本次课的重点是：
基本事件，复合事件的定义理解

下次课内容：

要讲到§1.2 概率中的古典概率

包括剩下事件关系，随机变量的初步定义，
§1.2 概率中的概率，频率，古典概率

一、概率论与数理统计

研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科。

二、描述“不确定”(Uncertainty)的学科

- **概率论(Probability).**

1933年，苏联数学家**A. N. Kolmogorov (1903-1987)**发表《概率论基础》, 是概率论的经典之作。该书首次将概率论建立在严格的公理基础上，标志着概率论发展新阶段的开始，具有划时代的意义。

缺乏充足理由律(理由不充分, 导致结果不确定)

推理不确定性的数学, 正如微积分是推理变化率的数学。

2. 模糊数学(Fuzzy). 1965年，美国控制论专家、数学家L. A. Zadeh发表了论文《模糊集合》，标志着模糊数学这门学科分支的诞生.

缺乏排中律，并非“非黑即白”(通常被表述为A是B或不是B).

一、概率论与数理统计

研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科。

概率两只手

左手: 基于柯尔莫果洛夫公理(严谨数学)

右手: 概率的思考方法，概率的物理直观

(试验: 概率直观)

随机试验:对随机现象所进行的观察和实验。
(重复性,明确性(推广抽象)和不可预知性)

随机事件：在随机试验中可能发生也可能不发生的结果
(基于一定的试验目的)。

随机事件
- 基本事件
- 复合事件 由若干基本事件组合而成的事件。
- 必然事件
- 不可能事件

必然事件、不可能事件：极端情形

基本事件: 在一次试验中必发生一个且仅发生一个的最简单事件，且具有相对性。

或仅含一个样本点的事件称为一个“基本事件”.

注1：“必发生一个且仅发生一个”是针对试验中一组事件而言；“最简单”是针对每个事件而言。

注2：试验目的不同，则试验的基本事件就有可能不相同。我们把这称为基本事件具有相对性。

随机事件的分类：

必然事件就是随机试验中肯定发生的事件，记为Ω。

不可能事件就是随机试验中肯定不发生的事件，记为∅。

基本事件：在一次试验中必发生一个且仅发生一个的最简单事件。

注：“必发生一个且仅发生一个”是针对同一个试验中一组事件而言；

“最简单”是针对每个事件本身而言，

也可理解为“不能再分解”的事件，

有时，把单一的试验结果称为一个“基本事件”。

复合事件：是由若干基本事件组合而成的事件。

E1：某电话总台一天接到的呼叫次数．

随机事件

A＝{呼叫次数为偶数}；

B＝{呼叫次数为奇数}；

~~基本事件~~？　复合事件

C＝{呼叫次数大于3}；

A_i＝{呼叫次数为i}，i =0, 1, 2, ⋯　基本事件

(表示一组事件A_0, A_1 , A_2, ⋯)

Ω={呼叫次数不小于0}是必然事件

∅={呼叫次数为1. 2 } 是不可能事件

复合事件

随机事件：基于一定的试验目的进行试验。

基本事件: 在一次试验中必发生一个且仅发生一个的最简单事件。

复合事件： 是由若干基本事件组合而成的事件。

随机事件
- 基本事件
- 复合事件
- 必然事件
- 不可能事件

必然事件、不可能事件：极端情形

注意: 试验目的不同，则试验的基本事件就有可能不相同。我们把这称为基本事件具有相对性。

测量身高

例4　测量某团体人员的身高

用X表示人的身高，$\{X = x\}$表示“人的身高为$x(x>0)m$”则有：

基本事件

$\{X = x\}$,

集合

$\{X > 0\}$，$\{X < 1.5\}$,

$\{X > 1.70\}$

复合事件

等等都是随机事件.

若测量人的身高是为了判断乘车购票与否，则仅有三个基本事件:

A={购全票}，B={购半票}，C={免票}.

