一、离散型随机变量的函数及其分布律

1.离散型随机变量的函数也是离散型随机变量

$$P\{Y=y_i\}=P\{g(X)=y_i\}=\sum_{x_i\in S_j}P\{X=x_i\}\quad j=1,2,\ldots$$

$$P\{Z=z_k\}=P\{G(X,Y)=z_k\}=\sum_{(x_i,y_j)\in T_k}P\{X=x_i,Y=y_j\},k=1,2,\ldots$$

可加性:(再生性)

教材例3.4.3 泊松分布具有可加性

离散卷积公式

若X与Y相互独立，$X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2)$,

则$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_1)$

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=0}^{m}p(k)q(m-k),$$

$$m=0,1,2,..$$

教材: 二项分布具有可加性

若X与Y相互独立,

$X\sim B(n_1,p),Y\sim B(n_2,p)$,则$X+Y\sim B(n_1+n_1,p)$

二、连续型随机变量的函数及其概率密度

一元函数：

1. 最基本的方法是“分布函数法”

$$F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}=\int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} F_Y'(y) & y_1<y<y_2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

(1) 先设法从X的概率分布求出Y的分布函数$F_Y(y)$;

(2) 再求 $F_Y(y)$对变量y的导数得Y的概率密度 $f_Y(y)$;

(3) 最后按$Y=g(X)$的定义域所决定的值域,

确定出能使 $f_Y(y)>0$ 的y值, 当$x_1<x<x_2$时， $f_X(x)>0$

即得随机变量Y的可能值. $y=g(x)\in(y_1,y_2)$, $f_Y(y)>0$

二、连续型随机变量的函数及其概率密度

一维情况，即一元函数：

1. 最基本的方法是“分布函数法”

$$F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}=\int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} F_Y'(y) & y_1<y<y_2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

不需要求解完整的

$F(y)(-\infty<y<+\infty)$

当$x_1<x<x_2$时，$f_X(x)>0$

$F_Y(y)$

$y=g(x)\in(y_1,y_2)$，$f_Y(y)>0$ 只求解：$(y_1<y<y_2)$

二.连续型随机变量的函数及其概率密度

2.单调函数公式法(一元函数)

条件严格:1)设随机变量X 具有概率密度,当$a<x<b$时, $f_X(x)>0$;

2)$g(x)$处处可导, 且恒有$g'(x)>0$ (或$g'(x)<0$).

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[h(y)\right]\cdot\left|h'(y)\right| & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\alpha=\min\left(g(a),g(b)\right) \quad \beta=\max\left(g(a),g(b)\right)$$

应用单调函数公式法的一个重要结论:

教材例3.4.7:正态随机变量的线性函数也服从正态分布

$$X\sim N(\mu,\sigma^2),Y=aX+b(a\neq 0)\Rightarrow Y\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$$

$$\text{特别}:a=\frac{1}{\sigma},b=-\frac{\mu}{\sigma},Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$$

例3.4.3: 设$X\sim N(0, 1)$, 求$Y=X^2$的概率密度.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ o & y\le 0\end{cases}$$

称Y服从自由度为1的χ^2分布

例3.4.4: 设$X\sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$Y=e^X$的概率密度$f_Y(y)$.

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad y>0.$$

Y的对数即$\ln Y=X$服从正态分布,故称Y服从分布为对数正态分布.

对数正态变量取非负值, 又能通过正态分布进行概率计算,很适合做某些现象的数学模型.

当代金融学用对数正态分布取代正态分布作为资产价格分布建立起了十分合理的理论.另外, 销售量, 元件寿命等也已普遍使用对数正态分布作为模型.

如果随机变量*Y*的分布函数*F*(*y*)连续且单调增加，而随机变量*X* ~*U*(0,1), 令*Z*=*F*$^{-1}$(*X*), 那么*Z*与*Y*同分布，请说明理由.

4. 理由：因为$X \sim U(0,1)$，所以

$$F_Z(y) = P\{Z \le y\} = P\{F^{-1}(X) \le y\} = P\{X \le F(y)\}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

所以：$= F_X(F(y)) = F(y)$

或者$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & else. \end{cases}$

设随机变量*X*的分布函数*F*(*x*)连续且单调增加，求证: 随机变量*Y*=*F*(*X*) ~*U*(0,1) .

证明：由于$F(\cdot)\uparrow$，$F^{-1}(\cdot)$存在，$Y = F(X): \Omega \to [0,1]$

当$0 < y < 1$时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{F(X) \le y\}$

$$= P\{X \le F^{-1}(y)\} = F(F^{-1}(y)) = y$$

均匀分布是其它随机变量的计算机模拟的基础

均匀分布的特殊地位:若随机变量*X*的分布函数*F*(*x*),因为*F*(*x*)是非降函数,对任意0=<y=<1, 可定义$F^{-1}(y)=\inf\{x: F(x)>y\}$作为*F*(*x*)的反函数. 下面考虑随机变量*Y*=*F*(*X*)的分布, 这里*F*(*x*)是连续函数.

证明：由于$F(\cdot)\uparrow$，$F^{-1}(\cdot)$存在, $Y=F(X):\Omega\to[0,1]$

$$\text{当}0\le y\le 1, F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}$$
$$=F_X(F^{-1}(y))=y$$

则随机变量*Y*=*F*(*X*) ~*U*(0,1) .这个结论在统计中起重要作用.

反之Y~*U*(0,1), 对任意分布函数*W*(*x*), 令$X=W^{-1}(Y)(*)$

$$P\{X\le x\}=P\{W^{-1}(Y)\le x\}=P\{Y\le W(x)\}=W(x)$$

则随机变量*X*服从分布函数*W*(*x*) 的随机变量.

