doi: 10. 19920/j. cnki. jmsc. 2022. 03. 006

广告效应扰动下的闭环供应链应急与协调决策①

曹晓刚[1,4]，吴　惠[2]，闻　卉[3*]
(1. 武汉纺织大学管理学院，武汉 430073; 2. 广东科技学院管理学院，东莞 523083;
3. 湖北工业大学理学院，武汉 430068; 4. 湖北省普通高校人文社会科学重点研究基地
—企业决策支持研究中心，武汉 430073)

摘要： 构建了由作为 Stackelberg 博弈主导者的单一制造商和作为追随者的单一零售商所组成的具有广告效应的闭环供应链模型，研究了在突发事件影响广告效应情形下的集中化与分散化决策的闭环供应链的应急问题，并提出两部收费制契约来协调扰动后的闭环供应链. 研究表明，在广告效应扰动情形下，产品的订货量和废旧产品的回收率具有一定的鲁棒性，即在一定的扰动范围内其产品订货量和废旧产品回收率保持不变，而扰动量超过一定阈值时，产品订货量和废旧产品的回收率将根据扰动的情况进行相应调整; 同时，当广告效应扰动量为正时，产品零售价格、广告投入努力程度均随广告效应扰动量呈递增趋势，当广告效应扰动量为负时，产品零售价格、广告投入努力程度均随广告效应扰动量呈递减趋势; 产品批发价格仅在广告效应扰动幅度相对较小时具有较强的灵敏性，在广告效应扰动幅度相对较大时基本保持稳定.

关键词： 闭环供应链; 广告效应扰动; Stackelberg 博弈; 应急决策; 协调
中图分类号： C934　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 1007 -9807(2022)03 -0107 -20

0 引　言

随着工业化和城镇化进程的加速，经济发展与资源环境的矛盾日益尖锐，已经成为制约中国可持续发展的突出问题. 我国相继出台了一系列的法律法规(如国家发改委 2015 年、2016 年分别制定了《2015 年循环经济推进计划》、《2016 年循环经济推进计划》; 2017 年工业和信息化部制定了《高端智能再制造行动计划(2018—2020 年)》，要求企业的废旧产品需要进行回收再利用，以实现社会效益、经济效益和环境保护的目的. 闭环供应链把废旧产品的回收作为供应链运作的重要环节，是回收废旧产品行之有效的方式. 在此大背景下，广告作为市场营销手段，在很大程度上能够对供应链的运作产生影响. 如苹果公司在 2011 年推出“Apple Trade In 换购计划”，可以将消费者的旧产品进行回收，并在消费者购买新设备时给予折抵优惠. 近期，该计划将回收的产品扩大到安卓手机，苹果公司仅在公司官网等渠道对该换购计划进行了有限的宣传，却在科技圈和苹果产品爱好者中引起较大的反响，众多媒体也纷纷转载，取得了意想不到的广告效果②. 数据显示，受到消费者欢迎的换购计划对苹果公司的产品产生了巨大的影响，如新款 MacBook Air 和 Mac mini 的机身采用 100% 再生铝金属打造，iPhone 主板焊料采用 100% 再生锡③. 由此可见，“Apple Trade In 换购计划”的突然爆红从源头上促进了

① 收稿日期: 2019 -01 -15; 修订日期: 2021 -03 -21.
基金项目: 湖北省高校人文社会科学重点研究基地—企业决策支持研究中心资助项目(DSS20210403); 湖北省高等学校哲学社会科学研究资助重大项目(19ZD036); 湖北省教育厅哲学社会科学研究资助重点项目(20D056).
通讯作者: 闻　卉(1981—)，女，湖北英山人，博士，讲师. Email: wen_hui@126. com
② https: //www. sohu. com/a/396075324_499322
③ https: //www. apple. com. cn/environment/A05199EKV. html

消费者的换购热情,使得苹果公司的再制造业务进行得如火如荼,不仅对环保具有重大贡献,而且促进了供应链企业的发展,所以广告效应对再制造型供应链的重大意义不言而喻,值得广大学者进行研究.

目前,学者对闭环供应链定价问题的研究已有大量成果. Savaskan 等[1,2]利用博弈的方法构建了由单一制造商和多家存在竞争关系的零售商所组成的闭环供应链的定价决策模型. Ferguson 和 Toktay[3]分析了垄断厂商生产的新产品与再制造产品之间的竞争以及外部再制造竞争. Shi 等[4]则研究了公司组织结构对直接销售或间接销售这些新产品和再制造产品的影响. Ullah 等[5]研究了单一零售商和多家零售商闭环供应链模型的最优再制造策略和可重复使用包装能力. 夏西强和朱庆华[6]通过构建制造与再制造博弈模型,研究了不同承担方承担再制造设计费用对闭环供应链的影响. 朱晓东等[7]在传统分销商和线上回收商两种渠道存在回收成本差异的情况下,提出了多种闭环供应链的定价策略与协调机制. 王文宾和达庆利[8]研究了零售商与第三方回收下闭环供应链的回收与定价问题. 龚本刚等[9]研究了汽车生产商和汽车拆解商之间的报废汽车回收拆解合作决策问题. Abbey 等[10]分析了在新产品生命周期开始时以再制造为目的的新产品销售问题,以增加核心回收量,使企业能够更早地开始有效地再制造. 张福安等[11]研究了双向主导相异的闭环供应链物流策略并提出了对应的补贴机制. 姚锋敏和滕春贤[12]研究了制造商的公平关切对供应链系统决策的影响. 曹柬等[13]研究了专利许可和政府规制对第三方再制造商参与废旧产品的回收再制造活动的影响. 缪朝炜和夏志强[14]提出了 3 种基于以旧换新的闭环供应链决策模型. 郑本荣等[15]研究了两种成本分摊对闭环供应链决策的影响. 黄辉等[16]考虑了公平偏好以及产品的环保程度对闭环供应链定价决策的影响.

在广告效应的研究方面,Vidale 和 Wolfe[17]阐述了广告投入与销售速率之间的数学关系. Sethi[18]研究了不确定的广告效果对市场份额的影响. 段永瑞和尹佳[19]研究了企业推荐奖励和广告投入的动态定价问题. He 等[20]在广告效应扰动的背景下分析了制造商和零售商的广告和定价策略. 大量学者展开了广告效应与供应链决策的研究. 易余胤[21]研究了具有广告效应的闭环供应链的协调性能. 冯建和刘斌[22]对两个销售周期的合作广告和非合作广告博弈进行了分析. Zhao[23]研究了在推出新产品时的最优广告和定价策略. 曲优等[24]基于混合 CVaR 准则研究了供应链成员具有不同风险态度的广告决策. 汪旭晖和杜航[25]研究了联合广告合作对闭环供应链的渠道运作效率的影响. 李琰等[26]对比了无闭环营销、初级闭环营销以及闭环营销策略升级 3 种模式. Hong 等[27]研究了多种回收方式下的定价、回收以及广告投入策略. 赵黎明和陈喆芝[28]针对供应链成员的品牌广告和促销广告的博弈情形提出了广告合作的均衡策略. 李波等[29]在考虑制造商和零售商均具有公平关切的情形下提出了双渠道供应链的合作广告策略.

上述文献均假设闭环供应链所处的内外部环境不发生变化,即在相对稳定的条件下进行决策. 然而实践中的内外部环境往往会发生变化,厂商往往需要及时调整决策以应对环境的变化,其中也有相当多成功的案例④. 例如在 2018 年世界杯期间,蒙牛乳业进行了大规模的广告投入,包括成为世界杯全球官方赞助商、签约著名球星梅西代言、大规模投放电视广告、网络广告以及线下推广渠道. 蒙牛的企业品牌力获得了大幅提升,产品需求量也随之大幅提高,蒙牛积极发挥自身优势及时调整运营策略以满足市场需求,取得了很大的成功. 业绩数据显示,上半年销售收入同比增长 17% 达 344.74 亿元; 净利润同比增大 38.5% 达 15.62 亿元. Clausen 等[30]的研究表明各类其他的突发事件往往会引发决策环境的变化,通常会使得稳定环境下指定的最优决策不再最优,从而导致效益受到损失,因此,突发事件发生后的供应链应急管理问题成为了很多学者的研究课题. Qi 等[31]研究了采用数量折扣契约协调供应链的应急管理问题. 陈中洁和于辉[32]在需求扰动的情况下探讨了"买方驱动"反向保理对供应链运营的

④ http://dy.163.com/v2/article/detail/DQGAJ7T

作用规律. 赵琳和牟宗玉[33]比较了各类回收渠道的应急均衡决策及契约协调问题. 牟宗玉等[34]研究了生产成本扰动时闭环供应链的差别定价策略及协调问题. Xiao 和 Qi[35]在突发事件同时干扰市场需求和生产成本的情况下探讨了全单位数量折扣契约和增量单位数量折扣契约协调供应链的问题. Huang 等[36]研究了成本扰动情况下双渠道供应链中的定价和生产决策问题. 于艳娜和滕春贤[37]根据信息产品的特点，研究了需求扰动对制造商主导的双渠道供应链的定价和决策的影响. 霍良安等[38]研究了突发事件对风险厌恶型闭环供应链的影响. 肖人彬和余睿武[39]研究了成本扰动与广告协同下的供应链协调问题. 李新然等[40]研究了在产品最大市场需求规模受到突发事件干扰的情况下闭环供应链各成员的应急决策问题. 何波等[41]对比了有无制造成本扰动两种情形下两条供应链的最优决策. 张学龙等[42]研究了多种系数发生扰动下的供应链决策问题.

由此可见闭环供应链的广告效应和扰动管理问题引起了学者们广泛的关注，但上述研究往往是单纯地考虑广告效应对闭环供应链的影响或者从成本扰动的角度对闭环供应链进行研究. 本文在具有广告效应的闭环供应链定价问题上考虑广告效应的扰动对供应链决策所产生的影响，构建了分散化和集中化决策的博弈模型，研究了供应链在不同幅度的广告效应扰动下的最优应急决策问题. 区别于已有研究，本文旨在探讨以下问题: 1) 对比无扰动的情形，广告效应扰动会对闭环供应链的分散化和集中化决策产生什么样的影响? 如何制定最优的应急决策? 2) 广告效应发生扰动后，对比分散化和集中化的最优决策，如何设计合理的契约来协调分散化决策的闭环供应链?

1 模型描述和基本假设

构建由制造商和零售商组成的闭环供应链，制造商负责生产新产品、回收废旧产品以及再制造，而零售商负责投放广告以及销售产品. 假设再制造品和新产品在质量、效用和功能上完全相同，即拥有相同的价格、包装等，消费者对两者无法分辨且接受度完全相同.

研究广告效应扰动对闭环供应链决策的影响. 假设期望需求 D 受零售商广告投入的努力程度 g 和零售价格 p 的影响，其具体形式为

$$D(g,p) = \alpha + \beta g - \gamma p,$$

$$\alpha,\beta,\gamma \geqslant 0, \gamma > \beta$$

式中 α 是基础市场容量; β 为广告效应因子，反映了广告活动的效率，β 越大表明广告投资对商品需求量的影响就越大; γ 是价格敏感系数，反映了价格对于需求的影响. $\gamma > \beta$ 则反映了与零售商的广告投入努力程度相比，消费者对产品价格更加敏感. 假设广告投入的努力程度为 g 时，那么广告费用为 g^2，这也表明如果一味地提高广告投入努力程度，广告投入费用将会急剧上升.

将闭环供应链的运作过程分为计划阶段和实施阶段. 在计划阶段，制造商根据预测的制造成本、广告效应和市场需求等因素选择最优生产决策. 由于交货期长，在生产计划阶段，制造商应根据生产决策进行原材料采购和生产准备. 在实施阶段，制造商和零售商依据实际的广告效应采取新的生产决策.

假设制造商具备足够的生产制造能力，且能准确预测市场需求量，生产的产品都能进入市场，且制造商具备完全理性，那么制造商的生产量与市场需求量相等(这里的生产量包括新产品和再制造产品，市场需求量是指计划阶段所预测的市场需求量). 生产的产品都能进入市场，故零售商的订货量与生产量保持一致，订货量用 q 表示，则

$$q(g,p) = \alpha + \beta g - \gamma p$$

假设制造商生产新产品的单位成本为 c_m(主要指生产新产品所需要投入的固定成本折旧，以及新产品材料和生产装配的费用)，生产再制造品的单位成本为 c_r(主要指废旧品的回收、拆卸、检查成本，以及再制造成本等)，且当生产再制造产品的单位成本低于生产新产品的单位成本，即 $c_m > c_r$ 时，制造商才有投入到再制造活动中的积极性. 在现实生活中回收回来的废旧产品质量不尽相同，导致回收再制造成为复杂性很高的过程，很难用单独的参数来表示再制造中所涉及的成本. 但在本文的模型中，为了简化模型，用单独的参数 c_r 来表示. 在这里将 c_r 视为产品回收再制造的平均成本. 用 $\Delta = c_m - c_r$ 来表示再制造生产所节约的单位成本.

假设废旧产品的回收率为 $\tau(0<\tau<1)$，作为制造商回收努力水平高低的体现. 参考李新然等[36]的研究，制造商的固定回收成本可表示为回收率的二次函数，即

$$C(\tau)=h\tau^2$$

式中 h 表示范围参数. 参考 Savaskan 等[1]关于回收量的假定，那么制造商可回收的废旧产品数量为 $\tau D(g,p)$. 假定回收的废旧产品可全部投入到再制造，那么制造商的平均生产成本

$$c_{\mathrm{a}}=\frac{\tau D c_{\mathrm{r}}+(1-\tau) D c_{\mathrm{m}}}{D}=\tau c_{\mathrm{r}}+(1-\tau) c_{\mathrm{m}}$$

又有 $\Delta=c_{\mathrm{m}}-c_{\mathrm{r}}$，故制造商的平均单位生产成本 $c_a=c_{\mathrm{m}}-\tau\Delta$.

