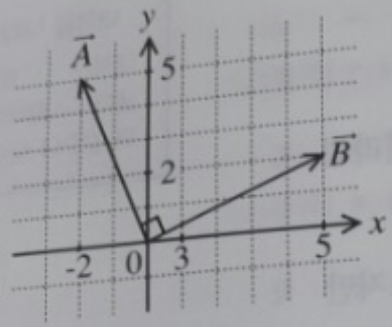
"0이 안 되네. 그럼 $\vec{A}$와 $\vec{B}$가 직각이라면 0이 되려나?"



$$\vec{A} = (-2, 5)$$
$$\vec{B} = (5, 2)$$
$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (-2) \times 5 + 5 \times 2 \\ &= -10 + 10 \\ &= 0\end{aligned}$$

좋았어! 직각으로 교차한 2개의 벡터라면 0이 된다!

"두 벡터가 직각으로 교차했을 때는 내적이 언제나 0이 되는군."

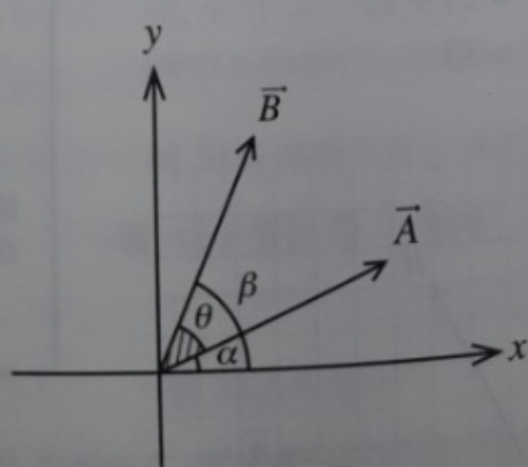
"하지만 어째서 0이 되는 거죠?"

"그럼, 이번엔 그 이유를 조사해볼까?"

"엥! 그게 가능해요?"

"물론, 이래봬도 난 수학자니까. 우선 두 개의 벡터와 그 사이의 각도 θ에 대해 생각해보세나."

선생님이 그렇게 말하자 공중에 떠 있던 화살표 2개가 예의 바르게 줄을 섰다.



"그럼 여기에서 $\vec{A}$와 $\vec{B}$ 사이의 각도를 θ, $\vec{A}$와 x축 사이의 각도를 α, $\vec{B}$와 x축 사이의 각도를 β라 하지. 그리고 cos의 덧셈정리를 쓸 거네."

"네? 덧셈정리라니, sin을 미분할 때 썼던 거 말예요? 선생님, 왜 여기서 덧셈정리 따위를 쓰는 겁니까?"

"글쎄, 수학자의 직감이라 해 두지. 수학 문제를 풀 때는 언제나 이 직감이란 놈이 승패를 좌우하거든."

"허어!"

수학이란 이론으로만 만들어진 줄 알았던 내게 있어 이 '직감'이란 말은 퍽 신선하게 들렸다.

"자네도 스스로 여러 문제를 풀다 보면, 알게 될 날이 올 걸세."

"넵! 그런데 선생님, 어떻게 덧셈정리를 쓰실 셈이죠?"

"여기서 θ는 $\theta=\beta-\alpha$로 쓸 수 있겠지? 그렇다면 $\cos\theta$는

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\beta-\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

삼각함수의
덧셈정리

가 되네."

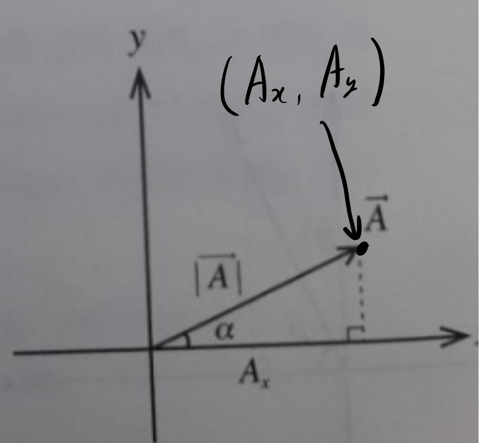
"이게 내적과 상관있는 겁니까?"

"그리 조급해하지 말게나. 한데 자네는 이 $\sin\alpha$나 $\cos\alpha$를 다른 방법을 이용해 나타낼 수 있나?"

"다른 방법이라… 앗, 'sin은 빗변 분의 세로', 'cos은 빗변 분의 가로' 이거 말씀이신가요?"

"그래그래, 그걸 써서 α, β 각각의 sin, cos을 바꿔 나타내보게나."

