验概率的大小很受先验概率选取的影响的.

在贝叶斯公式的使用中,最有争议之点就是先验概率的选取.上述例中,这些先验概率都是通过以往大量实际调查而得出的,符合概率的频率解释;

在贝叶斯公式的使用中也存在另一种情况,就是先验概率是由某一种主观的方式给定的,譬如对于未来宏观经济形势的看法,对物价、利率、汇率变化的估计,对某星球上存在生命现象的估计等等.这种把概率解释为信任程度的做法含有明显的主观性,通常称为主观概率;

主观概率与贝叶斯学派的发展息息相关,后者是二战后得到很快发展的统计学派,理论上与决策理论关系密切,并且找到不少应用.



检测为阳性，真的患有新冠肺炎”的概率

www.thepaper.cn 2020-03-12 15:44

在人工智能技术快速发展的今天，抗击新冠肺炎疫情同样可以看到AI的助攻。南开大学计算机学院程明明教授团队联合北京推想科技有限公司研发的新冠肺炎CT影像AI筛查系统，已在包括湖北在内的国内40家医院应用部署，辅助医生开展新冠肺炎快速诊断、程度评估、病程动态监测等工作。截至3月12日，该系统已持续运行50余天，累计检测筛查8.1万病例，协助医生确诊新冠肺炎6000余例，系统敏感度（正确确诊率）98.3%，特异度（正确排除率）81.7%。该系统完成一个300张CT影像的病例的计算，只需10秒左右。

设事件

A=“患新冠肺炎”，

$\bar{A}$=“未患新冠肺炎”；

B=“检测为阳性(患病)”，

$\bar{B}$=“检测为阴性”.

提取信息

$$P(A)=0.6/8.1\approx 7.41\%$$

$$P(B|A)=98.3\%$$

$$P(\bar{B}|\bar{A})=81.7\%$$

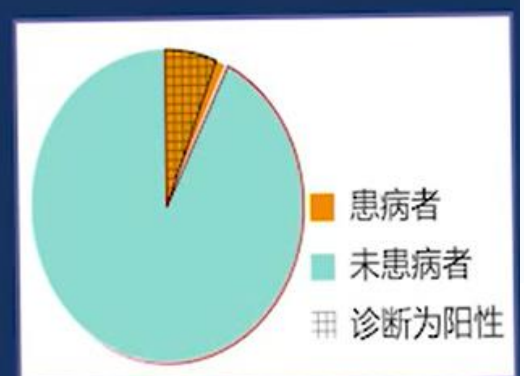
为什么？ **患病率低！**

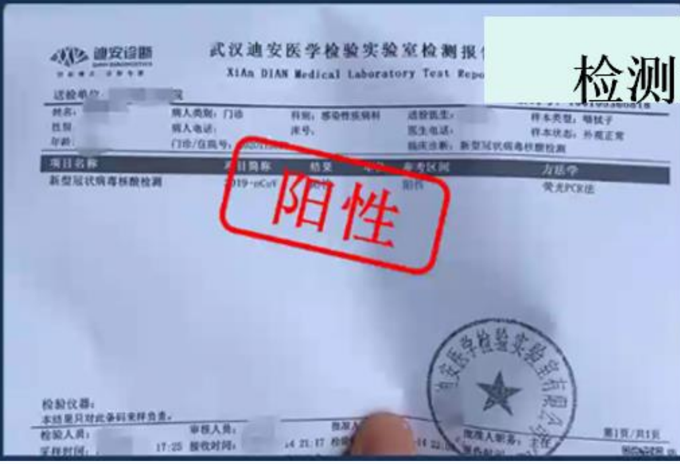
正确确诊率 98.3%

正确排除率 81.7%

误排除率 1.7%

误确诊率 18.3%





rd_6472689

检测为阳性，真的患有新冠肺炎”的概率

www.thepaper.cn 2020-03-12 15:44

在人工智能技术快速发展的今天，抗击新冠肺炎疫情同样可以看到AI的助攻。南开大学计算机学院程明明教授团队联合北京推想科技有限公司研发的新冠肺炎CT影像AI筛查系统，已在包括湖北在内的国内40家医院应用部署，辅助医生开展新冠肺炎快速诊断、程度评估、病程动态监测等工作。截至3月12日，该系统已持续运行50余天，累计检测筛查8.1万病例，协助医生确诊新冠肺炎6000余例，系统敏感度（正确确诊率）98.3%，特异度（正确排除率）81.7%。该系统完成一个300张CT影像的病例的计算，只需10秒左右。

设事件

A=“患新冠肺炎”，

$\bar{A}$=“未患新冠肺炎”；

B=“检测为阳性(患病)”，

$\bar{B}$=“检测为阴性”。

计算概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

条件概率　乘法公式　全概率公式

$$=\frac{7.41\%\times 98.3\%}{7.41\%\times 98.3\%+(1-7.41\%)\times(1-81.7\%)}$$

$$\approx 30.06\%$$

提取信息

$$P(A)=0.6/8.1\approx 7.41\%$$

$$P(B|A)=98.3\%$$

$$P(\bar{B}|\bar{A})=81.7\%$$

$P(A)=7.41\%$ 时，检测为阳性，真正患病的概率仅为 30.06%！！！

怎么办？　复查！

第二次仍为阳性 $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}\approx 69.78\%$

第三次仍为阳性 $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}\approx 92.54\%$

贝叶斯公式

内容

1、什么是贝叶斯公式?