在实际回收过程中会产生变动成本，计为 A，那么制造商的回收成本为 $\tau D(g,p)+h\tau^2$，对制造商利润函数的变动成本 $\tau D(g,p)A$ 进行合并同类项，得到 $(\omega-c_{\mathrm{m}}+\tau(\Delta-A))q-h\tau^2$，其中 Δ、A 都为常量，故不考虑制造商回收变动成本的影响并不会改变本文的结论. 为方便讨论，这里假设以上参数满足 $h(4\gamma-\beta^2)-\gamma^2\Delta^2>0$，即 $h>\dfrac{\gamma^2\Delta^2}{4\gamma-\beta^2}$，表明回收旧产品需要耗费相当大的成本，所以回收全部旧产品用于再制造是不现实的.

在本文中，将最优解加记上角标“*”，集中化决策下的相关结果加记上角标“C”，分散化决策下的相关结果则加记上角标“D”，协调策略的相关结果则加记上角标“SC”，考虑扰动后的相关结果加记上标“~”.

2 闭环供应链的决策模型

2.1 稳定环境下的集中化决策模型

在集中化决策模型中，制造商和零售商密切合作，两者之间信息完全共享，并以实现供应链的最大收益作为目标. 此时闭环供应链的利润函数为

$$\Pi_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{C}}(g,p,\tau)=(\alpha+\beta g-\gamma p)(p-c_{\mathrm{m}}+\Delta\tau)-h\tau^2-g^2 \tag{1}$$

求式(1)中 $\Pi_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{C}}$ 的最大值，可得到集中化决策下制造商和零售商的最优决策，即结论 1.

结论 1 稳定环境下集中化决策的最优决策为

$$g^{\mathrm{C}*}=\frac{h\beta(-\alpha+\gamma c_{\mathrm{m}})}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2},$$

$$p^{\mathrm{C}*}=\frac{-2h\alpha+\alpha\gamma\Delta^2+h(\beta^2-2\gamma)c_{\mathrm{m}}}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2},$$

$$\tau^{\mathrm{C}*}=\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma c_{\mathrm{m}})}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2}$$

闭环供应链的最优订货量和最优总利润分别为

$$q^{\mathrm{C}*}=\frac{2h\gamma(-\alpha+\gamma c_{\mathrm{m}})}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2},$$

$$\Pi_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{C}*}=\frac{h(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})^2}{h(4\gamma-\beta^2)-\gamma^2\Delta^2}$$

为了使结论 1 具有现实意义，广告投入努力程度、零售价格以及回收率需满足大于 0 的条件，且本文假设的需求函数 $D(g,p)=\alpha+\beta g-\gamma p$，需始终不小于 0. 那么当广告投入努力程度 $g=0$ 时，存在 $D(g,p)=\alpha-\gamma p\geqslant 0$，又因为 $c_{\mathrm{m}}<p$，所以有 $\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}}>0$，即市场潜力需满足达到一定的规模. 上式中 $g^{\mathrm{C}*}$、$p^{\mathrm{C}*}$、$q^{\mathrm{C}*}$ 的分子均大于零，故分母需满足 $h(4\gamma-\beta^2)-\gamma^2\Delta^2>0$.

根据结论 1，推导得到如下命题 1.

命题 1 在集中化决策模型中，记发生广告效应扰动后的订货量为 $\tilde{q}^{\mathrm{C}}$，当 $\delta>0$ 时有 $\tilde{q}^{\mathrm{C}}>q^{\mathrm{C}*}$；当 $\delta<0$ 时有 $\tilde{q}^{\mathrm{C}}<q^{\mathrm{C}*}$.（证明见附录）

命题 1 表明广告效应能够对最优订货量产生影响，最优订货量与广告效应呈正相关.

2.2 广告效应扰动情形下的闭环供应链集中化决策模型

2.1 节是在不考虑突发事件干扰时所做的决策，然而在发生突发事件后，稳定环境下制定的决策结果往往不再是最优决策. 所以当发生突发事件后，如何调整供应链决策以获得额外的收益或避免效益的损失，是亟待解决的问题.

假设广告效应因子的扰动量为 δ，扰动之后的广告效应因子为 $\beta+\delta$，当且仅当 $\beta+\delta>0$ 时才具有现实意义，所以假设扰动量范围为 $\delta>-\beta$. 广告效应发生扰动后，闭环供应链的利润函数为

$$\tilde{\Pi}_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{C}}(\tilde{g},\tilde{p},\tilde{\tau})=\tilde{q}(\tilde{p}-c_{\mathrm{m}}+\tilde{\tau}\Delta)-h\tilde{\tau}^2-\tilde{g}^2-\mu_1(\tilde{q}-q^{\mathrm{C}*})^+-\mu_2(q^{\mathrm{C}*}-\tilde{q})^+ \tag{2}$$

式中 $(x)^+=\max\{0,x\}$；$\tilde{q}=\alpha+(\beta+\delta)\tilde{g}-\gamma$

$\tilde{p}$ 为扰动发生后的实际产量; q^{C*} 是稳定情形下的最优产量; μ_1 为生产量小于需求量时,加快生产进度而增加的单位成本,要使供应链具备持续补货的动力,增加的单位成本需小于产品的单位利润,即 $0 < \mu_1 < p - c_m + \tilde{\tau}\Delta$; μ_2 为生产过剩导致产品的处理成本,不失一般性,设 $\mu_2 < c_m$ 且 $\mu_2 < \Delta$,即处理剩余产品的成本低于新产品成本,Hong 等[19] 也采用了类似的处理.

根据命题 1,当 $\delta > 0$ 时,有 $\tilde{q} \geqslant q^{C*}$,此时闭环供应链的利润函数为

$$\tilde{\Pi}_{sc}^{C}(\tilde{g},\tilde{p},\tilde{\tau}) = \tilde{q}(\tilde{p} - c_m + \tilde{\tau}\Delta) - h\tilde{\tau}^2 - \tilde{g}^2 - \mu_1(\tilde{q} - q^{C*}) \tag{3}$$

$$\text{s. t. } \tilde{q} \geqslant q^{C*}$$

计算后可得到命题 2,证明过程见附录.

命题 2　在不同强度的广告效应扰动下,集中化决策模型下的供应链最优决策如表 1 所示.

表 1　集中化决策模型中的最优决策

Table 1 Optimal decision in the centralized decision model

δ	$\tilde{p}$	$\tilde{g}$	$\tilde{\tau}$
$-\beta \leqslant \delta < Exp2$	$\dfrac{-2h\alpha - h(-2\gamma + (\beta+\delta)^2)\mu_2 + \alpha\gamma\Delta^2 + h(-2\gamma + (\beta+\delta)^2)c_m}{h(-4\gamma + (\beta+\delta)^2) + \gamma^2\Delta^2}$	$\dfrac{h(\beta+\delta)(\alpha + \gamma\mu_2 - \gamma c_m)}{h(4\gamma - (\beta+\delta)^2) - \gamma^2\Delta^2}$	$\dfrac{\gamma\Delta(\alpha + \gamma\mu_2 - \gamma c_m)}{h(4\gamma - (\beta+\delta)^2) - \gamma^2\Delta^2}$
$Exp2 \leqslant \delta < Exp1$	$\dfrac{-h\alpha(2\gamma + 2\beta\delta + \delta^2) + \alpha\gamma^2\Delta^2 + h\gamma(-2\gamma + (\beta+\delta)^2)c_m}{h(\beta^2 - 4\gamma)\gamma + \gamma^3\Delta^2}$	$\dfrac{h(\beta+\delta)(-\alpha + \gamma c_m)}{h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2}$	$\dfrac{\gamma\Delta(-\alpha + \gamma c_m)}{h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2}$
$\delta \geqslant Exp1$	$\dfrac{-2h\alpha + h(-2\gamma + (\beta+\delta)^2)\mu_1 + \alpha\gamma\Delta^2 + h(-2\gamma + (\beta+\delta)^2)c_m}{h(-4\gamma + (\beta+\delta)^2) + \gamma^2\Delta^2}$	$\dfrac{h(\beta+\delta)(-\alpha + \gamma\mu_1 + \gamma c_m)}{h(-4\gamma + (\beta+\delta)^2) + \gamma^2\Delta^2}$	$\dfrac{\gamma\Delta(-\alpha + \gamma\mu_1 + \gamma c_m)}{h(-4\gamma + (\beta+\delta)^2) + \gamma^2\Delta^2}$

注: $Exp1 = \sqrt{\beta^2 + \dfrac{\mu_1\gamma}{\alpha - \gamma c_m}\left(4\gamma - \beta^2 - \dfrac{\gamma^2\Delta^2}{2h}\right)} - \beta$; $Exp2 = \sqrt{\beta^2 - \dfrac{\gamma\mu_2}{(\alpha - \gamma c_m)}\left(4\gamma - \beta^2 - \dfrac{\gamma^2\Delta^2}{2h}\right)} - \beta$.

2.3　稳定环境下的分散化决策模型

在现实生活中,制造商和零售商往往都是独立的实体,他们会追求各自的利润最大化,而不可避免地采取分散化决策. 分散化决策时,闭环供应链中零售商和制造商各自的利润函数为

$$\Pi_r^D(g,p) = (p - \omega)q - g^2 \tag{4}$$

$$\Pi_m^D(\omega,\tau) = (\omega - c_m + \tau\Delta)q - h\tau^2 \tag{5}$$

构建的分散化闭环供应链决策中,对于作为 Stackelberg 博弈中追随者的零售商来说,在了解到制造商的策略之后可以视批发价格 ω、回收率 τ 为常量,此时零售商选择使自己利润最大化的策略. 实际上,制造商是可以预见自己制定策略后零售商所做的策略. 下面就利用逆向归纳法先求出零售商的最优策略以及供应链成员的最优利润.

结论 2　稳定情形下,制造商和零售商在分散化决策模型中的最优决策,以及制造商、零售商以及供应链整体的最优利润为

$$\tau^{D*} = \frac{\gamma\Delta(-\alpha + \gamma c_m)}{2h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2},$$

$$\omega^{D*} = \frac{h\alpha(\beta^2 - 4\gamma) + \alpha\gamma^2\Delta^2 + h(\beta^2 - 4\gamma)\gamma c_m}{2h(\beta^2 - 4\gamma)\gamma + \gamma^3\Delta^2},$$

$$q^{D*} = \frac{2h\gamma(-\alpha + \gamma c_m)}{2h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2},$$

$$\Pi_m^{D*} = \frac{h(\alpha - \gamma c_m)^2}{2h(4\gamma - \beta^2) - \gamma^2\Delta^2},$$

$$\Pi_r^{D*} = \frac{h^2(4\gamma - \beta^2)(\alpha - \gamma c_m)^2}{(2h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2)^2},$$

$$\Pi_{sc}^{D*} = \Pi_r^D + \Pi_m^D = \frac{h(3h(4\gamma - \beta^2) - \gamma^2\Delta^2)(\alpha - \gamma c_m)^2}{(2h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2)^2}$$

分析结论 2 可得到命题 3.

命题 3　在分散化决策模型中,记发生广告效应扰动后的需求量为 $\tilde{q}^D$,则当 $\delta > 0$ 时有 $\tilde{q}^D > q^{D*}$;当 $\delta < 0$ 时有 $\tilde{q}^D < q^{D*}$. 证明过程与命题 1 类似.(证明与命题 1 的证明类似)

命题 3 表明广告效应扰动会对产品的需求产生影响,且扰动的方向与产品需求变化的方向一致. 正向扰动时,产品需求增大; 负向扰动时,产品的需求减小.

2.4　广告效应扰动情形下的闭环供应链分散化决策模型

广告效应扰动情形下,此时订货量为 $\tilde{q} = \alpha +$

$(\beta+\delta)\tilde{g}-\gamma\tilde{p}$，假定缺货成本、商品处理成本均由制造商承担，此时制造商、零售商的利润函数分别为

$$\widetilde{\Pi}_r^D(\tilde{g},\tilde{p})=(\alpha+(\beta+\delta)\tilde{g}-\gamma\tilde{p})(\tilde{p}-\omega)-\tilde{g}^2$$

$$\widetilde{\Pi}_m^D(\tilde{\omega},\tilde{\tau})=(\alpha+(\beta+\delta)\tilde{g}-\gamma\tilde{p})(\tilde{\omega}-c_m+\tilde{\tau}\Delta)h\tilde{\tau}^2-\mu_1(\tilde{q}-q^{D*})^+-\mu_2(q^{D*}-\tilde{q})^+$$

式中 $(x)^+=\max\{0,x\}$；$\tilde{q}$ 为扰动发生后的实际产量，$\tilde{q}=\alpha+(\beta+\delta)\tilde{g}-\gamma\tilde{p}$；$q^{D*}$ 是稳定情形下的最优产量.

1) 当广告效应正向扰动，即 $\delta>0$ 时

根据命题 3，当 $\delta>0$ 时，有 $\tilde{q}\geqslant q^{D*}$，此时制造商的利润函数为

$$\widetilde{\Pi}_m^D(\tilde{\omega},\tilde{\tau})=(\alpha+(\beta+\delta)\tilde{g}-\gamma\tilde{p})(\tilde{\omega}-c_m+\tilde{\tau}\Delta)-h\tilde{\tau}^2-\mu_1(\tilde{q}-q^{D*}) \tag{6}$$

这里需利用拉格朗日乘子 $\lambda\geqslant 0$ 的方法放松约束条件式 $\tilde{q}\geqslant q^*$，并对 λ 的取值进行讨论，得到结论 3.

