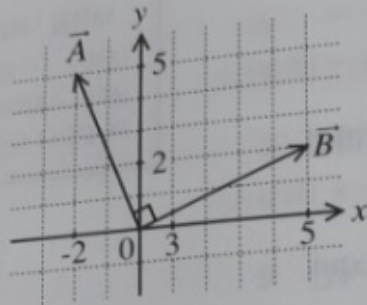


“0이 안 되네. 그럼  $\vec{A}$ 와  $\vec{B}$ 가 직각이라면 0이 되려나?”



$$\vec{A} = (-2, 5)$$

$$\vec{B} = (5, 2)$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (-2) \times 5 + 5 \times 2 \\ &= -10 + 10 \\ &= 0\end{aligned}$$

좋았어! 직각으로 교차한 2개의 벡터라면 0이 된다!

“두 벡터가 직각으로 교차했을 때는 내적이 언제나 0이 되는군.”

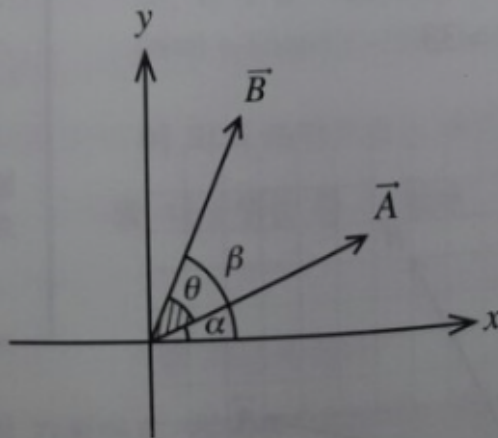
“하지만 어째서 0이 되는 거죠?”

“그럼, 이번엔 그 이유를 조사해볼까?”

“앵! 그게 가능해요?”

“물론, 이래봐도 난 수학자니까. 우선 두 개의 벡터와 그 사이의 각도  $\theta$ 에 대해 생각해보세나.”

선생님이 그렇게 말하자 공중에 떠 있던 화살표 2개가 예의 바르게 줄을 섰다.



“그럼 여기에서  $\vec{A}$ 와  $\vec{B}$  사이의 각도를  $\theta$ ,  $\vec{A}$ 와  $x$ 축 사이의 각도를  $\alpha$ ,  $\vec{B}$ 와  $x$ 축 사이의 각도를  $\beta$ 라 하지. 그리고  $\cos$ 의 덧셈정리를 쓸 거네.”

“네? 덧셈정리라니,  $\sin$ 을 미분할 때 썼던 거 말예요? 선생님, 왜 여기서 덧셈정리 따위를 쓰는 겁니까?”

“글쎄, 수학자의 직감이라 해 두지. 수학 문제를 풀 때는 언제나 이 직감이란 놈이 승패를 좌우하거든.”

“허어!”

수학이란 이론으로만 만들어진 줄 알았던 내게 있어 이 ‘직감’이란 말은 꽤 신선하게 들렸다.

“자네도 스스로 여러 문제를 풀다 보면, 알게 될 날이 올 걸세.”

“넵! 그런데 선생님, 어떻게 덧셈정리를 쓰실 셈이죠?”

“여기서  $\theta$ 는  $\theta = \beta - \alpha$ 로 쓸 수 있겠지? 그렇다면  $\cos \theta$ 는

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos (\beta - \alpha) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

← 상각항수의 덧셈정리

가 되네.”

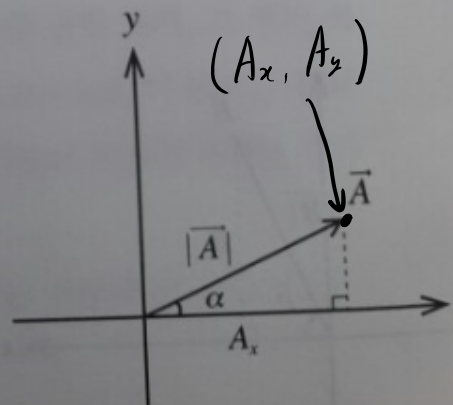
“이게 내적과 상관있는 겁니까?”

“그리 조금해하지 말게나. 한데 자네는 이  $\sin \alpha$ 나  $\cos \alpha$ 를 다른 방법을 이용해 나타낼 수 있나?”

“다른 방법이라... 앗, ‘ $\sin$ 은 빗변 분의 세로’, ‘ $\cos$ 은 빗변 분의 가로’ 이거 말씀이신가요?”

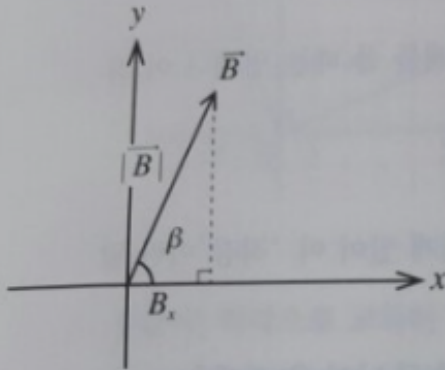
“그래그래, 그걸 써서  $\alpha$ ,  $\beta$  각각의  $\sin$ ,  $\cos$ 을 바꿔 나타내보게나.”

