
戴口罩 防感染
保护自己 也对他人负责

第一章 的重点

1、事件关系，运算规律，加法定理

2、互斥与独立事件

3、全概率及贝叶斯公式的应用：教材例1.3.10

第一章 的核心（条件概率，乘法公式，加法公式）

步骤：(1)所求的事件(结果)记为A(文字描述)

(2)样本空间有限划分(导致的原因)记为B_i(文字描述)

(3)由全概率公式：$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$ 抽签公平性

或由贝叶斯公式：$P(B_i|A)=\dfrac{P(AB_i)}{P(A)}=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$ 例1

4、分类抽取小球 $P=\dfrac{C_{n_1}^{d_1}C_{n_2}^{d_2}\cdots C_{n_M}^{d_M}}{C_n^d}$ $\sum_{i=1}^{M}n_i=n$ $\sum_{i=1}^{M}d_i=d\ ,d_i\le n_i$

(超几何分布) $P(B)=\dfrac{C_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, m=0,1,$\cdots$,$l=\min\{M,n\}$

1. 六个事件关系、运算规律(从事件角度理解包含等6关系)

德·摩根律: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

$$A-B=A-AB=(A\cup B)-B$$

2、概率的一些重要性质:

1)(概率单调性)若事件 A 和 B 满足 $A\subset B$, 则有

$P(A)\le P(B)$, $P(B-A)=P(B)-P(A)$ 成立

教材例1.2.6： $(1)P(A-B)=P(A)-P(AB);$

$(2)P(A-B)=P(A\cup B)-P(B).$

第二章: $P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}=F(b)-F(a)$

2) 概率加法定理：对试验E 的任意两个事件A 和B 有

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$(熟悉三件事件的和)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i\le k\le n}P(A_iA_k)+\cdots+(-1)^{n+1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right).$$

独立事件与互斥(或互不相容)事件

1. 称A、B为互不相容，若$AB=\varnothing$,即A、B不可能同时发生.

2. 称A、B 相互独立，若$P(AB)=P(A)P(B)$

或 $P(A|B)=P(A)$

即事件A发生的可能性大小不受事件B的影响.

注1: 事件的独立性是否存在传递性?即事件A与事件B相互独立事件B是事件C相互独立, 能否推知事件A与事件C相互独立?

注2: 事件A与事件B相互独立, 事件C是事件B的子集, 能否推知事件A与事件C相互独立?

注3: 独立与互斥的关系?任意两个事件$P(A)>0$、$P(B)>0$, 它们相互独立和互不相容不能同时成立。

注4:第三章通过随机变量的分布函数, 分布律, 密度函数判断随机变量独立的形式.

1. 事件的独立性是否存在传递性?即事件A与事件B相互独立, 事件B是事件C相互独立, 能否推知事件A与事件C相互独立？试举例说明.

2.事件A与事件B相互独立, 事件C是事件B的子集, 能否推知事件A与事件C相互独立?

(1)事件A与B相互独立，不一定互不相容：

例2、 设同时掷两个均匀的四面体一次，每一个四面体的四面分别标有号码1，2，3，4。

令A={甲四面体向下的一面是偶数}，
B={乙四面体向下的一面是奇数}，
C={两个四面体向下的一面同为奇数或偶数}。

设Ω={(偶，奇)，(奇，偶)，(奇，奇)，(偶，偶)}

$$P(A)=P(B)=P(C)=8/16=1/2$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=1/4$$

但是，A∩B＝{(偶，奇)} $\neq \phi$

所以，事件A与B相互独立，但是不互不相容。

举例子：抛硬币，掷骰子等常见，大家容易掌握，理解的。

(1)事件A与B相互独立，不一定互不相容：

A与B相互独立，表示其中一个事件发生与否与另一事件发生与否无关，它并不表示A与B不能同时发生。

(2) 事件A与B互斥，不一定相互独立：

$A\cap B=\phi,\Rightarrow P(A\cap B)=0$ 不一定有 $P(A)P(B)=0$

若事件A与B互不相容，则意味这一个事件(例如A)的发生，必然导致另一事件(例如B)的不发生，即它们之间可能有一定的联系，A与B不一定相互独立。

注3: 独立与互斥的关系?任意两个事件$P(A)>0$、$P(B)>0$, 它们相互独立和互不相容不能同时成立。

若 $P(A)>0, P(B)>0$, 当 A与B互不相容, 有

$P(AB)=P(\Phi)=0$, 当A与B相互独立, 则有

$P(AB)=P(A)P(B)>0$, 两者不能同时成立.

对于任意两个随机事件A和B，$0<P(B)<1$,以下结论中正确的有______.

