8.5 스튜던트 t분포, 카이제곱분포, F분포

이 절에서는 정규분포로부터 파생된 분포를 공부한다. 정규분포에서 생성된 표본 데이터 집합에 여러 가지 수식을 적용하여 값을 변화시키면 데이터 집합의 분포 모양이 달라지는데 적용된 수식에 따라 스튜던트 t분포, 카이제곱분포, F분포가 만들어진다. 이 분포들은 통계량 분포라고도 부르는데 나중에 공부할 가설 검정에 쓰인다.

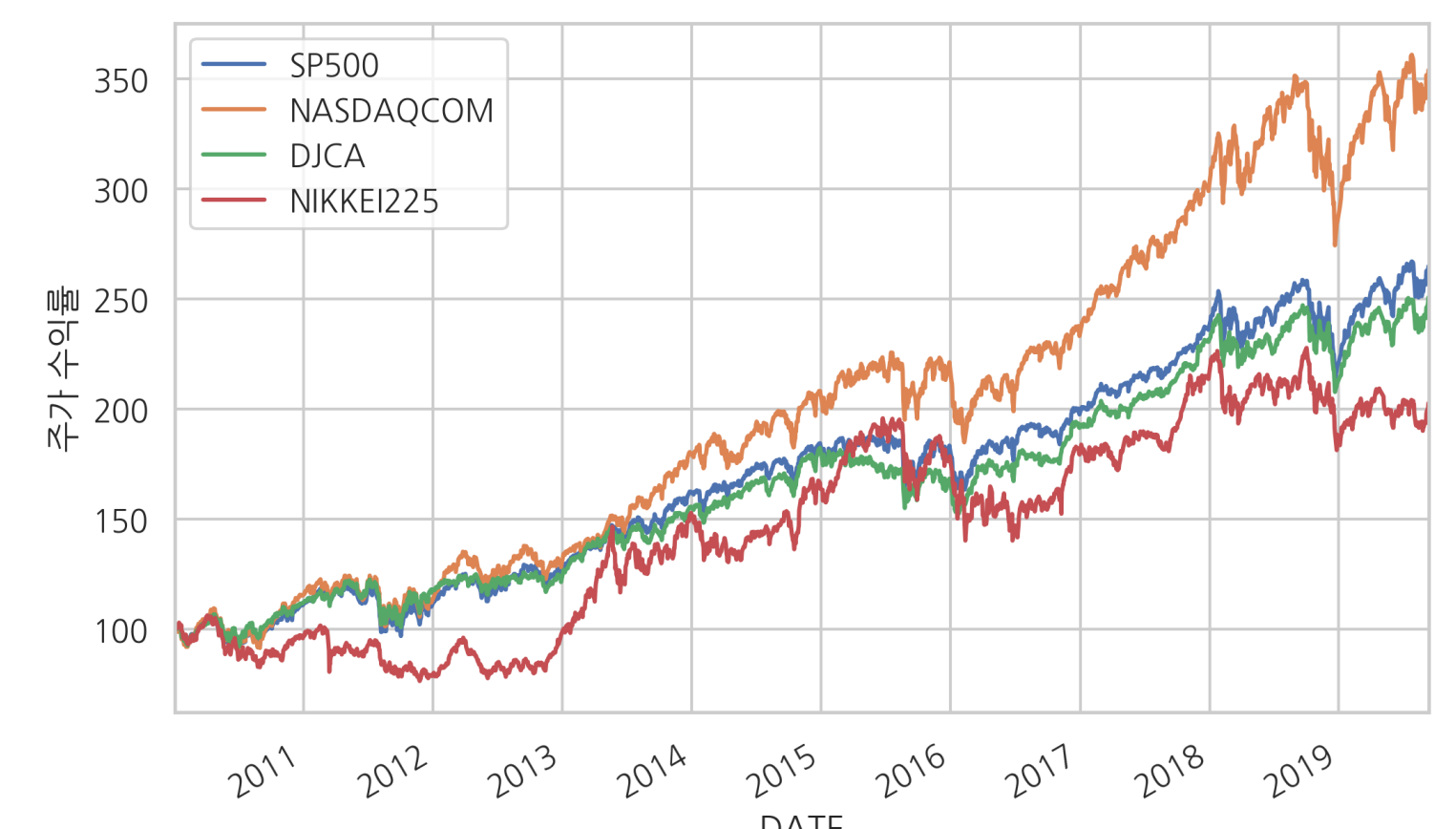
스튜던트 t분포

현실의 데이터를 살펴보면 정규분포와 상당히 유사하지만 양 끝단의 비중이 정규분포에 비해 더 큰 데이터들을 발견할 수 있다. 정규분포과 가정했을 때보다 극단적 현상이 더 자주 발생한다는 것이다. 분포의 모양을 볼 때 양 끝(꼬리) 부분이 정규분포보다 두껍다고 해서 이를 팻 테일(fat tail) 현상이라고 한다. 예를 들어 주식의 수익률은 보통 정규분포를 따르는 것으로 가정하는데 실제로는 정규분포에서는 자주 발생할 수 없는 극단적인 사건들이 종종 발생하곤 한다. 금융시장에서는 이러한 현상을 블랙 스완(black swan)이라고도 한다.

실제로 과거의 주가 데이터를 확인해보자. 다음은 S&P 500, 나스닥(Nasdaq), 다우존스(Dow-Jones), 니케이255(Nikkei255) 네 가지의 주가지수 데이터다. 비교를 위해 2010년의 값을 100으로 통일하였다.

