등차수열의 합

등차수열 1, 2, 3, 4, 5, ..., 10을 이루는 항들의 합을 구해볼까요?

S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 ...... ①

바로 계산할 수도 있는데 우변의 순서를 거꾸로 해보죠.

S = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 ...... ②

순서를 바꿔놓고 봤더니
①식의 제1항 1과 ②식의 제1항 10을 더하면 11
①식의 제2항 2와 ②식의 제2항 9를 더하면 11
①식의 제3항 3과 ②식의 제3항 8을 더하면 11
①식의 제10항 10과 ②식의 제10항 1을 더하면 11

①과 ②식은 총 열 개의 항으로 되어 있는데 같은 순서에 있는 항끼리 더하면 모두 11로 같아요. 11인 항이 10개 있으니까 그 합은 11 × 10이에요. 그런데 이건 S가 아니라 2S죠. 2로 나눠주면 S = 1 + 2 + 3 + ... + 8 + 9 + 10을 구할 수 있어요.

식으로 정리해보죠. ①과 ② 두 식을 더해요.

① + ②
2S = (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + ... + (8 + 3) + (9 + 2) + (10 + 1)
2S = 11 + 11 + 11 + ... + 11 + 11 + 11
2S = 11 × 10
S = 55

1부터 10까지 자연수를 모두 더하면 55가 나와요.

더해야 하는 항의 순서를 거꾸로 해서 한 번 더 더하면 그냥 더하는 것보다 훨씬 더 계산이 쉬워져요.

이번에는 등차수열 a_n의 제1항부터 제n항까지 합을 구하는데 그 합을 S_n이라고 해보죠.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항은 $a_n = a + (n - 1)d$이죠? 그리고 합을 구하는 마지막 제n항 a_n을 l이라고 해보죠.

$a_1 = a$

$a_2 = a + d$

$a_3 = a + 2d$

$a_4 = a + 3d$

$a_{n-1} = a + (n - 2)d = l - d$

$a_n = a + (n - 1)d = l$

위 내용을 S_n에 대입해요.

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (l - 2d) + (l - d) + l$ ...... ③

우변은 a_1부터 a_n까지 순서대로 더하는 건데 이 순서를 거꾸로 해볼까요?

$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a$ ...... ④

두 식을 더해보죠.

$$
\begin{array}{rrl}
 & S_n = & a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (l - 2d) + (l - d) + l \\
+) & S_n = & l + (l - d) + (l - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a \\
\hline
 & 2S_n = & (a + l) + (a + l) + (a + l) + \dots + (a + l) + (a + l) + (a + l)
\end{array}
$$

첫째항 마지막항.

$$2S_n = n(a + l)$$

$$S_n = \frac{n(a + l)}{2}$$

제1항부터 제n항까지의 합을 구했어요.

원래 마지막 항 $l = a_n = a + (n - 1)d$니까 대입해보면,

$$S_n = \frac{n\{a + a + (n - 1)d\}}{2} \qquad (\because l = a + (n - l)d)$$

$$= \frac{n\{2a + (n - 1)d\}}{2}$$

등비수열의 합

등차수열의 합을 구할 때는 S_n을 원래 순서대로 한 번, 순서를 바꿔서 한 번 더해서 2로 나눠서 구했어요.

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$

$S_n = ar^{n-1} + ar^{n-2} + \dots + ar^3 + ar^2 + ar + a$

등차수열에서는 원래 순서대로 더한 것과 거꾸로 더한 것에서 같은 자리에 있는 항을 더하면 모두 값이 같았는데, 등비수열에서는 그렇지 않죠? 등비수열의 합은 다른 방법으로 구해요.

어떻게 하느냐면 순서를 거꾸로 바꿔서 더하는 대신에 S_n에 공비 r을 곱해서 빼는 거예요.

← 한계의 S_n에 r을 곱하여 '$r \cdot S_n$'을 만들어야 함.

아래에 나온 것처럼 S_n에 공비 r을 곱하면 S_n의 제2항은 rS_n의 제1항과 같고, S_n의 제3항은 rS_n의 제2항과 같죠? 같으니까 그냥 빼면 없어져 버려요.

$$\begin{array}{rlllll} S_n = & a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots & + ar^{n-1} & \\ -)\ rS_n = & \phantom{a + {}} ar + ar^2 + ar^3 + \dots & + ar^{n-1} & + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = & a & & - ar^n \end{array}$$

$S_n - rS_n = (1 - r)S_n = a - ar^n$

$r \neq 1$이면 양변을 $(1 - r)$로 나눌 수 있죠?

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{ar^n - a}{r - 1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$r = 1$이면 양변을 나눌 수 없어요. 다른 방법을 찾아야 해요. 그냥 a_n를 죽 쓰고 더해보죠.

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \\ &= a + a + a + \dots + a \qquad (\because r = 1) \\ &= na \end{aligned}$$