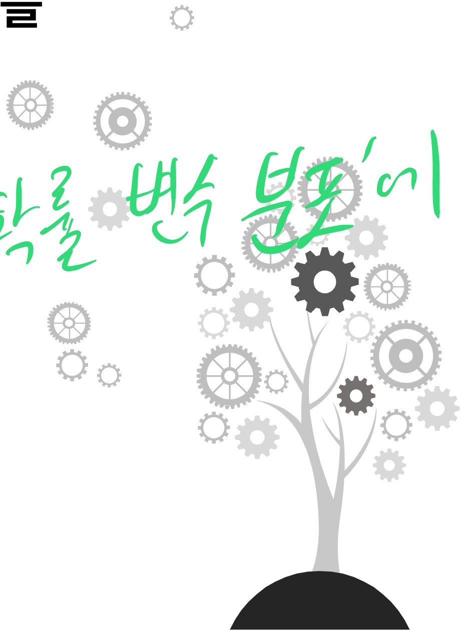
Contents

Chapter 7 이항분포와 그에 관련된 분포들

전부 '이산 확률 변수 분포'에 해당한다.



Chapter 7

이항분포와 그에 관련된 분포들

이산 확률 변수 분포 중 하나!!!

01 베르누이 시행

- 베르누이 시행 (Bernoulli trial) : 성공과 실패의 두 가지 중에서 하나가 나타나는 실험

① 베르누이 시행의 각 시행은 성공과 실패의 두 결과만을 갖는다.
② 각 시행에서 성공할 확률은 p, 실패할 확률은 $1-p$로 일정하다.
③ 각 시행은 서로 독립으로 서로 영향을 미치지 않는다.

독립시행

해당 실험의 근원사건으로만 표본공간은 두 개의 이뤄져 있음

$P(S)=p$, $P(F)=1-p$

성공 실패

둘 확률 합하면 '1'

- 예 : 동전을 1번 던져서 앞면이 나오는 실험
앞면이 나오면 성공(1), 뒷면이 나오면 실패(0)

성공을 확률변수로 나타낼 때, '1'로 나타냄

확률이 p라면

$\Omega = \{1, 0\}$ 이것의 확률은 $1-p$.

- 예제 1, 예제 2

확률 변수 X : 앞면이 나오는 횟수

X	0	1	합
P(X=x)	1/2	1/2	1

이항분포와 그에 관련된 분포들

- 베르누이 분포 (Bernoulli distribution) :
  X : 성공의 확률이 p인 베르누이 시행의 결과

  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$:
  확률변수 X는 모수가 p인 베르누이 분포를 따른다

* 베르누이 시행을 한 번할.

- X의 확률분포

X	$P(X=x)$
0 실패	$1-p$
1 성공	p
합계	1

X는 오직 0과 1.

$P(X=x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$

$E(X) = p$, $E(X^2) = \cancel{X}\ p$

$0^2 \times P(=0) + 1^2 \times P(=1)$
$= 1^2 \times P(=1) = 1^2 \times p$
$= p$

$Var(X) = p(1-p)$

$\hookrightarrow Var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$
$= p - p^2$
$= p(1-p)$

- 모수 p(베르누이 시행의 성공 확률)에 대해서 표본으로부터 추론

베르누이 시행이 이항분포를 따른다.

02 이항분포

베르누이 시행을 n번 시행했을 때, 'n번 중에서 성공의 수'를 확률변수로 갖는 분포.

여러번 시행

- 이항 분포 (Binomial distribution) :
  X : m번 베르누이 시행 중 성공의 수
  (각 베르누이 시행은 서로 독립이며 동일한 성공 확률 p를 가짐)

'이항분포'

$X \sim \text{Binomial}(m, p)$ or $X \sim \text{Bin}(m, p)$:

m=1 인 이항분포 <=> 베르누이 분포.

확률변수 X는 모수가 (m, p)인 이항분포를 따른다

'~분포를 따른다.'

- X의 확률분포

$$P(X = x) = \binom{m}{x} p^x \cdot (1 - p)^{m-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, m$$

$$E(X) = mp, \quad Var(X) = mp(1 - p)$$

- 모수 p(베르누이 시행의 성공 확률)에 대해서 표본을 이용하여 추론
- 모수 m(베르누이 시행의 시행 회수)는 처음부터 주어지는 정보

표본 집단에게 실험을 시켜 모수 p를 추론함

이항분포와 그에 관련된 분포들

예) $X \sim \text{Bin}(m=5, p=0.7)$

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \times 0.7^{1} \times 0.3^{5-1}$$

- 이항분포는 서로 독립이고 같은 분포를 갖는 베르누이 분포들의 합 ⇒ 즉, 여러번의 시행들이 서로 '독립'이다.

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i \sim \text{Bin}(m, p)$$

m: 총 시행 횟수

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), \quad i = 1, \cdots, m, \quad E(X_i) = p, \quad Var(X_i) = p(1-p)$ ← 베르누이 분포

$P(X_i = x_i) = \binom{1}{x_i} p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} = p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i}, \quad x_i = 0, 1$

X: m번 중 성공 횟수

⇒ 성공 횟수 : x번

('c'라고도 쓰임)

'여는 무조건 1'

$P(X=x) = \binom{m}{x} p^x \cdot (1-p)^{m-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, m$ ← 이항분포.