(1)若$AB=\varnothing$, 则A与B一定相互独立;

(2)若$AB \neq \phi$, 则$P(AB)>0$;

(3) 若$P(A|B)=P(A)$,则A与B相互独立;

(4) 若$P(AB)=0$,则A与B互不相容.

1. 分析不可能事件与概率为0的事件的区别，并给出一个具体实例。

举例子：抛硬币，掷骰子等常见，大家容易掌握，理解的。

设随机事件 A 与 B 相互独立，B 与 C 相互独立，A 与 C 互不相容，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.25$，$P(C)=0.125$，求$P(A\cup B\cup C)$ 。

随机变量X与Y相互独立的另一等价条件？

X与Y相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

$\Leftrightarrow P\{X\le x \mid Y=y\}=F_{X|Y}(x|y)=F(x)$ 对所有$(x,y)\in R^2$成立.

两个离散型r.v.X,Y相互独立

1) $P_{ij}=P_{i.}P_{.j}$ 对所有（x_i,y_j）成立.

2) $P\{X=x_i|Y=y_j\}=P\{X=x_i\}$

3) $P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=P\{Y=y_j\}$

两个连续型r.v.X,Y相互独立

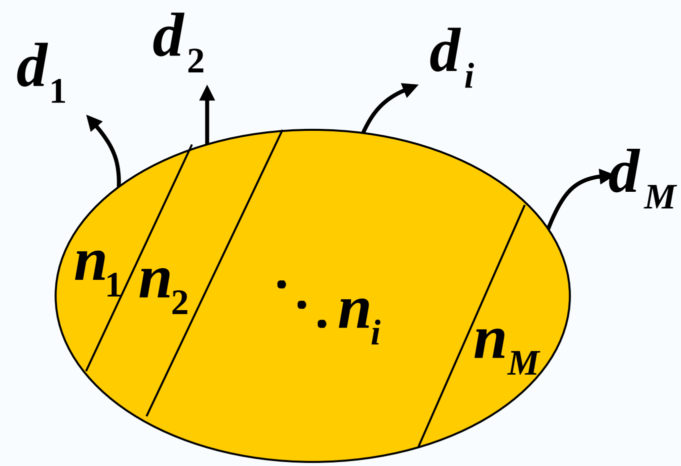
1) $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 2) $f_X(x)=f_{X|Y}(x|y)$

3) $f_Y(y)=f_{Y|X}(y|x)$在平面上除去“面积”为0的集合外成立.

第 一 章 补充

分类抽球问题：

袋中有n个球（12页例1.2.5）



从袋中取$d(d \le n)$个，

其中恰有d_i个第i类球

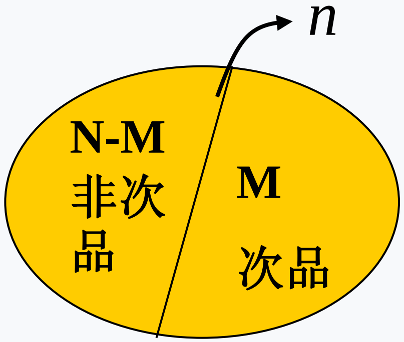
$(i=1,2,\cdots,M)$的概率为：

$$\sum_{i=1}^{M} n_i = n$$

$$P=\frac{C_{n_1}^{d_1}C_{n_2}^{d_2}\cdots C_{n_M}^{d_M}}{C_n^d}$$

$$\sum_{i=1}^{M} d_i = d \;, d_i \le n_i$$

推广一般模型：一批同类产品共*N*件，其中有*M*件次品，从中随机抽取*n*件，求恰有*m*件次品的概率。



$$P(B)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

B={有*m*件次品}

$$m=0,1,\cdots,l=\min\{M,n\}$$

超几何分布：不考虑顺序（组合角度）

(1)题目改为依次不放回抽取*n*件（考虑顺序）

$$P(B)=C_n^m\cdot\frac{P_M^m P_{N-M}^{n-m}}{P_N^n}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

(2)题目改为有放回依次抽取*n*件

$$P(B)=\frac{M^m\cdot(N-M)^{n-m}}{N^n}\cdot C_n^m=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\cdot\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m}$$

——二项分布

对于一个伯努利试验，我们常考察如下问题：

(1) 事件A 首次发生时的试验次数Z；

$$P\{Z=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\ldots,$$ 几何分布或首次分布.

