思考：随机变量与普通函数的区别?

研究一个随机变量 (random variable)

(1)首先关注取值情况，即取哪些值.

(2)更关注它取各种值的概率情况，即“概率的分布(情况)”.

E1:从某厂大批产品中随机地抽出100个,其中所含废品数.

E2: 某电话总台一天接到的呼叫次数.

离散型随机变量

- 只可能取有限个或可列无穷多个值.
- 取值的概率分布(情况)：
- 分布律(最方便), 分布函数$F(x)=P(X\le x)$?

第二节　离散型随机变量

一：离散型随机变量的分布律

定义：如果随机变量X 至多取可列无穷个数值：

$x_1, x_2, \ldots,$ 记 $p_i = P\{X = x_i\}$, 且满足

$$\begin{cases} (1)\ p_i \geqslant 0, \\ (2)\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, (\text{“归一性”}) \end{cases}$$

$$1 = P\{\Omega\} = P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}(X = x_i)\right\} \overset{\text{可列可加性}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i\}$$

称X 是离散型随机变量，并称 $p_i = P\{X = x_i\}$,

i=1,2,…为X 的分布律，我们常用表格表示分布律.

X	x_1	x_2	…	x_i	…
$P\{X = x_i\}$	p_1	p_2	…	p_i	…

离散型随机变量的分布律

记 $p_i = P\{X = x_i\}$, 且满足

$$\begin{cases} (1)\ p_i \geqslant 0, \\ (2)\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \end{cases}$$ （“归一性”）

注: $1 = P\{\Omega\} = P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}(X = x_i)\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i\}.$

分布律是离散型随机变量的标志.

上节例1中赌博彩金Y是离散型随机变量, 分布律为:

Y	0	0.5	2	20
$P\{Y = y_i\}$	0.5000	0.3589	0.1283	0.0128

产品检验试验

例1 某种产品在生产过程中的废品率为p（$0<p<1$），对产品逐个检查，直到检查出5个不合格品为止，试写出停止检查时已检查的产品个数X的分布律.

解：关键是分析随机事件$\{X=k\}$，（$k=5, 6, \ldots$）

事件$\{X=k\}$相当于第k次检查到的产品必为不合格品，而前$k-1$次检查中查出4件不合格品.

如指定前四次： $p^5(1-p)^{k-5}$

$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}_{\text{不合格}} \quad \underbrace{\cdots \quad k-1}_{\text{合格}} \quad \underbrace{k}_{\text{不合格}}$

产品检验试验

例1 某种产品在生产过程中的废品率为p($0<p<1$), 对产品逐个检查，直到检查出5个不合格品为止, 试写出停止检查时已检查的产品个数X的分布律.

进行 k 次检查，指定的5次检查出现不合格品的概率为 $p^5(1-p)^{k-5}$.

从前$k-1$次检查中选出4 次出现不合格产品共有 C_{k-1}^{4} 种不同的方式.

故分布律为

$$P\{X=k\} = C_{k-1}^{5-1} p^5(1-p)^{k-5},\ (k=5, 6, \ldots)$$

离散型随机变量X分布律与分布函数F的关系

1.已知分布律求它的分布函数

$$\{X \le x\} = \bigcup_{x_i \le x} \{X = x_i\}$$ 由概率可加性得:

$$P\{X \le x\} = P[\bigcup_{x_i \le x} \{X = x_i\}] = \sum_{x_i \le x} P\{X = x_i\}$$

故其分布函数为$F(x) = \sum_{x_i \le x} p_i$

(对所有满足$X_i \le x$的i求和)

(回顾)摸彩试验

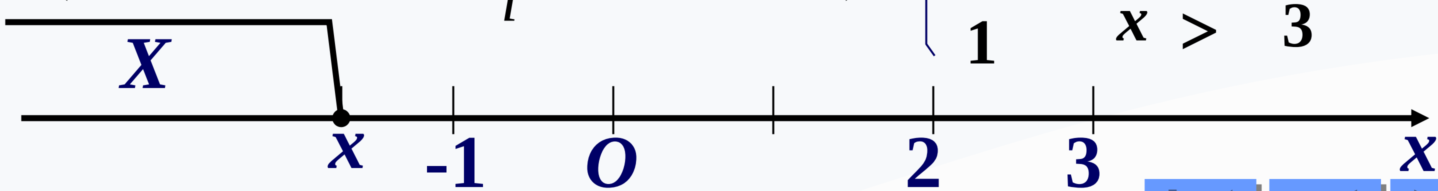
(回顾)摸彩试验

例3：一袋中有依次标有-1、2、2、2、3、3数字的六个球，从中任取一球，试写出球上号码X的分布函数.

