第三篇 二元关系

第7章 特殊关系

7.0 内容提要

1 等价关系

2 拟序关系

3 偏序关系

4 全序关系

4 良序关系

7.1本章学习要求

重点掌握

1

1 几个特殊关系的概念
2 等价和偏序关系的证明
3 等价类和商集的计算
4 8个特殊元

一般掌握

2

1 拟序、全序和良序关系的定义；
2拟序与偏序关系的联系
3 拟序、全序、良序的联系。

了解

3

1 拟序、全序和良序关系的相关性质。

	自反	反自反	对称	斜对称	反对称	传递
定义	$\langle x, x\rangle \in R$	$\langle x, x\rangle \notin R$,	$\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$	$\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin R$,	$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \Rightarrow x=y$	$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$
关系图	每个节点都有环	每个节点都无环	每对节点间或有方向相反的两条边，或无任何边	每对节点间至多有一条边存在且无任何环	每对节点间至多有一条边存在	任三个节点x, y, z之间，若从x到y有一条边，从y到z有一条边，则从x到z一定有一条边
关系矩阵	对角线上全为1	对角线上全为0	对称矩阵	反对称矩阵对角线上全为0	为1的点不能沿对角线对称	如$r_{ij}=1 \wedge r_{jk}=1$则$r_{ik}=1$

判定下列关系具有哪些性质

1、在全体中国人所组成的集合上定义的“同姓”关系

2、对任何非空集合A，A上的全关系；

3、三角形的“相似关系”、“全等关系”；

4、直线的“平行关系”；

5、“朋友”关系；

等价关系

解：1，2，3都具有自反性，对称性和传递性；

4 具有反自反，对称和传递性，不具有自反性；

5 具有自反和对称性，不具有传递性。

等价关系应用

MPLS（多协议标签交换）：

一种分类转发技术，将具有相同转发处理方式的分组归为一类，称为转发等价类FEC（Forwarding Equivalence Class）。相同转发等价类的分组在MPLS网络中将获得完全相同的处理。转发等价类的划分方式非常灵活，可以是源地址、目的地址、源端口、目的端口、协议类型、VPN等的任意组合。例如，在传统的采用最长匹配算法的IP转发中，到同一个目的地址的所有报文就是一个转发等价类。

等价关系应用2

黑盒测试中用例的设计:

1. 目前黑盒测试的测试用例设计方法有5种：等价类划分;边界值分析;错误推测法;因果图;功能图。

2. 等价类划分设计方法是把所有可能的输入数据，即程序的输入域划分成若干部分（子集），然后从每一个子集中选取少量具有代表性的数据作为测试用例。

3. 等价类是指某个输入域的子集合。在该子集合中，各个输入数据对于揭露程序中的错误都是等效的。并合理地假定：测试某等价类的代表值就等于对这一类其他值的测试。

其它应用

- 高维网络中的子图寻找算法，相当于利用等价关系进行结点集合的划分。
- 数据挖掘：在货篮分析中，基于等价关系，寻找关联规则，建立有效的市场经营策略。

7.2 等价关系

定义7.2.1设R是定义在非空集合A上的关系，如果R是自反的、对称的、传递的，则称R为A上的等价关系。

由定义7.2.1知：

（1）关系R是等价关系当且仅当R同时具备自反性、对称性和传递性；

（2）关系R不是等价关系当且仅当R不具备自反性或对称性或传递性。

例7.2.1

判定下列关系是否是等价关系?

1. 幂集上定义的“$\subseteq$”关系;不具有对称性
2. 整数集上定义的“<”关系;不具有对称性，自反性
3. 全体中国人所组成的集合上定义的“同性别”关系。是等价关系

例7.2.2

在时钟集合A＝{1, …, 24}上定义**整除关系：R＝{<x, y>|{x, y∈A)∧((x−y)被12所整除)}。**

（1）写出R中的所有元素；

（2）画出R的关系图；

（3）证明R是一个等价关系。

例7.2.2 解

（1）$R=\{\langle 1,1\rangle,\ \ldots,\ \langle 24,24\rangle,\ \langle 1,13\rangle,\ \langle 13,1\rangle,\ \langle 2,14\rangle,\ \langle 14,2\rangle,\ \ldots,\ \langle 11,23\rangle,\ \langle 23,11\rangle,\ \langle 12,24\rangle,\ \langle 24,12\rangle\}$

（2）此等价关系的关系图：

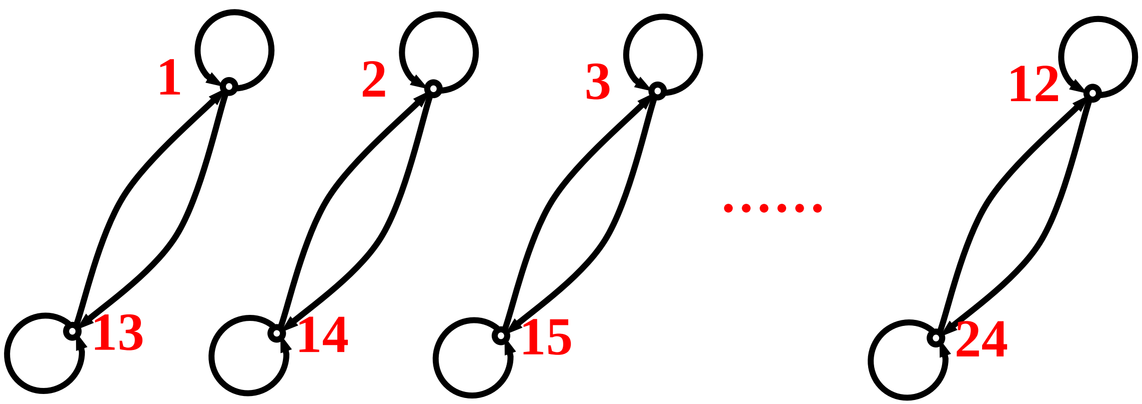


图7.2.1

例7.2.2 解（续）

1、对$\forall x \in A$，有$(x-x)$被12所整除，所以$\langle x, x\rangle \in R$，即R是自反的。

2、对$\forall x, y \in A$, 若$\langle x, y\rangle \in R$, 有$(x-y)$被12整除，则$(y-x)=-(x-y)$被12整除, 所以, $\langle y, x\rangle \in R$, 即R是对称的。

3、对$\forall x, y, z \in A$, 若$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, z\rangle \in R$, 有$(x-y)$被12所整除且$(y-z)$被12所整除, 所以$(x-z)=(x-y)+(y-z)$被12所整除, 所以, $\langle x, z\rangle \in R$, 即R是传递的.