注意:试验目的不同，则试验的基本事件就有可能不相同。我们把这称为基本事件具有相对性。

二. 样本空间

联系于试验的每一个基本事件，用包含一个元素 ω 的单点集来表示。

基本事件A_1 **基本事件A_2** …… ……

↕ ↕ **一一对应** 抛硬币

单点集{ω_1} **单点集{ω_2}** …… ……

基本事件的对应元素全体所组成的集合

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\}$$

称为试验的样本空间。样本空间的元素称为样本点（ω），或称随机试验的每个结果为样本点。

抛硬币

E2 抛一枚硬币，观察其出现正面H(heads)和反面T(tails)的情况

基本事件
$$\begin{cases} A=\{\text{出现正面}\}, \\ B=\{\text{出现反面}\}. \end{cases}$$

我们可以令$A=\{\text{出现正面}\}=\{H\}$,

$B=\{\text{出现反面}\}=\{T\}$.

而样本空间$\Omega=\{H, T\}$.

试验的样本空间：$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

样本空间的元素称为样本点 ω，或称随机试验的每个结果.

基本事件：单点集$\{\omega_1\}$；

复合事件：

由它所包括的基本事件对应的单点集的元素组成的集合表示，则复合事件是样本空间的一个子集。

样本空间Ω：对应的事件是必然事件，

空集$\varnothing$：对应的事件是不可能事件。

摸球试验

E1 从 10个标有号码 1, 2, …, 10 的小球中任取一个，记录所得小球的号码，这就是一个随机试验。

A = {取得的小球号码为偶数}, **B** ={号码为奇数}

A_i = {号码为i}， i = 1, 2, ⋯, 10都是随机事件.

基本事件：A_i ={号码为i } ={ω_i}={i }, i =1,2,⋯,10

复合事件：A ={号码为偶数}={2,4,6,8,10}

B ={号码为奇数}={1,3,5,7,9};

Ω={号码不超过10 }={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

此即为样本空间，是一个必然事件.

$\varnothing$ ={号码等于0}, 它不包含任何基本事件，从而不包含任何样本点，是不可能事件.

试验的样本空间：$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

样本空间的元素称为样本点ω, 或称随机试验的每个结果.

基本事件：单点集$\{\omega_1\}$;

复合事件：样本空间的一个子集。

样本空间Ω：对应的事件是必然事件,

空集Ø：对应的事件是不可能事件。

从集合的角度如何判断事件发生？

在一次试验中, 基本事件$\{\omega\}$发生了, 对任意的事件A, 若$\omega\in A$, 称事件A 发生, 否则称A 没有发生.

摸球试验

E1 从 10个标有号码 1， 2, …， 10 的小球中任取一个， 记录所得小球的号码， 这就是一个随机试验。

Ω={号码不超过10 }={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

A={号码为偶数}={2,4,6,8,1,0}$\subset$ W

B={号码为奇数}={1,3,5,7,9} $\subset$ W

如果在一次试验中，取到编号为3的小球，则说基本事件A_3 = {号码为3}={ω_3 }={3 }发生。

又因为3$\in$*B*，故我们称事件*B* 在这一次试验中发生了。

三：随机事件的关系及运算

随机事件的关系及运算实质上对应集合的关系及运算

(1) 包含关系

事件角度：事件A 发生，必然导致事件B发生，

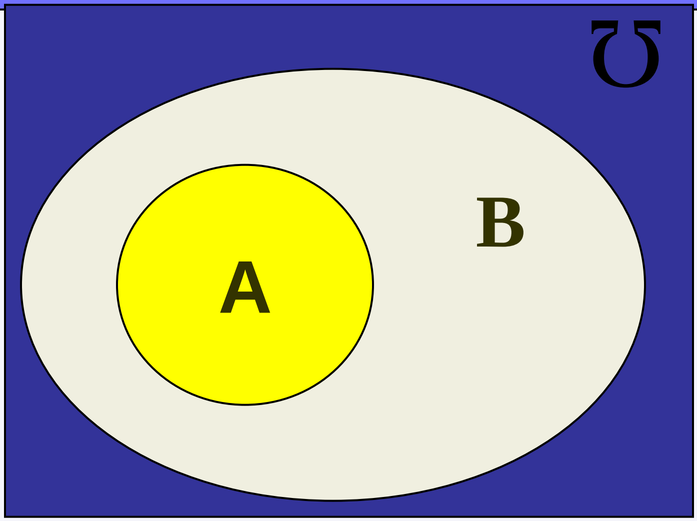
则事件B包含事件A，或A是B的子事件，记$A \subset B$.