解：$P\{X=-1\}=\frac{1}{6}, P\{X=2\}=\frac{1}{2}, P\{X=3\}=\frac{1}{3}$

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_i\}=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{1}{6} & -1\le x<2 \\ \frac{2}{3} & 2\le x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

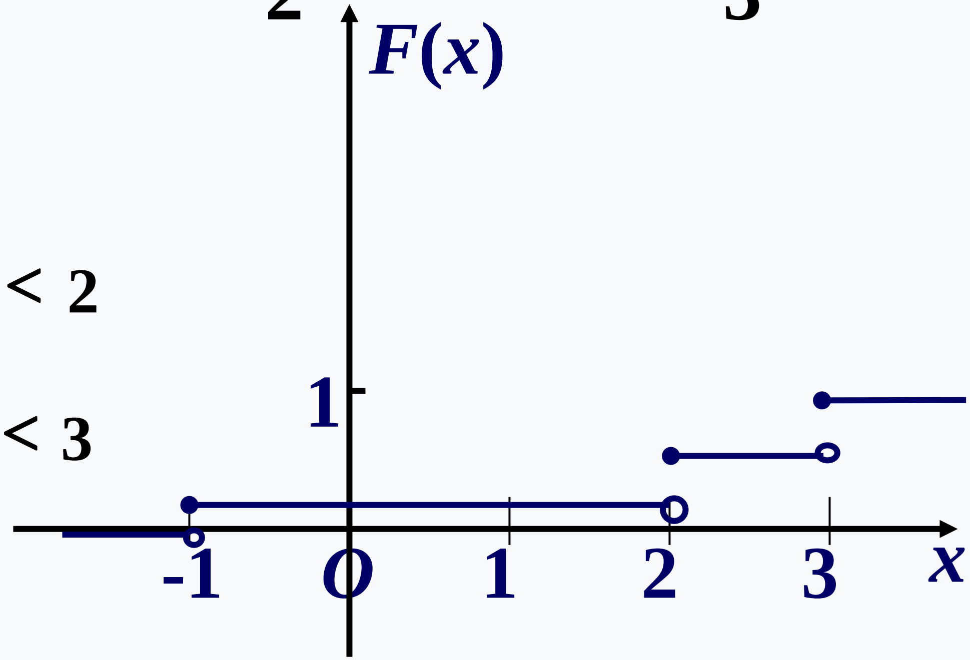
(对所有满足$x_i\le x$的i求和)



例3：一袋中有依次标有-1、2、2、2、3、3数字的六个球，从中任取一球，试写出球上号码X的分布函数.

解：$P\{X=-1\}=\frac{1}{6}, P\{X=2\}=\frac{1}{2}, P\{X=3\}=\frac{1}{3}$

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_i\}=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{6} & -1\le x<2\\ \frac{2}{3} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$



此分布函数特点: 这是一个右连续的单调不降阶梯函数，在不连续点处的阶跃值恰为$P\{X=k\}$, k=-1,2,3.

离散型随机变量X 分布律与分布函数的关系

1.已知分布律求它的分布函数

分布函数$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_i\}=\sum_{x_i\le x}p_i$

注: (1) 离散型随机变量的分布函数是右连续的单调不降阶梯函数(离散型随机变量的分布函数的标志);

(2) 在不连续点处的跳跃高度恰好为分布律p_i, i=1,2,…

注:区别离散型随机变量的分布律与分布函数

分布函数: $\forall x\in R,\ F(x)=P\{X\le x\}$(分段形式函数)

分布律: $p_i=P\{X=x_i\}$, i=1,2,…为X 的分布律.

离散型随机变量X分布律与分布函数的关系

1.已知分布律求它的分布函数

分布函数$F(x)=P\{X\le x\}=\sum\limits_{x_i\le x}P\{X=x_i\}=\sum\limits_{x_i\le x}p_i$

在不连续点处的跳跃高度恰好为分布律P_i, $i=1,2,\ldots$

2.已知分布函数求分布律

x_i, $i=1,2,\ldots,(x_i<x_{i+1})$为$F(x)$的不连续点

$$P\{X\le x_{i+1}\}=P\{(X\le x_i)\cup(X=x_{i+1})\}$$

$$\Rightarrow P\{X=x_{i+1}\}=F(x_{i+1})-F(x_i)$$

或者 $P\{X=x\}=F(x)-F(x-0),\forall x\in(-\infty,+\infty)$

本次课的重点(两个函数)：
理解什么是随机变量.掌握分布函数的定义及判断性质，离散型随机变量的分布律及分布函数.

下次课内容：
要讲到第二章的 § 2.2 离散型随机变量的中的泊松分布，包括离散随机变量的分布律定义，二项分布及泊松分布.