结论 3 当 $\lambda>0$ 时，即 $\tilde{q}_{case5}=q^{D*}$，制造商的最优批发、回收决策分别为

$$\tilde{\omega}_{acse5}=\frac{h\alpha(\beta^2-4\gamma-2\beta\delta-\delta^2)+ch\gamma(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\alpha\gamma^2\Delta^2}{2h(\beta^2-4\gamma)\gamma+\gamma^3\Delta^2},$$

$$\tilde{\tau}_{case5}=\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma c_m)}{2h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2}$$

当 $\lambda=0$ 时，即 $\tilde{q}_{case6}\geqslant q^{D*}$，制造商的最优批发和回收决策分别为

$$\tilde{\omega}_{case6}=\frac{\alpha+\gamma(c_m+\mu_1)}{2\gamma}+\frac{\gamma\Delta^2(\alpha-\gamma(c_m+\mu_1))}{4h(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\gamma^2\Delta^2},$$

$$\tilde{\tau}_{case6}=\frac{\gamma(-\alpha+\gamma(c_m+\mu_1))\Delta}{2h(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\gamma^2\Delta^2}$$

零售商的广告决策和零售价格决策分别为

$$\tilde{g}_{case6}=\frac{(\beta+\delta)h(\alpha-\gamma c_m)}{2h(4\gamma-\beta^2)-\gamma^2\Delta^2},$$

$$\tilde{p}_{case6}=\frac{h\alpha(\beta^2-6\gamma-2\beta\delta-\delta^2)+\alpha\gamma^2\Delta^2+h\gamma(-2\gamma+(\beta+\delta)^2)c_m}{2h(\beta^2-4\gamma)\gamma+\gamma^3\Delta^2}$$

2) 当广告效应负向扰动，即 $\delta<0$ 时

根据命题 2，有 $q^{D*}>\tilde{q}$. 可知零售商、制造商的利润函数分别为

$$\widetilde{\Pi}_r^D(\tilde{g},\tilde{p})=(\alpha+(\beta+\delta)\tilde{g}-\gamma\tilde{p})(\tilde{p}-\omega)-\tilde{g}^2 \tag{7}$$

$$\widetilde{\Pi}_m^D(\tilde{\omega},\tilde{\tau})=(\alpha+(\beta+\delta)\tilde{g}-\gamma\tilde{p})(\tilde{\omega}-c_m+\tilde{\tau}\Delta)-h\tilde{\tau}^2-\mu_2(q^{D*}-\tilde{q}) \tag{8}$$

根据逆向归纳法原理，零售商作为 Stackelberg 博弈中的追随者，同时也是该模型中最后一级参与者，所以零售商的最优决策问题应该最先考虑. 由 $\frac{\partial\widetilde{\Pi}_r^D}{\partial\tilde{g}}=0$，$\frac{\partial\widetilde{\Pi}_r^D}{\partial\tilde{p}}=0$，得出广告投入努力程度 $\tilde{g}$、零售价格 $\tilde{p}$ 关于批发价格 $\tilde{\omega}$ 的函数 $\tilde{g}(\tilde{\omega})$、$\tilde{p}(\tilde{\omega})$，代入式(8)，将制造商利润最优化问题化为

$$\widetilde{\Pi}_m^D(\tilde{\omega},\tilde{\tau})=(\alpha+(\beta+\delta)\tilde{g}-\gamma\tilde{p})(\tilde{\omega}-c_m+\tilde{\tau}\Delta)-h\tilde{\tau}^2-\mu_2(q^{D*}-\tilde{q})$$

$$\text{s.t. } \tilde{q}\leqslant q^{D*}$$

引入拉格朗日乘子 $\lambda \geqslant 0$，得到 KKT 条件 $\begin{cases} \dfrac{\partial\ [\widetilde{\Pi}_{m}^{D}+\lambda(q^{D*}-\tilde{q})]}{\partial \tilde{\omega}}=0 \\ \lambda(q^{D*}-\tilde{q})=0 \\ \lambda \geqslant 0 \end{cases}$.

本节的求解过程与上文相似，在此省略.

当 $\lambda>0$ 时，$\tilde{q}_{case7}=q^{D*}$，求得

$$\tilde{\omega}_{case7}=\frac{h\alpha(\beta^{2}-4\gamma-2\beta\delta-\delta^{2})+\alpha\gamma^{2}\Delta^{2}+h\gamma(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})c_{m}}{2h(\beta^{2}-4\gamma)\gamma+\gamma^{3}\Delta^{2}}$$

为满足 $\widetilde{\Pi}_{m}^{D}$ 取得最优值，求得

$$\tilde{\tau}_{case7}=\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma c_{m})}{2h(\beta^{2}-4\gamma)+\gamma^{2}\Delta^{2}}$$

制造商利润最优值为

$$\widetilde{\Pi}_{m,case7}^{D}=\frac{h(\alpha-c_{m}\gamma)^{2}(2h(-\beta^{2}+4\gamma+2\beta\delta+\delta^{2})-\gamma^{2}\Delta^{2})}{(2h(\beta^{2}-4\gamma)+\gamma^{2}\Delta^{2})^{2}}$$

当 $\lambda=0$ 时，有

$q^{D*} \geqslant \tilde{q}_{case8}$，

$$\tilde{\omega}_{case8}=\frac{\alpha+\gamma(c_{m}-\mu_{2})}{2\gamma}+\frac{\gamma\Delta^{2}(\alpha-\gamma c_{m}+\gamma\mu_{2})}{4h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+2\gamma^{2}\Delta^{2}},$$

$$\tilde{\tau}_{case8}=\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma c_{m}-\gamma\mu_{2})}{2h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+\gamma^{2}\Delta^{2}},$$

$$\widetilde{\Pi}_{m,case8}^{D}=\frac{h(\alpha+\gamma(-c_{m}+\mu_{2}))^{2}}{8h\gamma-2h(\beta+\delta)^{2}-\gamma^{2}\Delta^{2}}+\frac{2h\gamma(\alpha-c_{m}\gamma)\mu_{2}}{2h(\beta^{2}-4\gamma)+\gamma^{2}\Delta^{2}}$$

对以上计算结果进行汇总，得到命题4.

命题4 在不同强度的广告效应扰动下，制造商以自身利润最大化为目标制定以下最优策略，如表2所示; 作为 Stackelberg 博弈的跟随者，零售商在制造商决策结果的基础上，以自身利润最大化为目标制定的最优决策，如表3所示.

表2 分散化决策模型中的广告效应扰动下制造商的最优决策及利润

Table 2 Manufacturer's optimal decision and profit under the disturbance of advertising effect in decentralized decision model

δ	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\tau}$	$\widetilde{\Pi}_{m}^{D}$
$-\beta \leqslant \delta < Exp2$	$\frac{\alpha+\gamma(c_{m}-\mu_{2})}{2\gamma}+\frac{\gamma\Delta^{2}(\alpha-\gamma c_{m}+\gamma\mu_{2})}{4h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+2\gamma^{2}\Delta^{2}}$	$\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma c_{m}-\gamma\mu_{2})}{2h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+\gamma^{2}\Delta^{2}}$	$Exp3$
$Exp2 \leqslant \delta < Exp1$	$\frac{h\alpha(\beta^{2}-4\gamma-2\beta\delta-\delta^{2})+\alpha\gamma^{2}\Delta^{2}+h\gamma(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})c_{m}}{2h(\beta^{2}-4\gamma)\gamma+\gamma^{3}\Delta^{2}}$	$\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma c_{m})}{2h(\beta^{2}-4\gamma)+\gamma^{2}\Delta^{2}}$	$Exp4$
$\delta \geqslant Exp1$	$\frac{\alpha+\gamma(c_{m}+\mu_{1})}{2\gamma}+\frac{\gamma\Delta^{2}(\alpha-\gamma(c_{m}+\mu_{1}))}{4h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+2\gamma^{2}\Delta^{2}}$	$\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma(c_{m}+\mu_{1}))}{2h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+\gamma^{2}\Delta^{2}}$	$Exp5$

注: $Exp1=\sqrt{\beta^{2}+\frac{\mu_{1}\gamma}{\alpha-\gamma c_{m}}\left(4\gamma-\beta^{2}-\frac{\gamma^{2}\Delta^{2}}{2h}\right)}-\beta$; $Exp2=\sqrt{\beta^{2}-\frac{\gamma\mu_{2}}{(\alpha-\gamma c_{m})}\left(4\gamma-\beta^{2}-\frac{\gamma^{2}\Delta^{2}}{2h}\right)}-\beta$; $Exp3=\frac{h(\alpha+\gamma(-c_{m}+\mu_{2}))^{2}}{8h\gamma-2h(\beta+\delta)^{2}-\gamma^{2}\Delta^{2}}+\frac{2h\gamma(\alpha-c_{m}\gamma)\mu_{2}}{2h(\beta^{2}-4\gamma)+\gamma^{2}\Delta^{2}}$; $Exp4=\frac{h(\alpha-c_{m}\gamma)^{2}(2h(-\beta^{2}+4\gamma+2\beta\delta+\delta^{2})-\gamma^{2}\Delta^{2})}{(2h(\beta^{2}-4\gamma)+\gamma^{2}\Delta^{2})^{2}}$; $Exp5=\frac{h(\alpha-\gamma(c_{m}+\mu_{1}))^{2}}{8h\gamma-2h(\beta+\delta)^{2}-\gamma^{2}\Delta^{2}}+\frac{2h\gamma(-\alpha+c_{m}\gamma)\mu_{1}}{2h(\beta^{2}-4\gamma)+\gamma^{2}\Delta^{2}}$.

表 3 分散化决策模型中的广告效应扰动下零售商的最优决策及利润

Table 3 Retailer's optimal decision and profit under the disturbance of advertising effect in decentralized decision model

δ	$\tilde{g}$	$\tilde{p}$	$\tilde{q}$	$\tilde{\Pi}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{D}}$
$-\beta \leqslant \delta < Exp2$	$\dfrac{h(\beta+\delta)(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}}+\gamma\mu_2)}{2h(4\gamma-(\beta+\delta)^2)-\gamma^2\Delta^2}$	$Exp6$	$\dfrac{2h\gamma(\alpha+\gamma(-c_{\mathrm{m}}+\mu_2))}{2h(4\gamma-(\beta+\delta)^2)-\gamma^2\Delta^2}$	$\dfrac{h^2(4\gamma-(\beta+\delta)^2)(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}}+\gamma\mu_2)^2}{(2h(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\gamma^2\Delta^2)^2}$
$Exp2 \leqslant \delta < Exp1$	$\dfrac{(\beta+\delta)h(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})}{2h(4\gamma-\beta^2)-\gamma^2\Delta^2}$	$Exp7$	$\dfrac{2h\gamma(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})}{2h(4\gamma-\beta^2)-\gamma^2\Delta^2}$	$\dfrac{h^2(4\gamma-(\beta+\delta)^2)(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})^2}{(2h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2)^2}$
$\delta \geqslant Exp1$	$\dfrac{h(\beta+\delta)(\alpha-\gamma(c_{\mathrm{m}}+\mu_1))}{2h(4\gamma-(\beta+\delta)^2)-\gamma^2\Delta^2}$	$Exp8$	$\dfrac{2h\gamma(\alpha-\gamma(c_{\mathrm{m}}+\mu_1))}{2h(4\gamma-(\beta+\delta)^2)-\gamma^2\Delta^2}$	$\dfrac{h^2(4\gamma-(\beta+\delta)^2)(\alpha-\gamma(c_{\mathrm{m}}+\mu_1))^2}{(2h(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\gamma^2\Delta^2)^2}$

注：$Exp1 = \sqrt{\beta^2+\dfrac{\mu_1\gamma}{\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}}}\left(4\gamma-\beta^2-\dfrac{\gamma^2\Delta^2}{2h}\right)}-\beta$；$Exp2 = \sqrt{\beta^2-\dfrac{\gamma\mu_2}{(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})}\left(4\gamma-\beta^2-\dfrac{\gamma^2\Delta^2}{2h}\right)}-\beta$；$Exp6 = \dfrac{h\alpha(-6\gamma+(\beta+\delta)^2)+\alpha\gamma^2\Delta^2+h\gamma(2\gamma-(\beta+\delta)^2)(-c_{\mathrm{m}}+\mu_2)}{2h\gamma(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\gamma^3\Delta^2}$；$Exp7 = \dfrac{h\alpha(\beta^2-6\gamma-2\beta\delta-\delta^2)+\alpha\gamma^2\Delta^2+h\gamma(-2\gamma+(\beta+\delta)^2)c_{\mathrm{m}}}{2h(\beta^2-4\gamma)\gamma+\gamma^3\Delta^2}$；$Exp8 = \dfrac{h\alpha(-6\gamma+(\beta+\delta)^2)+\alpha\gamma^2\Delta^2+h\gamma(-2\gamma+(\beta+\delta)^2)(c_{\mathrm{m}}+\mu_1)}{2h\gamma(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\gamma^3\Delta^2}$.

以下将 $Exp2 \leqslant \delta < Exp1$ 称为扰动量较小的情形；把 $-\beta \leqslant \delta < Exp2$，$\delta \geqslant Exp1$ 称为扰动量较大的情形. 由命题 4 可知，广告效应扰动会对供应链成员的决策产生影响，但是制造商的废旧产品回收率和最优订货量决策具有一定的鲁棒性，广告效应在小范围内扰动时，保持回收率不变是最优决策，且零售商的最优订货量也可保持不变.

通过分析比较（证明过程见附录）发现：供应链成员的决策在广告效应扰动时具有连续性，最优零售价格、最优广告投入努力程度会随着广告效应的增加而递增. 这是因为广告效应如果增加，每单位的广告对需求的影响将增大，那么零售商加大广告投放是占优决策；此时提高零售价格也将给零售商带来超额利润. 批发价格也会随着广告效应递增，但是当广告效应增加到一定程度时，批发价格将会递减.