(2) 事件A 发生k 次时的试验次数Y；

$$P\{Y=t\}=C_{t-1}^{k-1}p^k q^{t-k},\qquad t=k,k+1,\ldots.$$

称Y 服从负二项分布(或帕斯卡(Pascal)分布)

负二项分布可看作几何分布的更一般情况。

(3) n 次试验中事件A 发生的总次数X, 服从二项分布.

$$P\{X=k\}=P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\ldots,n.$$

试求A_1，A_2，…，A_n至少有一个发生的概率，其中$0 < P(A_i)=p_i < 1$，

若（1）A_1，A_2，…，A_n 互不相容，

$$P= P(A_1)+ P(A_2)+ \dots + P(A_n)=p_1+p_2+ \dots +p_n$$

（2）A_1，A_2，…，A_n相互独立。

$$P = P\{ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \}$$

$$= 1 - P\{ \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n \} = 1-\prod_{i}^{n}(1-p_i)$$

特别，当 $P(A_i)= p$, $i=1, 2, \dots, n$,有

$$P\{ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \} = 1-(1-p)^n$$

任意关系时：$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \overset{\text{加法定理}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n}^{n} P(A_iA_j)$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n}^{n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

第 二至三章的重点

1、分布函数的性质及分段表达

2、分布律与密度函数的非负, 归一性

(五种常用分布及关系: 例泊松分布与二项分布)

3、随机变量函数的密度函数: 教材例3.4.4和例3.4.5

基本的分布函数法:重点是一维

例2

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=\begin{cases}P\{-y\le X\le y\}, & y\ge 0\\ 0, & else\end{cases}$$

套用（必写） 大写 小写 分段

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

注:极大值或极小值分布;$X+Y$和的分布(也注意离散和连续的混合);商的分布(教材例3.4.10及3.4.12)

例3
教材32题）

4、随机变量的独立性，均匀分布、正态分布的可加性及二维正态的性质

例4 例5

1.分布函数: 设X是一个随机变量, x是任意实数,称函数

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\omega: X(\omega)\le x\},$$

为随机变量X 的分布函数, $F(x)$ 也记为$F_X(x)$.

任何类型的分布函数具有:

1) $P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}=F(b)-F(a)$

$P\{X=x\}=F(x)-F(x-)$(所有类型的随机变量)

2) 分布函数的基本性质(判定):

(1)若 $x_1\le x_2$, 则有$F(x_1)\le F(x_2)$

（2） $0\le F(x)\le 1$, 且$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

（3） $F(x)$ 是右连续函数, 即$F(x+0)=F(x)$

二、离散型随机变量:

$$P\{X=x_i\}=p_i:(1)\ p_i \geqslant 0;(2)\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$$

分布函数与分布律的关系:　(对所有满足 $x_i \le x$ 的i求和)

$$F(x)=P\{X\le x\}=P[\bigcup_{x_i\le x}\{X=x_i\}]=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_i\}$$

三、连续型随机变量

（1）$f(x) \geqslant 0$;（非负性）

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dt = 1$.（概率曲线下面积为1）

4）能进行分布函数与概率密度的转换；

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad F'(x)=f(x)$$

$P\{X=x\}=F(x)-F(x-)$(所有类型的随机变量)

离散的标志: 分布律或分布函数为阶梯函数

连续的标注：密度函数或分布函数为连续函数

五种经典分布：

1.Bernouli试验中的二项分布：判断条件

2.泊松分布：应用范围、查表及泊松逼近定理

若 $\lim\limits_{n\to\infty} np=\lambda>0$，(实际问题)当 n 够大，p 较小时,有

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad k=0,1,2,\ldots,n$$

3.均匀分布：均匀性的理解

几何概率

样本点是等可能的: 概率与位置, 形状 均无关, 与测度(长度、面积、体积)成正比.

4.指数分布：无记忆性的理解

$$P\{X>t+s\mid X>t\}=P\{X>s\}$$

5.正态分布：概率计算两种方法

1）利用正态概率曲线特征；2）利用公式查表计算

对于一个伯努利试验，我们常考察如下问题：

(1) 事件A 首次发生时的试验次数Z；

$$P\{Z=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\ldots,\text{几何分布或首次分布.}$$

(2) 事件A 发生k 次时的试验次数Y；

$$P\{Y=t\}=C_{t-1}^{k-1}p^k q^{t-k}, \qquad t=k,k+1,\ldots.$$

称Y 服从负二项分布(或帕斯卡(Pascal)分布)

负二项分布可看作几何分布的更一般情况。

(3) n 次试验中事件A 发生的总次数X, 服从二项分布.

$$P\{X=k\}=P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\ldots,n.$$

首次成功的试验次数

对于一个伯努里试验，考察如下问题：

(1) n次试验中事件A 首次发生时的试验次数Z；

$$\{Z=k\}=\{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k\},k=1,\cdots,n-1$$

$$\{Z=n\}=\{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{n-1}}A_n\}\cup\{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{n-1}}\,\overline{A_n}\}$$

例1:某人有3发子弹, 他射击空中气球的命中率为0.9, 命中则停止射击. 他用去的子弹个数X的分布律为?

