03. 수렴할 때 극한 성질

수렴할 때 극한 성질은 대부분의 기본서에서 극한의 기본성질로 언급되는 부분입니다.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ 일 때,

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha - \beta$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (b_n \neq 0,\ \beta \neq 0)$$

※ a_n의 극한이 수렴하고 b_n의 극한이 수렴하면,
'a_n+b_n'의 극한, 'a_n-b_n'의 극한, '$a_n \times b_n$'의 극한
'$\frac{a_n}{b_n}$'의 극한도 수렴한다.

핵심!!!

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 일 때,

$$\lim_{n\to\infty} k a_n = k \lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha - \beta$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \times b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (b_n \neq 0, \beta \neq 0)$$

초기 조건에 주의를 기울여야 합니다.

두 수열이 수렴한다는 조건이 없다면 극한의 성질은 반드시 성립한다고 말할 없습니다. ← 핵심!!!

※ a_n 또는 b_n이 수렴하지 않아도 (∞로 발산해도) '$a_n \times b_n$'이 수렴하는 경우가 존재한다.

극한의 나눗셈이 성립조건에 분모에 수열과 극한값은 반드시 0 아니어야 합니다.
의도적으로 빼고 출제하여 학생들을 틀리게 만든 경우가 많습니다.

ex) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{n}_{\substack{a_n \\ \text{발산}}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1}\right)}_{\substack{b_n \\ \text{수렴}}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{n}_{a_n} \times \underbrace{\frac{n-2}{2n^2+n-1}}_{b_n} = \frac{1}{2}$

※ $\lim_{n\to\infty} b_n$은 '0'으로 수렴하지만,
$\lim_{n\to\infty} a_n$은 발산한다!!

기본성질을 이용하기 위해서는

① 초기조건에 수렴하는 것이 2개가 나와야 합니다.
그러면 실수배와 +,-,x 은 자유롭게 사용이 가능합니다.

② 나눗셈의 경우에 추가조건이 더 필요합니다.
$b_n \neq 0, \beta \neq 0$ 조건이 빠져있다면 성립하지 않게 됩니다.

그러면 대표적으로 나오는 문제 유형에 대해서 알아보면

① $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ (참)

수렴하는 두 수열 $a_n, a_n - b_n$ 이 수렴하기 때문에 극한의 성질에 의해서 두 수열의 빼면 극한값이 존재한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이 성립한다.

핵심!!!

$\lim_{n\to\infty} \cancel{a_n} - \cancel{a_n} + b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$

04. 극한 성질의 역

극한의 성질의 역은 성립하지 않습니다.
대표적으로 2가지가 종종 나오는데

① $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n, \lim_{n\to\infty}b_n$는 각각 수렴한다. (거짓)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n\times b_n)$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n, \lim_{n\to\infty}b_n$는 각각 수렴한다. (거짓)

처음에 공부를 하면 반례를 찾는데 고생을 하는 경우가 많은데...
대부분이 진동하는 수렴이라서 그렇습니다.

① 의 대표적인 반례는

$a_n : -1, 1, -1, 1, \cdots$, $b_n : 1, -1, 1, -1, \cdots$

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$ 그러나 $\lim_{n\to\infty}a_n, \lim_{n\to\infty}b_n$는 모두 발산합니다.

② 의 대표적인 반례는

$a_n : 1, 0, 1, 0, \cdots$, $b_n : 0, 1, 0, 1, \cdots$

$\lim_{n\to\infty}a_n\times b_n=0$ 그러나 $\lim_{n\to\infty}a_n, \lim_{n\to\infty}b_n$는 모두 발산합니다.

특히 이 반례를 되도록 외우고 있는 것이 효과적입니다.
시험에서 자주 나오고 반례로 자주 이용되는 편입니다.