3 协调机制设计

在广告效应扰动情形下，设计协调契约来协调闭环供应链. 由于分散化决策存在双重边际效应，势必导致分散化决策下的决策效率无法达到最优，零售商与制造商均有一定动力改善供应链的决策状态，以获得超额利润. 制造商可以设置较低的批发价格 ω，以刺激零售商以集中化决策模型中的最优零售价格和最优广告投入进行商业运作. 然后零售商向制造商支付一定的费用，以补偿制造商降低批发价格而产生的损失[33]. 该契约中的补偿费用从本质上说是两家公司之间的财务安排，由两家公司协商谈判决定，与两家公司在供应链中的影响力、谈判能力等因素相关. 在协调模型中的各项变量用上标 TT 来表示.

该契约下的制造商的决策问题可以表示为

$$\Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{TT}}(\tilde{\omega},\tilde{F}) = (\tilde{\omega}-c_{\mathrm{m}}+\Delta\tilde{\tau})\tilde{q}-h\tilde{\tau}^2-\mu_1(\tilde{q}-q^{\mathrm{C}*})^{+}-\mu_2(q^{\mathrm{C}*}-\tilde{q})^{+}+\tilde{F}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{TT}} > \Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}*}\\ (\tilde{p}-\tilde{\omega})\tilde{q}-\tilde{g}^2-\tilde{F} > \Pi_{\mathrm{r}}^{\mathrm{D}*}\\ \tau^{\mathrm{TT}}=\tau^{\mathrm{C}*},\ p^{\mathrm{TT}}=p^{\mathrm{C}*},\ g^{\mathrm{TT}}=g^{\mathrm{C}*}\end{cases}$$

其中前两个约束条件是本契约能达成的关键，只有制造商和零售商能够获得高于分散化决策的利润，两者才具备达成契约的动力. 第二个约束条件中的 $(\tilde{p}-\tilde{\omega})\tilde{q}-\tilde{g}^2-\tilde{F}$ 为零售商在协调模型中的利润，下文用 $\Pi_{\mathrm{r}}^{\mathrm{TT}}$ 来表示. 第三个约束条件为激励相容约束，以达到集中化决策模型的决策效率.

$\Pi_{\mathrm{r}}^{\mathrm{TT}}$ 是关于 $\tilde{g},\tilde{p}$ 的严格联合凹函数，所以可求出 $\tilde{g},\tilde{p}$ 关于 $\tilde{\omega}$ 的反应函数

$$\tilde{g}(\tilde{\omega}) = \frac{(\beta+\delta)(-\alpha+\gamma\tilde{\omega})}{-4\gamma+(\beta+\delta)^2},$$

$$\tilde{p}(\tilde{\omega}) = \frac{2\alpha + 2\gamma\tilde{\omega} - (\beta+\delta)^2\tilde{\omega}}{4\gamma - (\beta+\delta)^2}$$

由 $g^{TT} = g^{C*}$，可求得在不同扰动量下的批发价格 $\tilde{\omega}^{TT} = \frac{\alpha(\beta+\delta) + g^{C*}((\beta+\delta)^2 - 4\gamma)}{\gamma(\beta+\delta)}$，代入不同扰动幅度下的 g^{C*}，即可求得 $\tilde{\omega}^{TT*}$. 将 $\tilde{\omega}^{TT*}$ 代入 Π_m^{TT} 和 Π_r^{TT}，根据约束条件 $(\tilde{\omega} - c_m + \Delta\tilde{\tau})\tilde{q} - h\tilde{\tau}^2 - \mu_1(\tilde{q} - q^{C*})^+ - \mu_2(q^{C*} - \tilde{q})^+ + \tilde{F} > \Pi_m^{D*}$，$(\tilde{p} - \tilde{\omega})\tilde{q} - \tilde{g}^2 - \tilde{F} > \Pi_r^{D*}$，可求出补偿费用 $\tilde{F}$ 的范围. 具体如表 4 所示.

表 4　协调机制下的最优决策

Table 4 Optimal decision under coordination mechanism

δ	$\tilde{\omega}$	$\tilde{F}$
$-\beta \leqslant \delta < Exp2$	$\frac{\alpha\gamma\Delta^2 + h(-4\gamma + (\beta+\delta)^2)(c_m - \mu_2)}{h(-4\gamma + (\beta+\delta)^2) + \gamma^2\Delta^2}$	$Exp9 < \tilde{F} \leqslant Exp10$
$Exp2 \leqslant \delta < Exp1$	$\frac{-h\alpha\delta(2\beta+\delta) + \alpha\gamma^2\Delta^2 + h\gamma(-4\gamma + (\beta+\delta)^2)c_m}{h(\beta^2 - 4\gamma)\gamma + \gamma^3\Delta^2}$	$Exp11 < \tilde{F} \leqslant Exp9$
$\delta \geqslant Exp1$	$\frac{-\alpha\gamma\Delta^2 + h(-4\gamma + (\beta+\delta)^2)(c_m + \mu_1)}{h(-4\gamma + (\beta+\delta)^2) - \gamma^2\Delta^2}$	$0 < \tilde{F} \leqslant Exp11$

注：$Exp1 = \sqrt{\beta^2 + \frac{\mu_1\gamma}{\alpha - \gamma c_m}\left(4\gamma - \beta^2 - \frac{\gamma^2\Delta^2}{2h}\right)} - \beta$；$Exp2 = \sqrt{\beta^2 - \frac{\gamma\mu_2}{(\alpha - \gamma c_m)}\left(4\gamma - \beta^2 - \frac{\gamma^2\Delta^2}{2h}\right)} - \beta$；$Exp9 = \frac{h^3(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)^2(3h(4\gamma-(\beta+\delta)^2) - 2\gamma^2\Delta^2)(\alpha - \gamma c_m + \gamma\mu_2)^2}{(2h^2(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)^2 + 3h\gamma^2(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)\Delta^2 + \gamma^4\Delta^4)^2}$；$Exp10 = \frac{h^3(\beta^2 - 4\gamma)(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)(3h(4\gamma-\beta^2) - 2\gamma^2\Delta^2)(\alpha - \gamma c_m)^2}{(h(\beta^2-4\gamma) + \gamma^2\Delta^2)^2(2h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2)^2}$；$Exp11 = \frac{h^3(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)^2(3h(4\gamma-(\beta+\delta)^2) - 2\gamma^2\Delta^2)(\alpha - \gamma(c_m + \mu_1))^2}{(2h^2(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)^2 + 3h\gamma^2(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)\Delta^2 + \gamma^4\Delta^4)^2}$.

4　算例分析

根据第 3 节的理论分析，可以看出，广告效果扰动会影响分散化决策闭环供应链的最优决策和最优利润. 然而，由于以上模型参数众多，直接进行分析和比较非常困难，因此，采用数值分析的方法进行探讨，并根据算例结果作图，以便直观地观察扰动情形下的决策问题，同时验证本文所构建模型的合理性.

模型中的参数赋值如下:

$\alpha = 100$，$\beta = 3$，$\gamma = 10$，$c_m = 5$，$\Delta = 2$，$h = 600$，$\mu_1 = 1$，$\mu_2 = 0.8$，故广告效应扰动量的范围为 $-3 < \delta < 3$. 代入以上的赋值(保留小数点后两位)得

$$Exp1 = \sqrt{\beta^2 + \frac{\mu_1\gamma}{\alpha - \gamma c_m}\left(4\gamma - \beta^2 - \frac{\gamma^2\Delta^2}{2h}\right)} - \beta = 1.18;$$

$$Exp2 = \sqrt{\beta^2 - \frac{\gamma\mu_2}{(\alpha - \gamma c_m)}\left(4\gamma - \beta^2 - \frac{\gamma^2\Delta^2}{2h}\right)} - \beta = -1.51;$$

$$Exp9 = \sqrt{\beta^2 - \frac{\gamma\mu_2(32h\gamma - 9h\beta^2 - 4\gamma^2\Delta^2)}{9h(\alpha - \gamma c_m)}} - \beta = -1.22;$$

$$Exp10 = \sqrt{\beta^2 + \frac{\gamma\mu_1(32h\gamma - 9h\beta^2 - 4\gamma^2\Delta^2)}{9h(\alpha - \gamma c_m)}} - \beta = 1.03.$$

4.1　广告扰动情形下集中化决策与分散化决策的对比分析

广告效应扰动下的零售价格和批发价格的变化趋势分别如图 1 和图 2 所示.

由图 1 可知，零售价格与广告效应正相关，当广告效应较小时，对广告效应变动不敏感；当广告效应较大时，才对广告效应具有较强的敏感性.

由图 2 可知当扰动量相对较小时，即 $Exp2 \leqslant \delta < Exp1$，批发价格会随着广告效应的增大而增大. 主要是因为作为主导者的制造商为了避免承担额外的成本(缺货成本或处理成本)会及时调整批发价格以保持稳定的订货量；当广告效应扰动量较大时，制造商靠调整批发价格已经不能保持稳定的订货量，所以在这个阶段批发价格基本保持稳定.

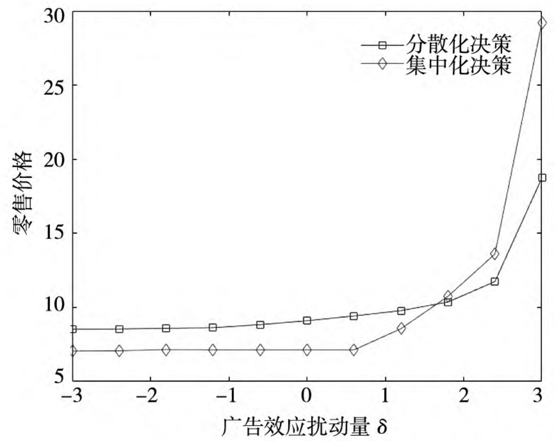


图 1 广告效应扰动下的零售价格变化趋势

Fig. 1 Changing trend of retail price under the disturbance of advertising effec

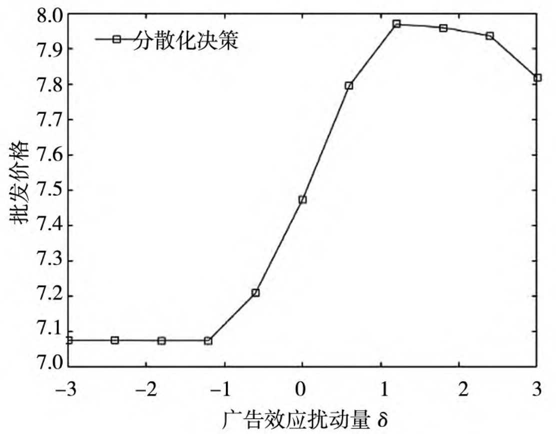


图 2 广告效应扰动下的批发价格变化趋势

Fig. 2 Trend of wholesale price under the disturbance of advertising effect

分散化决策模型中的零售商利润函数 $\widetilde{\Pi}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{D}} = \tilde{q}(\tilde{p} - \tilde{\omega}) - \tilde{g}^2$，由图 1 和图 2 可知 $\tilde{p}$、$\tilde{\omega}$ 增量相等的情况下(分散化决策下的零售价格和批发价格增量均为 0.9)，广告投入努力程度将会有较大程度的提高，故在 $Exp2 \leqslant \delta < Exp1$ 时，会出现广告效应造成零售商利润减少的情况. 在分散化的 Stackelberg 博弈模型中，制造商和零售商的决策会发生双重边际效应.

在广告效应扰动时零售商的广告投入努力程度如图 3 所示. 由图 3 可知广告效应与广告投入努力程度具有正反馈效应. 当广告效应扰动量 $\delta = -3$ 时，此时广告效应为零，即投放广告不能对需求产生影响，所以在此时零售商没有投入广告的动力. 当广告效应逐渐增大时，无论是在分散化决策还是在集中化决策中，增大广告投入势在必行. 但由于双重边际效应，分散化决策模型中的广告投入努力程度始终低于集中化决策.

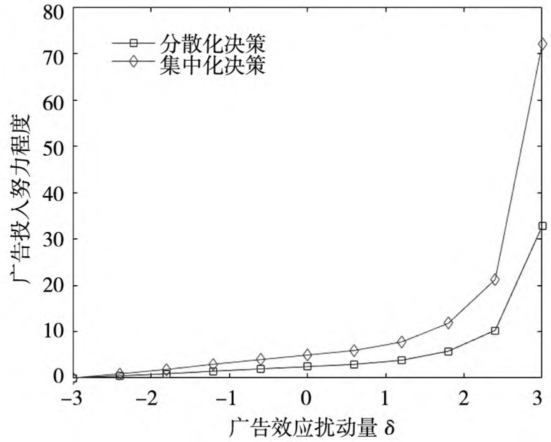


图 3 广告效应扰动下广告投入努力程度的变化趋势

Fig. 3 Changing trend of advertising effort under the disturbance of advertising effect

广告效应扰动下的订货量变化趋势如图 4 所示. 由图 4 可知，订货量是关于广告效应的单调不减函数，当广告效应较小时，订货量较小且随广告效应递增而递增; 广告效应在一定范围时，订货量具有鲁棒性，即订货量保持不变; 广告效应较大时，具有较大的订货量且随着广告效应的增加而递增. 由图 4 还可知零售商的订货量 $\tilde{q}$ 有一定的鲁棒性，即当 $Exp2 < \delta < Exp1$ 时，订货量保持不变.