注: 只要我们能产生[0,1]中均匀分布的随机变量的样本(均匀分布随机数), 那么我们也能通过(*)产生分布函数为*W*(*x*)的随机变量的样本, 这结论在蒙特卡罗方法中具有基本的重要性.

通常的做法是利用数学或物理的方法产生[0,1]中均匀分布随机变量的样本(均匀分布随机数), 再利用(*)得到任意分布*W*(*x*)的随机数.

一、离散型随机变量的函数及其分布律

1.离散型随机变量的函数也是离散型随机变量

$$P\{Y = y_j\} = P\{g(X) = y_j\} = \sum_{x_i \in S_j} P\{X = x_i\} \quad j = 1,2,\ldots$$

$$P\{Z = z_k\} = P\{G(X,Y) = z_k\} = \sum_{(x_i,y_j) \in T_k} P\{X = x_i, Y = y_j\}, k = 1,2,\ldots$$

二、连续型随机变量的函数及其概率密度

一元函数:(1)最基本的方法是“分布函数法”

(2)单调函数公式法

二元函数:“分布函数法”求函数的概率密$f_Z(z)$.

二.连续型随机变量的函数及其概率密度

二元函数：

求二维连续型随机变量(X, Y) 的函数$Z = G(X, Y)$ 的概率密度 $f_z(z)$.

应用基本的方法“分布函数法”：

参见讲义P86页.

1)先求出 Z 的分布函数$F_Z(z)$;

$$F_Z(z) = P\{G(X,Y) \le z\} = \iint\limits_{\{(x,y):G(x,y)\le z\}} f(x,y)\,d\sigma$$

2)对$F_Z(z)$微分得到$f_z(z)$.

$$f_Z(z) = \begin{cases} F_Z'(z), & \text{在} f_Z(z)\text{的连续点;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

下面考虑(X, Y)为二维连续型随机变量的**三种特殊二元函数的分布**

三.几种特殊函数的分布(二元函数)

1. 极值分布(Extreme value distribution):

$$M = max(X, Y), N = min(X,Y)$$

$$F_M(z) = P\{M \le z\} = P\{\max(X,Y) \le z\}$$
$$= P\{X \le z, Y \le z\} = F_{X,Y}(z,z)$$

若 X 与 Y 相互独立有：

$$F_M(z) = F_X(z) F_Y(z)$$

若 X 与 Y 相互独立且具有相同分布有：

$$F_M(z) = [F(z)]^2$$

$$f_M(z) = 2F(z)f(z) \qquad f_M(z)\text{在点}z\text{连续}$$

思考： $N = \min(X,Y)$

$$F_N(z) = P\{\min(X,Y) \le z\}$$

$$= 1 - P\{X > z, Y > z\}$$

$$= P\{X \le z \text{ 或 } Y \le z\}$$

加法定理

$$= P\{X \le z\} + P\{Y \le z\} - P\{X \le z, Y \le z\}$$

若 X 与 Y 相互独立有：

$$F_N(z) = 1 - P\{X > Z\}P\{Y > Z\}$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

若 X 与 Y 相互独立且具有相同分布有：

$$f_N(z) = \boxed{2[1 - F(z)]f(z)}$$ $f_N(z)$在点z连续.

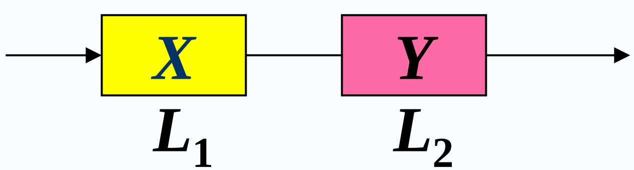
极值分布的应用：

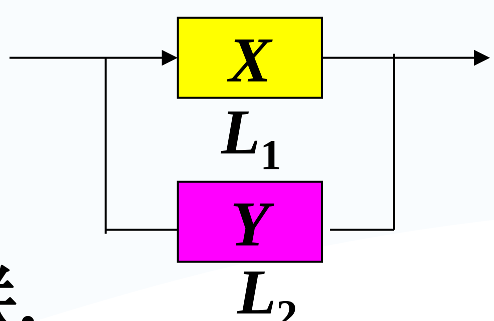
例3.4.9: 设系统L由两个功能相似且相互独立的子系统L_1, L_2连接而成, 连接的方式分别为:1) 串联 2) 并联. 如图所示. 设L_1, L_2的寿命分别为X,Y.它们的概率密度分别为:

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$\alpha,\beta>0\quad \alpha\neq\beta$$

试求出在以上2种连接方式下系统寿命T的概率密度.





教材例3.4.9, 随机系统的串并联.

思考:极值随机变量的联合分布及极差.