In [1]:

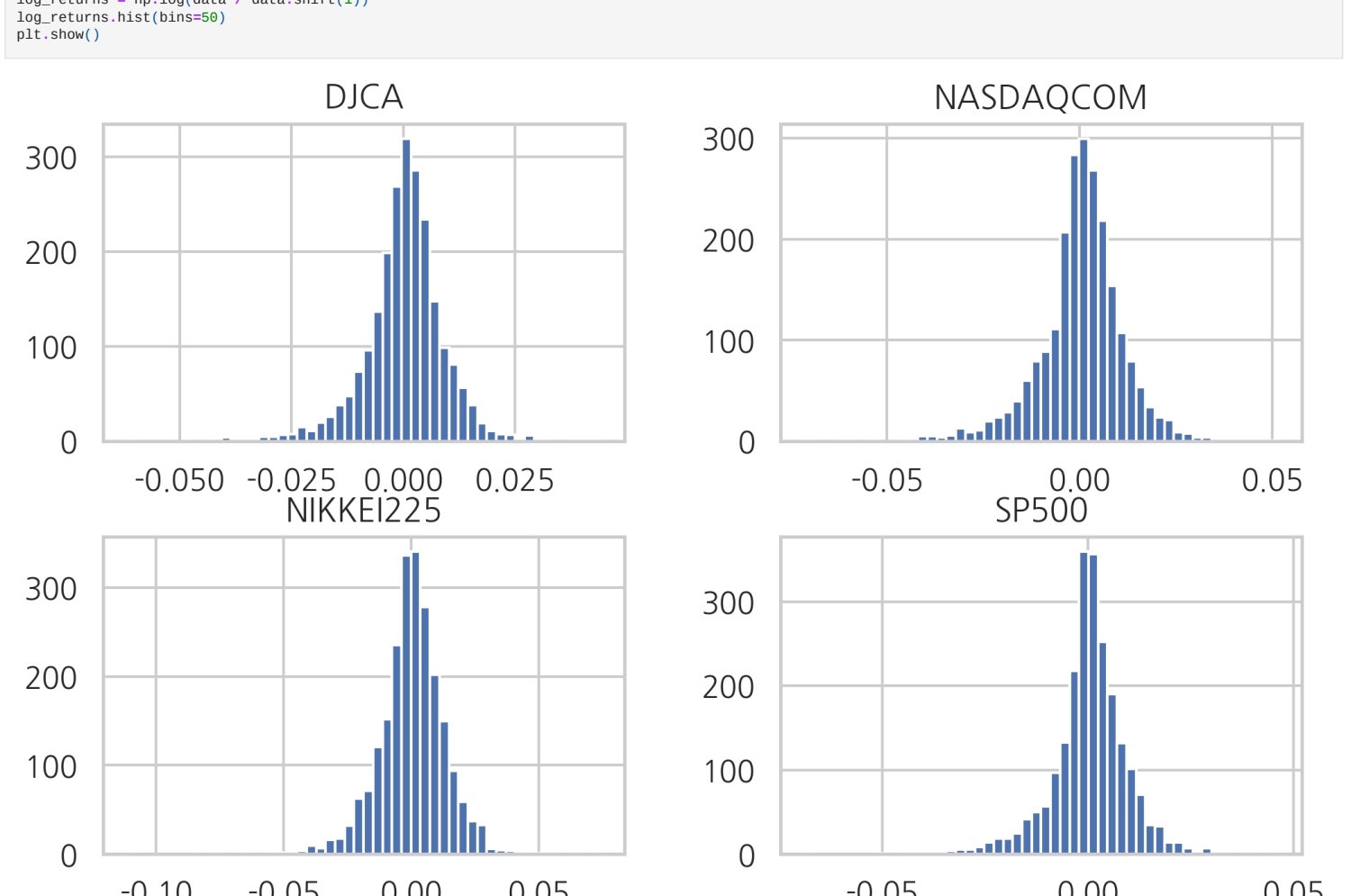
```
import pandas_datareader.data as web

symbols = ['SP500', 'NASDAQCOM', 'DJCA', 'NIKKEI225']
data = pd.DataFrame()
for sym in symbols:
    data[sym] = web.DataReader(sym, data_source='fred')[sym]
data = data.dropna()
(data / data.iloc[0] * 100).plot()

plt.ylabel("날짜")
plt.ylabel("주가 수익률")
plt.show()
```



이 데이터에서 각 지수의 일간 수익률을 구하여 그 분포의 모양을 히스토그램으로 그리면 정규분포와 비슷하게 생겼다.

In [2]:

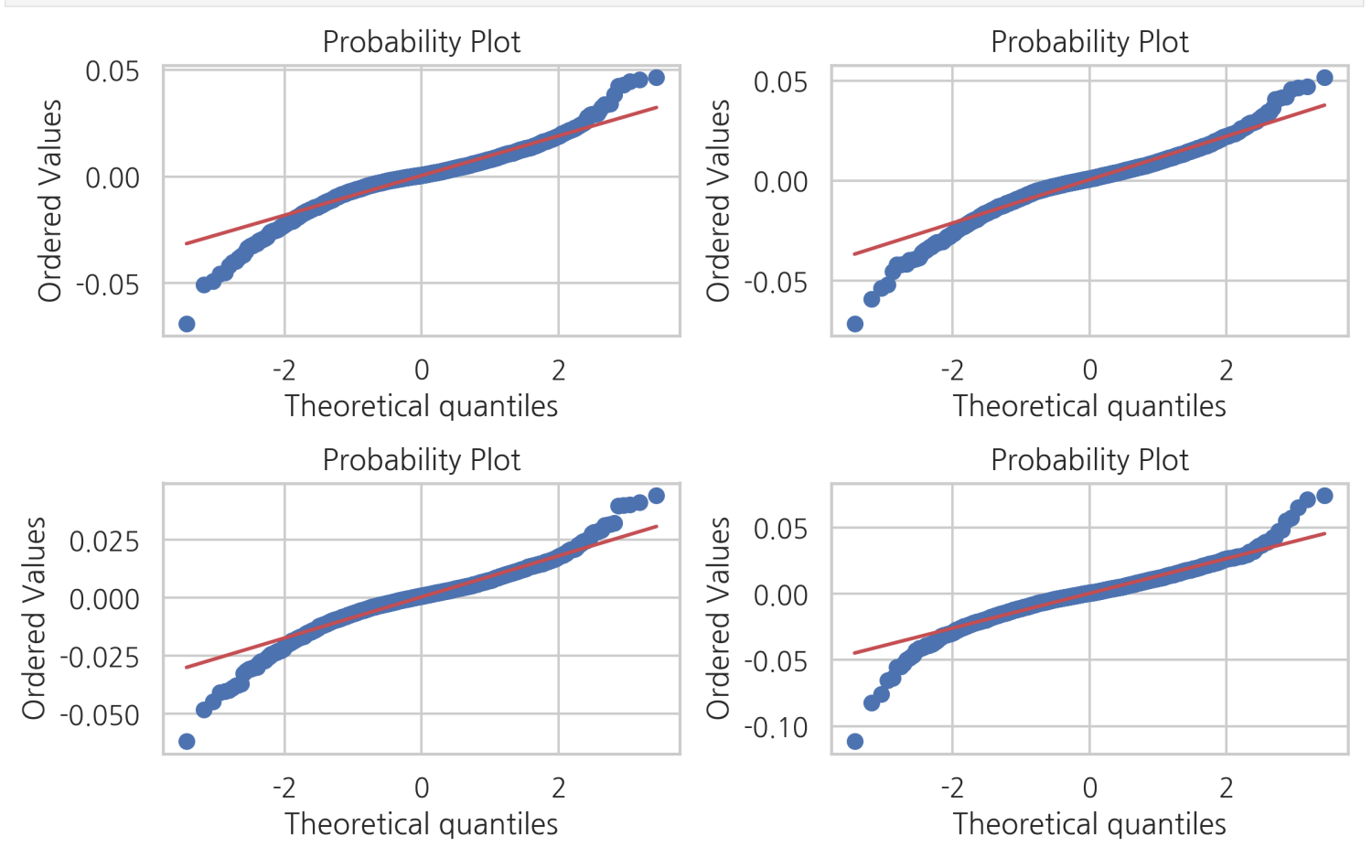
```
log_returns = np.log(data / data.shift(1))
log_returns.hist(bins=50)
plt.show()
```