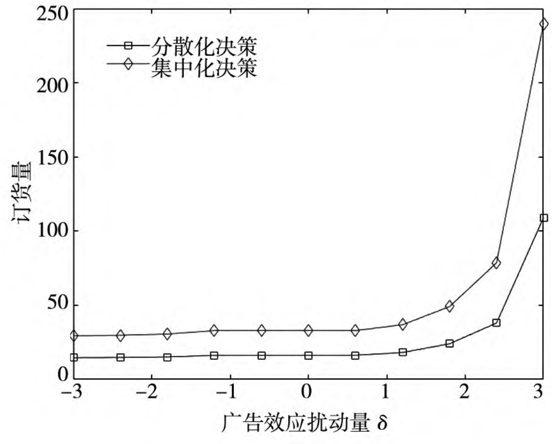


图 4 广告效应扰动下的订货量变化趋势

Fig. 4 Change trend of order quantity under the disturbance of advertising effect

图 5 反映了制造商、零售商利润随广告效应扰动而变化的趋势. 在分散化决策模型中，由于制造商是 Stackelberg 博弈模型中的主导者且具有完

全理性,在各种扰动情形下均能做出对自身利益最优化的决策,故制造商的利润关于广告效应递增,与命题 2 结果一致. 图 5 也表明了当扰动量较大,即 $-\beta < \delta < Exp2$、$Exp1 < \delta < \beta$ 时,零售商利润随扰动量递增; 扰动量较小且 $Exp2 < \delta < Exp1$ 时,零售商利润随扰动量递减. 因为作为主导者的制造商通过制定批发价格来影响零售商的销售价格和广告投入努力程度决策,可间接对零售商的订货量进行控制.

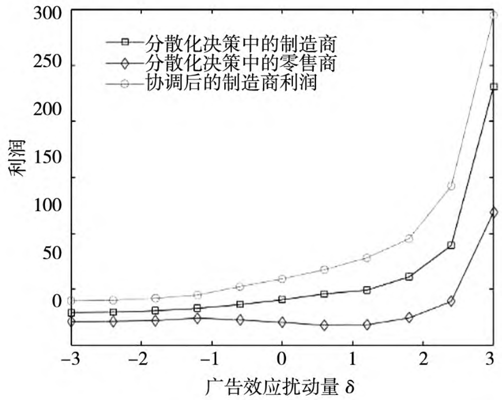


图 5　广告效应扰动下制造商、零售商的利润

Fig. 5 Profit of manufacturer and retailer under the disturbance of advertising effect

图 5 还反映了经过两部收费制契约协调后制造商的利润随广告效应变化的趋势,可知协调后制造商的利润随着广告效应的增加而递增,且高于分散化决策中的制造商利润; 而零售商则保留分散化决策中的利润.

广告效应扰动的协调策略下的补偿费用的变化趋势如图 6 所示,由图 6 可知补偿费用关于广告效应具有较强的敏感性,并随广告效应递增而递减,直至降为零. 结合图 4 和图 6,在一定程度上可以说明作为弱势方的零售商具有较大订货量时,可以减少支付补偿费用,甚至可以不支付补偿费用.

4.2　其他参数灵敏度分析

分析回收率的成本系数 h、新产品和再制造品单位成本对不同决策情形下的闭环供应链的均衡价格和供应链利润的影响, 回收率的成本系数 h 与零售价格和供应链总利润的关系见图 7 和图 8.

由图 7 和图 8 可知回收率成本系数 h 会对产品零售价格以及供应链的利润产生影响. 随着回收率成本系数的增大,零售价格不断提高,供应链

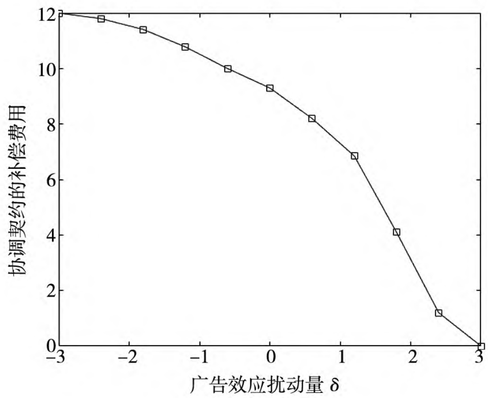


图 6　广告效应扰动下的补偿费用变化趋势

Fig. 6 Trend of compensation cost under the disturbance of advertising effect

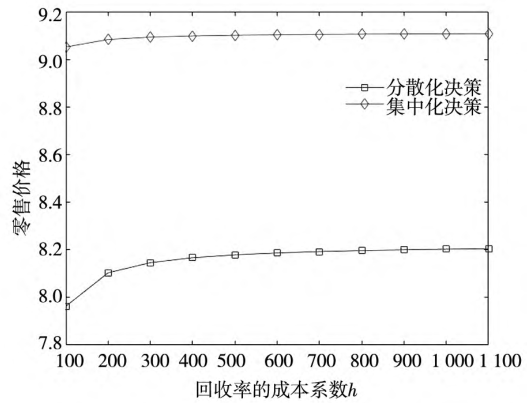


图 7　回收率的成本系数对零售价格的影响

Fig. 7 Influence of cost coefficient of recovery rate on retail price

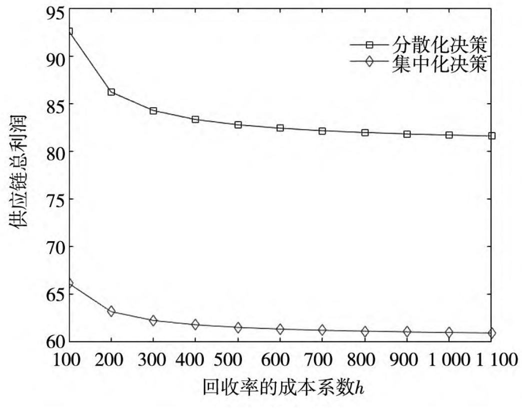


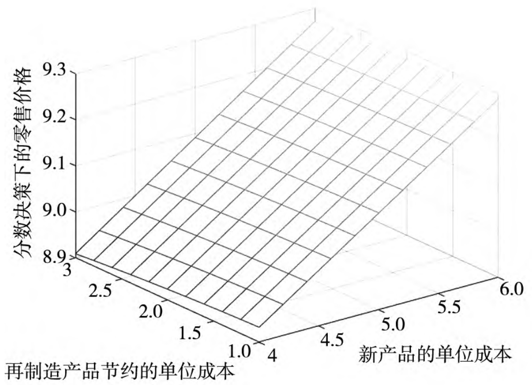
图 8　回收率的成本系数对供应链总利润的影响

Fig. 8 Influence of cost coefficient of recovery rate on total profit of supply chain

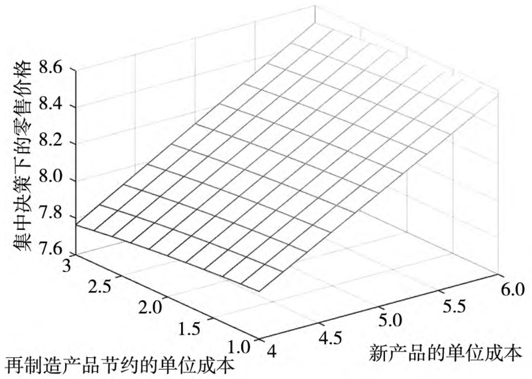
总利润随着成本系数增大而减少. 这是因为回收率成本系数增大势必导致制造商总成本的增加,如果没有其他因素的影响,势必需要提高售价来弥补成本,同时降低供应链整体的盈利能力. 图 7 和图 8 中的零售价格和总利润变化的幅度都较

小，且随着 h 增加到一定程度时，不同决策模型中的零售价格和供应链总利润的变化越来越小并逐渐趋于稳定. 这说明回收率成本系数 h 能对零售价格和供应链总利润产生影响，但是影响较小.

图 9 分析了新产品单位成本 c_m 和再制造产品节约的单位成本 Δ 对均衡零售价格的影响. 图 9(a) 和图 9(b) 分别表示分散化决策和集中化决策的情形，两者表示了相同的趋势，说明参数 c_m 和 Δ 在分散化决策和集中化决策中对零售价格的影响相似.



(a) 分散化决策



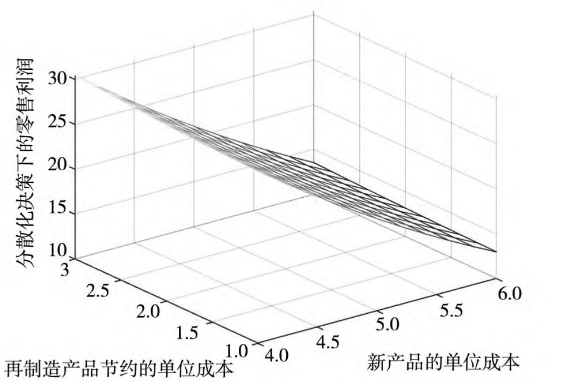
(b) 集中化决策

图 9 新产品和再制造品成本对零售价格的影响

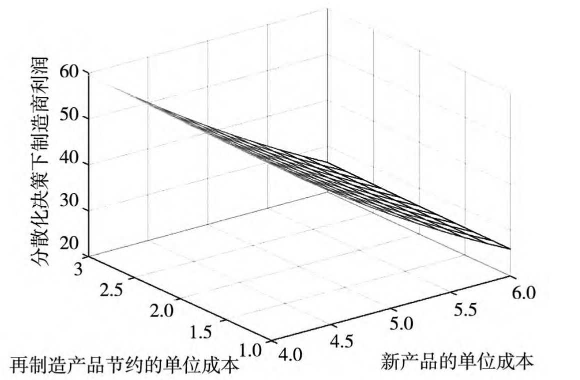
Fig. 9 Effect of new products and remanufactured products cost on retail price

由图 9 可知，当参数 c_m 上升且参数 Δ 降低时，零售价格将随之上涨. 这是因为参数 Δ 的减小表示再制造产品的单位成本与新产品单位成本的差距减小，也就是说再制造产品的单位成本上升，那么新产品和再制造产品的单位成本都上升时，必然导致零售价的提高. 由上图可知，新产品单位成本 c_m 对零售价格的影响较大，而再制造产品节约的单位成本 Δ 对零售价格的影响则是微乎其微，这说明降低新产品的单位成本比降低再制造产品单位成本具有更好的社会效益.

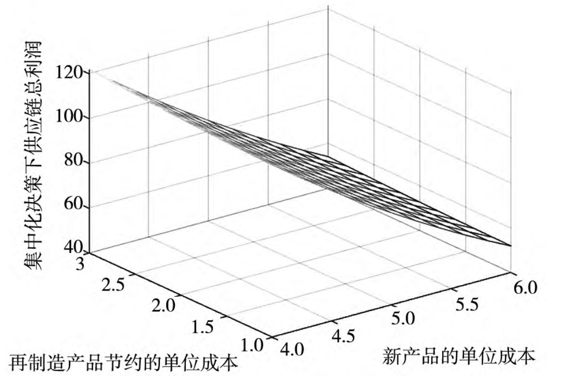
图 10 分析了新产品单位成本 c_m 和再制造产品节约的单位成本 Δ 对供应链利润和成员利润的影响. 图 10(a) 、图 10(b) 和图 10(c) 分别表示分散化决策下的零售商利润、分散化决策下的制造商利润和集中化决策下的供应链总利润，且三者呈现出相同的趋势.



(a) 分散化决策的零售商利润



(b) 分散化决策的制造商利润



(c) 集中化决策的总利润

图 10 新产品和再制造品成本对利润的影响

Fig. 10 Impact of new product and remanufactured product cost on profit

由图 10 可知，当参数 c_m 降低且参数 Δ 上升时，3 种情形的利润均将随之上涨. 且新产品单位成本 c_m 对 3 种情形利润的影响远大于再制造产品节约的单位成本 Δ 的影响，这说明降低新产品的单位成本比降低再制造产品单位成本对企业的盈利具有更重要的影响，具备制造新产品和再制造能力的制造商应该更加注重对新产品成本的控制，也可以从侧面印证了越来越多的制造业厂商不愿意从事再制造业务.

5　结束语

本文研究了由单一制造商和单一零售商组成的闭环供应链系统，该系统中的制造商负责制造新产品、回收废旧产品以及再制造，零售商负责销售产品并投放广告. 在运用 Stackelberg 博弈方法的基础上，构建了集中化决策模型和分散化决策模型，并对比分析了在稳定情形和广告效应扰动情形下闭环供应链的生产、回收以及广告投入决策，然后提出两部收费契约来协调分散化决策闭环供应链，并通过数值计算对研究结论的正确性进行了验证. 结果表明，集中化决策与分散化决策相比有更高的广告投入积极性、订货量和利润，由于集中化决策克服了双重边际效应，所以往往会具有更好的经济效益和社会效益; 其次，废旧产品的最优回收率与产品最优订货量具有一定的鲁棒性，广告投入努力程度则对广告扰动比较敏感; 产品批发价格、销售价格、广告投入努力程度以及制造商利润均与广告效应扰动正相关. 当处在较小的扰动范围时，分散化决策下的制造商作为主导者为了避免承担缺货成本或处理成本，会通过调整批发价格使零售商订货量保持稳定，而这个过程中会发生损害零售商利益使零售商利润出现递减的情形，此时制造商的利润会随广告效应的增大而逐渐升高; 在扰动强度相对较大情形时，零售商利润将随着广告效应扰动强度的递增而递增. 两部收费制契约能够很好地协调闭环供应链，零售商保留分散化决策中的利润，而制造商则可以获得协调后的超额利润; 制造商向零售商收取的通道费与广告效应扰动量负相关. 对参数灵敏度分析表明，回收率成本系数对零售价格和供应链利润的影响较小; 新产品单位成本和再制造品的单位成本对零售价格和利润都有影响，但再制造品单位成本大于零售价格和利润的影响远小于新产品的单位成本，这也说明了降低新产品成本具有更好的经济效益和社会效益.