$E(X) = mp, \quad Var(X) = mp(1-p)$

ex) (1-p)·p·(1-p)·p·p …

이 경우같고 다른 경우도 존재한다.!

⇒ 그래서 조합이 곱해진다.

이항분포와 그에 관련된 분포들

- 부록 표-1

이항 분포의 확률 변수는 '성공 횟수'를 의미함.

부록에 있는 표:

$$P(X \le c) = \sum_{x=0}^{c} {}_{m}C_{x} \cdot p^{x}(1-p)^{m-x}, \; {}_{m}C_{x} = \binom{m}{x}$$

성공 횟수

시행수 C=성공횟수

	성공확률(p)
	$P(X \le c)$

ex) $X \sim Bin(3, 0.3)$

$P(X=2)$

$= P(X \le 2) - P(X \le 1)$

$X \sim \text{Bin}(m=3, p=0.3), \quad x = 0, 1, \cdots, m=3$

		$\cdots$	$p = 0.3$	$\cdots$
$m = 3$	$c = 0$		$P(X \le 0)$	
	$c = 1$		$P(X \le 1)$	
	$c = 2$		$P(X \le 2)$	
	$c = 3$		$P(X \le 3)$	

Chapter 7 이항분포와 그에 관련된 분포들

- 이항분포에서의 확률계산

부록 표-1의 확률표를 이용하여 아래의 확률들을 계산 가능

$p(1 \le x \le 4)$

$= p(x \le 4) - p(x \le 0)$

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a - 1)$$
$$P(a < X < b) = P(X \le b - 1) - P(X \le a)$$
$$P(a \le X < b) = P(X \le b - 1) - P(X \le a - 1)$$
$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$

$p(1 < x < 5)$

$= p(x \le 4) - p(x \le 1)$

$$P(X = a) = P(X \le a) - P(X \le a - 1)$$
$$P(X \ge a) = 1 - P(X \le a - 1)$$

'이산확률변수'이기 때문에 가능.

확률 계산 시, 부등호와 등호에 따른 차이에 주의

$p(1 \le x < 4)$

$p(2 < x \le 6) = p(x \le 6) - p(x \le 2) = p(x \le 3) - p(x \le 0)$

<유한한 모집단에서 비복원 추출하는 경우.>

03 초기하분포

N개
그룹1 D개
그룹2 N-D개

- 초기하분포 (Hypergeometric distribution) :
  X : D개의 원소로 이루어진 그룹 1과 $N-D$개의 원소로 이루어진 그룹 2에서 비복원추출한 m개의 표본 내 그룹 1의 원소의 수

  N : 총 원소의 개수
  D: 그룹1에 포함된 원소 개수

  X : m개 중 1번 그룹의 원소수

  유한 모집단의 개수

  $X \sim \text{Hypergeometric}(N, m, D)$:
  확률변수 X는 모수가 (N, m, D)인 초기하분포를 따른다

- X의 확률분포

$$P(X=x) = \frac{\binom{D}{x} \times \binom{N-D}{m-x}}{\binom{N}{m}}, \quad x = 0, 1, \cdots, m$$

=N
=m

$$\frac{{}_{D}C_{x} \times {}_{N-D}C_{m-x}}{{}_{N}C_{m}}$$

${}_{n}C_{m}$

= 모집단의 크기

N : 총 원소의 개수, D : 그룹 1의 원소의 수, $N-D$: 그룹 2의 원소의 수
m : 비복원추출한 표본의 개수, X : 표본 내 그룹 1의 원소의 수

(비복원 추출하는

Chapter 7 이항분포와 그에 관련된 분포들

- 초기하분포의 평균과 분산, 초기하분포의 이항분포 근사

Let $p = \frac{D}{N}$,

D: 그룹1의 원소의 개수

N: 총 원소의 개수

베르누이 분포와 형태가 비슷하지만, 절대 베르누이 분포가 아니다.

$$E(X) = m \cdot \frac{D}{N} = m \cdot p, \quad Var(X) = mp(1-p) \cdot \frac{N-m}{N-1} \xrightarrow{m < 0.05\,N} mp(1-p)$$

(if $N \to \infty$, $\frac{N-m}{N-1} \to 1$)

“N이 월등히 크다면”

(추출한 표본의 개수가 모집단의 크기의 5%보다 작다면.)

← 비복원 추출이기 때문!!!

$$\therefore X \sim \text{Hypergeometric}(N, m, D) \xrightarrow{m < 0.05\,N} \text{Bin}\left(m, p = \frac{D}{N}\right)$$

N(총 원소의 개수)이 m(비복원추출한 표본의 개수) 보다 월등히 크다면, 초기하분포에서의 각각의 비복원추출을 복원추출(베르누이 시행)로 볼 수 있다. 그러면 X를 m번 베르누이 시행 중 성공의 수로 취급할 수 있다.

So, 해당분포는 '이항분포'가 되어진다.