- $\underline{S^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2\bar{X}\cdot X_i + \bar{X}^2)}{n-1} = \underline{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{X}^2}{n-1}}$

(n-1)을 곱한다

X_i : 'x' 표본의 i번째 원소.

여기에 (n-1)을 곱한다.

- $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{X}^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\cdot\underline{\sum_{i=1}^{n} X_i} + n\cdot\bar{X}^2$$

여기에 n과 $\frac{1}{n}$을 곱하면

- $(n-1)\cdot S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\cdot n\cdot\underbrace{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}_{\bar{X}} + n\cdot\bar{X}^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\cdot\bar{X}^2$$

$$= \underline{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} - n\cdot\bar{X}^2$$

이것을 전개하면...

- $(n-1)\cdot S^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 - \underline{n\cdot\bar{X}^2}$

- $(n-1)\cdot s^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - n\cdot(\bar{x}^2 - 2\cdot\mu\cdot\bar{x} + \mu^2 + 2\cdot\mu\cdot\bar{x} - \mu^2)$

- $(n-1)\cdot s^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - n(\bar{x}-\mu)^2 - 2n\mu\bar{x} + n\cdot\mu^2$

- $(n-1)\cdot s^2 = (x_1^2 - 2\mu x_1 + \mu^2) + \cdots + (x_n^2 - 2\mu x_n + \mu^2)$
  $+ 2\mu(x_1 + \cdots + x_n) - n\cdot\cancel{\mu^2} - n\cdot(\bar{x}-\mu)^2$

  여기에 n과 $\frac{1}{n}$을 곱하면...

  $- 2n\mu\bar{x} + \cancel{n\cdot\mu^2}$

- $(n-1)\cdot s^2 = (x_1^2 - 2\mu x_1 + \mu^2) + \cdots + (x_n^2 - 2\mu x_n + \mu^2)$
  $+ \cancel{2n\mu\cdot\bar{x}} - n\cdot(\bar{x}-\mu)^2 \cancel{- 2n\mu\bar{x}}$

- $(n-1)\cdot s^2 = (x_1^2 - 2\mu x_1 + \mu^2) + \cdots + (x_n^2 - 2\mu x_n + \mu^2)$
  $- n\cdot(\bar{x}-\mu)^2$

- $(n-1)\cdot s^2 = (x_1-\mu)^2 + \cdots + (x_n-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2$

양변을 'σ^2'으로 나누면...

얘는 분모로

보낸다.

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1-\mu)^2}{\sigma^2} + \cdots + \frac{(X_n-\mu)^2}{\sigma^2} - \frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} = \left(\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2$$

$$\underbrace{\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2}}_{\text{자유도가 } n-1\text{인 카이제곱 분포}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2}_{\text{자유도가 } n\text{인 카이제곱 분포}} - \underbrace{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2}_{\text{자유도가 } 1\text{인 카이제곱 분포}}$$

* 참고

따름정리 7.2.10 : 확률변수 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 서로 독립이고 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따르면, ① $Y = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ 은 자유도 $v = n$인 카이제곱분포를 따른다.

따름정리 7.2.10에 의해 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$은 자유도 n인 카이제곱분포를 따르고, ② $\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\frac{\sigma^2}{n}}$은 자유도 1인 카이제곱분포를 따름.

정리 7.2.9 : 확률변수 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 서로 독립이고 각각 자유도가 $v_1, v_2, \cdots, v_n$인 카이제곱분포를 따르면, 확률변수 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$은 자유도가 $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$인 카이제곱분포를 따른다.

③

두 변수 $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$와 $\frac{(\overline{X} - \mu)^2}{\frac{\sigma^2}{n}}$은 서로 독립이고, 따라서 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$은 자유도 $(n-1)$인 카이제곱분포를 따른다.