“어디, 그럼  $\cos \alpha$ 는 빗변 분의 가로에, 빗변이  $|\vec{A}|$ 이고 가로가  $A_x$ 이니까



$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \text{ 네요.}$$

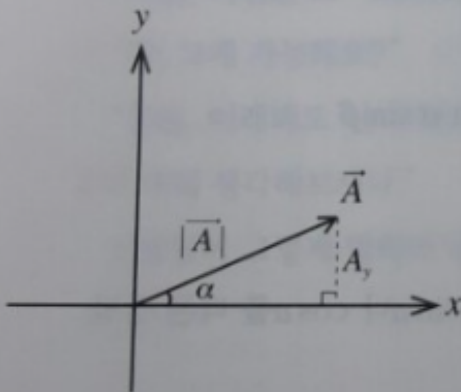
“같은 식으로 다른 것도 해보게.”



“ $\cos \beta$ 는 빗변이  $|\vec{B}|$ 이고 가로가  $B_x$ 이니까

$$\cos \beta = \frac{B_x}{|\vec{B}|}$$

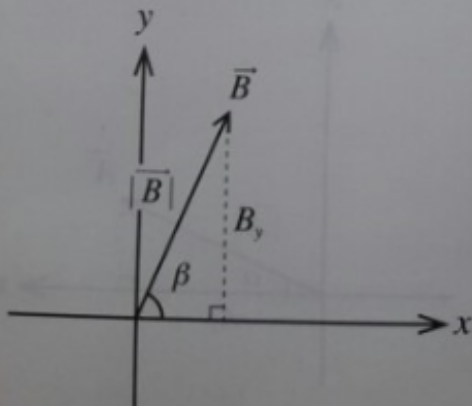
$\sin \alpha$ 는  $\sin$ 이 빗변 분의 가로로, 빗변은  $|\vec{A}|$ , 세로가  $A_y$ 니까



$$\sin \alpha = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$$

$\sin \beta$ 는 빗변이  $|\vec{B}|$ , 세로는  $B_y$ 니까

$$\sin \beta = \frac{B_y}{|\vec{B}|}$$



가 됩니다.”

“아주 잘했네. 그럼 이것을 덧셈정리의 식에 대입해보게나.”

“아까의 식은

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos (\beta - \alpha) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

← 삼각함수의 덧셈정리

였으니까 여기에 대입하면,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{A_x}{|\vec{A}|} \frac{B_x}{|\vec{B}|} + \frac{A_y}{|\vec{A}|} \frac{B_y}{|\vec{B}|} \\ &= \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| |\vec{B}|}\end{aligned}$$

어라? 이 식의 분자, 아까 내적 계산할 때랑 똑같잖아!”

“좋은 지적이네. 그럼 양변에  $|\vec{A}| |\vec{B}|$ 를 곱해서 분모를 없애보게나.”

“네.

$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

의 양변에  $|\vec{A}| |\vec{B}|$ 를 곱하면

$$\underbrace{A_x B_x + A_y B_y}_{\text{선형대수에서 정의하는 내적}} = \underbrace{|\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta}_{\text{기하학에서 정의하는 내적}}$$

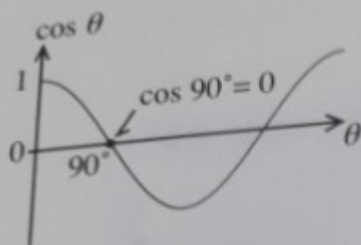
선생님, 이것도 내적에 대한 공식입니까?”

“그렇다네.  $\vec{A}$ 의 크기  $|\vec{A}|$ 와  $\vec{B}$ 의 크기  $|\vec{B}|$ 를 곱한 뒤에, 그 벡터 사이의 각  $\theta$ 의  $\cos$ 을 곱해주면 두 벡터의 내적( $A_x B_x + A_y B_y$ )이 된다는 걸 나타내는 식이지. 이 공식으로 두 벡터 사이의 각도와 내적의 관계를 알기 쉽다네.”

“그럼 두 벡터가 직각으로 교차하고 있을 때는 어떻게 되나요?”

“시험해보게나.”

“어디, 우선 직각으로 교차하고 있는 벡터부터 찾아내서... 잠깐, 직



각으로 교차하고 있으니  $\theta$ 는  $90^\circ$ 야. 그러면  $\cos 90^\circ$ 는 0이 되니까...

$$\begin{aligned} A_x B_x + A_y B_y &= |\vec{A}| |\vec{B}| \cos 90^\circ \\ &= |\vec{A}| |\vec{B}| \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

이렇게 해서 내적은 언제나 0이다."

이것으로 두 개의 벡터가 직각으로 교차할 때는 그 내적이 0이 된다는 걸 알았지. 거꾸로 그 내적이 0이 되는지 아닌지로 두 벡터가 직각으로 교차하는지 아닌지를 알 수 있다네  
앞으로의 모험에서는 이 법칙이 자주 나오니까 머릿속에 잘 입력해 두게나.