由1, 2, 3知R是等价关系。■

从例7.2.2可以看出

关系R将集合A分成了如下的12个子集：

{1, 13}, {2, 14}, {3, 15}, {4, 16}, {5, 17}, {6, 18}, {7, 19}, {8, 20}, {9, 21}, {10, 22}, {11, 23}, {12, 24}。

这12个A的子集具有如下特点：

1、在同一个子集中的元素之间都有关系R；

2、不同子集的元素之间无关系R。

例7.2.3

设n为正整数，考虑整数集合Z上的关系如下：

$R = \{\langle x, y\rangle \mid \{x, y \in Z\} \wedge (n \mid (x-y))\}$。

证明　R是一个等价关系。

例7.2.3 解

证明 (1) 对$\forall x\in Z$，有$n|(x-x)$，所以$\langle x,x\rangle\in R$，即R是自反的。

(2) 对$\forall x,y\in Z$，若$\langle x,y\rangle\in R$，即$n|(x-y)$，所以$n|(y-x)$，所以，$\langle y,x\rangle\in R$，即R是对称的。

(3) 对$\forall x,y,z\in Z$，若$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle y,z\rangle\in R$，有$n|(x-y)$且$n|(y-z)$，所以由$(x-z)=(x-y)+(y-z)$得$n|(x-z)$，

所以，$\langle x,z\rangle\in R$，即R是传递的。

由(1)、(2)、(3)知，R是Z上的等价关系。 ■

以n为模的同余关系(CongruenceRelation)

上述R称为Z上**以n为模的同余关系**，记xRy为

$$x \equiv y \pmod{n}$$

称为**同余式**。如用$res_n(x)$表示x除以n的余数，则

$$x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow res_n(x) = res_n(y)。$$

此时，R将Z分成了如下n个子集：

{..., −3n, −2n, −n, 0, n, 2n, 3n, ...}

{..., −3n+1, −2n+1, −n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, ...}

{..., −3n+2, −2n+2, −n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, ...}

...

{..., −2n−1, −n−1, −1, n−1, 2n−1, 3n−1, 4n−1, ...}

以n为模的同余关系(CongruenceRelation)

百鸡问题：公鸡1只，值钱5文；母鸡1只，值钱3文；小鸡3只，值钱1文。今有100文钱买鸡100只，问可买公鸡、母鸡和小鸡各多少只？

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    int i, j, k;

    printf("百元买百鸡的问题所有可能的解如下：\n");

    for( i=0; i <= 100; i++ )
        for( j=0; j <= 100; j++ )
            for( k=0; k <= 100; k++ )
            {
                if( 5*i+3*j+k/3==100 && k%3==0 && i+j+k==100 )
                {
                    printf("公鸡 %2d 只，母鸡 %2d 只，小鸡 %2d 只\n", i, j, k);
                }
            }