$M = max(X, Y), N = min(X,Y)$ (X 与Y独立且同分布)

1.(N, M)的联合分布$G(x, y)$

2. $Z = X + Y$ 即和的分布

目标：$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)du$

设随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$

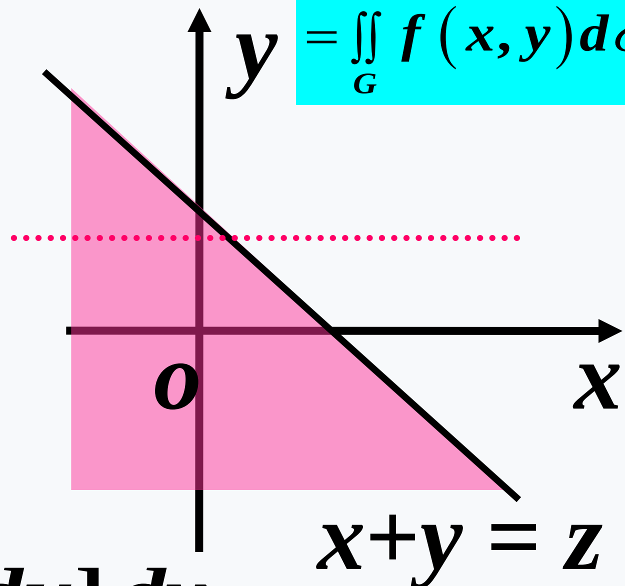
若$G\subset R^2$,有

$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)d\sigma$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{X+Y\le z} f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx]dy$$



做积分变量变换, 令$x=u-y$, 则

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy]du$$

$\longrightarrow f_Z(u)$

$Z = X + Y$ 的分布 $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} [\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y, y) dy] du$

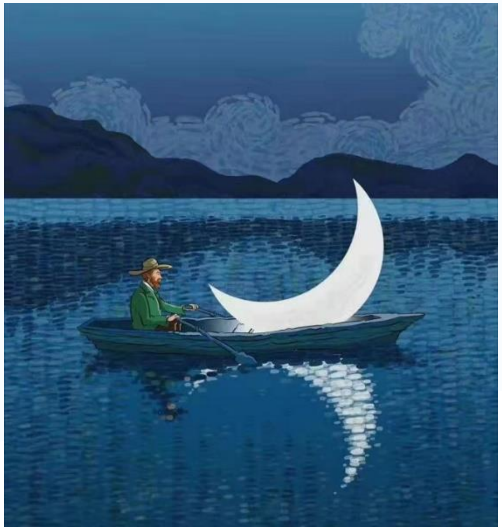
由连续型随机变量定义:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_z(u) du \quad F'_Z(z) = f_z(z),\text{连续点处}$$

得到公式:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

$x = z - y$

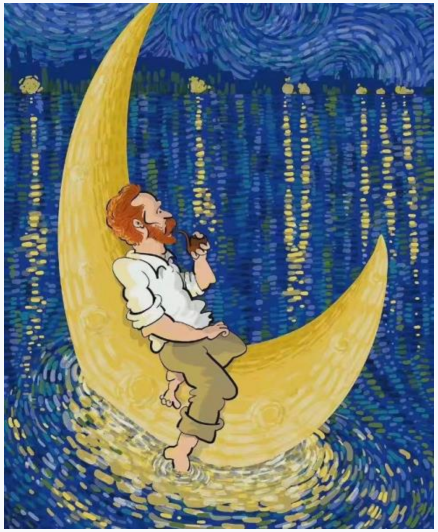


思考: 若作积分变量变换,

令 $y = z - x$, 则

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy \qquad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$



思考：若随机变量X, Y 相互独立,

则有公式：

令 $x=z-y$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy$$

或者

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$$

令 $y=z-x$

卷积公式

已知随机变量(X, Y)的联合概率密度$f(x, y)$，求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$，可以利用下面公式求解:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx \qquad y=z-x$$

解题步骤:

1）在XOZ平面上作出$f(x, z-x)$的非零区域G;

2）从区域G中确定$f_Z(z)$非零区间;

3）在$f_Z(z)$非零区间中，逐段确定$f_Z(z)$的表达式;

4）写出$f_Z(z)$的完整表达式.

例3.4.10: 设随机变量X, Y 相互独立, 均服从区间(0,1)上的均匀分布, 求: $Z = X + Y$ 的概率密度$f_Z(z)$.

分析：1. X, Y 相互独立, 所以有:令 $y=z-x$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

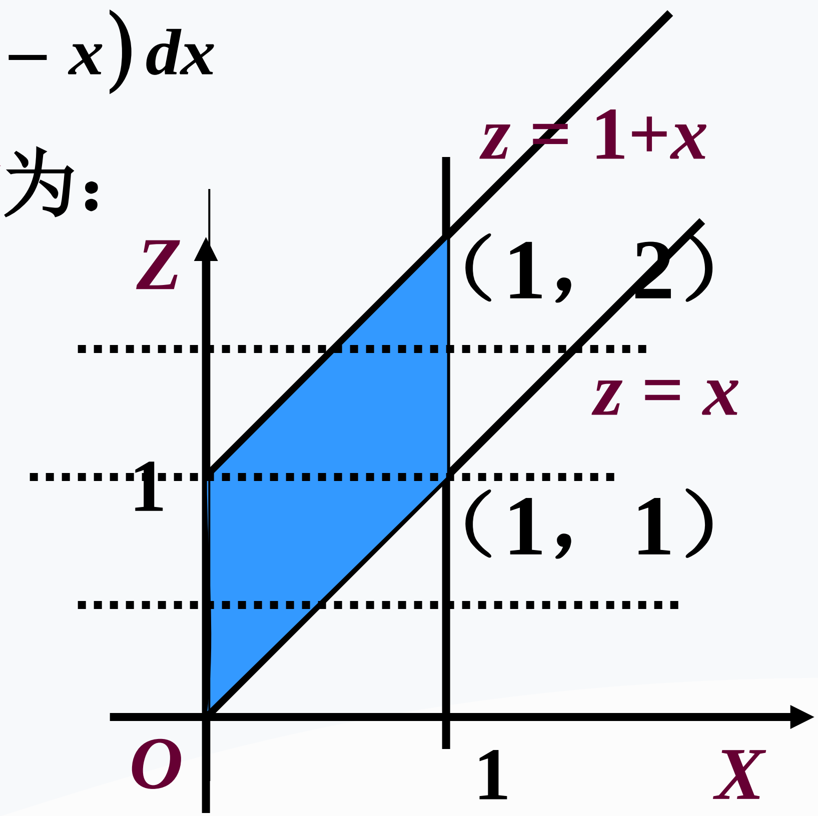
2. 使 $f_X(x)\, f_Y(z-x)$非零的区域为:

$$0\le x\le 1 \qquad 0\le z-x\le 1$$

3. $f_Z(z)$ 的非零区间为:

$$0\le z\le 2$$

4. 在不同的区间段, 积分的上下限是不相同的.