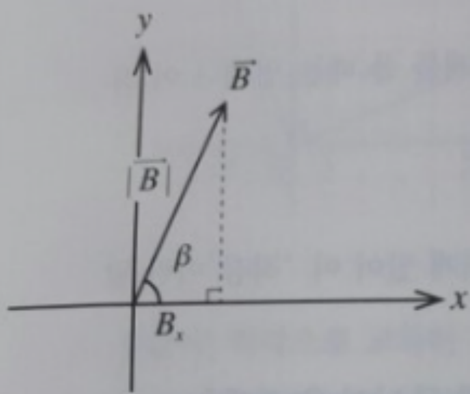
"어디, 그럼 $\cos\alpha$는 빗변 분의 가로에, 빗변이 $|\vec{A}|$이고 가로가 A_x이니까



$\cos\alpha = \dfrac{A_x}{|\vec{A}|}$ 네요."

L2 norm.

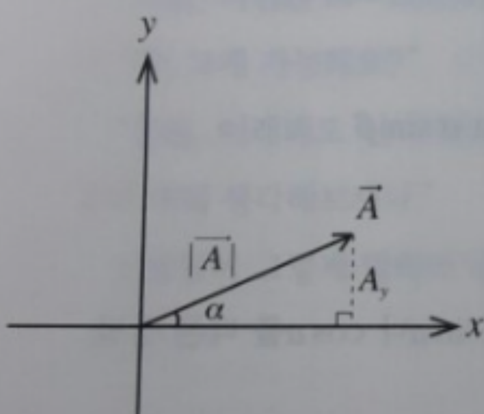
"같은 식으로 다른 것도 해보게."



"cos β는 빗변이 $|\vec{B}|$이고 가로가 B_x이니까

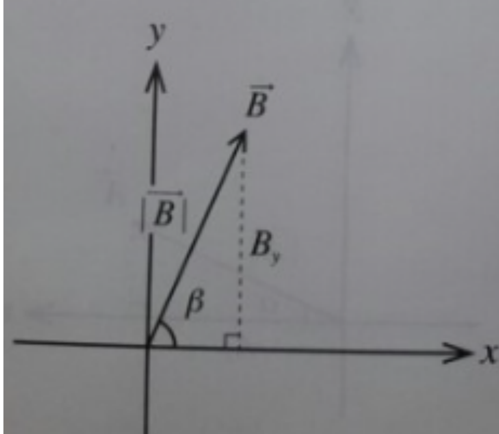
$$\cos\beta = \frac{B_x}{|\vec{B}|}$$

sin α는 sin이 빗변 분의 가로로, 빗변은 $|\vec{A}|$, 세로가 A_y니까



$$\sin\alpha = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$$

sin β는 빗변이 $|\vec{B}|$, 세로는 B_y니까



$$\sin\beta = \frac{B_y}{|\vec{B}|}$$

가 됩니다."

"아주 잘했네. 그럼 이것을 덧셈정리의 식에 대입해보게나."

"아까의 식은

$$\cos\theta = \cos(\beta - \alpha)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

삼각함수의 덧셈정리

였으니까 여기에 대입하면,

$$\cos\theta = \frac{A_x}{|\vec{A}|}\frac{B_x}{|\vec{B}|} + \frac{A_y}{|\vec{A}|}\frac{B_y}{|\vec{B}|}$$
$$= \frac{A_xB_x + A_yB_y}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

어라? 이 식의 분자, 아까 내적 계산할 때랑 똑같잖아!"

"좋은 지적이네. 그럼 양변에 $|\vec{A}||\vec{B}|$를 곱해서 분모를 없애보게나."

"네.

$$\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

의 양변에 $|\vec{A}||\vec{B}|$를 곱하면

'선형대수'에서 정의하는 내적

기하학에서 정의하는 내적

$$A_xB_x + A_yB_y = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

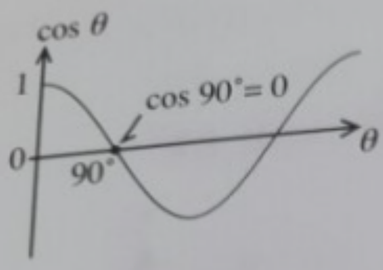
선생님, 이것도 내적에 대한 공식입니까?"

"그렇다네. $\vec{A}$의 크기 $|\vec{A}|$와 $\vec{B}$의 크기 $|\vec{B}|$를 곱한 뒤에, 그 벡터 사이의 각 θ의 cos을 곱해주면 두 벡터의 내적($A_xB_x + A_yB_y$)이 된다는 걸 나타내는 식이지. 이 공식으로 두 벡터 사이의 각도와 내적의 관계를 알기 쉽다네."

"그럼 두 벡터가 직각으로 교차하고 있을 때는 어떻게 되나요?"

"시험해보게나."

"어디, 우선 직각으로 교차하고 있는 벡터부터 찾아내서… 잠깐, 직



각으로 교차하고 있으니까 θ는 90°야. 그러면 cos 90°는 0이 되니까…

$$
\begin{aligned}
A_xB_x + A_yB_y &= |\vec{A}||\vec{B}|\cos 90^\circ \\
&= |\vec{A}||\vec{B}| \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

이렇게 해서 내적은 언제나 0이다."