    return 0;
}
```

说明

同样地，这n个Z的子集具有如下特点：

1、在同一个子集中的元素之间都有关系R；

2、不同子集的元素之间没有关系R；

3、不同子集的交集是空集；

4、所有这些子集的并集就构成集合Z。

称为集合Z的一个划分

7.2.2 集合的划分

定义7.2.2 给定非空集合A，设有集合 $S=\{S_1,S_2,S_3 \ldots S_m\}$.如果满足

- $S_i \subseteq A$ 且 $S_i \neq \Phi$，$i=1,2,\ldots,m$；
- $S_i \cap S_j = \Phi$，$i \neq j$，$i,j=1,2,\ldots,m$；
- $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$。

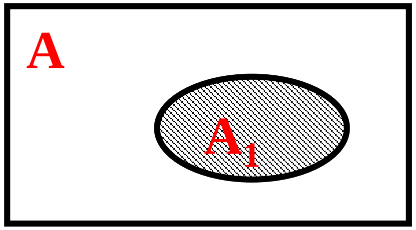
则集合S称作集合A的一个**划分**(Partition)，而 $S_1,S_2,\ldots S_m$ 叫做这个划分的**块**(Block)或**类**(Class)。

例7.2.4

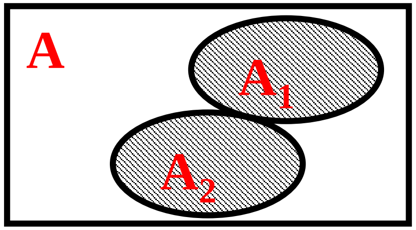
试给出非空集合A上2个不同的划分

解（1）在A中设定一个非空子集A_1，令$A_2=A-A_1$，则根据集合划分的定义，$\{A_1, A_2\}$就构成了集合A的一个划分，见图（a）；

（2）在A中设定两个不相交非空子集A_1和A_2，令$A_3=A-(A_1 \cup A_2)$，则根据集合划分的定义，$\{A_1, A_2, A_3\}$就构成了集合A的一个划分，见图（b）。



(a)



(b)

例7.2.5

设设A={0, 1, 2, 4, 5, 8, 9}，

1、写出R是A上的以4为模的同余关系R的所有元素；

2、求分别与元素1, 2, 4有关系R的所有元素所作成的集合。

解： 1、$R=\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 8,8\rangle, \langle 9,9\rangle, \langle 0,4\rangle, \langle 4,0\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 8,4\rangle, \langle 0,8\rangle, \langle 8,0\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 1,9\rangle, \langle 9,1\rangle, \langle 5,9\rangle, \langle 9,5\rangle\}$.

显然，R是A的一个等价关系。

例7.2.5 解

2、与元素1有关系R的所有元素所作成的集合{1, 5, 9}；

与元素2有关系R的所有元素所作成的集合{2}；

与元素4有关系R的所有元素所作成的集合{0, 4, 8}.

集合{1, 5, 9}称为元素1关于等价关系R的等价类，记为$[1]_R$，即$[1]_R=\{1, 5, 9\}$；

$[2]_R=\{2\}$，$[4]_R = \{0, 4, 8\}$.

7.2.3 等价类与商集

定义7.2.3 设R是非空集合A上的等价关系，对任意x∈A，称集合

$$[x]_R=\{y \mid y\in A\wedge \langle x,y\rangle\in R\}$$

为x关于R的**等价类**(equivalence class)，或叫作由x生成的一个R等价类，其中x称为$[x]_R$的**生成元**(或叫**代表元**，或**典型元**)(generator)。

由定义7.2.3可以看出：

（1）等价类产生的前提是A上的关系R必须是等价关系；

（2）A中所有与x有关系R的元素y构成了$[x]_R$；

（3）A中任意一个元素一定对应一个由它生成的等价类；

（4）R具有自反性意味着对$\forall x \in A$，$[x]_R \neq \Phi$；

（5）R具有对称性意味着对任意$x, y \in A$，若有$y \in [x]_R$，则一定有$x \in [y]_R$。

例7.2.5(续)

设A={0, 1, 2, 4, 5, 8, 9}，**R是A上的以4为模的同余关系。**求

（1）R的所有等价类；（2）画出R的关系图。

解：(1) $[1]_R = \{1, 5, 9\} = [5]_R = [9]_R$；$[2]_R = \{2\}$；$[4]_R = \{0, 4, 8\} = [0]_R = [8]_R$。

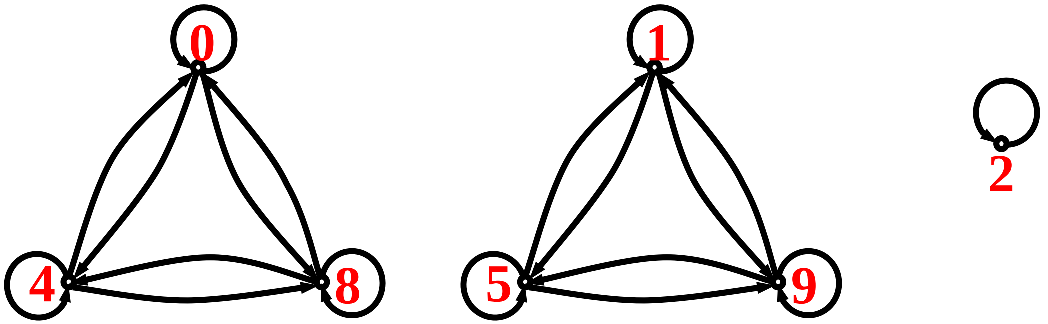


图7.2.3

定理7.2.1

设R是非空集合A上的等价关系，则有下面的结论成立：

1) 对$\forall x \in A$，$[x]_R \neq \Phi$；

2) 对$\forall x, y \in A$，

a) 如果$y \in [x]_R$，则有$[x]_R = [y]_R$，

b) 如果$y \notin [x]_R$，则有$[x]_R \cap [y]_R = \Phi$。

3) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$；

商　集

定义7.2.4 设R是非空集合A上的等价关系，由R确定的一切等价类的集合，称为集合A上关于R的商集(QuotientSet)，记为A/R，即