注：推广$n\to+\infty$，$P\{Z=k\}=p(1-p)^{k-1}$为几何分布.

(2) 事件A 发生k 次时的试验次数Y； 负二项分布(或

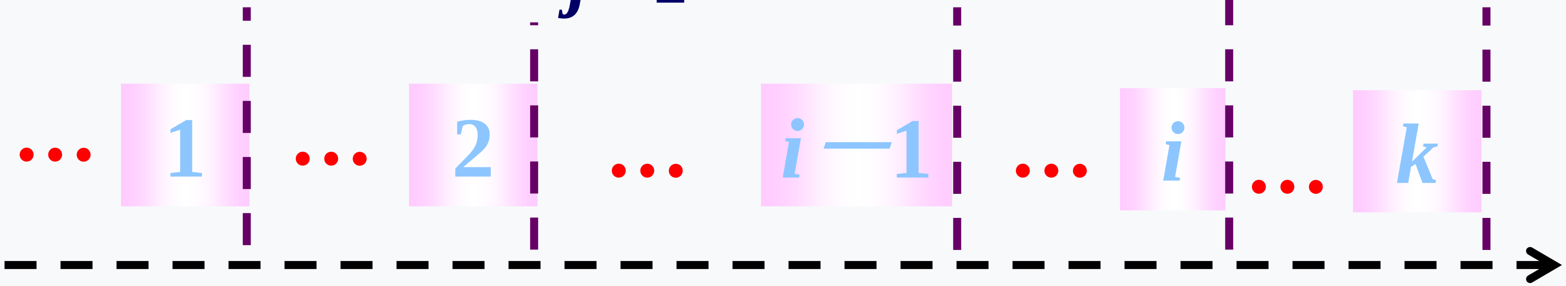
$P\{Y=t\}=C_{t-1}^{k-1}p^k(1-p)^{t-k},t=k,k+1,\cdots,$ 帕斯卡(Pascal)分布)

(3) n 次试验中事件A 发生的总次数X. ($B(n,p)$再生性和可加性)

例4.1.7：向某一目标进行射击, 直至命中k次为止, 已知命中率为$p>0$. 求射击次数X的平均值.

分析：X的分布律为负二项分布：

$$P\{X=j\}=C_{j-1}^{k-1}p^k(1-p)^{j-k} \quad j=k,k+1,\ldots$$



X_i表示第$i-1$次命中以后, 到第 i 次命中的射击次数.

X_i的分布律为:

X_i	1	2	……	m	……
$P\{X_i=m\}$	p	$(1-p)p$	……	$(1-p)^{m-1}p$	……

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_k$$

第 二 章

正态分布(GAUSS分布) $N(\mu,\sigma^2)$（$\sigma>0$）

$$\varphi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in R$$

有 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

分位数 $X\sim N(0,1)$，若实数u_α使

$$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$$

则称u_α为标准正态分布的对应于α的上侧分位数.

$-u_\alpha=u_{1-\alpha}$

$\Phi(u_\alpha)=1-\alpha$

一、二维随机变量的联合分布

分布函数的定义：$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$

四条性质：$P\{x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\}$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0\qquad \lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0\qquad \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1$$

联合分布函数及性质与边缘分布函数的关系

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<+\infty\}=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\le+\infty,Y<y\}=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

第 三 章 复 习 课

二、离散型：联合分布律

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\quad i,j=1,2,\ldots.\qquad (*)$$

若 1) $p_{ij}\geq 0\qquad i,j=1,2,\ldots..$

2) $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$

$$F(x,y)=P\{X\leq x,Y\leq y\}=\sum_{x_i\leq x}\sum_{y_j\leq y}p_{ij}$$

联合分布律及性质与边缘分布律关系

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\qquad i=1,2,\ldots$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}\qquad j=1,2,\ldots$$

二、连续型随机变量的函数及其概率密度

一维情况，即一元函数：

1. 最基本的方法是“分布函数法”

$$F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}=\int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} F_Y'(y) & y_1<y<y_2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

当$x_1<x<x_2$时，$f_X(x)>0$

$F_Y(y)$

$y=g(x)\in(y_1,y_2)$, $f_Y(y)>0$ 只求解：$(y_1<y<y_2)$

三、连续型：联合概率密度

1.联合概率密度及性质 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$

2.边缘概率密度

注意带参变量积分的计算

X,Y的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

3.和的概率密度(类似边缘的思想)

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy \qquad f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

4 .$Z=X/Y$ 即商的分布(类似边缘的思想)

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)dy$$

小结: 三种积分, 实质上是解决带参变量积分的问题.