本文还有很多需要改进的地方，比如在广告效应的扰动范围上有一定局限性，没有考虑负向的广告效益对供应链的影响; 没有对制造商和零售商的其他博弈关系进行研究; 没有考虑广告投入的信息不对称问题以及废旧品的多种回收渠道等问题，这些都可以作为后续深入研究的方向.

参 考 文 献:

[1] Savaskan R C, Bhattacharya S, Wassenhove L N V. Closed-loop supply chain models with product remanufacturing [J]. Management Science, 2004, 50(2): 239 – 252.

[2] Savaskan R C, Wassenhove L V. Reverse channel design: The case of competing retailers [J]. Management Science, 2006, 52(5): 1 – 14.

[3] Ferguson M E, Toktay L B. The effect of competition on recovery strategies [J]. Production & Operations Management, 2010, 15(3): 351 – 368.

[4] Shi T Q, Chhajed D, Wan Z X, et al. Distribution channel choice and divisional conflict in remanufacturing operations [J]. Production and Operations Management, 2020, 29(7): 1702 – 1719.

[5] Ullah M, Asghar I, Zahid M, et al. Ramification of remanufacturing in a sustainable three-echelon closed-loop supply chain management for returnable products [J]. Journal of Cleaner Production, 2021, 290: 125609.

[6] 夏西强，朱庆华. 外包再制造下再制造设计对制造/再制造影响 [J]. 管理科学学报，2019，22(9): 97 – 112.
Xia Xiqiang, Zhu Qinghua. Study on the effect of design for remanufacturing on manufacturing/remanufacturing competition

based on the outsourcing remanufacturing pattern [J]. Journal of Management Sciences in China, 2019, 22(9): 97 – 112. (in Chinese)

[7] 朱晓东，吴冰冰，王　哲. 双渠道回收成本差异下的闭环供应链定价策略与协调机制 [J]. 中国管理科学，2017，25(12): 188 – 196.
Zhu Xiaodong, Wu Bingbing, Wang Zhe. Closed-loop supply chain pricing strategy and coordination mechanism under the difference of dual-channel recycling cost [J]. Chinese Journal of Management Science, 2017, 25(12): 188 – 196. (in Chinese)

[8] 王文宾，达庆利. 零售商与第三方回收下闭环供应链回收与定价研究 [J]. 管理工程学报，2010，24(2): 130 – 134.
Wang Wenbin, Da Qingli. The study on collection and pricing for closed-loop supply chain with retailer and the third party collecting [J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2010, 24(2): 130 – 134. (in Chinese)

[9] 龚本刚，程晋石，程明宝，等. 考虑再制造的报废汽车回收拆解合作决策研究 [J]. 管理科学学报，2019，22(2): 77 – 91.
Gong Bengang, Cheng Jinshi, Cheng Mingbao, et al. Decision-makings for collection and dismantling of discarded automobiles considering remanufacturing [J]. Journal of Management Sciences in China, 2019, 22(2): 77 – 91. (in Chinese)

[10] Abbey J D, Geismar H N, Souza G C. Improving remanufacturing core recovery and profitability through seeding [J]. Production and Operations Management, 2019, 28(3): 610 – 627.

[11] 张福安，达庆利，公彦德. 考虑双向主导相异的闭环供应链物流策略与补贴机制研究 [J]. 中国管理科学，2016，24(10): 44 – 51
Zhang Fuan, Da Qingli, Gong Yande. Research on closed-loop supply chain logistics strategy and compensation mechanism considering two-way leading dissimilarity [J]. Chinese Journal of Management Science, 2016, 24(10): 44 – 51. (in Chinese)

[12] 姚锋敏，滕春贤. 公平关切下零售商主导的闭环供应链决策模型 [J]. 控制与决策，2017，32(1): 117 – 123.
Yao Fengmin, Teng Chunxian. Decision models of closed-loop supply chain with dominant retailer considering fairness concern [J]. Control and Decision, 2017, 32(1): 117 – 123. (in Chinese)

[13] 曹　柬，赵韵雯，吴思思，等. 考虑专利许可及政府规制的再制造博弈 [J]. 管理科学学报，2020，23(3): 1 – 23.
Cao Jian, Zhao Yunwen, Wu Sisi, et al. Remanufacturing game with patent protection and government regulation [J]. Journal of Management Sciences in China, 2020, 23(3): 1 – 23. (in Chinese)

[14] 缪朝炜，夏志强. 基于以旧换新的闭环供应链决策模型 [J]. 管理科学学报，2016，19(9): 49 – 66.
Miao Zhaowei, Xia Zhiqiang. Decision models for closed-loop supply chains with trade-ins [J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(9): 49 – 66. (in Chinese)

[15] 郑本荣，杨　超，刘　丛. 成本分摊对制造商回收闭环供应链的影响 [J]. 系统工程理论与实践，2017，37(9): 2344 – 2354.
Zheng Benrong, Yang Chao, Liu Cong. The effect of cost sharing on manufacturer collecting closed loop supply chain [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2017, 37(9): 2344 – 2354. (in Chinese)

[16] 黄　辉，杨冬辉，严　永，等. 公平偏好下考虑产品绿色度的闭环供应链定价决策 [J]. 工业工程与管理，2018，23(6): 162 – 172.
Huang Hui, Yang Donghui, Yan Yong, et al. Closed-loop supply chain pricing decision considering greenness of products under fairness preferenc [J]. Industrial Engineering and Management, 2018, 23(6): 162 – 172. (in Chinese)

[17] Vidale M L, Wolfe H B. An operations-research study of sales response to advertising [J]. Operations Research, 1957, 5(3): 370 – 381.

[18] Sethi S P. Deterministic andstochastic optimization of a dynamic advertising model [J]. Optimal Control Applications and Methods, 1983, 4(2): 179 – 184.

[19] 段永瑞，尹　佳. 基于巴斯模型的消费者推荐奖励和广告投入动态定价决策 [J]. 中国管理科学，2020，28(8): 65 – 75.

Duan Yongrui, Ying Jia. Optimal dynamic pricing of consumer referral reward and advertising investment based on Bass model [J]. Chinese Journal of Management Science, 2020, 28(8): 65 – 75. (in Chinese)

[20] He X, Prasad A, Sethi S P. Cooperative advertising and pricing in a dynamic stochastic supply chain: Feedback stackelberg strategies [J]. Production and Operations Management, 2009, 18(1): 78 – 94.

[21] 易余胤. 具广告效应的闭环供应链协调性能研究 [J]. 中国管理科学, 2013, 21(2): 76 – 83.

Yi Yuying. Coordination performance of closed-loop supply chain with advertising effect [J]. Chinese Journal of Management Science, 2013, 21(2): 76 – 83. (in Chinese)

[22] 冯　健, 刘　斌. 考虑长效作用的竞争供应链合作广告决策分析 [J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(1): 126 – 140.

Feng Jian, Liu Bin. Decision analysis of cooperative advertising in competitive supply chain considering long term effects [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2019, 39(1): 126 – 140. (in Chinese)

[23] Zhao H. Raising awareness and signaling quality to uninformed consumers: A price-advertising model [J]. Marketing Science, 2000, 19(4): 390 – 396.

[24] 曲　优, 关志民, 叶　同, 等. 基于混合 CVaR 的供应链绿色研发 – 广告决策与协调机制研究 [J]. 中国管理科学, 2018, 26(10): 89 – 101.

Qu You, Guan Zhimin, Ye Tong, et al. Supply chain coordination for green innovation-advertisement decisions based on mixture CVaR criterion [J]. Chinese Journal of Management Science, 2018, 26(10): 89 – 101. (in Chinese)

[25] 汪旭晖, 杜　航. 基于联合广告投入的闭环供应链博弈策略 [J]. 系统工程, 2017, 35(5): 133 – 139.

Wang Xuhui, Du Hang. Closed-loop supply chain of game strategy with jointed advertising investment [J]. Systems Engineering, 2017, 35(5): 133 – 139. (in Chinese)

[26] 李　琰, 林欣怡, 达庆利. 基于再制造的多周期闭环营销投入及定价策略 [J]. 中国管理科学, 2018, 26(8): 67 – 74.

Li Yan, Lin Xinyi, Da Qingli. Multi-period closed-loop marketing & pricing strategy withremanufacturing [J]. Chinese Journal of Management Science, 2018, 26(8): 67 – 74. (in Chinese)

[27] Hong X P, Zhang H G, Qin Zhong, et al. Optimal decisions of a hybrid manufacturing-remanufacturing system within a closed-loop supply chain [J]. European Journal of Industrial Engineering. 2016, 10(1): 21 – 50.

[28] 赵黎明, 陈喆芝. 考虑消费偏好的旅游供应链纵向合作广告 [J]. 系统管理学报. 2018, 27(4): 753 – 760.

Zhao Liming, Chen Zhezhi. Vertical cooperative advertising in a tourism supply chain considering consuming preference [J]. Journal of Systems & Management, 2018, 27(4): 753 – 760. (in Chinese)

[29] 李　波, 侯棚文, 李庆华. 考虑供应链成员公平关切的双渠道供应链合作广告策略 [J]. 系统管理学报, 2017, 26(3): 562 – 568.

Li Bo, Hou Pengwen, Li Qinghua. Cooperative advertising strategy in a dual channel supply chain with members´fairness concern [J]. Journal of Systems & Management, 2017, 26(3): 562 – 568. (in Chinese)

[30] Clausen J, Hansen J, Larsen J. Disruption management [J]. OR/MS Today, 2001, 28(5): 40 – 43.

[31] Qi X, Bard J F, Yu G. Supply chain coordination with demand disruptions [J]. Omega, 2004, 32(4): 301 – 312.

[32] 陈中洁, 于　辉. 需求扰动下供应链反向保理的鲁棒决策 [J]. 中国管理科学, 2020, 28(7): 89 – 101.

Chen Zhongjie, Yu Hui. Robust decision making of reverse factoring in supply chain under demand disturbance [J]. Chinese Journal of Management Science, 2020, 28(7): 89 – 101. (in Chinese)

[33] 赵　琳, 牟宗玉. 需求扰动下生产规模不经济闭环供应链的应急渠道决策 [J]. 中国管理科学, 2019, 27(7): 68 – 82.

Zhao Lin, Mu Zongyu. Emergency channel decision of closed loop supply chain with diseconomic production scale under demand disturbance [J]. Chinese Journal of Management Science, 2019, 27(7): 68 – 82. (in Chinese)

[34] 牟宗玉, 刘晓冰, 李新然, 等. 生产成本扰动下差别定价闭环供应链的应对策略及协调 [J]. 计算机集成制造系统, 2015, 21(1): 256 – 265.

Mu Zongyu, Liu Xiaobing, Li Xinran, et al. Dealing strategies and coordination of closed-loop supply chain with differential price under production cost disruptions [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2015, 21(1): 256 – 265. (in Chinese)

[35] Xiao T J, Qi X. Price competition, cost and demand disruptions and coordination of a supply chain with one manufacturer and two competing retailers [J]. Omega, 2008, 36(5): 741 – 753.

[36] Huang S, Yang C, Liu H. Pricing and production decisions in a dual-channel supply chain when production costs are disrupted [J]. Economic Modelling, 2013, 30(1): 521 – 538.

[37] **于艳娜，滕春贤. 双渠道信息产品供应链需求扰动研究 [J]. 系统工程理论与实践**，2017，37(9)：2355 – 2365.
Yu Yanna, Teng Chunxian. The study in dual-channel supply chain of information goods with demand disruption [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2017, 37(9): 2355 – 2365. (in Chinese)

[38] **霍良安，蒋杰辉，赵玉苹，等. 突发事件下回馈与惩罚契约协调的风险厌恶闭环供应链研究 [J]. 计算机应用研究**，2017，34(1)：31 – 35.
Huo Liangan, Jiang Jiehui, Zhao Yuping, et al. Risk averse closed-loop supply chain coordination mechanism with rebate and penalty contracts under emergency events [J]. Application Research of Computers, 2017, 34(1): 31 – 35. (in Chinese)

[39] **肖人彬，余睿武. 成本扰动与广告协同下的供应链协调 [J]. 计算机集成制造系统**，2011，17(10)：2248 – 2255.
Xiao Renbin, Yu Ruiwu. Supply chain coordination under cost disruption and advertising synergy [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2011, 17(10): 2248 – 2255. (in Chinese)

[40] **李新然，何　琦，吴义彪，等. 需求扰动下分散式决策闭环供应链的应急决策 [J]. 中国管理科学**，2015，23(S1)：581 – 589.
Li Xinran, He Qi, Wu Yibiao, et al. Emergency decisions of decentralized decisiond under demend disruptions [J]. Chinese Journal of Management Science, 2015, 23(S1): 581 – 589. (in Chinese)

[41] **何　波，张　霞，王　娟. 制造成本扰动下链与链竞争的定价和生产决策 [J]. 计算机集成制造系统**，2015，21(12)：3310 – 3318.
He Bo, Zhang Xia, Wang Juan. Pricing and production decisions in chain-to-chain competition under production costs disruption [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2015, 21(12): 3310 – 3318. (in Chinese)

[42] **张学龙，覃滢樾，王军进，等. 考虑价格和服务水平竞争的垂直双渠道供应链决策模型 [J]. 控制与决策**，2018，33(4)：687 – 697.
Zhang Xuelong, Qin Yingyue, Wang Junjin, et al. Decision model of vertical dual-channel supply chain considering price and service level competition [J]. Control and Decision, 2018, 33(4): 687 – 697. (in Chinese)

Closed – loop supply chain emergency and coordination decisions under advertising effect disturbance

CAO Xiao-gang[1,4], *WU Hui*[2], *WEN Hui*[3*]

1. School of Management, Wuhan Textile University, Wuhan 430073, China;
2. School of Management, Guangdong University of Science and Technology, Dongguan 523083, China;
3. School of Science, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China;
4. The Key Research Base of Humanities and Social Sciences in Colleges and Universities in Hubei Province: Enterprise Decision Support Research Center, Wuhan 430073, China

Abstract: This paper constructs a closed-loop supply chain model with advertising effect, which is composed of a manufacturer who is the dominant player of Stackelberg game and a retailer who is the follower. The emergency problem of closed-loop supply chain with centralized and decentralized decision-making under the influence of unexpected events on advertising effect is studied, and a two-part tariff contract is proposed to coordinate the disturbed closed-loop supply chain. The results show that under the disturbance of advertising effect, the order quantity and the recovery rate of used products have a certain robustness; that is, the order volume and the recovery rate of used products remain unchanged in a certain range of disturbances. When the disturbance amount exceeds a certain threshold, the order quantity and the recovery rate will be adjusted according to the disturbance. At the same time, when the disturbance amount of advertising effect is positive, the retail price of product and the degree of effort of advertising investment all show an increasing trend on the disturbance quantity of advertising effect, when the disturbance amount of advertising effect is negative, the retail price of product is increased. The degree of effort of advertising investment shows a decreasing trend on the disturbance quantity of advertising effect; the wholesale price of products is sensitive only when the disturbance amplitude of advertising effect is relatively small, and it is basically stable when the disturbance amplitude of advertising effect is relatively large.