$$A/R=\{[x]_R \mid (x\in A)\}$$

例7.2.6 设集合A={0,1,2,4,5,8,9}，R为A上以4为模的同余关系。求A/R。

解 根据例7.2.5，商集

$A/R=\{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}=\{\{0,4,8\},\{1,5, 9\},\{2\}\}$。

例7.2.7

设集合A={1, 2, 3, 4, 5, 8}，R为A上以3为模的同余关系。求A/R。

解 根据例7.2.3知，A上以3为模的同余关系R是等价关系。

因为$[1]_R=\{1, 4\}=[4]_R$, $[2]_R=[5]_R=[8]_R=\{2, 5, 8\}$,

$[3]_R=\{3\}$,

所以根据商集的定义，

$A/R=\{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}=\{\{1, 4\}, \{2, 5, 8\}, \{3\}\}$。

计算商集A/R的通用过程：

（1）任选A中一个元素a，计算$[a]_R$；

（2）如果$[a]_R \neq A$，任选一个元素$b \in A-[a]_R$，计算$[b]_R$；

（3）如果$[a]_R \cup [b]_R \neq A$，任选一个元素$c \in A-[a]_R-[b]_R$，计算$[c]_R$；

以此类推，直到A中所有元素都包含在计算出的等价类中。

7.2.4等价关系与划分

定理7.2.2 设R是非空集合A上的等价关系，则A对R的商集A/R是A的一个划分，称之为由R所导出的等价划分。

定理7.2.3 给定集合A的一个划分

$\Pi=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，则由该划分确定的关系

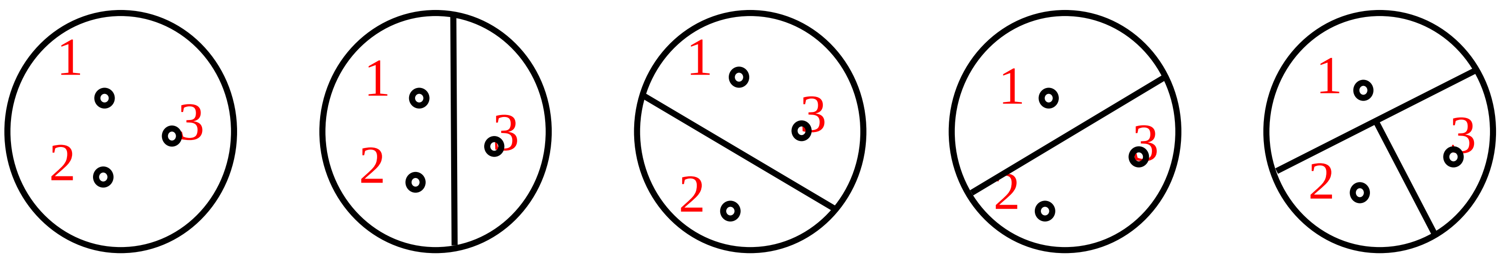
$$R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\ldots\cup(A_n\times A_n)$$

是A上的等价关系。我们称该关系R为由划分Π所导出的等价关系。

例7.2.8

设A={1,2,3}，求A上所有的等价关系及其对应的商集。

解： 只有1个划分块的划分为S_1，见图(a)；具有2个划分块的划分为S_2、S_3和S_4，见图(b)、(c)和(d)，具有3个划分块的划分为S_5，见图(e)。



(a) (b) (c) (d) (e)

例7.2.8(续)

假设由S_i导出的对应等价关系为R_i， i=1, 2, 3, 4, 5, 则有

$R_1=S_1\times S_1=A\times A$, $A/R_1=\{\{1,2,3\}\}$;

$R_2=\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{3\}\times\{3\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$A/R_2=\{\{1,2\},\{3\}\}$;

$R_3=\{1,3\}\times\{1,3\}\cup\{2\}\times\{2\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$A/R_3=\{\{1,3\},\{2\}\}$;

例7.2.8(续)

$R_4=\{2,3\}\times\{2,3\}\cup\{1\}\times\{1\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，

$A/R_4=\{\{1\},\{2,3\}\}$；

$R_5=\{1\}\times\{1\}\cup\{2\}\times\{2\}\cup\{3\}\times\{3\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}=I_A$，

$A/R_5=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$。

例7.2.9

设R是A上的自反和传递关系，S也是A上的关系，且满足：$\langle x,y\rangle\in S \Leftrightarrow (\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R)$ (7.2.2)

证明 S是A上的等价关系。

证明（1）S是自反的：

对任意$a\in A$，因R是自反的，所以$\langle a,a\rangle\in R$，由$\langle a,a\rangle\in R$并且$\langle a,a\rangle\in R$和(7.2.2)得$\langle a,a\rangle\in S$，

即S是自反的。

例7.2.9（续）

（2）S是对称的：

对$\forall a,b\in A$，若$\langle a,b\rangle\in S$，则由(7.2.2)

$\langle x,y\rangle\in S \Leftrightarrow (\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R)$，