1.关于X 和Y 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

注:在 ***XOY***平面上作出 $f(x, y)$ 的非零区域 G;

2. $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx \qquad y=z-x$$

步骤:

1) 在 ***XOZ***平面上作出 $f(x, z-x)$ 的非零区域 G;

2) 将区域 G投影到Z轴上, 确定 $f_Z(z)$非零区间;

3)在 $f_Z(z)$非零区间中,逐段找x的积分上下限,确定$f_Z(z)$的表达式;

4) 写出 $f_Z(z)$的完整表达式.

3. $Z=X/Y$ 即商的分布 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(zy,y)\,dy$

注:在***YOZ***平面上作出 $f(zy, y)$ 的非零区域 G.

P_{85}页例3.4.3 泊松分布具有可加性

若X与Y相互独立，$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$，

则$X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_1)$

离散卷积公式

P_{85}页 二项分布具有可加性

若X与Y相互独立，$X \sim B(n_1, p), Y \sim B(n_2, p)$，

则$X+Y \sim B(n_1+n_1, p)$

卷积公式

P_{91}页例3.4.11 正态分布具有可加性

若X与Y相互独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_1, \sigma_2^2)$，

则$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_1, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

正态分布的重要性质

重要结论：

P87 例3.4.7:正态随机变量的线性函数也服从正态分布

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), Y = aX + b(a \neq 0)$$
$$\Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$$

P_{90}页例3.4.11 正态分布具有可加性：

X与Y相互独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

$$\Rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

若Y服从正态分布, 而Y表成两个独立随机变量X_1, X_1之和，则X_1, X_1必服从正态分布. 这称为正态分布的“再生性”．

二维正态分布

正态分布的重要性质

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

1.边缘分布一定是正态分布：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

任意线性组合$aX+bY$仍是正态分布：

1)X与Y独立：$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$

2)X与Y不独立：

$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\sigma_1\sigma_2\rho)$

2.X与Y独立$\Leftrightarrow\rho=0$

$(X,Y)\sim N(0,1;0,1;0)\quad f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},x,y\in R$

若X,Y都服从一维正态分布，则X与Y相互独立不等价于X与Y不相关。(X与Y均为方差非0的随机变量)

正态分布的重要性质

1.设随机变量X与Y相互独立，$X \sim N(0,\frac{1}{2}),Y \sim N(0,\frac{1}{2})$,

试求概率$P\{X-Y\geq 0\}$。

解：由正态分布随机变量的可加性有：

$$Z = X - Y \sim N(0,1)$$

正态随机变量Z关于纵轴对称，

故$P\{X-Y\geq 0\}=\frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}\Phi(y)$$

条件分布律:

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad i=1,2,\ldots.$$

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad j=1,2,\ldots.$$

条件分布律具有分布律的性质: 非负性, 归一性.

条件概率密度:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\qquad f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

条件概率密度满足密度函数的性质:

$$(1)\ f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\geq 0;\ (2)\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx=1$$

离散型条件分布函数:

$$F_{X|Y}(x|y)=\sum_{x_i\leq x}P\{X=x_i|Y=y_j\}=\sum_{x_i\leq x}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

连续型条件分布函数:

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

$P\{X=x_i,Y=y_j\}$关于x_i和y_j的二元函数；

$P\{X=x_i|Y=y_j\}$关于x_i的一元函数，且取值与y_j有关；

$P\{X=x_i\}$ 关于x_i的一元函数，且取值与y_j无关；

以上三种分布律均具有分布律的性质：非负性，归一性.

$f(x,y)$ 关于x和y的二元函数；

$f_{X|Y}(x|y)$ 关于x的一元函数，且取值范围与y有关；

$f_X(x)$ 关于x的一元函数，且取值范围与y无关；

以上三种密度函数均具有密度函数的性质：非负性，归一性.

第 三 章的补充

$X \sim U(0,y), i.e.,$

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & y>x>0\\ 0, & ellse\end{cases}$$

1.概率密度函数与条件概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & x>0, y>x\\ 0, & else\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & else\end{cases}$$

当$y>0$时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & y>x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

满足非负、归一性

2.分布函数与条件分布函数：79页例3.3.3

满足三条性质

变量连续：$F_X(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}\ne\frac{P\{X\le x,Y=y\}}{P\{Y=y\}}$$

$$=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)du$$

为0

不为0

$$P\{X\le x|Y>y\}=\frac{P\{X\le x,Y>y\}}{P\{Y>y\}}$$

例6

4. 如果随机变量 Y 的分布函数 F(y)连续且严格单调增加，而随机变量 X～U(0,1)，令 $Z=F^{-1}(X)$，那么 Z 与 Y 同分布，请说明理由。

4. 理由：因为$X \sim U(0,1)$，所以

$$F_Z(y)=P\{Z \le y\}$$

$$=P\{F^{-1}(X) \le y\}$$

$$=P\{X \le F(y)\}$$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

所以：$=F_X(F(y)) = F(y)$

设随机变量*X*的分布函数*F(x)*连续且单调增加，求证: 随机变量*Y=F(X)* ~*U*(0,1) .