하지만 Q-Q 플롯으로 정규성을 확인하면 정규분포보다 더 극단적인 경우가 많이 발생하고 있음을 알 수 있다.

In [3]:

```
for i, sym in enumerate(symbols):
    ax = plt.subplot(2, 2, i+1)
    sp.stats.probplot(log_returns[sym].dropna(), plot=ax)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



이렇게 팻 테일을 보이는 데이터 모형에 적합한 것이 **스튜던트 t분포(student-t distribution)** 혹은 **t분포**라고 부르는 분포다. 스튜던트 t분포의 확률 밀도 함수는 다음 수식에 의해 정의된다.

$$t(x;\mu,\lambda,\nu) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \lambda\frac{(x-\mu)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{8.5.1}$$

이 식에서 λ는 정규분포의 정밀도 $(\sigma^2)^{-1}$에 대응하는 개념이고 $\Gamma(x)$는 감마(Gamma) 함수라는 특수 함수다.

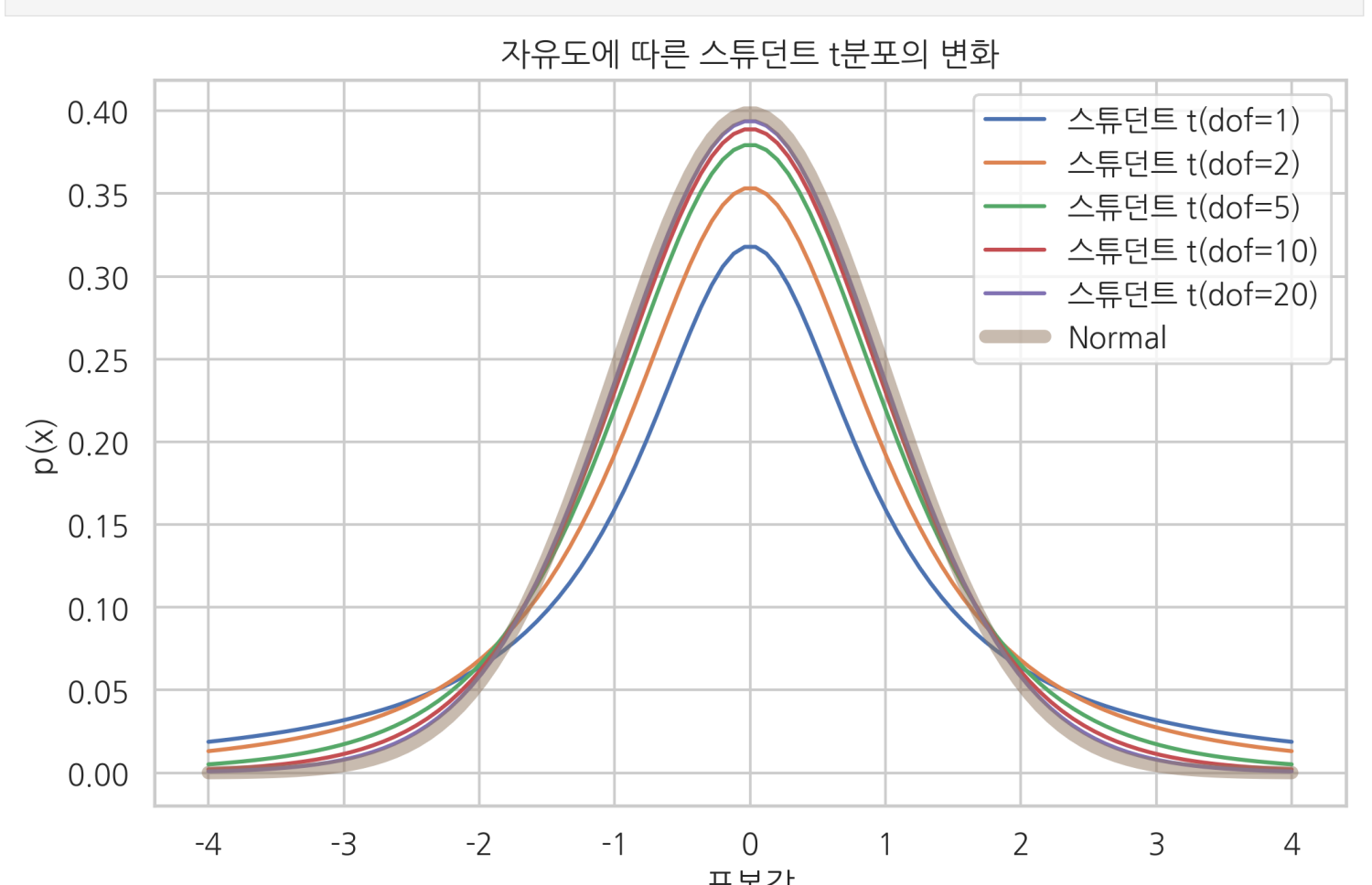
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \tag{8.5.2}$$

정규분포와 달리 정수값을 가지는 **자유도(degree of freedom)**라는 모수(parameter) ν를 추가적으로 가진다. 스튜던트 t분포에서는 모수 ν로 2 이상의 자연수를 사용한다. 모수 ν가 1인 경우는 **코시분포(Cauchy distribution)**라고 한다. 코시분포에서 양수인 부분만 사용하는 경우에는 **하프코시분포(Half-Cauchy distribution)**라고 부른다.

스튜던트 t분포의 확률 밀도 함수를 그리려면 사이파이 패키지의 `t` 클래스를 사용한다. 이때 인수 `df` 는 자유도, `loc` 는 기댓값, `scale` 은 표준편차를 설정한다. 다음 그림에서 자유도 ν가 작으면 정규분포보다 분산이 크고 팻 테일을 보이지만 자유도가 증가할수록 정규분포로 수렴하는 것을 볼 수 있다.

In [4]:

```
xx = np.linspace(-4, 4, 100)
for df in [1, 2, 5, 10, 20]:
    rv = sp.stats.t(df=df)
    plt.plot(xx, rv.pdf(xx), label=("스튜던트 t(dof=%d)" % df))
plt.plot(xx, sp.stats.norm().pdf(xx), label="Normal", lw=5, alpha=0.5)
plt.title("자유도에 따른 스튜던트 t분포의 변화")
plt.xlabel("표본값")
plt.ylabel("p(x)")
plt.legend()
plt.show()
```



스튜던트 t분포의 기댓값과 분산은 다음과 같다.

- 기댓값:

$$\text{E}[X] = \mu \tag{8.5.3}$$

- 분산:

$$\text{Var}[X] = \frac{\nu}{\lambda(\nu-2)} \tag{8.5.4}$$

분산의 대한 식은 $\nu > 2$인 경우만 적용된다. $\nu = 1, 2$일 때는 분산이 무한대가 된다.

t 통계량

정규분포의 표본을 표준편차로 나눠 정규화한 z 통계량은 항상 정규분포가 된다는 것은 이미 공부하였다. 그런데 z 통계량을 구하려면 확률분포의 정확한 표준편차를 우리가 알고 있어야 한다. 하지만 현실적으로는 표준편차를 정확히 알 수 없기 때문에 표본에서 측정한 표본표준편차(sample standard deviation)로 정규화할 수밖에 없다. 정규분포로부터 얻은 N개의 표본 $x_1, \cdots, x_N$에서 계산한 **표본평균을 표본표준편차로 정규화한 값을 t 통계량**이라고 한다.

t 통계량은 자유도가 $N-1$인 스튜던트 t분포를 이룬다.

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{N}}} \sim t(x;0,1,N-1) \tag{8.5.5}$$

이 식에서 $\bar{x}, s$는 각각 표본평균, 표본표준편차다.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} \tag{8.5.6}$$

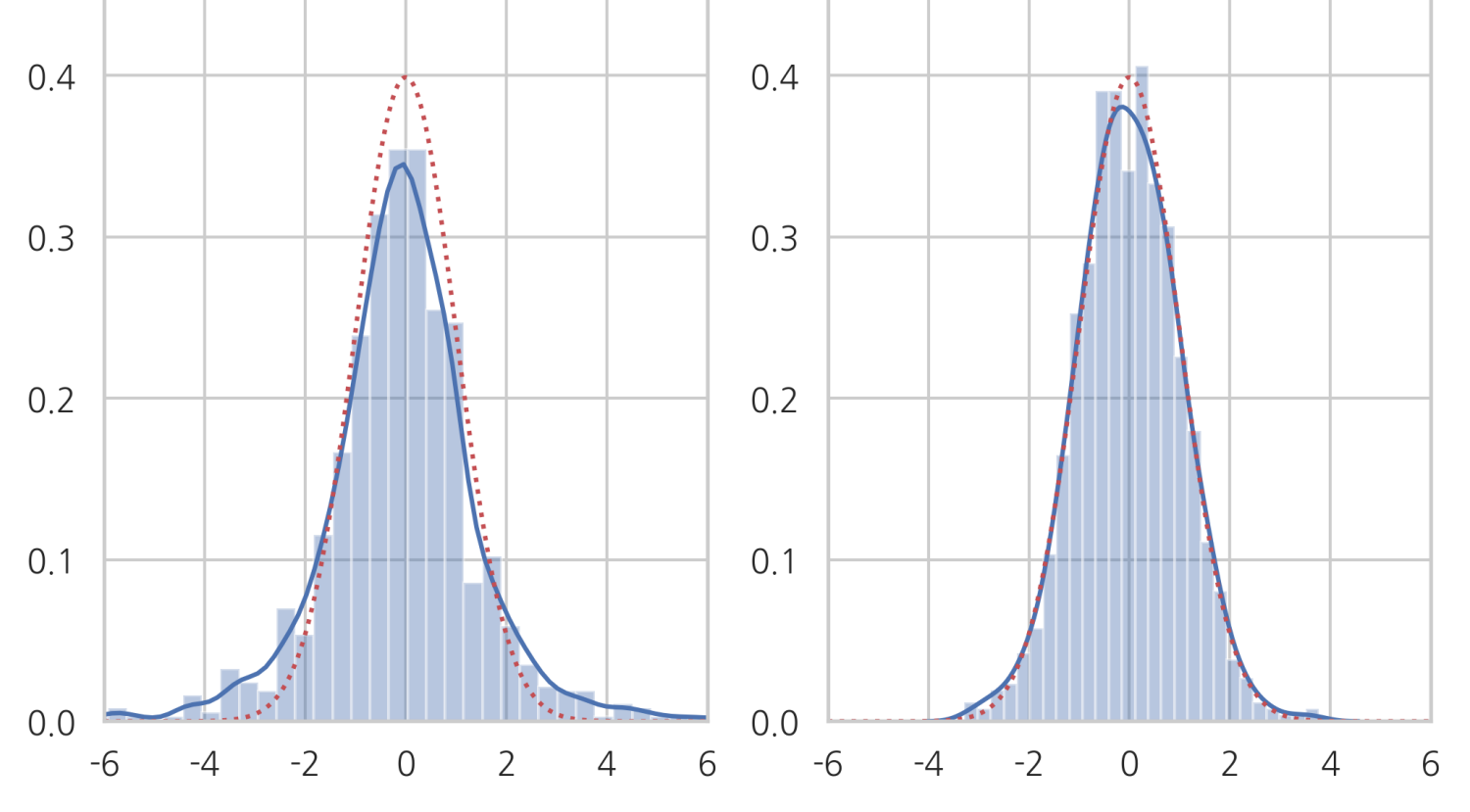
$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \tag{8.5.7}$$

이 정리는 추후 정규분포의 기댓값에 관한 각종 검정에서 사용된다.

다음은 시뮬레이션을 사용하여 표본표준편차로 정규화한 표본평균과 정규분포를 비교한 것이다. 왼쪽은 $N=4$, 오른쪽은 $N=40$인 경우다.

In [5]:

```
np.random.seed(0)

rv = sp.stats.norm()
M = 1000

plt.subplot(1, 2, 1)
N = 4
x1 = rv.rvs((N, M))
xbar1 = x1.mean(axis=0)
xstd1 = x1.std(axis=0, ddof=1)
x = xbar1 / (xstd1 / np.sqrt(N))
sns.distplot(x, kde=True)
xx = np.linspace(-6, 6, 1000)
plt.plot(xx, rv.pdf(xx), 'r:', label="정규분포")
plt.xlim(-6, 6)
plt.ylim(0, 0.5)
plt.title("t 통계량 분포 (N = 4)")
plt.legend()

plt.subplot(1, 2, 2)
N = 40
x2 = rv.rvs((N, M))
xbar2 = x2.mean(axis=0)
xstd2 = x2.std(axis=0, ddof=1)
x = xbar2 / (xstd2 / np.sqrt(N))
sns.distplot(x, kde=True)
xx = np.linspace(-6, 6, 1000)
plt.plot(xx, rv.pdf(xx), 'r:', label="정규분포")
plt.xlim(-6, 6)
plt.ylim(0, 0.5)
plt.title("t 통계량 분포 (N = 40)")
plt.legend()

plt.show()
```



카이제곱분포

정규분포를 따르는 확률 변수 X의 N개의 표본 $x_1, \cdots, x_N$의 합(또는 평균)은 표본 분산으로 정규화하면 스튜던트 t분포를 따른다는 것을 배웠다.

그런데 이 N개의 표본들을 단순히 더하는 것이 아니라 제곱을 하여 더하면 양수값만을 가지는 분포가 된다. 이 분포를 **카이제곱(chi-squared)분포**라고 하며 $\chi^2(x;\nu)$으로 표기한다. 카이제곱분포도 스튜던트 t분포처럼 자유도 모수를 가진다.

$$x_i \sim \mathcal{N}(x) \tag{8.5.8}$$

$$\downarrow \tag{8.5.9}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sim \chi^2(x;\nu=N) \tag{8.5.10}$$

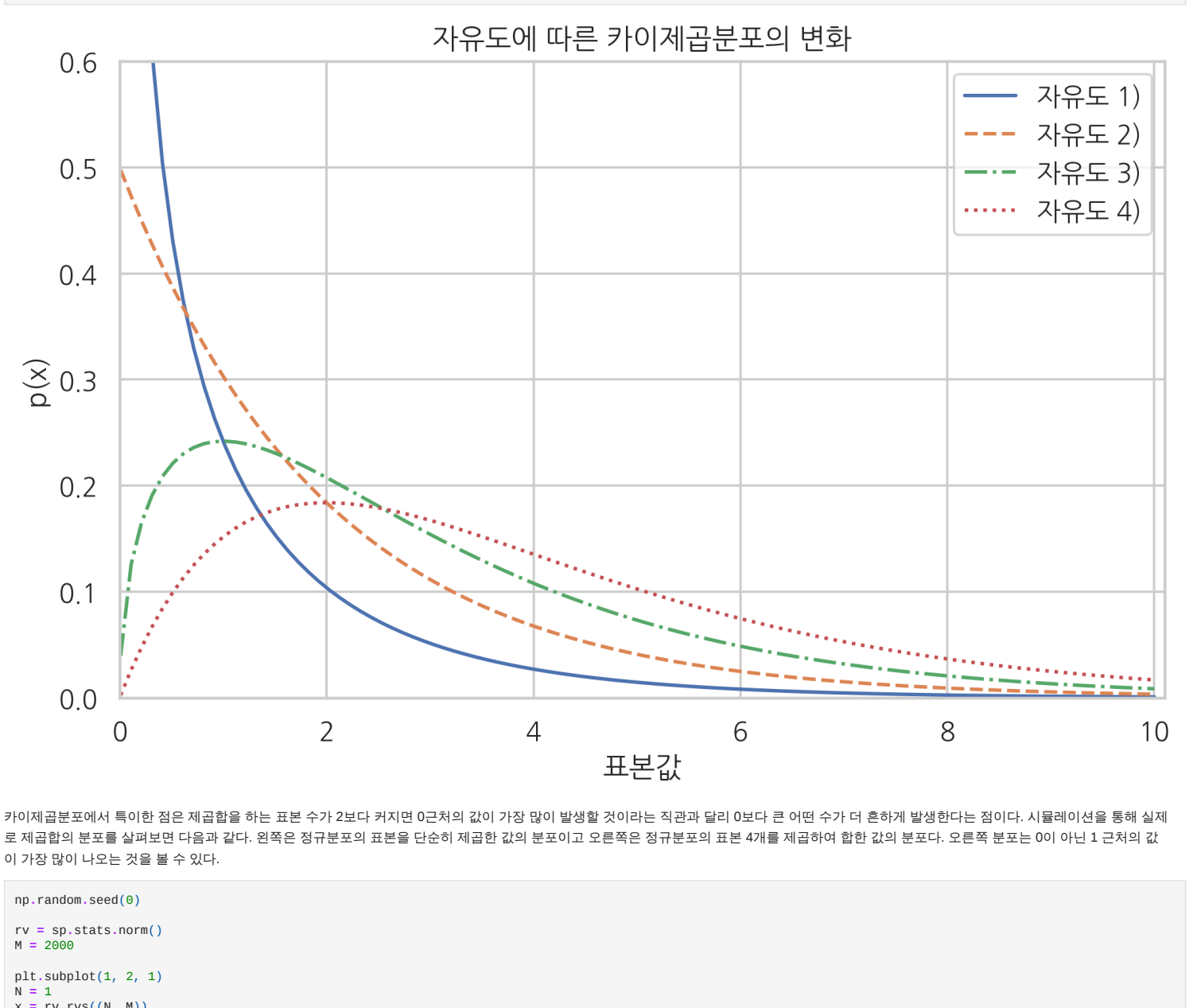
카이제곱분포의 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$\chi^2(x;\nu) = \frac{x^{(\nu/2-1)}e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \tag{8.5.11}$$

사이파이 stats 서브패키지의 `chi2` 클래스를 사용하여 확률 밀도 함수의 모양을 살펴보면 다음과 같다.

In [6]:

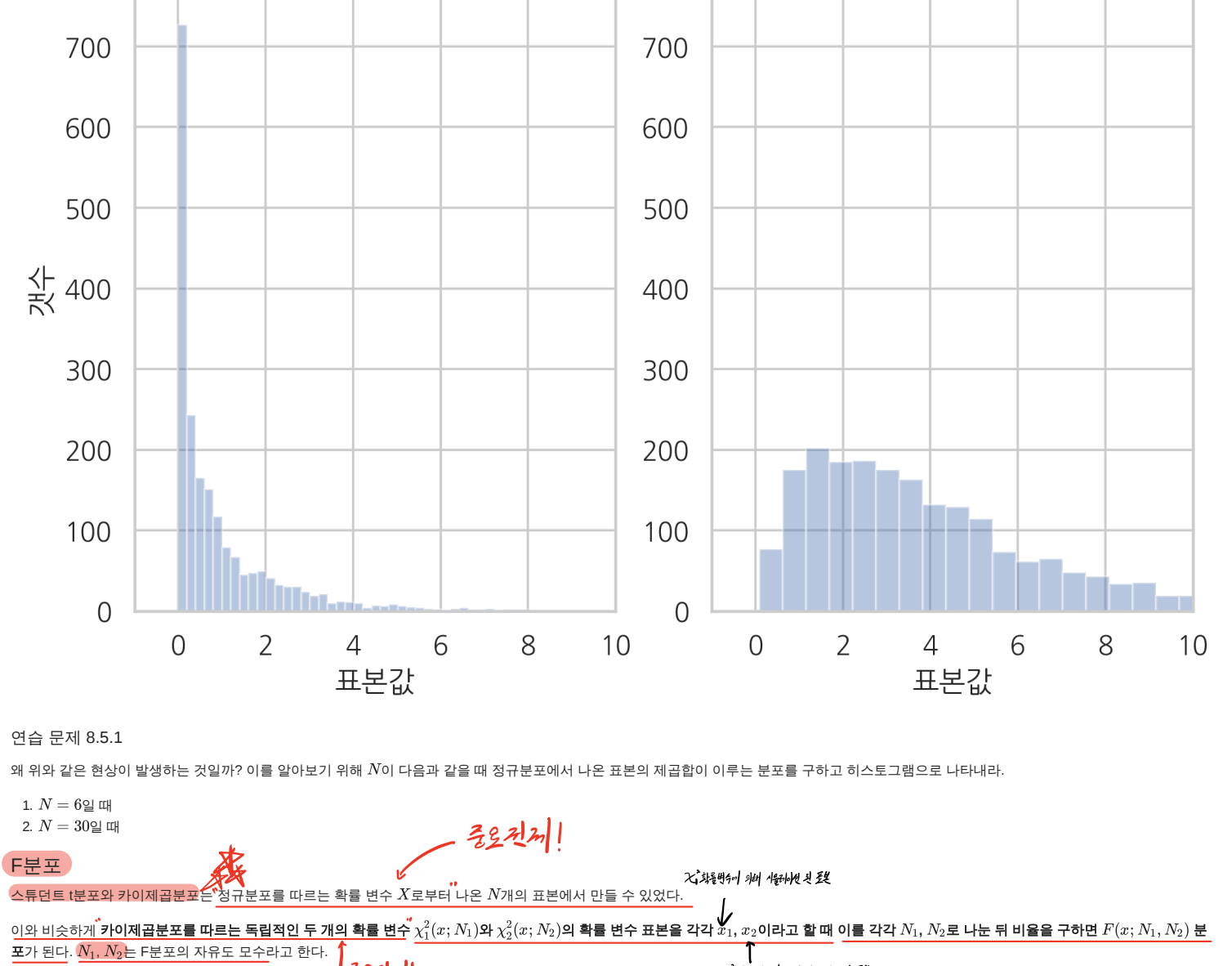
```
xx = np.linspace(0.01, 10, 100)
dfs = np.arange(1, 5)
lss = ["-", "--", "-.", ":"]
for df, ls in zip(dfs, lss):
    rv = sp.stats.chi2(df=df)
    plt.plot(xx, rv.pdf(xx), ls=ls, label=("자유도 %d" % df))
plt.xlim(0, 10.1)
plt.ylim(0, 0.6)
plt.title("자유도에 따른 카이제곱분포의 변화")
plt.xlabel("표본값")
plt.ylabel("p(x)")
plt.legend()
plt.show()
```



카이제곱분포에서 특이한 점은 제곱합을 하는 표본 수가 2보다 커지면 0 근처의 값이 가장 많이 발생할 것이라는 직관과 달리 0보다 큰 어떤 수가 더 흔하게 발생한다는 점이다. 시뮬레이션을 통해 실제로 제곱합의 분포 모양을 살펴보면 다음과 같다. 왼쪽은 정규분포의 표본을 단순히 제곱한 값의 분포이고 오른쪽은 정규분포의 표본 4개를 제곱하여 합한 값의 분포다. 오른쪽 분포는 0이 아닌 1 근처의 값이 가장 많이 나오는 것을 볼 수 있다.

In [7]:

```
np.random.seed(0)

rv = sp.stats.norm()
M = 2000

plt.subplot(1, 2, 1)
N = 1
x = rv.rvs((N, M))
t = (x ** 2).sum(axis=0)
sns.distplot(t, kde=False)
plt.xlim(-1, 10)
plt.ylim(0, 800)
plt.title("제곱합의 분포 (N = 1)")
plt.xlabel("표본값")
plt.ylabel("갯수")

plt.subplot(1, 2, 2)
N = 4
x = rv.rvs((N, M))
t = (x ** 2).sum(axis=0)
sns.distplot(t, kde=False)
plt.xlim(-1, 10)
plt.ylim(0, 800)
plt.title("제곱합의 분포 (N = 4)")
plt.xlabel("표본값")

plt.show()
```



연습 문제 8.5.1

왜 위와 같은 현상이 발생하는 것일까? 이를 알아보기 위해 N이 다음과 같을 때 정규분포에서 나온 표본의 제곱합이 이루는 분포를 구하고 히스토그램으로 나타내라.

1. $N = 6$일 때
2. $N = 30$일 때

F분포

스튜던트 t분포와 카이제곱분포는 정규분포를 따르는 확률 변수 X로부터 나온 N개의 표본에서 만들 수 있었다. 이와 비슷하게 **카이제곱분포를 따르는 독립적인 두 개의 확률 변수 $\chi^2_1(x;N_1)$와 $\chi^2_2(x;N_2)$의 확률 변수 표본을 각각 x_1, x_2이라고 할 때 이를 각각 N_1, N_2로 나눈 뒤 비율을 구하면 $F(x;N_1,N_2)$ 분포**가 된다. N_1, N_2는 F분포의 자유도 모수라고 한다.

$$x_1 \sim \chi^2(N_1),\ x_2 \sim \chi^2(N_2) \ \rightarrow \ \frac{\frac{x_1}{N_1}}{\frac{x_2}{N_2}} \sim F(x;N_1,N_2) \tag{8.5.12}$$