例3.4.10 设随机变量X, Y 相互独立, 均服从区间(0，1)上的均匀分布, 求：$Z = X + Y$ 的概率密度$f_Z(z)$.

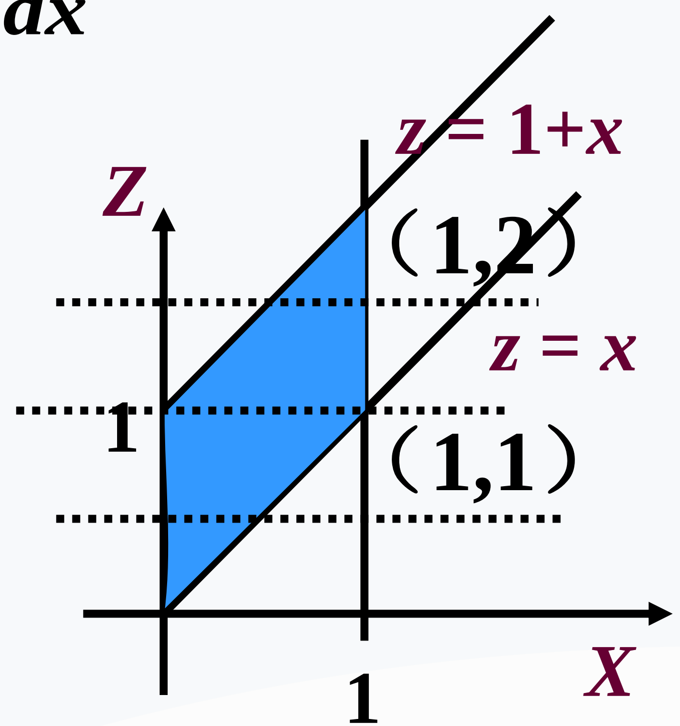
解： $\because$ 随机变量X,Y相互独立

$$\therefore f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

在*XOZ*平面上作出区域G

$$G = \{(x,z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le z - x \le 1\}$$

$$f_X(x) f_Y(z-x) = \begin{cases} 0 & (x,z) \notin G \\ 1 & (x,z) \in G \end{cases}$$



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx \qquad f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}0 & (x,z)\notin G\\ 1 & (x,z)\in G\end{cases}$$

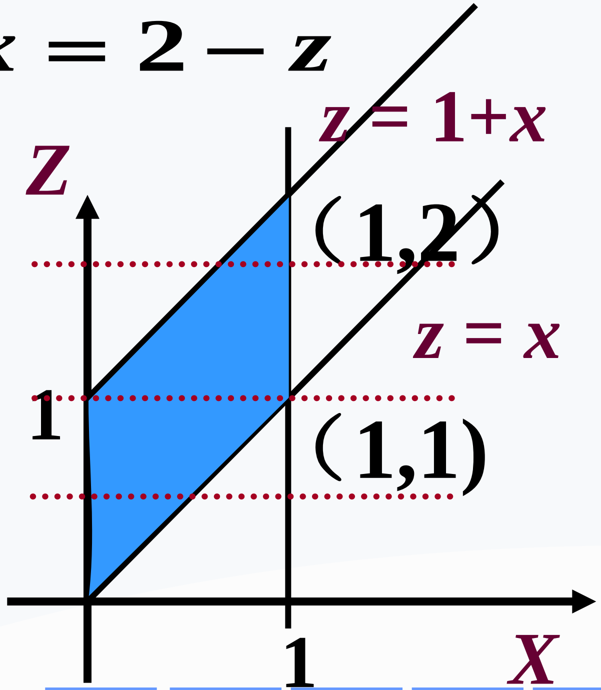
当$z\le 0$ 或 $z \geqslant 2$ 时: $f_Z(z)=0$

当$0<z\le 1$时: $$f_Z(z)=\int_0^z 1\,dx=z$$

当$1<z<2$时: $$f_Z(z)=\int_{z-1}^{1} 1\,dx=2-z$$

综上得$Z=X+Y$的概率密度为:

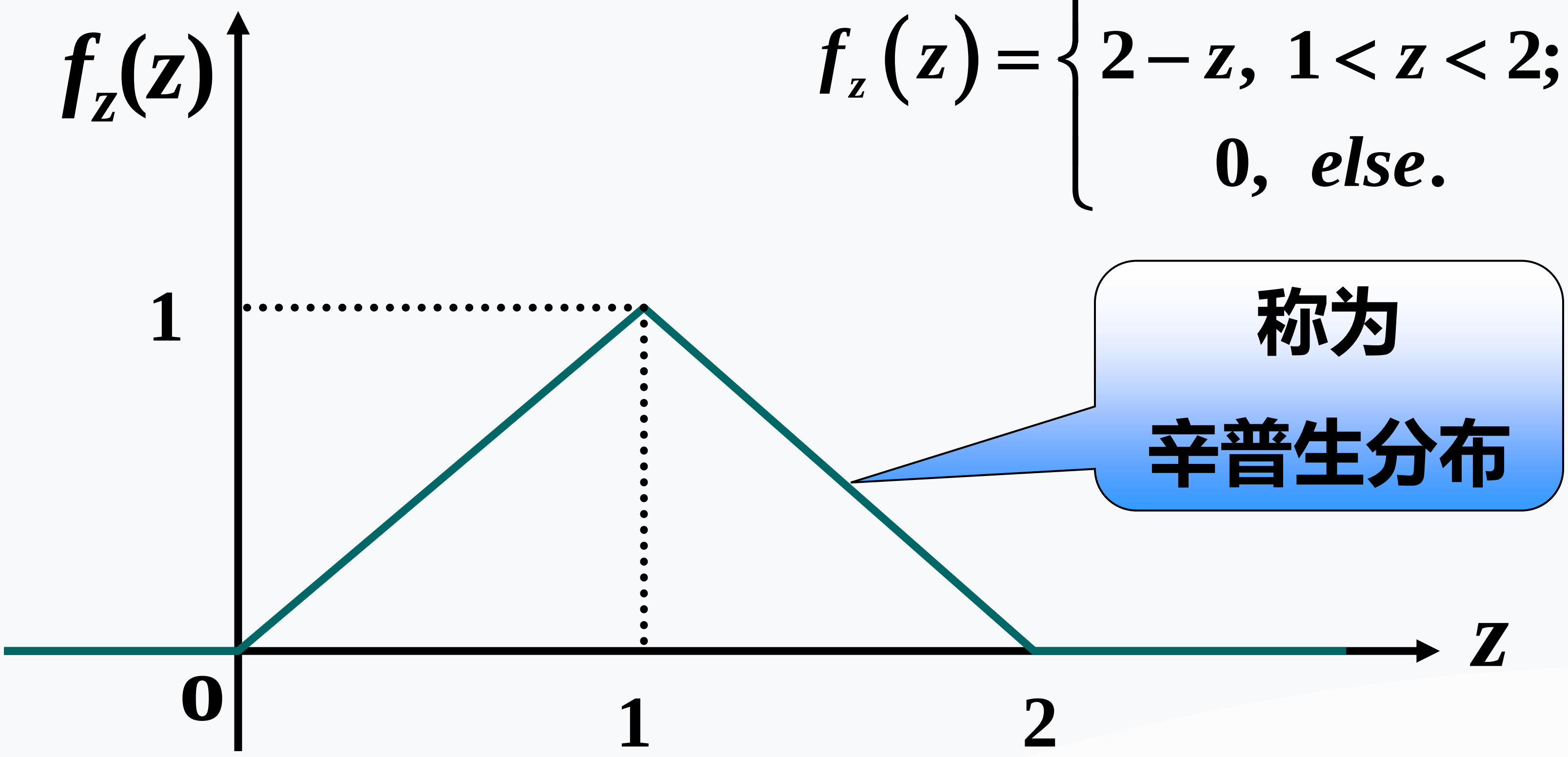
$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0<z\le 1;\\ 2-z, & 1<z<2;\\ 0, & else.\end{cases}$$



例3.4.10 设随机变量X, Y 相互独立, 均服从区间(0，1)上的均匀分布, 求：$Z = X + Y$ 的概率密度$f_Z(z)$.

$Z = X + Y$的概率密度曲线为

$$f_z(z) = \begin{cases} z, & 0 < z \le 1; \\ 2 - z, & 1 < z < 2; \\ 0, & else. \end{cases}$$



例3.4.11: 已知二维随机变量(*X*, *Y*)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2(x+y) & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