→ “执果索因”的条件概率

思想

2、贝叶斯公式为什么有用?

→ 在历史传承和实践创新中发展认识

应用

3、如何利用公式解决问题?

→ 新冠诊断、汉字输入法、垃圾邮件过滤等

贝叶斯方法的大量应用出现在决策问题中,下面是自动识别系统的一个例子

例5(贝叶斯决策) 为了判断一个字母是“C”还是“O”，通常采用先抽取它的某一特征X, 然后再根据这个特征作出判决,这时贝叶斯决策是常用方法之一.

A_1和A_2分别记检验的字母为C和0这一事件, 它们的

先验概率$P(A_1)$及$P(A_2)$应预先给定,

通过试验确定$P(X \mid A_1)$及$P(X \mid A_2)$, 由贝叶斯公式得

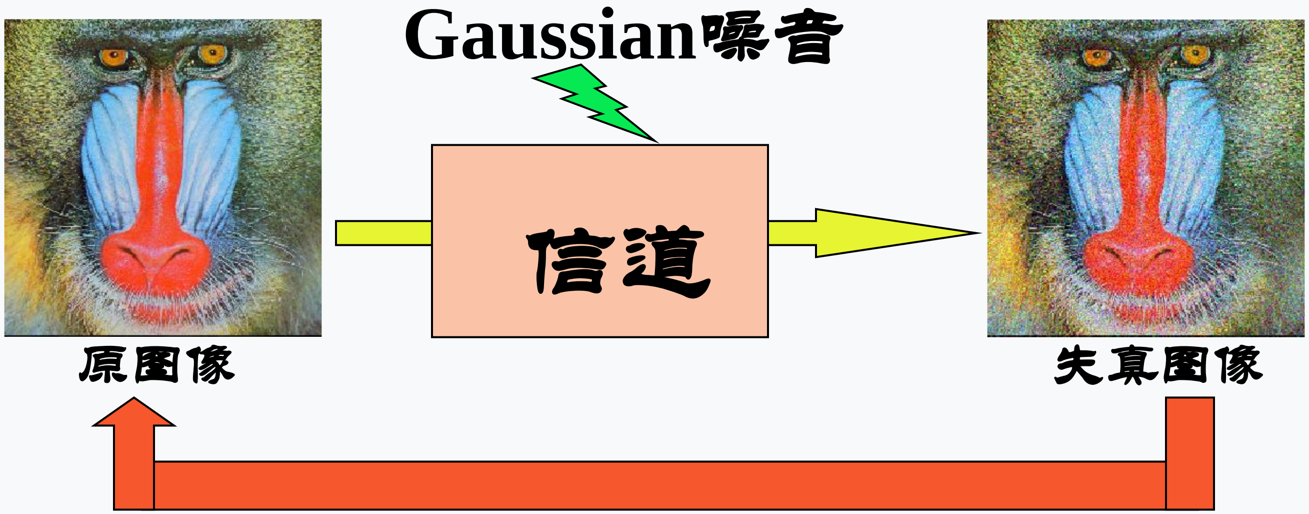
$$P(A_i \mid X) = \frac{P(A_i)P(X \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{2} P(A_j)P(X \mid A_j)} \quad 其中, i = 1, 2.$$

若$P(A_1 \mid X) > P(A_2 \mid X)$,则作出决策: 具有特征$X$的字母是$C$.

注：这个方法在模式识别这一新兴学科中有重要应用.
这里是大为简化了的模型.

电子信息领域:

贝叶斯理论在图像处理中的应用



$$P(\text{原图像}|\text{失真图像})=\frac{P(\text{失真图像}|\text{原图像})P(\text{原图像})}{P(\text{失真图像})}$$

风险管理与保险精算方面:

大病、长期护理、社会医疗等保险与精算

设选择题有四个答案，只有一个是正确的。懂的学生能够准确回答，不懂的学生从四个答案中随机选择。假定一个学生懂与不懂的概率都是 0. 5. 试计算

（1）　随机抽取一位学生，他答对的概率；

（2）　一位答对的学生对该题不懂的概率。

解：设随机事件 A={回答正确}　B={对该题不懂}

（1）由全概率公式：

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

$$=0.5*0.25+0.5*1=0.625$$

（2）由贝叶斯公式：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{0.5*0.25}{0.625}=0.2$$

教材例1.3.12

例 1.3.12 学生中优等生占25%，中等生占50%，较差生占25%，已知优等生通过一项测验的概率为0.8，中等生通过这项测验的概率为0.6,而较差生通过测验的概率为0.3. 现从学生中随机挑选一名进行测验, 他通过了测验, 求他是优等生的概率和他是较差生的概率. (教材上)

解： 试验结果：A={选出的学生通过了测验}

原因: H_1={选出一名优等生},

H_2={选出一名中等生}, H_3={选出一名较等生},

由结果推原因，即求$P(H_i \mid A)$.