得$\langle a,b\rangle\in R$并且$\langle b,a\rangle\in R$，即有$\langle b,a\rangle\in R$并且$\langle a,b\rangle\in R$，所以有$\langle b,a\rangle\in S$，即S是对称的。

例7.2.9（续）

（3）S是传递的：

对$\forall a, b, c \in A$，若$\langle a, b\rangle \in S$，$\langle b, c\rangle \in S$，则由(7.2.2)

$\langle x, y\rangle \in S \Leftrightarrow (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R)$，

得$\langle a, b\rangle \in R$且$\langle b, a\rangle \in R$和$\langle b, c\rangle \in R$且$\langle c, b\rangle \in R$。

因为R是传递的，所以有$\langle a, c\rangle \in R$和$\langle c, a\rangle \in R$。从而，$\langle a, c\rangle \in S$，即S是传递的。

由(1)，(2)和(3)知，S是A上的一个等价关系。

例7.2.10

设R是集合A上的一个关系.

对$\forall a, b, c \in A$，若$\langle a, b\rangle \in R$并且$\langle a, c\rangle \in R$，则有$\langle b, c\rangle \in R$，则R称为A上的循环关系。

试证明R是A上的一个等价关系的充要条件是R是循环关系和自反关系。

例7.2.10 证明

"⇒" 若R是等价关系。

1)、显然R是自反的。

2)、对任意a, b, c∈A，若<a, b>∈R, <a, c>∈R，则由R是对称的，有<b, a>∈R并且<a, c>∈R，由R是传递的，所以，<b, c>∈R。即R是循环的关系。

由1)，2)知R是自反的和循环的。

例7.2.10证明(续)

"$\Leftarrow$" 若R是自反的和循环的。

1)、 显然R是自反性的;

2)、对任意a, b∈A, 若<a, b>∈R, 则由R是自反的, 有<a, a>∈R, 因R是循环的, 所以,

$$\langle a,b\rangle \in R \text{且} \langle a,a\rangle \in R \Rightarrow \langle b,a\rangle \in R,$$

即R是对称的。

例7.2.10证明(续)

3)、对任意a, b, c∈A，若<a, b>∈R，<b, c>∈R，则由R对称的，有<b, a>∈R并且<b, c>∈R；由R是循环的，所以<b, a>∈R且<b, c>∈R⇒<a, c>∈R，**即R是传递的。**

由1)、2)、3)知R是A上的一个等价关系。■

7.2.6等价关系的应用

例7.2.11 在图7.2.5中，点i和j之间有路当且仅当从结点i通过图中的边能够到达结点j。规定对任意结点i，i和i之间一定有路。定义R如下：

$\langle i,j\rangle\in R \Leftrightarrow$ i和j之间有路。

试说明该关系R是否可以给定结点集A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}一个划分？如果能，请给出具体的划分。

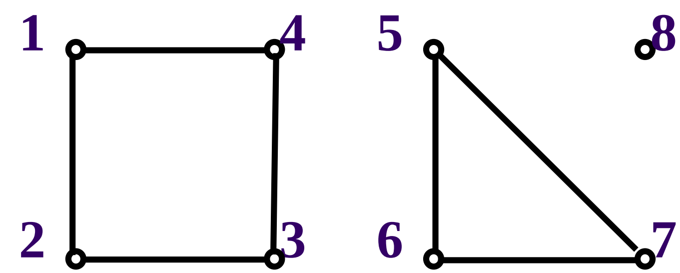


图7.2.5

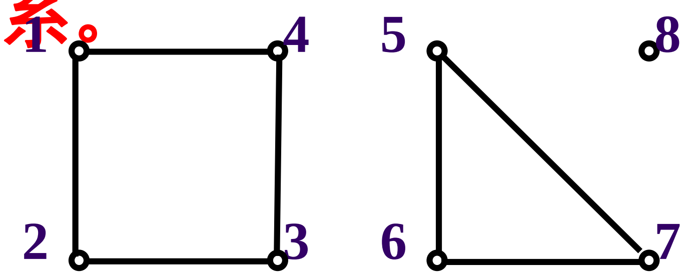
例7.2.11 解

（1）由于规定任意结点i与他自身之间一定有路，因此<i, i>∈R，即R具有自反性；

（2）若<i, j>∈R，则两个结点i和j之间存在路，当然也存在j和i之间的路，所以<j, i>∈R，即R具有对称性；

（3）若<i, j>∈R, <j, k>∈R，则结点i和j之间有路，j和k之间也有路，从而i到k之间存在经过j的路，即有<i, k>∈R，因此得到R具有传递性。

由(1)、(2)和(3)知，R是等价关系。



例7.2.11 解(续)

于是所有不同的等价类为：$[1]_R=\{1,2,3,4\}$，$[5]_R=\{5,6,7\}$，$[8]_R=\{8\}$。

根据定理7.2.2知，

$A/R=\{[1]_R,[5]_R,[8]_R\}=\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7\},\{8\}\}$ 就是A的一个划分。

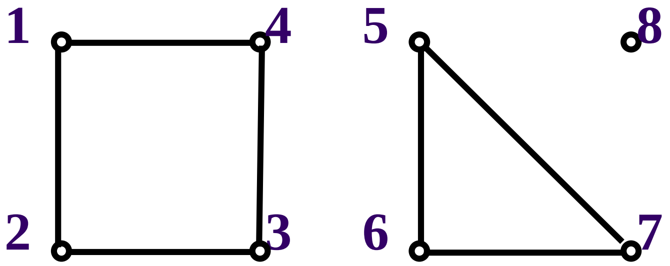


图7.2.5

总结

1、熟记等价关系的定义；

2、利用等价关系的定义证明一个关系是等价关系；

3、给定A上的等价关系R，会求所有的等价类和商集A/R；并求出对应的集合的划分；

4、给定集合A上的划分，会求对应的等价类。

判定下列关系具有哪些性质

1、对任何非空集合A，A上的恒等关系；

2、多边形的“相似关系”、“全等关系”；

3、集合A的幂集P(A)上定义的“包含关系”；

4、集合A的幂集P(A)上定义的“真包含关系”

解：1，2都具有自反性，对称性和传递性，是等价关系；

3　具有*自反性*，反对称性和传递性；

4　具有*反自反性，*和传递性。

偏序关系

拟序关系