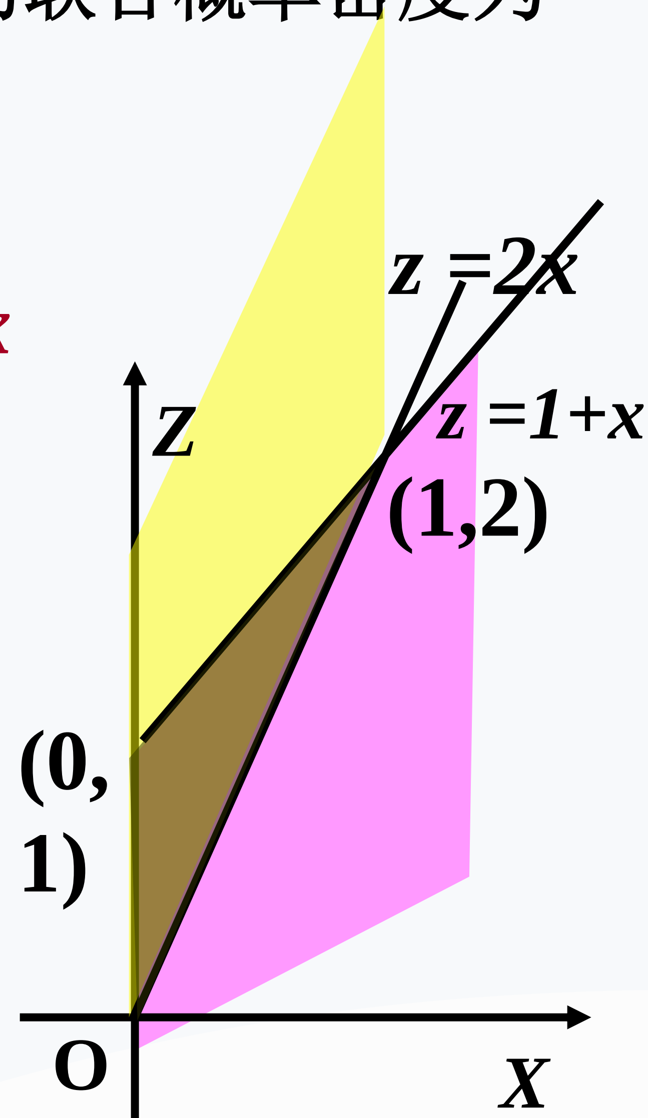
求: *Z*=*X*+*Y* 的概率密度. 令$y=z-x$

解: 在*XOZ*平面上作出区域

$$G=\{(x,z)|0\le x\le z-x\le 1\}$$

$$=\left\{(x,z)\middle|0\le x\le z/2,\ 2x\le z\le 1+x\right\}$$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}2z & (x,z)\in G\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$



$$f(x,z-x)=\begin{cases}2z, & (x,z)\in G\\ 0, & else.\end{cases}$$ 求: Z=X+Y 的概率密度.

当 $z\le 0$ 或 $z\geq 2$ 时: $f_Z(z)=0$

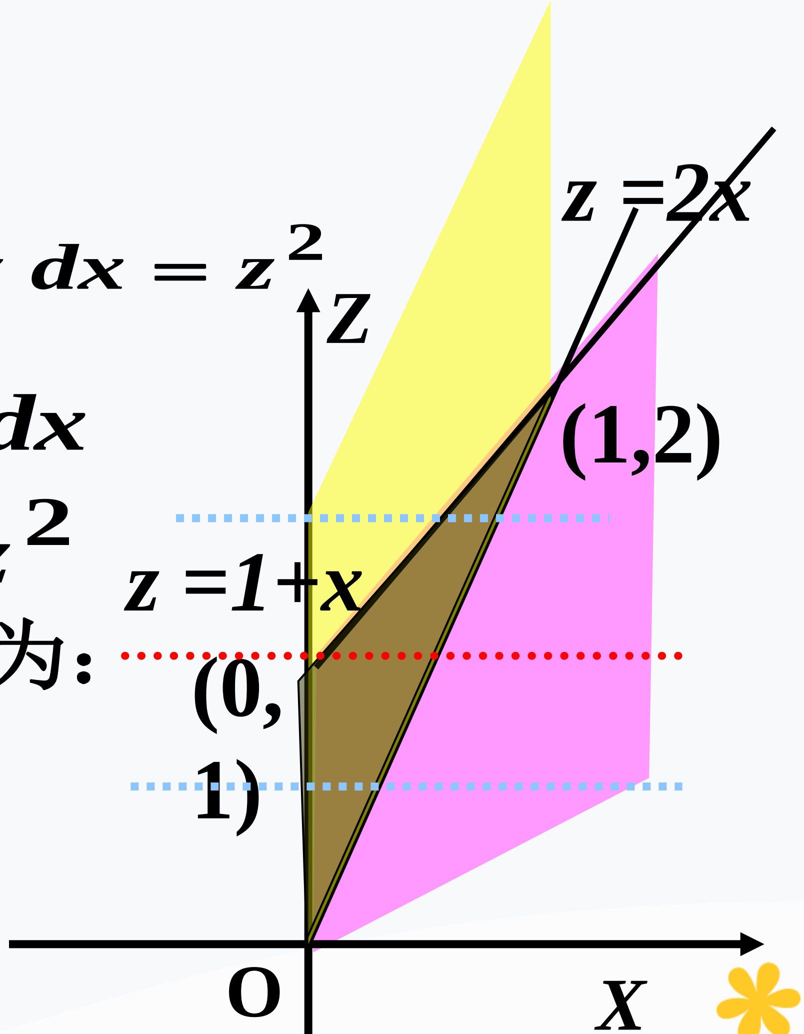
当 $0<z\le 1$ 时: $f_Z(z)=\int_0^{z/2} 2z\,dx = z^2$

当 $1<z<2$ 时: $f_z(z)=\int_{z-1}^{z/2} 2z\,dx$

$$= 2z - z^2$$

综上得 $Z = X + Y$ 的概率密度为:

$$f_z(z)=\begin{cases}z^2, & 0<z\le 1;\\ 2z-z^2, & 1<z\le 2;\\ 0, & \text{else}.\end{cases}$$



思考：在求Z=X+Y 的概率密度 $f_Z(z)$ 时，是否可以通过YOZ平面来求解？

答案：可以

这时所引用的公式为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$$

$$x=z-y$$

例3.4.11 正态分布具有可加性.

若Y服从正态分布，而Y表成两个独立随机变量X_1, X_1之和，则X_1, X_1必服从正态分布. 这称为正态分布的“再生性”.

注：与正态分布的线性函数性质 (例3.4.7)区别.