F분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x;N_1,N_2) = \frac{\sqrt{\frac{(N_1\,x)^{N_1}\,N_2^{N_2}}{(N_1\,x+N_2)^{N_1+N_2}}}}{x\,\text{B}\left(\frac{N_1}{2},\frac{N_2}{2}\right)} \tag{8.5.13}$$

이 식에서 함수 $B(x)$는 베타(Beta) 함수라는 특수 함수다.

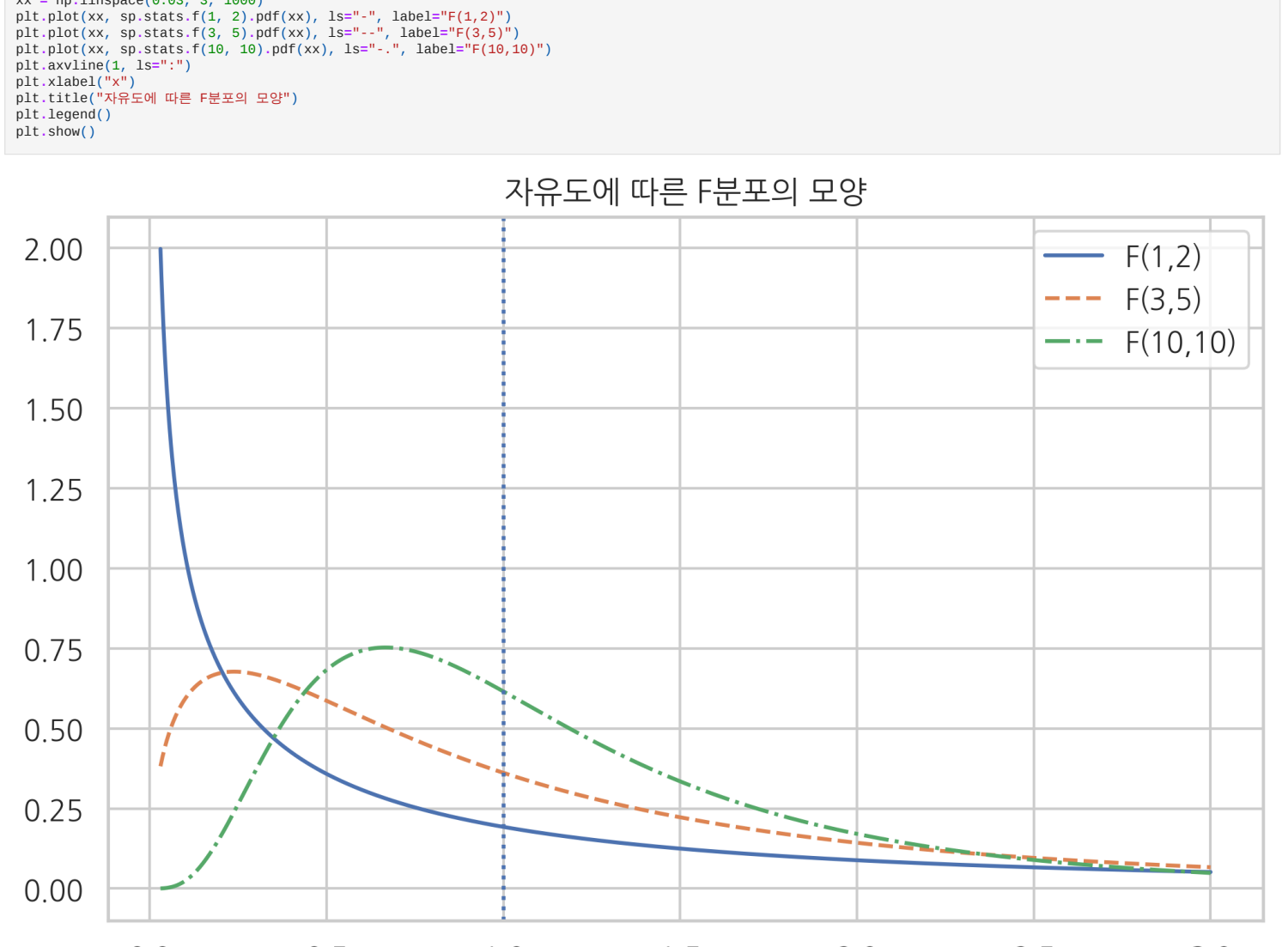
스튜던트 t분포의 표본값을 제곱한 값은 F분포를 따른다.

$$t(N)^2 = F(1,N) \tag{8.5.14}$$

사이파이 stats 서브패키지의 `f` 클래스는 F분포를 지원한다. 다음 그림에서 몇가지 자유도 쌍에 대한 F분포의 모양을 보이고 있다.

In [8]:

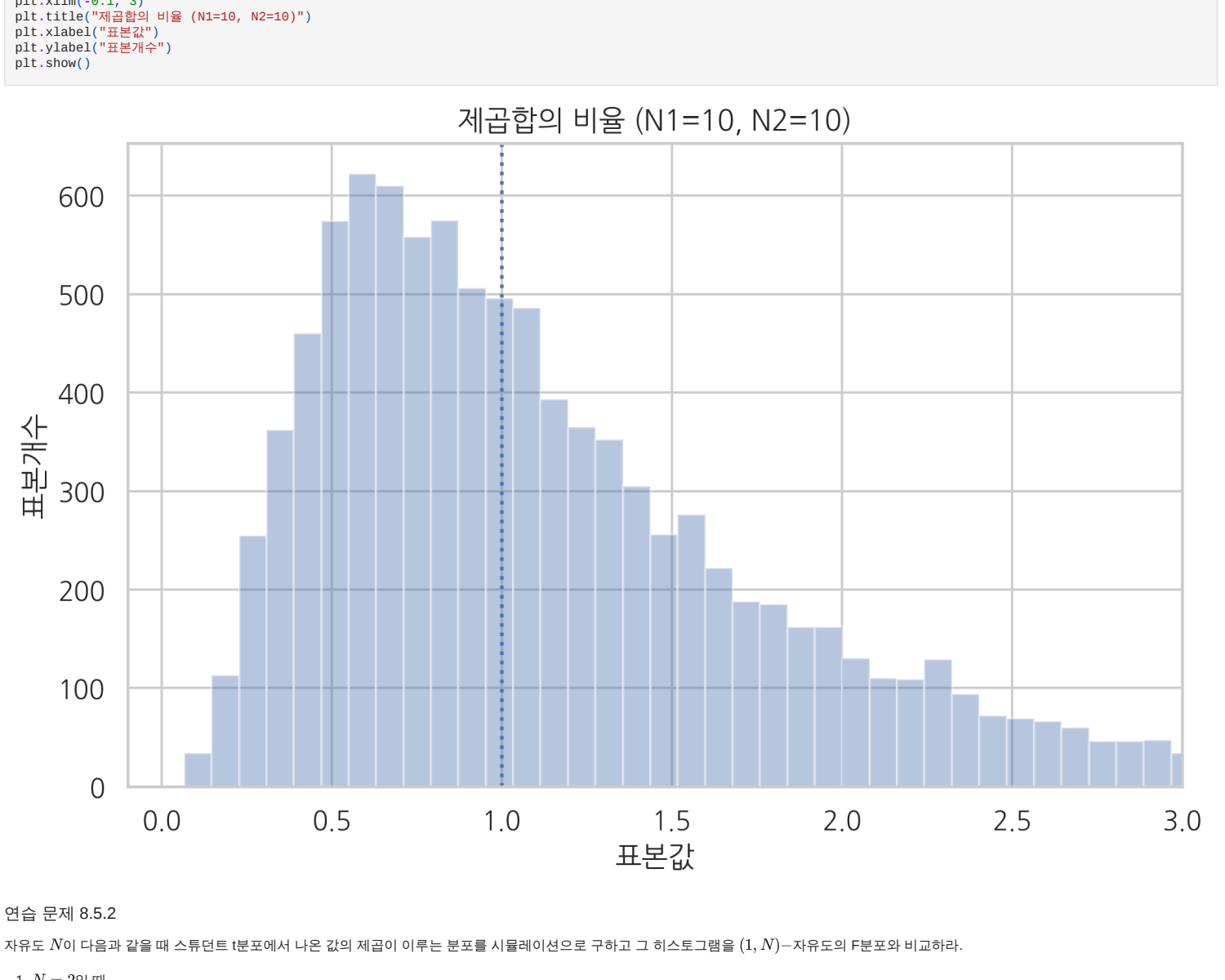
```
xx = np.linspace(0.03, 3, 1000)
plt.plot(xx, sp.stats.f(1, 2).pdf(xx), ls="-", label="F(1,2)")
plt.plot(xx, sp.stats.f(3, 5).pdf(xx), ls="--", label="F(3,5)")
plt.plot(xx, sp.stats.f(10, 10).pdf(xx), ls="-.", label="F(10,10)")
plt.axvline(1, ls=":")
plt.xlabel("x")
plt.title("자유도에 따른 F분포의 모양")
plt.legend()
plt.show()
```



F분포에서 특이한 점은 N_1과 N_2의 값이 같을 경우에 1 근처의 값이 가장 많이 발생할 것이라는 직관과 달리 1이 아닌 다른 수가 더 흔하게 발생한다는 점이다. 시뮬레이션을 통해 실제로 제곱합의 비율의 분포를 살펴보면 다음과 같다. $N_1 = N_2$이 커지면 이 현상이 사라지고 1 근처의 값이 가장 많이 발생한다.

In [9]:

```
np.random.seed(0)

rv = sp.stats.norm()
M = 10000

N1 = 10
x1 = rv.rvs((N1, M))
t1 = (x1 ** 2).sum(axis=0)

N2 = 10
x2 = rv.rvs((N2, M))
t2 = (x2 ** 2).sum(axis=0)

t = t2 / t1
sns.distplot(t, bins=200, kde=False)
plt.axvline(1, ls=":");
plt.xlim(-0.1, 3)
plt.title("제곱합의 비율 (N1=10, N2=10)")
plt.xlabel("표본값")
plt.ylabel("표본개수")
plt.show()
```



연습 문제 8.5.2

자유도 N이 다음과 같을 때 스튜던트 t분포에서 나온 값의 제곱이 이루는 분포를 시뮬레이션으로 구하고 그 히스토그램을 $(1, N)-$자유도의 F분포와 비교하라.

1. $N = 2$일 때
2. $N = 30$일 때

활용

스튜던트 t분포, 카이제곱분포, F분포는 모두 정규분포의 통계량 분포(statistics distribution)의 일종이다. 선형회귀분석에서 이 통계량 분포들은 각각 다음 값들에 대한 확률모형으로 사용된다.

- 스튜던트 t분포: 추정된 가중치에 대한 확률 분포
- 카이제곱분포: 오차 제곱합에 대한 확률 분포
- F분포: 비교 대상이 되는 선형모형의 오차 제곱합에 대한 비율의 확률 분포

그림 8.5.1 : 정규분포와 통계량 분포의 관계