从集合的角度：若$\omega \in A$ $\longrightarrow$ $\omega \in B$

如果两个事件互相包含，称为事件相等，记$A = B$.

对任意事件A，有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

例 子



从集合的角度 参见示图

例　从 10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

A = {球的号码为4的倍数} ={4，8},

B = {球号码为偶数} ={2，4，6，8，10}.

则: $A \subset B.$

(2) 和事件（或称事件的并）

事件的角度：$\{A$与B至少有一个发生$\}=\{A$发生 或 B发生$\}$

记为 $A\cup B$.

表示只有A发生, 或者只有B发生或两者同时发生.

从集合的角度:$A\cup B = \{\omega \mid \omega\in A$ **或**$\omega\in B\}$。

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$表示

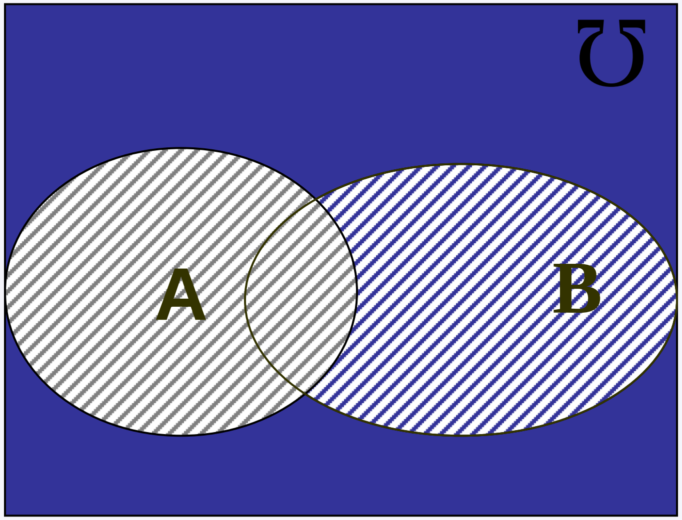
参见例子

"$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个事件发生"这一事件.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$表示事件列$A_1, A_2, \cdots$中至少有一个事件发生.

思考：同一试验中所有基本事件的和事件？

从集合的角度 $\xrightarrow[\text{示图}]{\text{参见}}$



例　从 10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

A={球的号码是不大于3的奇数}={1，3},

B={球的号码是不大于4的偶数}={2，4}

$$A \cup B = ?$$

C= $A \cup B$={球的号码不超过4} = {1，2，3，4}.

例 对某一目标进行射击，直至命中为止。

注：随机事件是随机试验中可能发生也可能不发生的结果。

$A = \{$击中目标$\}$;

$B = \{$前k次击中目标$\}$

$=\{$击中目标出现在前面k次射击中$\}$

设：

$$A_i = \{\text{第}i\text{次击中目标}\}, i = 1, 2, \cdots$$

则

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \qquad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

(3) 积事件（或称事件的交）

从事件角度：事件A与事件B 同时发生,

记为 A∩B 或 AB.

从集合的角度: $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$.