例3.4.3 泊松分布具有可加性

若X与Y相互独立，$X \sim \mathrm{P}(\lambda_1), Y \sim \mathrm{P}(\lambda_2)$,

则$X+Y \sim \mathrm{P}(\lambda_1+\lambda_1)$

离散卷积公式

二项分布具有可加性

若X与Y相互独立，$X \sim \mathrm{B}(\mathrm{n}_1, p), Y \sim \mathrm{B}(n_2, p)$,

则$X+Y \sim \mathrm{B}(n_1+n_1, p)$

卷积公式

例3.4.11 正态分布具有可加性

若X与Y相互独立，$X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_2^2)$,

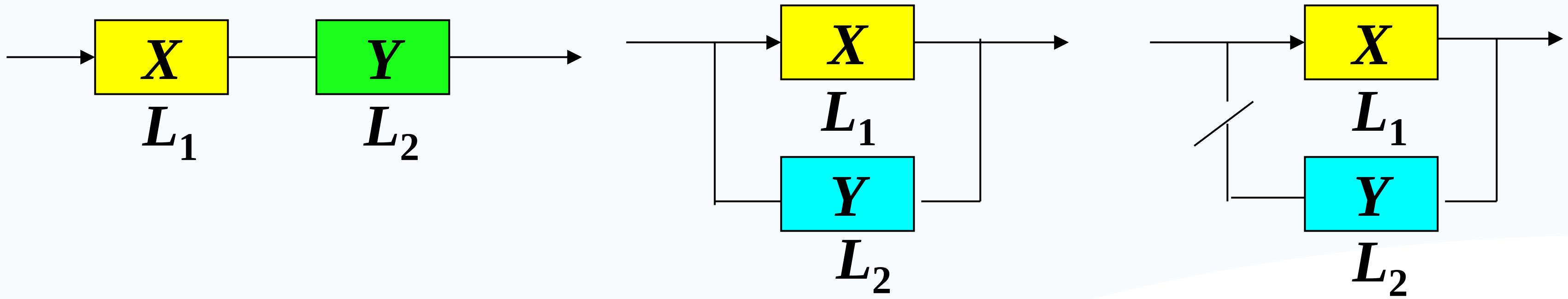
则$X+Y \sim \mathrm{N}(\mu_1+\mu_1, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

例3.4.12: 设系统L由两个功能相似且相互独立的子系统L_1, L_2连接而成,连接的方式分别为: 1) 串联 2) 并联 3) 备用, 如图所示. 设L_1, L_2的寿命分别为X,Y. 它们的概率密度分别为:

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

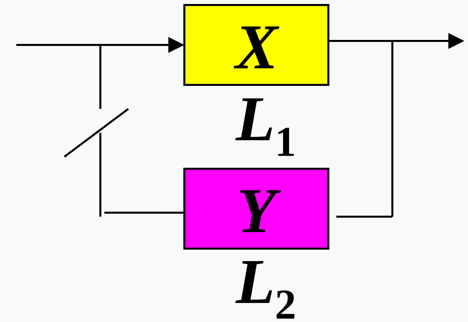
$$\alpha,\beta>0\quad \alpha\neq\beta$$

试求出在以下3种连接方式下系统寿命T的概率密度.



教材例3.4.9, 随机系统的串并联.

3) 备用系统：由于当L_1损坏时，L_2才开始工作，此时系统寿命$Z=X+Y$.



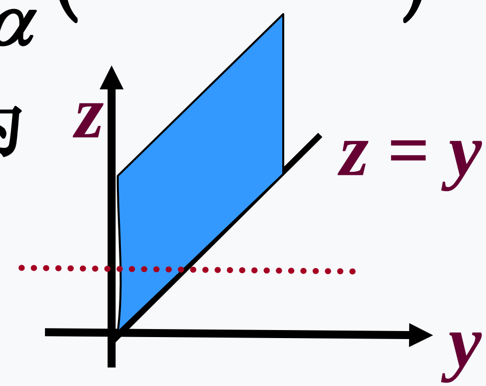
由卷积公式Z 的概率密度函数为：

当 $z>0$ 时：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)\,dy$

$$=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\cdot \beta e^{-\beta y}dy=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right)$$

当 $z\le 0$ 时：$f_Z(z)=0$，从而Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$



$x=z-y>0, y>0$

$\Leftrightarrow z>y, y>0$

思考：$Z=X+2Y$，概率密度$f_Z(z)$？

$Z = X + Y$, 即和的分布

应用：更新过程、噪声叠加等

同类型设备的更新，如
一个元件； 一个灯泡； 一个系统…
若各更换对象的寿命具有相同分布.

推广：$Z = X + Y$,即X, Y可以不全为连续型

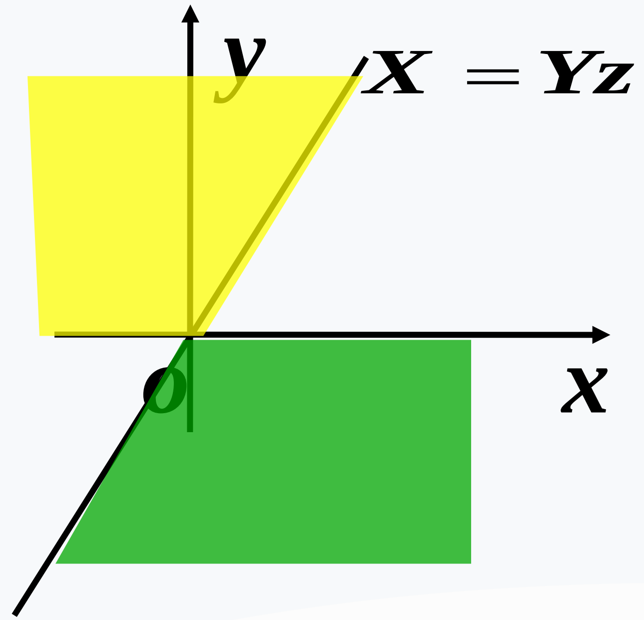
例: 设P{X=0}=P{X=1}=1/2,Y-U(0,1)且X,Y相互独立，求X+Y的概率分布.

