비례는 어떤 두 수가 일정한 비율로 가질 때 사용하는 말입니다. 'y는 x에 비례한다'라고 하면 이 두 수를 x와 y로 놓았을 때를 말하는 것입니다. 또 $x{:}y=1{:}2$ 를 방정식으로도 만들 수 있습니다.

1. 개요

[편집]

역함수의 일종으로, ① 두 변수가 있을 때 한 변수가 2배, 3배 되면 다른 한 변수도 2배, 3배 되는 경우 그 두 변수는 (정)비례 관계에 있다고 한다.[1] ② 반면 한 변수가 2배, 3배 될 때 다른 변수가 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{3}$배 된다면 두 변수는 반비례 관계에 있다고 한다.

식으로 나타내자면 a가 상수일 때 $y=ax$를 만족시키는 경우 두 변수 x, y는 정비례 관계에 있고, $y=\frac{a}{x}=ax^{-1}$를 만족시키는 경우 x, y는 반비례 관계에 있다. 간혹 분수만 나오면 무조건 반비례라고 써버리는 사람도 있는데, 분모가 비례상수일 경우는 정비례다. 다시 말해, 비례상수 그 자체는 비례·반비례 여부에 아무 영향을 주지 않는다. 예를 들어 $y=\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x$는 비례 관계이다. 단, 하나의 예외로 비례상수가 0일 경우 비례·반비례 관계가 무너진다.[2]

1.1. 정비례

[편집]

두 변수 x, y가 **정비례**한다(혹은 **비례**한다)고 함은 다음을 만족시키는 함수 f에 대하여 $y=f(x)$를 만족시킨다는 뜻이다.

> 임의의 k, x에 대하여 $f(kx)=kf(x)$

이 정의를 이용해 정비례하는 함수 f를 묘사하는 식을 구할 수 있다. $a=f(1)$로 두고 $x=1$을 대입하면 $f(k)=kf(1)=ak$, 혹은 $f(x)=ax$. 즉 정비례 관계의 함수는 상수항이 없는 일차함수이다.

비례관계의 정의는 역함수를 정의할 때 사용되기도 한다. 가령 지수함수를 $f(x)=x$에 대칭시키면 로그함수가 튀어나온다.

1.2. 반비례

[편집]

두 변수 x, y가 **반비례**한다고 함은 다음을 만족시키는 함수 f에 대하여 $y=f(x)$를 만족시킨다는 뜻이다.

> 0이 아닌 임의의 k, x에 대하여 $f(kx)=\frac{f(x)}{k}=k^{-1}f(x)$이다.

즉, 반비례는 역수에 비례한다는 뜻과 같은 말이며, 반비례 함수는 분수함수이다.

이때, 반비례 함수를 부정적분하면 자연로그가 나오며[3], 1에서 자연로그의 밑 e까지 정적분을 하면 1이 나온다.

반비례 함수의 그래프는 쌍곡선이다. 이 식을 이용해 쌍곡선의 방정식으로 변형시킬 수 있다.

반비례 관계의 항 중 분모가 자연수인 항을 모조리 더한 것을 '조화급수'라고 하며 여기서 자연로그를 뺀 부분을 모두 더하면 오일러-마스케로니 상수를 구할 수 있다.

2. 비례의 기호 ∝

[편집]

비례하는 함수 $y=kx$(k는 상수)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$y \propto x$

순서를 바꾸어 $x \propto y$와 같이 쓸 수도 있다.

마찬가지로 반비례하는 함수 $y=\frac{k}{x}$(k는 상수)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$y \propto \frac{1}{x}$