7.3 次序关系

拍摄一张室内闪光灯照片，需要完成如下任务：

1、打开镜头盖；

2、照相机调焦；

3、打开闪光灯；

4、按下快门按钮。

这些任务中有的必须在其他任务之前完成。例如，任务1必须在任务2之前完成，任务2，3必须在任务4之前完成，即任务之间存在“先后”关系，即次序关系。

7.3.1拟序关系

定义7.3.1 设R是非空集合A上的关系，如果R是**反自反和传递的**，则称R是**A上的拟序关系**(Quasi-OrderRelation)，简称**拟序**，记为“$\prec$”，读作“小于”，并将“$\langle a,b\rangle \in \prec$”记为“$a \prec b$”。序偶$\langle A,\prec\rangle$称为拟序集(Quasi-OrderSet)。

由定义7.3.1知：

（1）R是拟序关系⇔R同时具有反自反性和传递性；

（2）R不是拟序关系⇔R不具有反自反性或者传递性；

（3）拟序“$<$”的逆关系“$<^{-1}$”也是拟序，用“$>$”表示，读作“大于”。

例7.3.1

设R是集合A上的拟序关系，则R是反对称的。

证明 假设R不是反对称的关系，则必存在x, y∈A，且x≠y，满足<x, y>∈R并且<y, x>∈R。因为R是A上的拟序关系，所以R具有传递性，从而有<x, x>∈R。这与R是反自反的矛盾，从而假设错误，即R一定是反对称的。

例7.3.2

判断下列关系是否为拟序关系

（1）集合A的幂集P(A)上定义的“$\subset$”；

（2）实数集R上定义的“小于”关系(<)；

解（1）集合A的幂集P(A)上定义的“$\subset$”具有反自反性和传递性，所以<P(A)，$\subset$ >是拟序集。

（2）实数集合R上定义的“小于”关系(<)具有反自反性和传递性，所以<R, <>是拟序集。

7.3.2偏序关系

定义7.3.2 设R是非空集合A上的关系，**如果R是自反的、反对称的和传递的**，则称R是A上的**偏序关系**(PartialOrderRelation)，简称偏序，记为“≤”，读作“小于等于”，并将“<a,b>∈≤”记为a≤b。序偶<A,≤>称为偏序集(PartialOrderSet)。

由定义7.3.2知

（1）R是偏序关系⇔R同时具有自反性、反对称性和传递性；

（2）R不是偏序关系⇔R不具备自反性或反对称性或传递性；

（3）偏序“$\leqslant$”的逆关系“$\leqslant^{-1}$”也是一个偏序，我们用“$\geqslant$”表示，读作“大于等于”；

（4）（“$\leqslant$”$-I_A$）为A上的拟序关系，（“$<$”$\cup I_A$）为A上的偏序关系。

例7.3.4

设X是所有4位二进制串的集合，在X上定义关系R：如果s_1的某个长度为2的子串等于s_2的某个长度为2的子串，则$\langle s_1, s_2\rangle \in R$，例如因为0111和1010中都含有子串01，所以< 0111，1010 >∈R。试判断R是否是一个偏序关系。

例7.3.4 解

对任意的s, t∈X，如果<s, t>∈R，则s的某个长度为2的子串等于t的某个长度为2的子串，也可以说t的某个长度为2的子串等于s的某个长度为2的子串，即有<t, s>∈R，从而R是对称的。根据对称性，存在0111，1010∈X，有< 0111，1010 >∈R且< 0111，1010 >∈R ，但是0111≠1010，从而R不是反对称的，从而R不是偏序关系。

例7.3.5

考虑任务集T，它包含了拍摄一张室内闪光照片必须按顺序完成的任务：

1、打开镜头盖；

2、照相机调焦；

3、打开闪光灯；

4、按下快门按钮。

在T上定义关系R如下：

$<i,j>\in R \Leftrightarrow$ 如果 $i=j$ 或者任务 i 必须在任务 j 之前完成。

试判断R是T上的偏序关系并画出它的关系图。

例7.3.5 解

根据R的定义，有

R={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>,

<1, 2>, <1, 4>, <2, 4>, <3, 4>}。

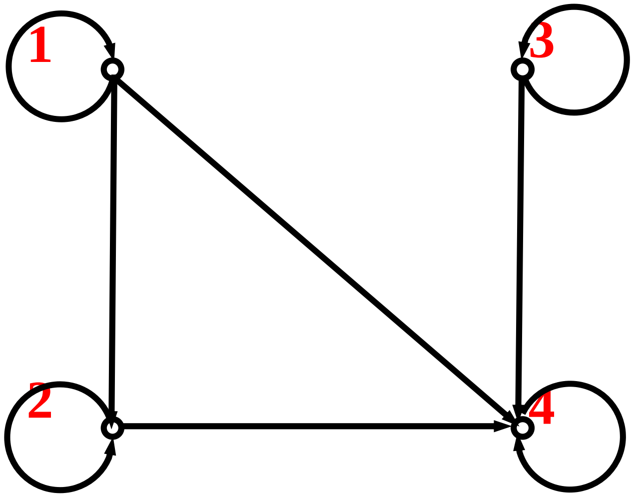
根据自反、反对称和

传递的定义知，关系

R具有自反性，对称性

和传递性。从而R是偏

序关系，其关系图如右图所示。



2 哈斯图

（1）用小圆圈或点表示A中的元素，省掉关系图中所有的环；（因自反性）

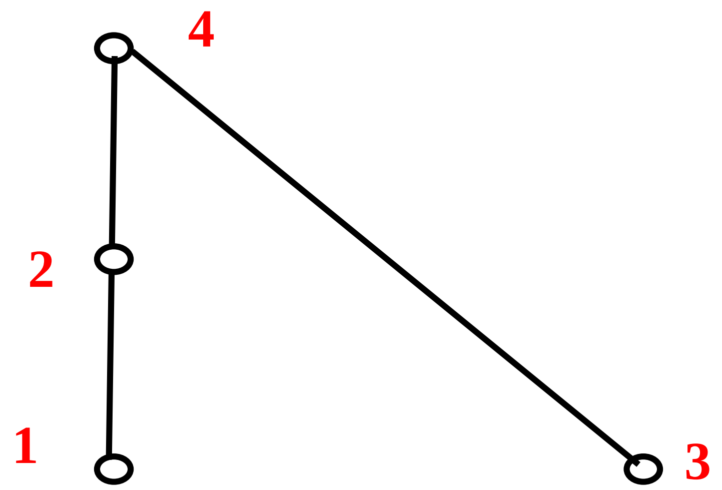
（2）对任意x，y∈A，若x＜y，则将x画在y的下方，可省掉关系图中所有边的箭头；（因反对称性）

（3）对任意x，y∈A(x≠y)，若x≼y，且x与y之间不存在z∈A，使得x≼z，z≼y，则x与y之间用一条线相连，否则无线相连。（因传递性）

例7.3.6

画出例7.3.5中关系R的哈斯图。

解 例7.3.5中关系R的哈斯图如下图所示。



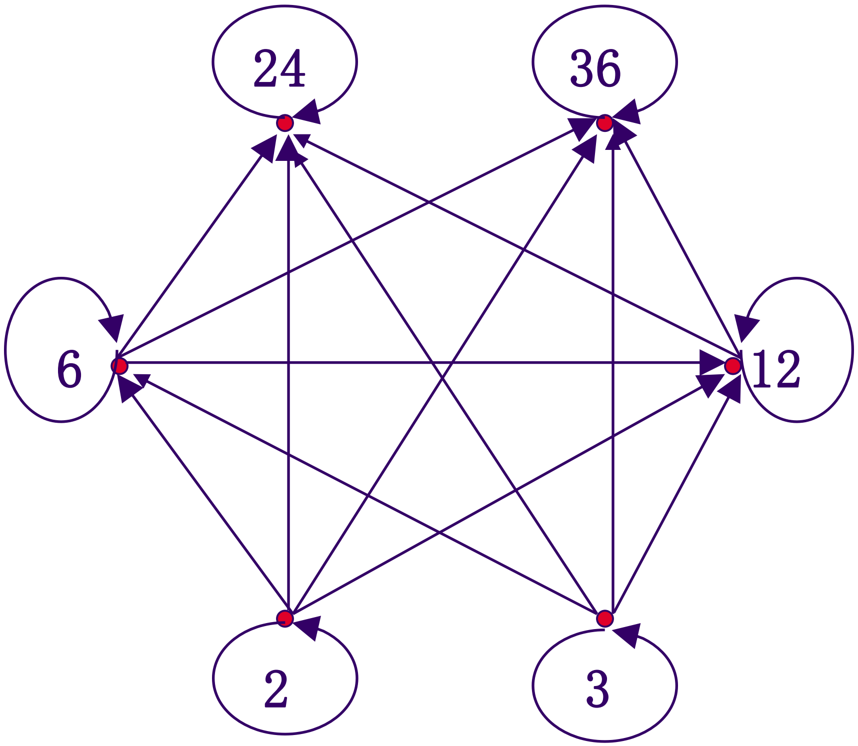
例7.3.7

设A={2, 3, 6, 12, 24, 36}， “≼”是A上的整除关系R，**画出其一般的关系图和哈斯图。**

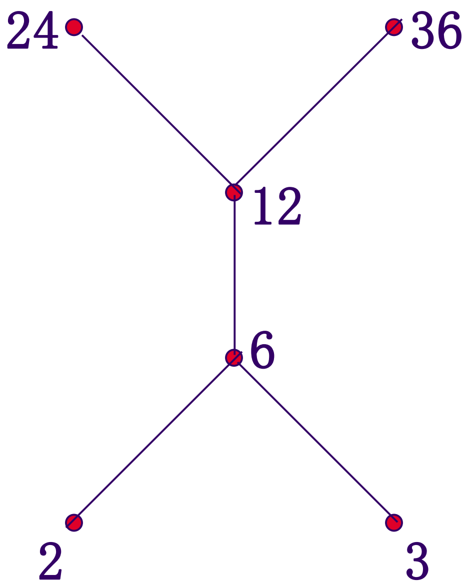
解 由题意可得

