问题的由来

例1：炮击某一目标O，已知弹着点(X,Y)服从二维正态分布. 点(X,Y)与目标O的距离$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$服从什么分布?

例2: 由统计物理学,气体分子运动速率服从麦/马克斯维尔分布(Maxwell distribution).

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{\frac{-x^2}{\alpha^2}} & x>0,\alpha>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

分子运动动能 $\eta=\frac{1}{2}mv^2$ 服从什么分布?

回 忆

1. 如果随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且单调增加，而随机变量$X\sim U(0,1)$, 令$Z=F^{-1}(X)$, 那么Z与Y同分布，请说明理由.

2. 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且单调增加，求证: 随机变量$Y=F(X)\sim U(0,1)$.

注: 对函数$g(\,.\,)$ 有一定的要求, 即一般分段连续或分段单调.

§4 随机变量的函数及其分布

一.离散型随机变量的函数及其分布律

离散型随机变量X 的分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i \qquad i=1,2,\ldots$$

$Y=g(X)$ 也是一维离散型随机变量，则

$$\{Y=y_j\}=\{g(X)=y_j\}=\bigcup_{x_i\in S_j}\{X=x_i\}$$

$$P\{Y=y_j\}=P\{g(X)=y_j\}=\sum_{x_i\in S_j}P\{X=x_i\}$$

$$S_j=\{x_i \mid g(x_i)=y_j\} \qquad j=1,2,\ldots$$

例如:$Y=X^2$ $\{Y=1\}=\{X=1\}\cup\{X=-1\}$

二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

$Z = G(X, Y)$ 也是一维离散型随机变量, 则

$$P\{Z = z_k\} = P\{G(X, Y) = z_k\}$$

$$= P\{\bigcup_{(x_i, y_j) \in T_k} (X = x_i, Y = y_j)\}$$

$$k = 1, 2, \ldots \quad = \sum_{(x_i, y_j) \in T_k} P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

$$T_k = \{(x_i, y_j) \mid G(x_i, y_j) = z_k\}$$

例3.4.1: 设(X,Y)的联合分布律:

X \ Y	0	1
0	3/10	3/10
1	3/10	1/10

试求(实际中常用的四类函数): 1) $\sin X$, 2) $X+Y$, 3) XY, 4) $Max(X,Y)$的分布律.

解:由(X,Y)的分布律得

注：这四种函数在实际中有广泛应用，电路中正弦波，和函数噪声叠加，并联系统极大值。

<table>
<tr><td>P</td><td>3/10</td><td>3/10</td><td>3/10</td><td>1/10</td></tr>
<tr><td>(X,Y)</td><td>(0,0)</td><td>(0,1)</td><td>(1,0)</td><td>(1,1)</td></tr>
<tr><td>X</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>sin X</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">sin1</td></tr>
<tr><td>X+Y</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>XY</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Max (X,Y)</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

P	3/10	3/10	3/10	1/10
X	0		1	
$\sin X$	0		$\sin 1$	
(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$X+Y$	0	1	1	2
XY	0	0	0	1
$Max\ (X,Y)$	0	1	1	1

$\sin X$	0	$\sin 1$
P	0.6	0.4

$X+Y$	0	1	2
P	0.3	0.6	0.1

XY	0	1
P	0.9	0.1

$Max\ (X,Y)$	0	1
P	0.3	0.7

一、离散型随机变量的函数及其分布律

1.离散型随机变量的函数也是离散型随机变量

$$P\{Y=y_i\}=P\{g(X)=y_i\}$$

$$=\sum_{x_i\in S_j}P\{X=x_i\}\quad j=1,2,\ldots$$

$$P\{Z=z_k\}=P\{G(X,Y)=z_k\}$$

$$=\sum_{(x_i,y_j)\in T_k}P\{X=x_i,Y=y_j\},k=1,2,\ldots$$

本次课的重点内容是：

条件分布律，
条件密度函数.
第三章的§3.4随机变量的函数及其分布

下次课内容：

要讲到第三章的§3.4随机变量的函数及其分布，包括离散型随机变量的函数及其分布律和连续型随机变量的函数及其概率密度.