Key words: closed-loop supply chain; advertising effect disturbance; Stackelberg game; emergency decision; coordination

附录

结论1的证明

式(1)中的 Π_{sc}^{C} 对 g,p,τ 的海塞矩阵为 $\begin{bmatrix} -2 & \beta & \Delta\beta \\ \beta & -2\gamma & -\Delta\gamma \\ \Delta\beta & -\Delta\gamma & -2h \end{bmatrix}$，其二阶主子式为 $4\gamma-\beta^2$，三阶主子式为 $2h(\beta^2-4\gamma)+2\Delta^2\gamma^2$，根据已有假设 $h>\dfrac{\Delta^2\gamma^2}{4\gamma-\beta^2}$，可知该海塞矩阵负定，故 Π_{sc}^{C} 有最优值. 联立 $\dfrac{\partial\Pi_{sc}^{C}}{\partial g}=0$，$\dfrac{\partial\Pi_{sc}^{C}}{\partial p}=0$，$\dfrac{\partial\Pi_{sc}^{C}}{\partial\tau}=0$，求得

$$g^{C*}=\frac{h\beta(-\alpha+\gamma c_m)}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2},\ p^{C*}=\frac{-2h\alpha+\alpha\gamma\Delta^2+h(\beta^2-2\gamma)c_m}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2},\ \tau^{C*}=\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma c_m)}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2}$$

将以上 g、p、τ 代入 Π_{sc}^{C}，求得订货量和闭环供应链利润的最优解分别为

$$q^{C*}=\frac{2h\gamma(-\alpha+\gamma c_m)}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2},\ \Pi_{sc}^{C*}=\frac{h(\alpha-\gamma c_m)^2}{h(4\gamma-\beta^2)-\gamma^2\Delta^2}$$

命题1的证明

根据结论1的结果可知在稳定情形下有 $q^{C*}=\dfrac{2h\gamma(-\alpha+\gamma c_m)}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2}$，$q^{C*}$ 关于 β 的偏导为 $\dfrac{\partial q^{C*}}{\partial\beta}=\dfrac{4h^2\beta\gamma(\alpha-\gamma c_m)}{(h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2)^2}>0$，故 q^{C*} 是 β 的增函数，即 β 增大时 q^{C*} 随着增大，β 减小时 q^{C*} 随着减小.

当广告效应发生正向扰动，即 $\delta>0$ 时，可能存在以下3种情形：1) $\tilde{q}^{C}>q^{C*}$；2) $\tilde{q}^{C}=q^{C*}$；3) $\tilde{q}^{C}<q^{C*}$. 分析对比这3种情形下的最优利润，即可知供应链会采取怎样的生产策略.

在情形1)时，供应链的利润函数为

$$\tilde{\Pi}_{sc}^{C}(\tilde{g},\tilde{p},\tilde{\tau})=\tilde{q}(\tilde{p}-c_m+\tilde{\tau}\Delta)-h\tilde{\tau}^2-\tilde{g}^2-\mu_1(\tilde{q}-q^{C*})^+$$
$$\text{s.t.}\ \tilde{q}\geqslant q^{C*}$$

命题2的证明

$$\tilde{\Pi}_{sc}^{C}(\tilde{g},\tilde{p},\tilde{\tau})=\tilde{q}(\tilde{p}-c_m+\tilde{\tau}\Delta)-h\tilde{\tau}^2-\tilde{g}^2-\mu_1(\tilde{q}-q^{C*}) \quad (A1)$$
$$\text{s.t.}\ \tilde{q}\geqslant q^{C*}$$

引入拉格朗日乘子 $\lambda \geqslant 0$，得到 KKT 条件

$$\frac{\partial\left[\Pi_{sc}^{C}+\lambda(\tilde{q}-q^{C*})\right]}{\partial \tilde{g}}=0,\quad \frac{\partial\left[\Pi_{sc}^{C}+\lambda(\tilde{q}-q^{C*})\right]}{\partial \tilde{p}}=0,\quad \frac{\partial\left[\Pi_{sc}^{C}+\lambda(\tilde{q}-q^{C*})\right]}{\partial \tilde{\tau}}=0,$$

$$\lambda(\tilde{q}-q^{C*})=0;\ \tilde{q}-q^{C*}\geqslant 0;\ \lambda\geqslant 0$$

以下将分别对 $\lambda > 0$、$\lambda = 0$ 进行讨论.

情形 1　当 $\lambda > 0$ 时，那么有 $\tilde{q}_{case1} = q^{C*}$，则联立方程可求出广告投入努力程度 $\tilde{g}$ 关于零售价格 $\tilde{p}$ 的函数为 $\tilde{g}(\tilde{p}) = \frac{-h\alpha(\beta^2-2\gamma)+h\tilde{p}(\beta^2-4\gamma)\gamma+\gamma^2(-\alpha+\tilde{p}\gamma)\Delta^2+2h\gamma^2 c_m}{(\beta+\delta)(h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2)}$. 联立 $\frac{\partial\left[\Pi_{sc}^{C}+\lambda(\tilde{q}-q^{C*})\right]}{\partial \tilde{p}}=0$，$\frac{\partial\left[\Pi_{sc}^{C}+\lambda(\tilde{q}-q^{C*})\right]}{\partial \tilde{\tau}}=0$. 求得

$$\tilde{p}_{case1}=\frac{-h\alpha(2\gamma+2\beta\delta+\delta^2)+\alpha\gamma^2\Delta^2+h\gamma(-2\gamma+(\beta+\delta)^2)c_m}{h(\beta^2-4\gamma)\gamma+\gamma^3\Delta^2},\quad \tilde{g}_{case1}=\frac{h(\beta+\delta)(-\alpha+\gamma c_m)}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2},$$

$$\tilde{\tau}_{case1}=\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma c_m)}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2}$$

情形 2　当 $\lambda = 0$ 时，则有 $\tilde{q}_{case2}-q^{C*}\geqslant 0$. 联立 $\frac{\partial\left[\Pi_{sc}^{C}+\lambda(\tilde{q}-q^{C*})\right]}{\partial \tilde{g}}=0$，$\frac{\partial\left[\Pi_{sc}^{C}+\lambda(\tilde{q}-q^{C*})\right]}{\partial \tilde{p}}=0$，$\frac{\partial\left[\Pi_{sc}^{C}+\lambda(\tilde{q}-q^{C*})\right]}{\partial \tilde{\tau}}=0$. 求得

$$\tilde{p}_{case2}=\frac{-2h\alpha+h(-2\gamma+(\beta+\delta)^2)\mu_1+\alpha\gamma\Delta^2+h(-2\gamma+(\beta+\delta)^2)c_m}{h(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\gamma^2\Delta^2},\quad \tilde{g}_{case2}=\frac{h(\beta+\delta)(-\alpha+\gamma\mu_1+\gamma c_m)}{h(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\gamma^2\Delta^2},$$

$$\tilde{\tau}_{case2}=\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma\mu_1+\gamma c_m)}{h(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\gamma^2\Delta^2},\quad \tilde{q}_{case2}=\frac{2h\gamma(\alpha-\gamma\mu_1-\gamma c_m)}{4h\gamma-h(\beta+\delta)^2-\gamma^2\Delta^2}$$

由约束条件 $\tilde{q}_{case2}\geqslant q^{C*}$，可求得 $\delta\geqslant\sqrt{\beta^2+\frac{\mu_1\gamma}{\alpha-\gamma c_m}\left(4\gamma-\beta^2-\frac{\gamma^2\Delta^2}{h}\right)}-\beta$.

同理，当 $\delta < 0$ 时，扰动后的订货量小于稳定情形下的订货量，此时闭环供应链的利润函数为

$$\widetilde{\Pi}_{sc}^{C}(\tilde{g},\tilde{p},\tilde{\tau})=\tilde{q}(\tilde{p}-c_m+\tilde{\tau}\Delta)-h\tilde{\tau}^2-\tilde{g}^2-\mu_2(q^{C*}-\tilde{q}) \tag{A2}$$

$$\text{s.t.}\ q^{C*}\geqslant\tilde{q}$$

同样地，引入拉格朗日乘子 $\lambda\geqslant 0$，并分为 $\lambda > 0$ 和 $\lambda = 0$ 两种情形进行讨论.

情形 3　$\lambda > 0$ 时，有 $q^{C*}=\tilde{q}$. 求得

$$\tilde{p}_{case3}=\frac{-h\alpha(2\gamma+2\beta\delta+\delta^2)+\alpha\gamma^2\Delta^2+h\gamma(-2\gamma+(\beta+\delta)^2)c_m}{h(\beta^2-4\gamma)\gamma+\gamma^3\Delta^2},\quad \tilde{g}_{case3}=\frac{h(\beta+\delta)(-\alpha+\gamma c_m)}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2},$$

$$\tilde{\tau}_{case3}=\frac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma c_m)}{h(\beta^2-4\gamma)+\gamma^2\Delta^2}$$

情形 4　$\lambda = 0$ 时，有 $q^{C*}\geqslant\tilde{q}$. 求得

$$\tilde{p}_{case4}=\frac{-2h\alpha-h(-2\gamma+(\beta+\delta)^2)\mu_2+\alpha\gamma\Delta^2+h(-2\gamma+(\beta+\delta)^2)c_m}{h(-4\gamma+(\beta+\delta)^2)+\gamma^2\Delta^2},\quad \tilde{g}_{case4}=\frac{h(\beta+\delta)(\alpha+\gamma\mu_2-\gamma c_m)}{h(4\gamma-(\beta+\delta)^2)-\gamma^2\Delta^2},$$

$$\tilde{\tau}_{case4}=\frac{\gamma\Delta(\alpha+\gamma\mu_2-\gamma c_m)}{h(4\gamma-(\beta+\delta)^2)-\gamma^2\Delta^2},\quad \tilde{q}_{case4}=\frac{2h\gamma(\alpha+\gamma\mu_2-\gamma c_m)}{4h\gamma-h(\beta+\delta)^2-\gamma^2\Delta^2}$$

由 $q^{C*}\geqslant\tilde{q}$，可求得 $-\beta\leqslant\delta\leqslant\sqrt{\beta^2-\frac{\mu_2\gamma}{\alpha-\gamma c_m}\left(4\gamma-\beta^2-\frac{\gamma^2\Delta^2}{h}\right)}-\beta$.

结论 2 的证明

对式(4)中的 $\Pi_r^D(g,p)$ 分别求关于 g,p 的一阶偏导，联立 $\frac{\partial\Pi_r^D}{\partial g}=0$，$\frac{\partial\Pi_m^D}{\partial p}=0$，可得零售商关于 ω 的最优广告投入努力程度和最优零售价格分别为

$g(\omega) = \dfrac{-\alpha\beta + \beta\gamma\omega}{\beta^2 - 4\gamma}$，$p(\omega) = \dfrac{-2\alpha + (\beta^2 - 2\gamma)\omega}{\beta^2 - 4\gamma}$

将 $g(\omega)$、$p(\omega)$ 代入式(5) 中的 $\Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}(\omega,\tau)$，则制造商的最优决策问题化为

$$\Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}(\omega,\tau) = (\omega - c_{\mathrm{m}} + \Delta\tau)\left(\alpha + \frac{2\omega\gamma^2 - \beta^2\alpha + 2\alpha\gamma}{\beta^2 - 4\gamma}\right) - h\tau^2 \tag{A3}$$

令 $A' = \dfrac{\partial^2 \Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}}{\partial\omega^2} = -\dfrac{4\gamma^2}{4\gamma - \beta^2}$，$B' = \dfrac{\partial^2 \Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}}{\partial\omega\partial\tau} = -\dfrac{2\gamma^2\Delta}{4\gamma - \beta^2}$，$C' = \dfrac{\partial^2 \Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}}{\partial\tau^2} = -2h$，因为 $A' < 0$，$A'C' - B'^2 > 0$ 时，在模型假设中已假设 $h > \dfrac{\gamma^2\Delta^2}{4\gamma - \beta^2}$，故可得海塞矩阵负定，即 $\Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}(\omega,\tau)$ 有最优解. 对式(A3) 中的 $\Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}(\omega,\tau)$ 对 ω,τ 求导，并令 $\dfrac{\partial\Pi_{\mathrm{r}}^{\mathrm{D}}}{\partial\omega} = 0$，$\dfrac{\partial\Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}}{\partial\tau} = 0$，可求得制造商的最优批发价格 ω 和最优回收率 τ 决策分别为

$$\tau^{\mathrm{D}*} = \frac{\gamma\Delta(-\alpha + \gamma c_{\mathrm{m}})}{2h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2}，\omega^{\mathrm{D}*} = \frac{h\alpha(\beta^2 - 4\gamma) + \alpha\gamma^2\Delta^2 + h(\beta^2 - 4\gamma)\gamma c_{\mathrm{m}}}{2h(\beta^2 - 4\gamma)\gamma + \gamma^3\Delta^2}$$