3. $Z = X/Y$ 即商的分布

设随机变量(X, Y)的联合概率密度为$f(x,y)$, 有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy, y)\,dy$$

证： $F_Z(z) = P\{X/Y \le z\}$

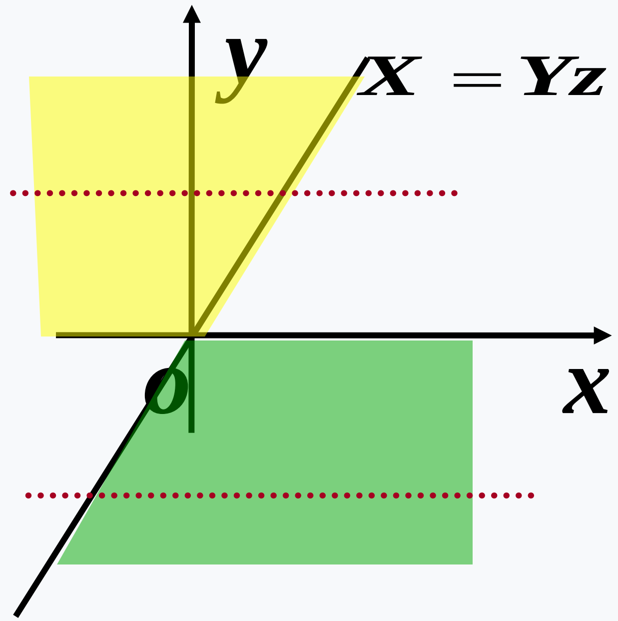


$$= \iint\limits_{X/Y \le z} f(x, y)\,d\sigma$$

$$X/Y \le z \Leftrightarrow \begin{cases} X \le Yz, & Y > 0; \\ X \ge Yz, & Y < 0. \end{cases}$$

$$F_Z(z)=P\{X/Y\le z\}=\iint\limits_{X/Y\le z} f(x,y)d\sigma$$

$$X/Y\le z \Leftrightarrow \begin{cases} X\le Yz, & Y>0; \\ X\ge Yz, & Y<0. \end{cases}$$



$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy$$

$$+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)dx\right]dy$$

做积分变量变换, 令$x=yu$, 则有公式:

$$\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(zy,y)\,dy}$$

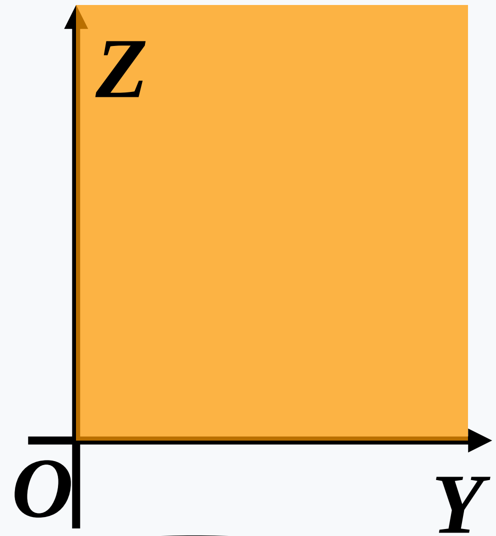
例3.4.13：已知随机变量X,Y相互独立同分布.

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0; \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

求: X/Y 的分布.

解：令 $G=\{(y,z): yz>0, y>0\}$

$$=\{(y,z): y>0, z>0\}$$



$$f(yz,y)=f_X(yz)\,f_Y(y)$$

$$=\begin{cases} e^{-yz-y} & (y,z)\in G \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,z)\,dy$$

分部积分

$$=\begin{cases} \int_0^{+\infty} ye^{-yz-y}dy=\frac{1}{(z+1)^2} & z>0 \\ 0 & z\leq 0 \end{cases}$$

小结: 三种积分, 实质上是解决带参变量积分的问题.

1.关于X 和Y 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

注:在 XOY平面上作出 $f(x, y)$ 的非零区域 G;

2. $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$:

步骤:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx \qquad y=z-x$$

1) 在 XOZ平面上作出 $f(x, z-x)$ 的非零区域 G;

2) 将区域 G投影到Z轴上, 确定 $f_Z(z)$非零区间;

3)在 $f_Z(z)$非零区间中,逐段找x的积分上下限,确定$f_Z(z)$的表达式;

4) 写出 $f_Z(z)$的完整表达式.

3. $Z=X/Y$ 即商的分布 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(zy,y)\,dy$

注:在YOZ平面上作出 $f(zy, y)$ 的非零区域 G.

补充1、连续型随机变量的函数是离散型

例2: 设随机变量X与Y相互独立, 其概率密度分别为:

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}(\lambda_1,\lambda_2>0).$$

$$Z=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

试求:(1)条件概率密度$f_{x|y}(x|y)$; (2)Z的分布律和分布函数.

解: $$f(x,y)=\begin{cases}\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}, & x>0, y>0\\ 0, & else.\end{cases}$$

当$0<y$ 时, $f_Y(y)>0$, $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

当$y\le 0$时, $f_Y(y)=0$, $f_{X|Y}(x|y)$不存在.

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}, & x>0, y>0\\ 0, & else.\end{cases}\qquad Z=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

(2)Z的分布律和分布函数.

解：$P\{Z=1\}=P\{X\le Y\}=\iint\limits_{X\le Y} f(x,y)d\sigma$

$$=\int_0^{\infty}dx\int_x^{\infty}\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}dy=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

公式：$F(x)=P\{X\le x\}=\sum\limits_{x_i\le x}P\{X=x_i\}$

$$F(z)=P\{Z\le z\}=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}, & 0\le z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$$