R={$\langle 2, 2\rangle$, $\langle 2, 6\rangle$, $\langle 2, 12\rangle$, $\langle 2, 24\rangle$, $\langle 2, 36\rangle$, $\langle 3, 3\rangle$, $\langle 3, 6\rangle$, $\langle 3, 12\rangle$, $\langle 3, 24\rangle$, $\langle 3, 36\rangle$, $\langle 6, 6\rangle$, $\langle 6, 12\rangle$, $\langle 6, 24\rangle$, $\langle 6, 36\rangle$, $\langle 12, 12\rangle$, $\langle 12, 24\rangle$, $\langle 12, 36\rangle$, $\langle 24, 24\rangle$, $\langle 36, 36\rangle$}，从而得出该偏序集$\langle A, \preccurlyeq\rangle$的一般关系图和哈斯图如下：

例7.3.7 （续）



关系图



哈斯图

3 特殊元素

定义7.3.3 设<A, ≼>是偏序集，B是A的任何一个子集，若存在元素b∈B，使得对∀x∈B，

（1）都有x≼b，则称b为B的最大元素，简称最大元

（2）都有b≼x，则称b为B的最小元素，简称最小元

（3）满足b≼x⇒x=b，则称b为B的极大元素，简称极大元；

（4）满足x≼b⇒ x=b，则称b为B的极小元素，简称极小元。

定义7.3.3可以符号化为：

b是B的最大元 $\Leftrightarrow (\forall x)((x \in B) \to (x \leq b)) = 1$

b是B的最小元 $\Leftrightarrow (\forall x)((x \in B) \to (b \leq x)) = 1$

b是B的极大元 $\Leftrightarrow (\forall x \in B)((b \leq x) \to (b = x)) = 1$

b是B的极小元 $\Leftrightarrow (\forall x \in B)((x \leq b) \to (b = x)) = 1$

注意

（1）B的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在，一定在B中；

（2）b是B的最大元B中所有的元素都比b小；

b是B的最小元B中所有的元素都比b大；

b是B的极大元B中没有比b大的元素；

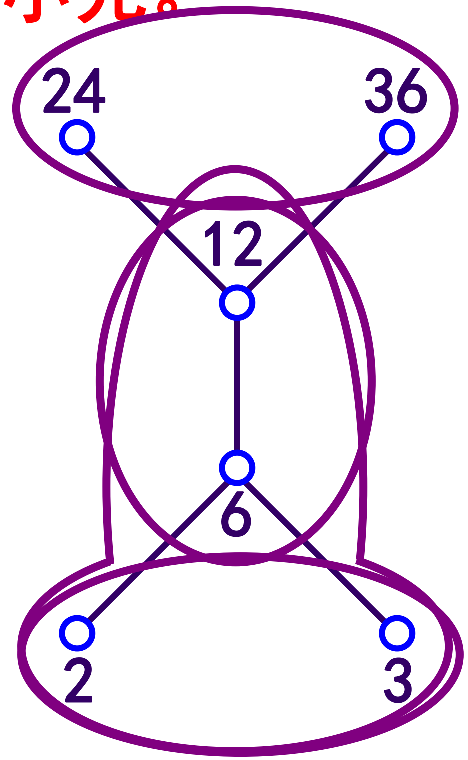
b是B的极小元B中没有比b小的元素。

例7.3.8

在例7.3.7中，设$B_1=\{6, 12\}$，$B_2=\{2, 3\}$，$B_3=\{24, 36\}$，$B_4=\{2, 3, 6, 12\}$是集合A的子集，试求出B_1, B_2, B_3和B_4的最大元，最小元，极大元和极小元。

解 见下表。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元
B_1	12	6	12	6
B_2	无	无	2, 3	2, 3
B_3	无	无	24, 36	24, 36
B_4	12	无	12	2, 3



定义7.3.5

设<A, ≤>是偏序集，B是A的任何一个子集。若存在元素a∈A，使得

1. 对任意x∈B，都有x≤a，则称a为B的上界；
2. 对任意x∈B，都有a≤x，则称a为B的下界；
3. 若元素a′∈A是B的上界，元素a∈A是B的任何一个上界，若均有a′≤a，则称a′为B的最小上界或上确界。记a′=SupB；
4. 若元素a′∈A是B的下界，元素a∈A是B的任何一个下界，若均有a≤a′，则称a′为B的最大下界或下确界。记a′=InfB。

由定义7.3.5知

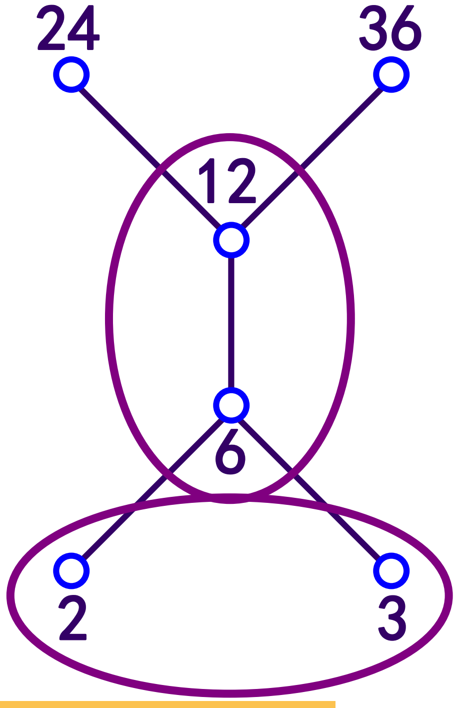
1. 子集B的上、下界和上、下确界必须在集合A中寻找；
2. 子集B的上、下界不一定存在，如果存在，可以不唯一的；
3. 子集B的上、下确界不一定存在，如果存在，则一定唯一；
4. 子集B有上(下)确界，一定有上(下)界；反之不然。

例7.3.9

在例7.3.7中，设B_1={6, 12}，B_2={2, 3}是集合A的子集，试求出B_1，B_2的上界、下界、上确界和下确界。

解 见下表。

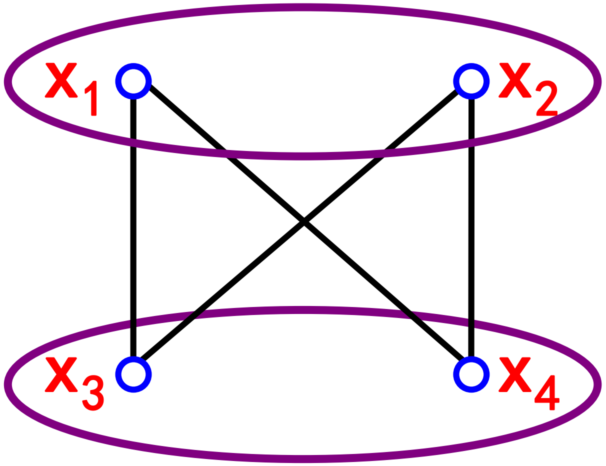
集合	上界	下界	上确界	下确界
B_1	12, 24, 36	2, 3, 6	12	6
B_2	6, 12, 24, 36	无	6	无



例7.3.10

$A=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，A上定义偏序集$\langle A, \leqslant\rangle$的哈斯图如下图所示。求$B=\{x_1, x_2\}$和$C=\{x_3, x_4\}$上界、下界、上确界和下确界。

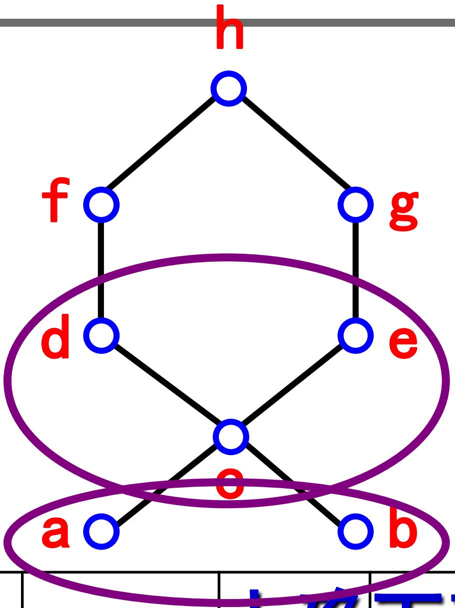
解 见右表。



集合	上界	下界	上确界	下确界
B	无	x_3, x_4	无	无
C	x_1, x_2	无	无	无

例7.3.11

设集合A={a, b, c, d, e, f, g, h}，对应的哈斯图见右图。令B_1={a, b}，B_2={c, d, e}。求出B_1，B_2的最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界。