证明：由于$F(\cdot)\uparrow$，$F^{-1}(\cdot)$存在，$Y=F(X):\Omega \to [0,1]$

当$0<y<1$时, $F_Y(y)=P\{Y \le y\}=P\{F(X) \le y\}$

$$= P\{X \le F^{-1}(y)\} = F_X(F^{-1}(y)) = y$$

第三章的补充

例3.4.6：已知二维随机变量（*X*,*Y*）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2(x+y) & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

令$y = z - x$

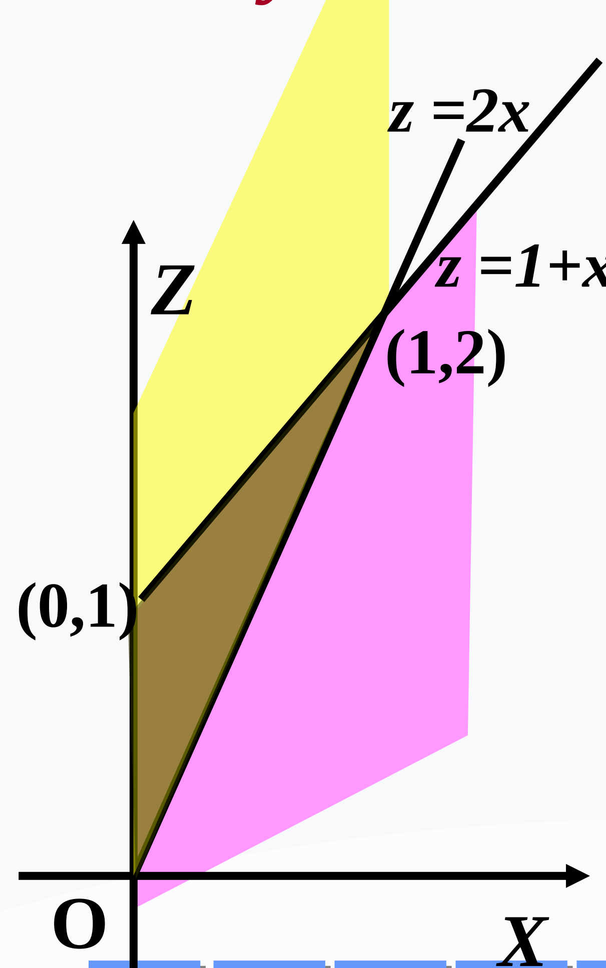
求：$Z=X+Y$ 的概率密度。

解：在XOZ平面上作出区域

$$G=\{(x,z)\mid 0\le x\le z-x\le 1\}$$

$$=\left\{(x,z)\,\middle|\,0\le x\le z/2,\ 2x\le z\le 1+x\right\}$$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}2z & (x,z)\in G\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



