R
Time Series

인하대학교 데이터사이언스학과

김 승 환

swkim4610@inha.ac.kr

Time Series

- Discrete Time Series: 연도별 쌀 생산량, 월별 판매량 등으로 관측시간이 등간격인 경우 (equally spaced in time) 의 계열자료

- 시계열자료의 구성요인

전통적으로 시계열자료의 분석은 시계열이 여러 요인으로 구성되어 있다고 보는 견해가 있다. 그 요인으로 아래와 같은 요인을 고려한다.

1) 불규칙요인(irregular component): 시간에 따라 규칙적으로 움직이지 않는 Random한 요인으로 통계적인 방법으로 설명이 불가능한 요인이다.

2) 규칙요인(Regular component): 불규칙요인과는 반대로 규칙성을 가지는 요인이다.
   추세요인(trend component): 시간이 경과함에 따라 지속적으로 증가하거나 감소하는 요인으로 반드시 직선일 필요는 없다.
   계절요인(Seasonal component): 계절에 의한 주기적인 요인
   순환요인(Cycle component): 계절에 의한 주기적인 변동이 아니라 경기순환과 같이 큰 주기를 가지는 요인

Time Series

❑일반적인 *iid* Observation과 Time Series Data

$$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n \overset{iid}{\sim} F(x)$$

·독립 : 다른 확률변수들과 '독립'이여야 함.

위의 표현에서 Z_i 들은 서로 독립이고 같은 분포를 갖는 모집단에서 추출된 *n*개의 표본이란 의미로 이 경우 자료들은 관측순서에 상관없이 그 크기만이 관심의 대상이 되므로 이론전개가 용이하게 된다. (i.i.d: Identically, Independently Distributed)

← 예) '이전 2차'가 '다음 2차'에 영향을 끼치지 않는다.

하지만, 시계열 자료는 관측의 순서를 바꾸면 의미를 상실하게 되고 일반적으로 i번째 관측값은 i-1, i-2 등과 같이 과거의 관측값에 영향을 받는 구조을 보인다.
따라서, 시계열 자료는 일반적 i.i.d 관측값과 다르게 순서도 중요한 정보가 된다.

❑ Prediction과 Forecasting 의 차이

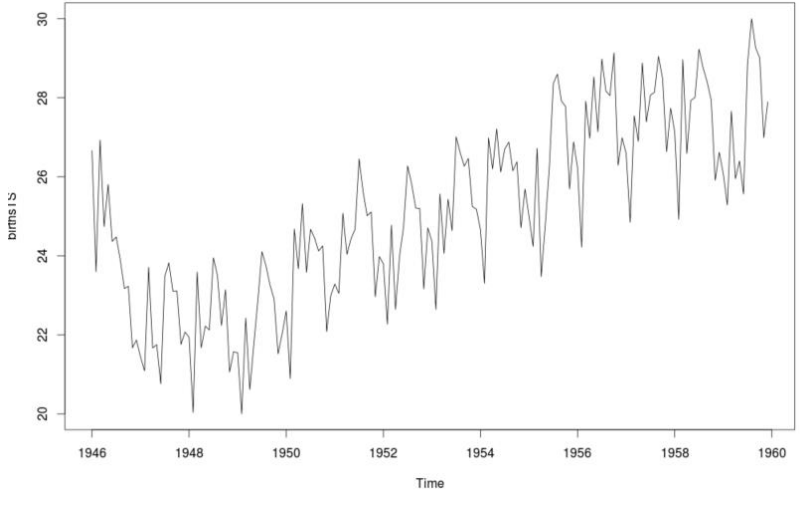
Prediction: 추측이라는 의미로 우리가 알지 못하는 미지의 값(하지만, 이미 결정되어 있는 값)을 객관적 방법으로 추측하는 것을 말한다.

Forecasting: 예측이란 의미로 우리가 알지 못하는 미지의 값(결정되어 있지 않음)의 객관적인 방법으로 추측하는 것을 말한다.