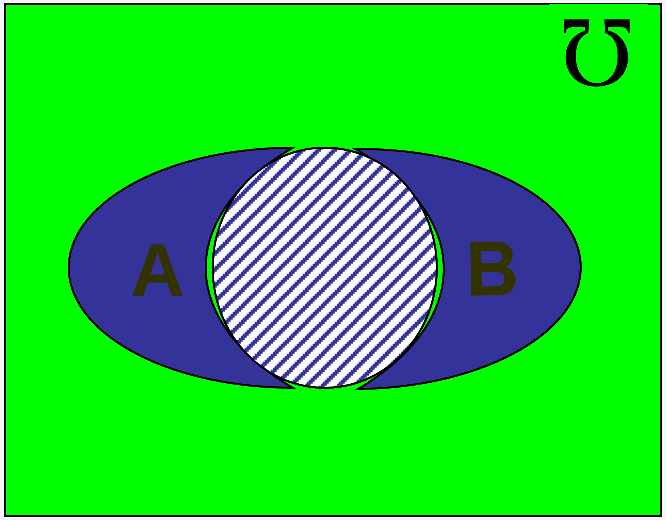
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{表示}$$

$$\text{"}A_1, A_2, \cdots, A_n \text{同时发生"这一事件.}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \text{表示"事件列} A_1, A_2, \cdots \text{同时发生"这一事件.}$$

参见例子

从集合的角度 参见 示图



例　从 10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

A={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9},

B={球的号码大于5}={6，7，8，9，10}

$$A \cap B = C = ?$$

C={球的号码是7或9}= {7，9}.

例 对某一目标进行射击，直至命中为止。

设：

B = {前k次击中目标}。 $B=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$

D = {进行了k次射击}；

= {前k-1次均未命中，第k次命中}；

A_i = {第i次射击命中目标}，i=1,2…

B_i = {第i次射击未命中目标}, i=1,2…

则

$$D=B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap A_k$$

思考：该试验的基本事件?

(4)互不相容事件（或互斥事件）

若A与B不可能同时发生，即$AB = \varnothing$，称A、B为互不相容或互斥事件。

显然，$\varnothing$ 与任何事件互不相容。

$A_1, A_2, \cdots, A_n$中任意两个互不相容，

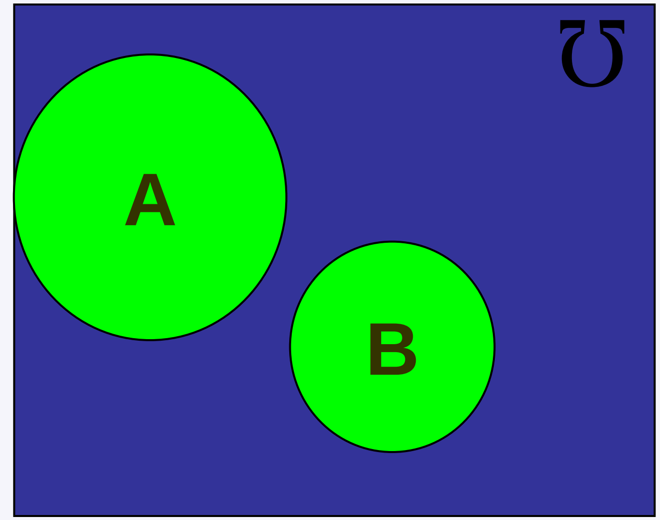
称 n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容（两两互斥）。