当 $z \le 0$ 或 $z \geq 2$ 时 $f_Z(z) = 0$

当 $0 < z \le 1$ 时 $f_Z(z) = \int_0^{z/2} 2z\,dx = z^2$

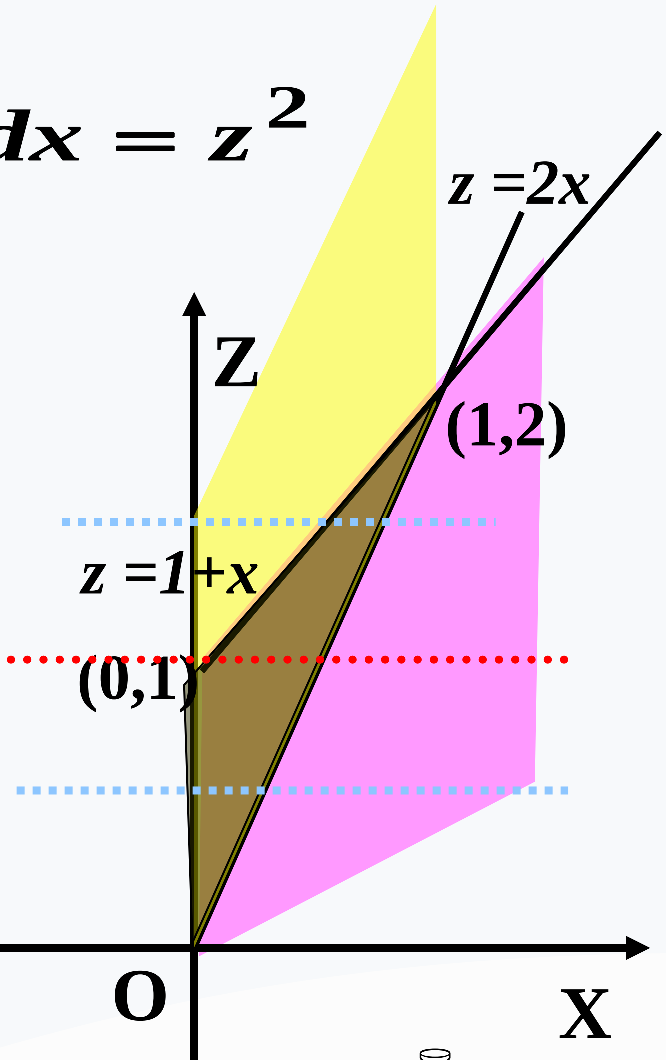
当 $1 < z < 2$ 时

$$f_z(z) = \int_{z-1}^{z/2} 2z \, dx$$

$$= 2z - z^2$$

综上得 $Z = X + Y$ 的概率密度为：

$$f_Z(z) = \begin{cases} z^2 & 0 < z \le 1 \\ 2z - z^2 & 1 < z \le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



均匀分布的本质特点(几何概率:只与几何图形的测度有关):

1. 设$X \sim U(a,b)$, $(c,d) \subset (a,b)$ 则

$$P\{c < X \le d\} = \frac{d-c}{b-a} = \frac{(c,d)\text{的长度}}{(a,b)\text{的长度}}$$

2. (X,Y)在G上服从均匀分布, 设$D \subset G$ 则有

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D \frac{1}{S(G)} d\sigma = \frac{S(D)}{S(G)}$$

几何概率

样本点是等可能的: 概率与位置, 形状 均无关, 与测度(长度、面积、体积)成正比.

若以A_g记“在区域Ω中随机地取一点,而该点落在区域g中”这一事件,则其概率定义为

$$P(A_g) = \frac{g\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}}$$

例3.1.7：把长为 l 的木棒，任意折成3段，求它们能构成一个三角形的概率.

解：设第一段的长度为 X，第二段的长度为 Y

(X,Y) 在三角形

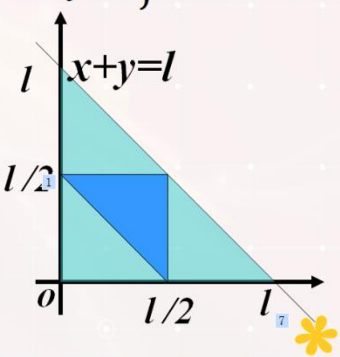
$$G=\{(x,y)\mid 0\le x\le l,\ 0\le y\le l,\ x+y\le l\}$$

上服从均匀分布.

所求概率为

$$p=P\{X<l/2, Y<l/2, X+Y>l/2\}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}l^2}=\frac{1}{4}$$



1、两个边缘分布都是正态分布的二维随机变量的联合分布也一定是正态分布吗？反之呢？

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_0^{1-x}\frac{2}{1^2}\,dy=\frac{2}{1^2}(1-x),0<x<1$$

2、两个边缘分布都是均匀分布的二维随机变量的联合分布也一定是均匀分布吗？反之呢？

例4.3.2： (X,Y) 在以原点为圆心的单位圆内服从均匀分布。

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

判断独立性：

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

五、（20 分）随机变量（X, Y）的联合概率密度函数是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}g(x)g(y)\quad (x,y)\in R_2$$

其中 $$g(x)=\begin{cases}\cos x & |x|\le\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$$

1) 证明 X 与 Y 都服从正态分布；2) 求随机变量 Y 关于 X 的条件概率密度；3）讨论 X 与 Y 是否相互独立？ 4) 根据本题的结果，你能总结出什么结论？

解 1) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)g(y)dy$$ （3 分）

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos y\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in R$$ （5 分）

即 $X\sim N(0,1)$.

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}\int_{-\infty}^{\aleph}g(x)g(y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad y\in R$$

$Y\sim N(0,1)$ （9 分）

五、（20 分）随机变量（X, Y）的联合概率密度函数是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}g(x)g(y)\quad (x,y)\in R_2$$

其中 $$g(x)=\begin{cases}\cos x & |x|\le\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$$

2） 对任意 $x\in R$，因 $f_X(x)>0$

$$f_{Y|X}(y)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\pi^2-\frac{x^2}{2})}g(x)g(y),\ y\in R$$

3） 因 $f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$, 故 X 与 Y 不相互独立.

或因 $f_{Y|X}(y)=f_Y(x)$，故 X 与 Y 不相互独立.