已知 $\tau^{\mathrm{D}*}$、$\omega^{\mathrm{D}*}$ 的情况下，易求出最优产量、制造商和零售商的最优利润以及供应链的总利润

$$q^{\mathrm{D}*} = \frac{2h\gamma(-\alpha + \gamma c_{\mathrm{m}})}{2h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2}，\Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}*} = \frac{h(\alpha - \gamma c_{\mathrm{m}})^2}{2h(4\gamma - \beta^2) - \gamma^2\Delta^2}，\Pi_{\mathrm{r}}^{\mathrm{D}*} = \frac{h^2(4\gamma - \beta^2)(\alpha - \gamma c_{\mathrm{m}})^2}{(2h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2)^2}；$$

$$\Pi_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{D}*} = \Pi_{\mathrm{r}}^{\mathrm{D}} + \Pi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}} = \frac{h(3h(4\gamma - \beta^2) - \gamma^2\Delta^2)(\alpha - \gamma c_{\mathrm{m}})^2}{(2h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2)^2}$$

结论 3 的证明

由于假设制造商作为 Stackelberg 博弈的领导者，利用逆向归纳法求解，通过对式(6) 求 $\tilde{g}$、$\tilde{p}$ 的一阶偏导，并令其偏导为零可得到

$$\tilde{g}(\tilde{\omega}) = \frac{(\beta + \delta)(-\alpha + \gamma\tilde{\omega})}{-4\gamma + (\beta + \delta)^2}，\tilde{p}(\tilde{\omega}) = \frac{-2\alpha + (-2\gamma + (\beta + \delta)^2)\tilde{\omega}}{-4\gamma + (\beta + \delta)^2}$$

将 $\tilde{g}(\tilde{\omega})$、$\tilde{p}(\tilde{\omega})$ 代入 $\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}(\tilde{\omega},\tilde{\tau})$，制造商的最优决策问题可化为

$$\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}(\tilde{\omega},\tilde{\tau}) = \left(\alpha + \frac{(\beta + \delta)^2(-\alpha + \gamma\tilde{\omega})}{-4\gamma + (\beta + \delta)^2} - \gamma\frac{-2\alpha + (-2\gamma + (\beta + \delta)^2)\tilde{\omega}}{-4\gamma + (\beta + \delta)^2}\right)(\tilde{\omega} - c_{\mathrm{m}} + \Delta\tilde{\tau} - \mu_1) - h\tilde{\tau}^2 + \mu_1 q^{\mathrm{D}*}$$

$$\text{s.t. } \tilde{q} \geqslant q^*$$

易求得 $D' = \dfrac{\partial^2\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}}{\partial\tilde{\omega}^2} = -\dfrac{4\gamma^2}{4\gamma - (\beta + \delta)^2}$，$E' = \dfrac{\partial^2\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}}{\partial\tilde{\omega}\partial\tilde{\tau}} = \dfrac{2\gamma^2\Delta}{-4\gamma + (\beta + \delta)^2}$，$F' = \dfrac{\partial^2\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}}{\partial\tilde{\tau}^2} = -2h$. 因为 $D' < 0$，$D'F' - E'^2 = \dfrac{4\gamma^2(2h(4\gamma - (\beta + \delta)^2) - \gamma^2\Delta^2)}{(-4\gamma + (\beta + \delta)^2)^2} > 0$，所以 $\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}(\tilde{\omega},\tilde{\tau})$ 的 Hessian 矩阵负定，故存在最优解.

通过引入拉格朗日乘子 $\lambda \geqslant 0$ 的方法放松约束条件式 $\tilde{q} \geqslant q^*$，得到 KKT 条件 $\begin{cases} \dfrac{\partial\left[\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}} + \lambda(\tilde{q} - q^*)\right]}{\partial\tilde{\omega}} = 0 \\ \lambda(\tilde{q} - q^*) = 0 \\ \lambda \geqslant 0, \tilde{\omega} \geqslant 0 \end{cases}$，Savaskan[1] 也运用了类似的处理方法.

求解该 KKT 条件，分为以下两种情形: 当 $\lambda > 0$ 时，有 $\tilde{q}_{\mathrm{case5}} = q^{\mathrm{D}*}$；当 $\lambda = 0$ 时，有 $\tilde{q}_{\mathrm{case6}} \geqslant q^{\mathrm{D}*}$.

当 $\lambda > 0$ 时，有 $\tilde{q}_{\mathrm{case5}} = q^{\mathrm{D}*}$，即 $\alpha + \dfrac{(\beta + \delta)^2(-\alpha + \gamma\tilde{\omega})}{-4\gamma + (\beta + \delta)^2} - \gamma\dfrac{-2\alpha + (-2\gamma + (\beta + \delta)^2)\tilde{\omega}}{-4\gamma + (\beta + \delta)^2} = \dfrac{2h\gamma(\alpha - \gamma c_{\mathrm{m}})}{2h(4\gamma - \beta^2) - \gamma^2\Delta^2}$，此时制造商批发价、利润分别为

$$\tilde{\omega}_{\mathrm{case5}} = \frac{h\alpha(\beta^2 - 4\gamma - 2\beta\delta - \delta^2) + ch\gamma(-4\gamma + (\beta + \delta)^2) + \alpha\gamma^2\Delta^2}{2h(\beta^2 - 4\gamma)\gamma + \gamma^3\Delta^2}，$$

$$\tilde{\Pi}_{\mathrm{m,case5}}^{\mathrm{D}} = \frac{h}{(2h(\beta^2 - 4\gamma) + \gamma^2\Delta^2)^2}\{2h((\alpha - c\gamma)^2(-\beta^2 + 4\gamma + 2\beta\delta + \delta^2) - 2h(\beta^2 - 4\gamma)^2\tau^2) + 4h(\beta^2 - 4\gamma)\gamma \times$$

$$(-\alpha+c_{\mathrm{m}}\gamma)\tau\Delta-2\gamma^{2}((\alpha-c\gamma)^{2}+2h(\beta^{2}-4\gamma)\tau^{2})\Delta^{2}+2\gamma^{3}(-\alpha+c_{\mathrm{m}}\gamma)\tau\Delta^{3}-\gamma^{4}\tau^{2}\Delta^{4}\}$$

相应地，对 $\widetilde{\Pi}_{\mathrm{m,case5}}^{\mathrm{D}}$ 求 $\tilde{\tau}$ 的一阶偏导，令其等于零. 可求得 $\tilde{\tau}_{\mathrm{case5}}=\dfrac{\gamma\Delta(-\alpha+\gamma c_{\mathrm{m}})}{2h(\beta^{2}-4\gamma)+\gamma^{2}\Delta^{2}}$，与稳定情形下的最优回收率 $\tau^{\mathrm{D}*}$ 相等.

当 $\lambda=0$ 时，有 $\tilde{q}_{\mathrm{case6}}\geqslant q^{\mathrm{D}*}$. 联立 $\dfrac{\partial[\widetilde{\Pi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}+\lambda(\tilde{q}-q^{*})]}{\partial\tilde{\omega}}=0$，$\dfrac{\partial[\widetilde{\Pi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{D}}+\lambda(\tilde{q}-q^{*})]}{\partial\tilde{\tau}}=0$，可得出最优批发价 $\tilde{\omega}_{\mathrm{case6}}$ 和最优回收率 $\tilde{\tau}_{\mathrm{case6}}$ 为

$$\tilde{\omega}_{\mathrm{case6}}=\frac{\alpha+\gamma(c_{\mathrm{m}}+\mu_{1})}{2\gamma}+\frac{\gamma\Delta^{2}(\alpha-\gamma(c_{\mathrm{m}}+\mu_{1}))}{4h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+\gamma^{2}\Delta^{2}},$$

$$\tilde{\tau}_{\mathrm{case6}}=\frac{\gamma(-\alpha+\gamma(c_{\mathrm{m}}+\mu_{1}))\Delta}{2h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+\gamma^{2}\Delta^{2}}$$

此时易求得需求量 $\tilde{q}_{\mathrm{case6}}=\dfrac{2h\gamma(\alpha-\gamma(c_{\mathrm{m}}+\mu_{1}))}{8h\gamma-2h(\beta+\delta)^{2}-\gamma^{2}\Delta^{2}}$.

与上文求解方法类似. 运用逆向归纳法求解的时候，明确了零售商的广告投入努力程度和零售价决策是关于批发价的函数，可求得最优广告投入努力程度和零售价决策为

$$\tilde{g}_{\mathrm{case6}}=\frac{(\beta+\delta)h(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})}{2h(4\gamma-\beta^{2})-\gamma^{2}\Delta^{2}},\ \tilde{p}_{\mathrm{case6}}=\frac{h\alpha(\beta^{2}-6\gamma-2\beta\delta-\delta^{2})+\alpha\gamma^{2}\Delta^{2}+h\gamma(-2\gamma+(\beta+\delta)^{2})c_{\mathrm{m}}}{2h(\beta^{2}-4\gamma)\gamma+\gamma^{3}\Delta^{2}}$$

根据约束条件 $\tilde{q}\geqslant q^{*}$，即 $\tilde{q}_{\mathrm{case6}}\geqslant q^{\mathrm{D}*}$，即求得 $(\beta+\delta)^{2}\geqslant\beta^{2}+\dfrac{\mu_{1}\gamma}{\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}}}\left(4\gamma-\beta^{2}-\dfrac{\gamma^{2}\Delta^{2}}{2h}\right)$，本节讨论的是在 $\delta>0$ 的前提下，故 $\delta\geqslant\sqrt{\beta^{2}+\dfrac{\mu_{1}\gamma}{\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}}}\left(4\gamma-\beta^{2}-\dfrac{\gamma^{2}\Delta^{2}}{2h}\right)}-\beta$.

命题 4 的证明

以下证明命题 3 中 $\tilde{\omega}$ 关于 δ 的单调性. 当广告效应扰动量的范围为

$$-\beta\leqslant\delta<\sqrt{\beta^{2}-\frac{\gamma\mu_{2}}{(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})}\left(4\gamma-\beta^{2}-\frac{\gamma^{2}\Delta^{2}}{2h}\right)}-\beta$$

这时，$\tilde{\omega}=\dfrac{\alpha+\gamma(c_{\mathrm{m}}-\mu_{2})}{2\gamma}+\dfrac{\gamma\Delta^{2}(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}}+\gamma\mu_{2})}{4h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+2\gamma^{2}\Delta^{2}}$，对 δ 的偏导为 $\dfrac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\delta}=-\dfrac{2h\gamma(\beta+\delta)(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}}+\gamma\mu_{2})\Delta^{2}}{(2h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+\gamma^{2}\Delta^{2})^{2}}<0$，故此时批发价格是关于扰动量 δ 的减函数；当

$$\sqrt{\beta^{2}-\frac{\gamma\mu_{2}}{(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})}\left(4\gamma-\beta^{2}-\frac{\gamma^{2}\Delta^{2}}{2h}\right)}-\beta\leqslant\delta<\sqrt{\beta^{2}-\frac{\gamma\mu_{1}}{(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})}\left(4\gamma-\beta^{2}-\frac{\gamma^{2}\Delta^{2}}{2h}\right)}-\beta$$

这时，最优的批发价格为 $\tilde{\omega}=\dfrac{h\alpha(\beta^{2}-4\gamma-2\beta\delta-\delta^{2})+\alpha\gamma^{2}\Delta^{2}+h\gamma(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})c_{\mathrm{m}}}{2h(\beta^{2}-4\gamma)\gamma+\gamma^{3}\Delta^{2}}$，提取出包含 δ 的系数为 $\dfrac{(\alpha-c_{\mathrm{m}}\gamma)h(\delta^{2}+2\beta\delta)}{2h(\beta^{2}-4\gamma)\gamma+\gamma^{3}\Delta^{2}}$，易得出批发价格 $\tilde{\omega}$ 在

$$\sqrt{\beta^{2}-\frac{\gamma\mu_{2}}{(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})}\left(4\gamma-\beta^{2}-\frac{\gamma^{2}\Delta^{2}}{2h}\right)}-\beta\leqslant\delta<\sqrt{\beta^{2}-\frac{\gamma\mu_{1}}{(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})}\left(4\gamma-\beta^{2}-\frac{\gamma^{2}\Delta^{2}}{2h}\right)}-\beta$$

时，是关于 δ 的增函数；当 $\delta\geqslant\sqrt{\beta^{2}-\dfrac{\gamma\mu_{1}}{(\alpha-\gamma c_{\mathrm{m}})}\left(4\gamma-\beta^{2}-\dfrac{\gamma^{2}\Delta^{2}}{2h}\right)}-\beta$ 时，有最优批发价格

$$\tilde{\omega}=\frac{\alpha+\gamma(c_{\mathrm{m}}+\mu_{1})}{2\gamma}+\frac{\gamma^{2}\Delta^{2}(\alpha-\gamma(c_{\mathrm{m}}+\mu_{1}))}{4\gamma h(-4\gamma+(\beta+\delta)^{2})+\gamma^{3}\Delta^{2}}$$

易得出这时 $\dfrac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\delta}<0$，批发价格 $\tilde{\omega}$ 是关于 δ 的减函数. 与上面的证明过程类似，易证明最优零售价格、广告投入努力程度以及制造商利润是关于广告效应的增函数.