事件列 $A_1, A_2, \cdots$互不相容是指其中任意有限个事件互不相容。

性质：同一试验的基本事件互不相容。

参见例子

从集合的角度 参见示图



例：从 10个标有号码 1，2，⋯，10的小球中任取一个，记录所得小球的号码。

A={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9}，

B={球的号码是不大于4的偶数}={2，4}。

则：

A与B是互不相容的事件。

例　对某一目标进行射击，直至命中为止。

设： D_k = {进行了k次射击}，$k=1,2\ldots$

A_i = {第i次射击命中目标}，$i=1,2\ldots$

B_j = {第j次射击未命中目标}, $j=1,2\ldots$

则

D_k, $k=1,2\ldots$ 是互不相容的事件列。

A_i、B_i，$i=1,2\ldots$ 是互不相容的事件列。

(5)对立事件（或逆事件）

如果事件A与B必然有一个发生，但又不同时发生。

即 $A \cup B = \Omega$, 且$AB = \varnothing$,

称 A、B 互为对立事件（逆事件），记为 $B = \overline{A}$

从集合的角度: $\overline{A} = \{\omega \mid \omega \notin A, \varpi \in \Omega\}$

显然，在一次试验中, $\overline{A}$与 A 必发生且仅发生一个, 非此即彼。

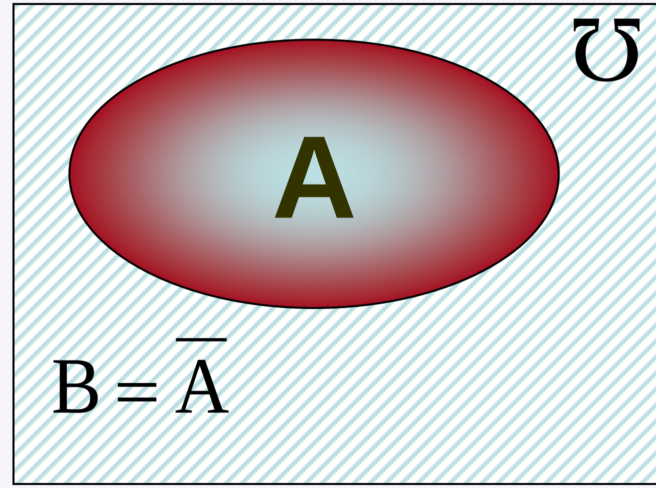
特别地：即对立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 互斥。

$\overline{\overline{A}} = ?$

思考：对立事件是基本事件？

参见例子

从集合的角度　参见 示图



例　从 10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

A={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9},

B={球的号码是偶数}={2，4，6，8，10}。

则:

A与B是对立事件。

(6) 差事件

从事件角度: 事件 A与B 的差事件就是

A发生并且B不发生，记 $A-B$。

也就是, 从构成A的那些试验结果中, 去掉在B内的那一些。

从集合的角度:

$$A-B=\{\omega \mid \omega\in A, 且\, \omega\notin B\}.$$

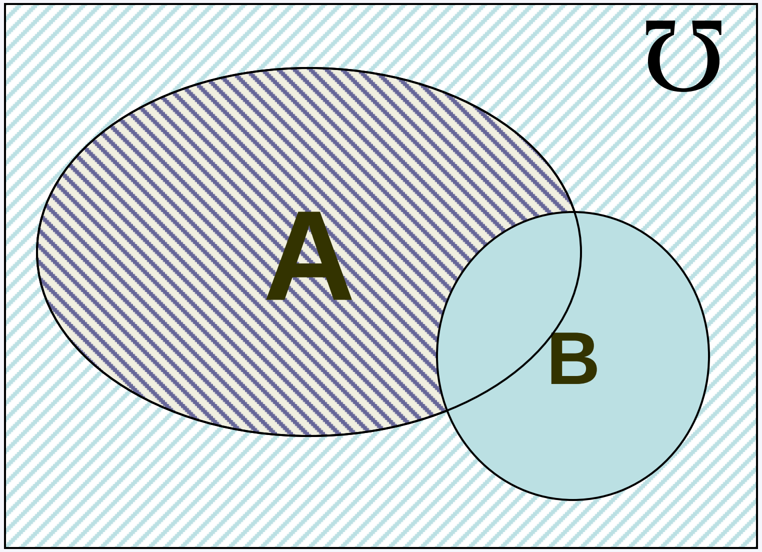
显然有

$$\boxed{A-B=A\overline{B}, \quad \overline{A}=\Omega-A.}$$

参见例子

差　事　件

从集合的角度　参见 示图



例　从 10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

A={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9},

B={球的号码不大于4}={1，2，3，4}。

则:

A-B={5，7，9}。

(7) 随机事件（集合）运算律

交换律： $A\cup B = B\cup A$，$A\cap B = B\cap A$

结合律： $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$;

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$。

分配律： $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$;

$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

$(A-B)\cap C = (A\cap C)-(B\cap C)$ $(A-B)\cup C = (A\cup C)-(B\cup C)$?