Time Series Plotting

An example is a data set of the number of births per month in New York city, from January 1946 to December 1959 (originally collected by Newton).
This data is available in the file http://robjhyndman.com/tsdldata/data/nybirths.dat

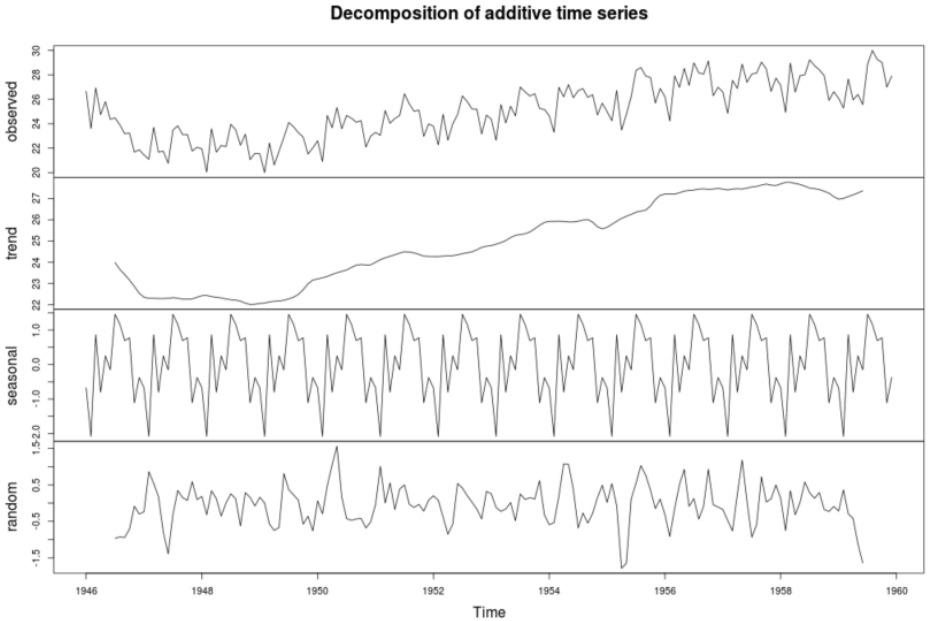
```
births <- scan("http://robjhyndman.com/tsdldata/data/nybirths.dat")
birthsTS <- ts(births, frequency=12, start=c(1946,1))
plot.ts(birthsTS)
```



Time Series Decomposing

Decomposing a time series means separating it into its constituent components, which are usually a trend component and an irregular component, and if it is a seasonal time series, a seasonal component.

```
birthsTSDecomp <- decompose(birthsTS)
plot(birthsTSDecomp)
```



Time Series Decomposing

시계열 분해 모형은 Additive Model과 Multiplicative Model이 있다.
아래는 시계열이 Trend 요소($\beta_0 + \beta_1 t$) 와 계절요소 $\sum_{i=1}^{s} \delta_i IND_{t=i}$ 그리고, 불규칙 요소가 덧셈 형태로 구성되어 있다는 가정이다.

$$Z_t = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 t}_{\text{trend}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \delta_i IND_{t=i}}_{\text{seasonal}} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{random.}}$$

또 다른 모형을 Multiplicative Model 으로 Trend, 계절요소, 불규칙요소가 서로 곱해져 있다는 가정이다. 승법 모형의 경우, 로그변환을 하면 가법모형이 된다.
그러므로 자료에 로그변환을 취한 후, 가법 모형으로 추정한 후, exp 함수로 복원하면 승법 모형을 구현할 수 있다.

$$Z_t = T_t \cdot S_t \cdot \varepsilon_t$$

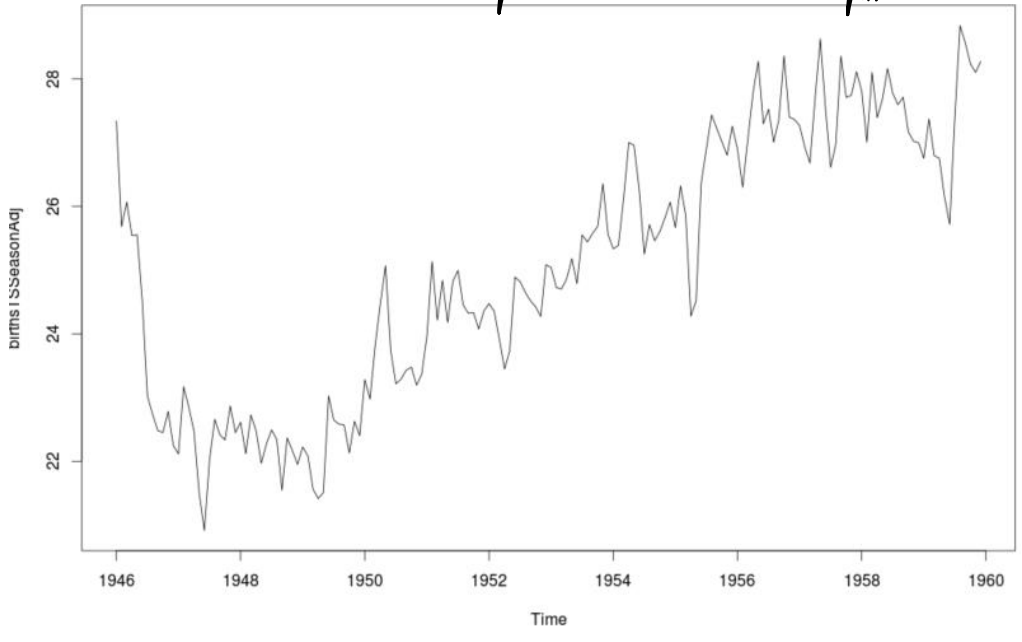
$$\log Z_t = logT_t + logS_t + log\varepsilon_t$$