集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
B_1	无	无	a, b	a, b	c, d, e, f, g, h	无	c	无
B_2	无	c	d, e	c	h	c, a, b	h	c

结论

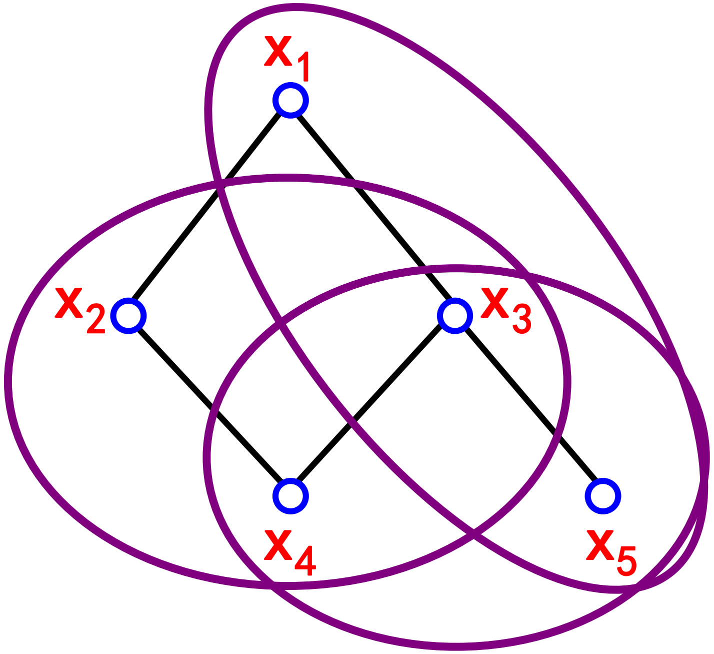
（设<A, ≼>是一偏序集，B是A的子集）

（1）若b是B的最大元，则b一定是B的极大元，上界和上确界；反之，则不然；

（2）若b是B的最小元，则b一定是B的极小元，下界和下确界；反之，则不然。

例7.3.12

设集合$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$上的偏序关系如下图所示，求X的最大元、最小元、极大元、极小元。求子集$X_1=\{x_2, x_3, x_4\}$，$X_2=\{x_3, x_4, x_5\}$，$X_3=\{x_1, x_3, x_5\}$的上界、下界、上确界、下确界、最大元、最小元、极大元和极小元。



例7.3.12 解

X_1，X_2和X_3的各种特殊元见下表。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
X_1	无	x_4	x_2, x_3	x_4	x_1	x_4	x_1	x_4
X_2	x_3	无	x_3	x_4, x_5	x_1, x_3	无	x_3	无
X_3	x_1	x_5	x_1	x_5	x_1	x_5	x_1	x_5

7.3.3全序关系

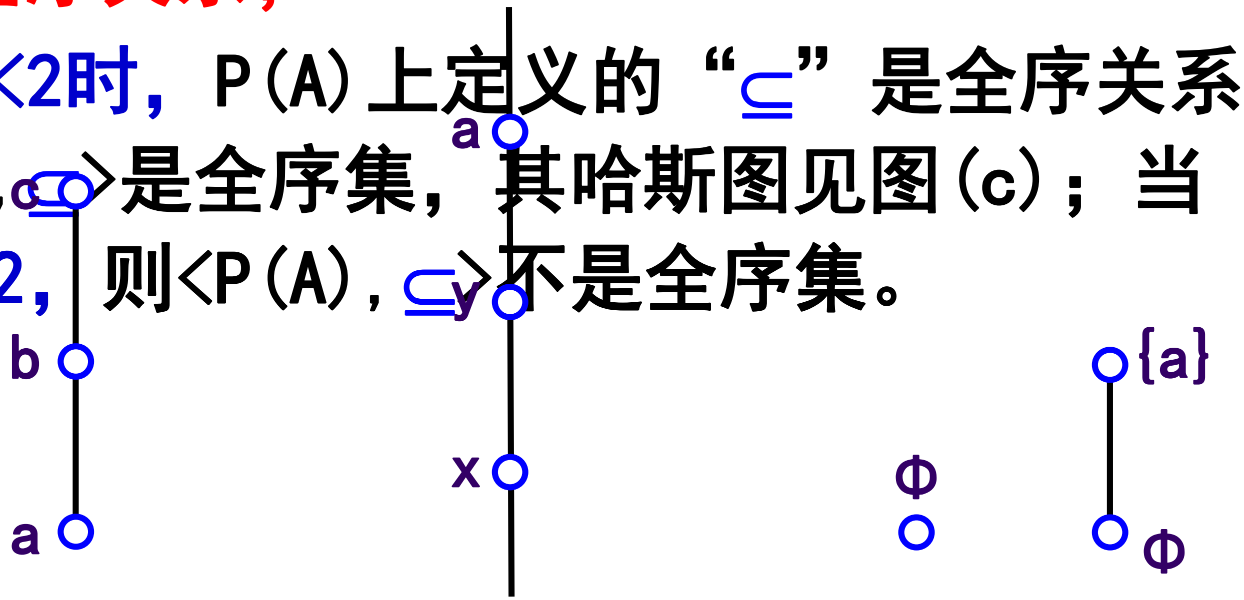
定义7.3.6 设<A, ≼>为偏序集，若对任意x, y∈A，总有x≼y或y≼x，二者必居其一，则称关系“≼”为全序关系(Total Order Relation)，简称全序，或者线序关系，简称线序。称<A, ≼>为全序集(Total Order Set)，或者线序集，或者链(Chain)。

从定义7.3.6可以看出：

全序关系是偏序关系，反之则不然。

例7.3.13 解

1. <A, ≤>是全序集，其哈斯图见图(a)；
2. <R, ≤>是全序集，其哈斯图是数轴，见图(b)，其中x, y, z∈R；
3. 不是全序关系；
4. 当|A|<2时，P(A)上定义的“⊆”是全序关系，<P(A), ⊆>是全序集，其哈斯图见图(c)；当|A|≥2，则<P(A), ⊆>不是全序集。



(a) (b) (c)

7.3.4 良序关系

定义7.3.7 设<A, ≤>是一偏序集，若A的任何一个非空子集都有最小元素，则称"≤"为良序关系，简称良序，此时<A, ≤>称为良序集。

从定义7.3.7可以看出：

（1）R是良序关系 ⇔ R是偏序关系和A的任何非空子集都有最小元；

（2）良序关系一定是偏序关系，反之则不然；

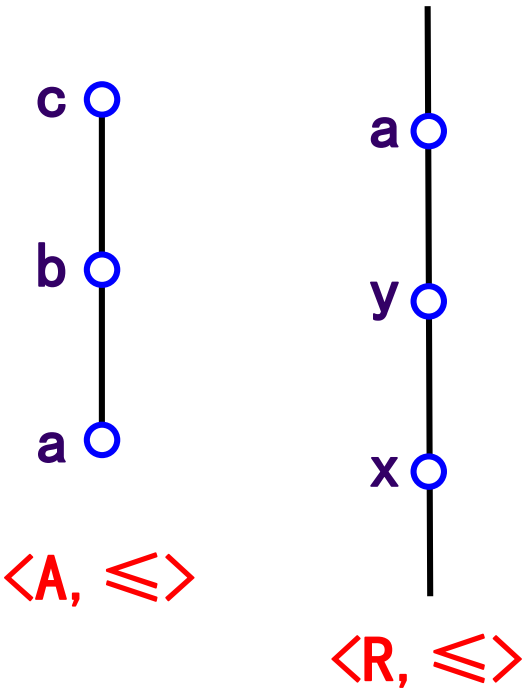
（3）良序关系一定是全序关系，反之则不然。

例7.3.14

试判断例7.3.13的(1)和(2)是否为良序关系。

解（1）<A, ≤>是良序集；

（2）<R, ≤>是不良序集。



注：

1、 “≤”是良序关系

⇒“≤”是全序关系

⇒“≤”是偏序关系；

2、有限全序集一定是良序集。

7.4 本章总结

1. 等价关系的概念及证明、等价类和商集的计算；
2. 集合划分的定义、求给定集合的划分；
3. 等价关系与集合划分的关系；
4. 偏序关系、拟序关系、全序关系和良序关系的定义，它们之间的异同；
5. 哈斯图的画法；
6. 八个特殊元的定义和基本性质。

习题类型

1. **基本概念题：**涉及寻找偏序关系的8个特殊元；
2. **判断题：**涉及对证明过程正误的判断，集合的划分，关系特殊性的保持以及特殊关系的判定；
3. **计算题：**涉及等价类和商集的计算和给定集合的划分，计算对应的等价关系；
4. **证明题：**涉及特殊关系的证明；
5. **画图题：**涉及等价关系的关系图、偏序关系的哈斯图。

总结

	自反	反自反	对称	斜对称	反对称	传递
定义	$\langle x, x\rangle \in R$	$\langle x, x\rangle \notin R$,	$\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$	$\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin R$,	$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \Rightarrow x=y$	$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$
关系图	每个节点都有环	每个节点都无环	每对节点间或有方向相反的两条边，或无任何边	每对节点间至多有一条边存在且无任何环	每对节点间至多有一条边存在	任三个节点x, y, z之间，若从x到y有一条边，从y到z有一条边，则从x到z一定有一条边
关系矩阵	对角线上全为1	对角线上全为0	对称矩阵	反对称矩阵对角线上全为0	反对称矩阵	如$r_{ij}=1 \wedge r_{jk}=1$则$r_{ik}=1$

Thank You！

http://202.115.21.136:8080/lssx