P(H1)=0.25, P(H2)=0.5, P(H3)=0.25

$P(A \mid$ H1)=0.8, $P(A \mid$ H2)=0.6, $P(A \mid$ H3)=0.3

例 1.3.12 学生中优等生占25%，中等生占50%，较差生占25%，已知优等生通过一项测验的概率为0.8，中等生通过这项测验的概率为0.6,而较差生通过测验的概率为0.3. 现从学生中随机挑选一名进行测验, 他通过了测验, 求他是优等生的概率和他是较差生的概率. (22页)

解(完整的解题步骤): A={选出的学生通过了测验}

H1={选出一名优等生},

H2={选出一名中等生}, H3={选出一名较等生},

H1, H2, H3构成样本空间的一个有限划分.

由*Bayes*公式可得:

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A|H_i)}=\frac{0.25\times0.8}{0.25\times0.8+0.5\times0.6+0.25\times0.3}\approx0.35,$$

$$P(H_3|A)=\frac{P(H_3)P(A|H_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A|H_i)}=\frac{0.25\times0.3}{0.25\times0.8+0.5\times0.6+0.25\times0.3}\approx0.13.$$

教材例1.3.13

例 1.3.13 设某种病菌在人口中的带菌者为0.03, 进行检查时, 由于技术和操作的不完善以及种种原因, 使带菌者未必呈阳性反应, 而不带菌者也可能呈阳性反应. 假定带菌者检查结果呈阳性反应的概率为0.99, 不带菌者检查结果呈阳性反应的概率为0.05. 现设某人检查结果呈阳性, 问他确是带菌者的概率是多少？(23页)

解： 试验结果：A={检查结果呈阳性}

原因：$B=\{$此人是带菌者$\}, \overline{B}=\{$此人不是带菌者$\}$

由结果推原因，即求$P(B\mid A)$.

$$P(B)=0.03,\ P(\overline{B})=1-0.03$$

$$P(A\mid B)=0.99,\ P(A\mid \overline{B})=0.05$$

教材例1.3.13

例 1.3.13 设某种病菌在人口中的带菌者为0.03, 进行检查时, 由于技术和操作的不完善以及种种原因, 使带菌者未必呈阳性反应, 而不带菌者也可能呈阳性反应. 假定带菌者检查结果呈阳性反应的概率为0.99, 不带菌者检查结果呈阳性反应的概率为0.05. 现设某人检查结果呈阳性, 问他确是带菌者的概率是多少？(23页)

解(完整的解题步骤): A={检查结果呈阳性}

$B=\{$此人是带菌者$\}$, $\overline{B}=\{$此人不是带菌者$\}$

B和$\overline{B}$构成样本空间的一个有限划分.

由*Bayes*公式可得: $$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

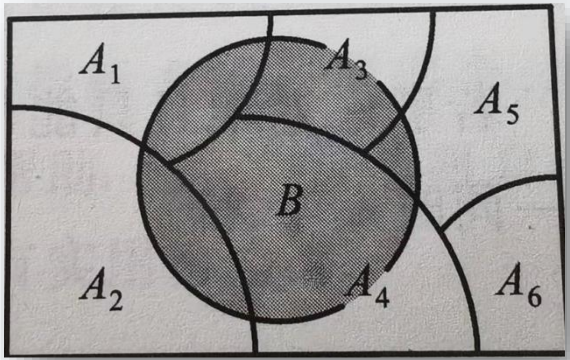
$$=\frac{0.03\times0.99}{0.03\times0.99+0.97\times0.05}=0.38.$$

全概率公式（又称为事前概率）：(无条件概率)

由“原因”*A*1，…，*An*（有限划分或完备事件组）

求(或预测)事件(试验结果)*B*的*P*(*B*).

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P\left(B\middle|A_i\right)$$



注：乘法公式和加法公式的综合应用.

Bayes公式：（事后概率）

关键搞清楚试验如何做的，来分清原因与结果.

已知事件(试验结果)*B*发生了，

求*P*(*Aj*|*B*):为“原因”*Aj*导致该结果发生的概率，又称后验概率.

P(*Aj*):先验概率.

注：后验概率的大小很受先验概率选取的影响的.