(De Morgan’s laws)德· 摩根定律（对偶律）：

$$\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B} \qquad \overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$$

吸收律： 如果 $A\subset B$，则 $A\cup B = B, A\cap B = A.$

- 甲乙两人向同一目标射击,设A={甲命中目标, 乙未命中目标}则其对立事件
- $\overline{A}$ =(*d*)

(a): { 甲未命中且乙命中}

(b): { 甲乙均命中}

(c): { 甲未命中}

(d): { 甲未命中或乙命中}

设B={甲命中}

C={乙命中}

$$A = B \cap \overline{C}$$

$$\overline{A} = \overline{B} \cup C$$

例1.1.8记住结论

$$A - B = A - AB = (A \cup B) - B$$

例子

事件运算关系

例1.1.8 $A-B=A-AB=(A\cup B)-B$

证明:

$A\text{-}B=A\cap\overline{B}$

$=A(\Omega-B)=A\Omega-AB\doteq A-AB$

$(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap\overline{B}$

$=A\overline{B}\cup B\overline{B}$

$=(A\text{-}B)\cup\Phi$

$=A\text{-}B$

差事件性质

分配律

吸收律

差事件性质

分配律

吸收律

例　证明 $(A-AB)\cup B=A\cup B$

证明:

$$(A-AB)\cup B=A(\overline{AB})\cup B$$

差事件性质

$$=A(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B$$

对偶律

$$=A\overline{A}\cup A\overline{B}\cup B$$

分配律

$$\begin{cases}=A\overline{B}\cup B\\=A\overline{B}\cup AB\cup B\end{cases}$$

吸收律

$$=A(B\cup\overline{B})\cup B$$

$$=A\Omega\cup B=A\cup B$$

设A B C为三个随机事件,试用A,B,C的运算关系表示下列事件.

1) A发生,B,C都不发生.

2) A,B,C中恰有两个发生.

3) A,B,C中不多于一个发生.

4) A,B,C中至少有一个发生.

解: 1) $A\bar{B}\bar{C}$　　$A\overline{B\cup C}$

2) $AB\bar{C}\cup AC\bar{B}\cup BC\bar{A}$

$(AB\cup AC\cup BC)-ABC$

3) $A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}C\bar{B}\cup \bar{A}B\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$\overline{AB\cup BC\cup AC}$

4) $A\cup C\cup B$

随机变量的例子

E2 抛一枚硬币，观察其出现正面H和反面T的情况。

样本空间Ω={H, T }

非数字试验结果

若用X表示抛一次硬币时出现正面的次数，则

X(H)=1　　　X(T)=0

若用X表示抛一次硬币时出现反面的次数，则

X(H)=0　　　X(T)=1

E5　检验N件产品中的次品数。

样本空间Ω={0，1，2，…，N}

可数有限个数集

若用Y表示检查N件产品中的次品数，则

我们$Y(k)=k$，　$k\in\Omega$

E4 测量某零件长度x所产生的误差。

样本空间$\Omega=(-\infty,+\infty)$

不可数无限个数集

若用X表示测量零件长度所产生的误差，则

令$X(\varepsilon_x)=\varepsilon_x$ $\qquad \varepsilon_x\in\Omega$

共同特点:

1) 以上变量都是定义在样本空间上的变量，完整描述试验的全部结果；

2) 有实际背景意义。

四. 随机变量

随机变量的例子

这些变量都定义在样本空间上，具有以下特点：

（1） 变量的取值由随机试验的结果来确定；

（2） 取数值的可能性大小有确定的统计规律性。

称之为随机变量，实质是试验结果的函数。

$$X(\varpi) \longrightarrow R^n$$ 是试验结果的函数。

优势：随机变量可以完整地描述试验结果，从而用量化分析方法来研究随机现象的统计规律性。

引进随机变量是将随机试验结果数量化，是对随机现象进行量化分析的重要手段。

随机变量的引进是概率论发展进程中的一次飞跃