4）如 ① n 维正态随机变量的每一分量均服从正态分布，反之不成立；

② 可由条件分布确定两个随机变量的独立性；

等等，只要是总结出可用的结论均可 （20 分）

注：$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),(x,y)\in R^2.$

多维随机变量的独立性 ($X_1, X_2, \ldots X_n$ 相互独立)

定义: 设 n 维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 若对任意实数$x_1, x_2, \ldots, x_n$均有

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i) \qquad (*)$$

定理: 若n 维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 相互独立, 则

1) 任意k个随机变量($2 \le k \le n$) 也相互独立.

2) 随机变量 $g_1(X_1), g_2(X_2), \ldots, g_n(X_n)$ 也 相互独立.

3) m维 随机向量$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 与$n-m$维 随机向量$(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$ 也 相互独立.

4) 随机变量 $h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 与 $g(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$ 也 相互独立.

随机变量X与Y相互独立的另一等价条件?

X与Y相互独立$\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

$\Leftrightarrow P\{X \le x \mid Y=y\} = F_{X|Y}(x|y) = F(x)$对所有$(x,y)\in R^2$成立.

两个离散型r.v.X,Y 相互独立

1) $P_{ij}=P_{i.}P_{.j}$ 对所有(x_i,y_j)成立.

2) $P\{X=x_i | Y=y_j\}=P\{X=x_i\}$

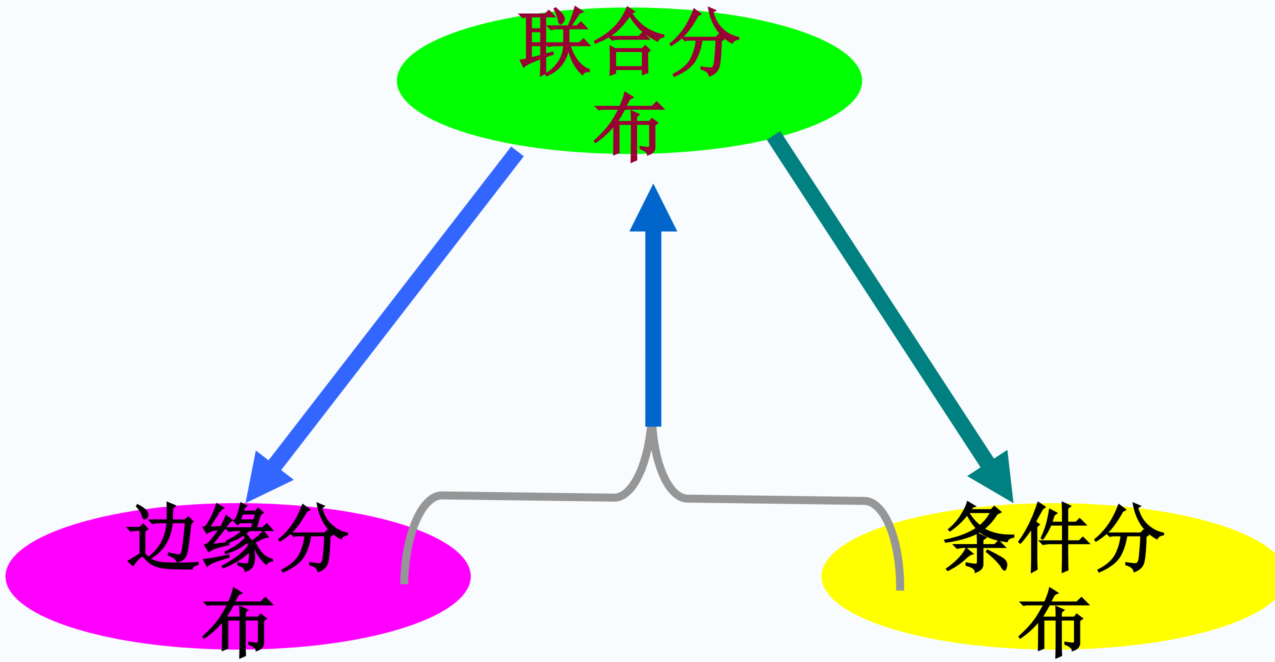
3) $P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=P\{Y=y_j\}$

两个连续型r.v.X,Y 相互独立

1) $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 2) $f_X(x)=f_{X|Y}(x|y)$

3) $f_Y(y)=f_{Y|X}(y|x)$在平面上除去“面积”为0 的集合外成立.

联合分布、边缘分布、条件分布三者之间的关系.



一个条件分布和相对应的边缘分布能唯一确定联合分布.

$$p_{ij} = p_{i\cdot} P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = p_{\cdot j} P\{X = x_i \mid Y = y_j\} \quad i, j = 1,2,\ldots$$

$$f(x, y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x)$$