Time Series Decomposing

Decomposing a time series means separating it into its constituent components, which are usually a trend component and an irregular component, and if it is a seasonal time series, a seasonal component.

```
birthsTSSeasonAdj <- birthsTS - birthsTSDecomp$seasonal
plot(birthsTSSeasonAdj)
```

birthsTSSeasonalTrendAdj ← birthsTS - birthsTSDecomp$seasonal - birthsTSDecomp$trend



Forecasting Methods

널리 사용되고 있는 시계열분석 방법은 아래와 같다.

1) 회귀분석방법(Regression method)
2) 평활법(Smoothing method)
3) 요소분해법(Decomposition method)
4) Box-Jenkin's 방법(ARIMA model)

회귀분석방법은 일반적으로 i.i.d. 데이터를 다룬다. 시계열 자료는 i.i.d.가 아니므로 자기상관이 있다는 가정하에 전개되는 회귀분석이론을 사용하게 된다.

평활법은 예측원점(Forecast origin)에서 가까운 관측값에는 큰 가중치를 주고 먼 관측치일수록 작은 가중치를 주는 일종의 가중평균을 이용하는 방법이다. 가중치를 주는 방법에 따라 이동평균법, 지수평활법으로 구분한다. 이들 방법은 이론적으로는 미흡한 점이 많으나 이해가 쉽고 계산이 용이한 방법이다.

3)의 요소분해법은 시계열 자료를 추세요인, 순환요인, 계절요인, 불규칙요인으로 분해하여 각각을 예측한 다음 다시 결합시키는 방법이다.

Box-Jenkin's 방법은 이론적으로 우수한 방법이고 또한 예측값이 가장 정확한 방법으로 널리 알려져 있는 방법이다. 그러나 이론적으로 이해가 어렵고 계산이 어려워 전문가들에 의해 주로 사용하는 방법이다.

Regression based Forecasting

❑ 회귀분석 방법

<1> $f(\bullet)$이 선형(linear)인 경우의 예

$$Y_t = \beta_0 + \varepsilon_t \qquad \text{constant mean model}$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t \qquad \text{simple linear regression model}$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2 + \varepsilon_t \qquad \text{Quadratic model}$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{1t}^2 + \beta_4 x_{2t}^2 + \beta_5 x_{1t} x_{2t} + \varepsilon_t$$

<2> $f(\bullet)$이 비선형(non-linear)인 경우의 예

$$Y_t = \beta_0 Sin(\beta_1 x_t) + \varepsilon_t$$

시계열 데이터를 위의 모형으로 적합하면 잔차가 독립이라는 회귀분석의 가정을 위배하게 된다. 그러므로, 잔차가 독립이 아닌 경우의 회귀분석 방법을 사용하여야 한다.
이 과정을 위해서는 잔차의 독립성 검정(Durbin and Watson Method)과 자기상관이 존재하는 회귀분석으로 Cochrane Orcutt, Yule and Walker 추정법을 사용한다.

Regression based Forecasting

❑ Durbin-Watson Statistic

일반적으로 회귀분석에서 1차 자기상관관계를 조사하는 방법으로 **Durbin-Watson Statistics**을 많이 사용하고 있다.

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \cong 2(1-r_1) \qquad r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$-1 \le r_1 \le 1$ 이므로 DW 는 0 ~ 4 사이에 있게 되고 $r_1 > 0$ 이면 $0 < DW < 2$, $r_1 < 0$ 이면 $2 < DW < 4$에 있게 된다.

DW는 1차 자기상관을 조사하는데는 효율적이나 2차 이상의 자기상관은 검사할 수 없다. 일반적으로 이와 같은 경우 SACF(r_k)를 구하여 이 값의 절대값이 $2/\sqrt{n}$ 보다 크면 자기상관관계가 그 시점에서 존재한다고 볼 수 있다.

$ACF(1) = Corr(e_t, e_{t-1})$

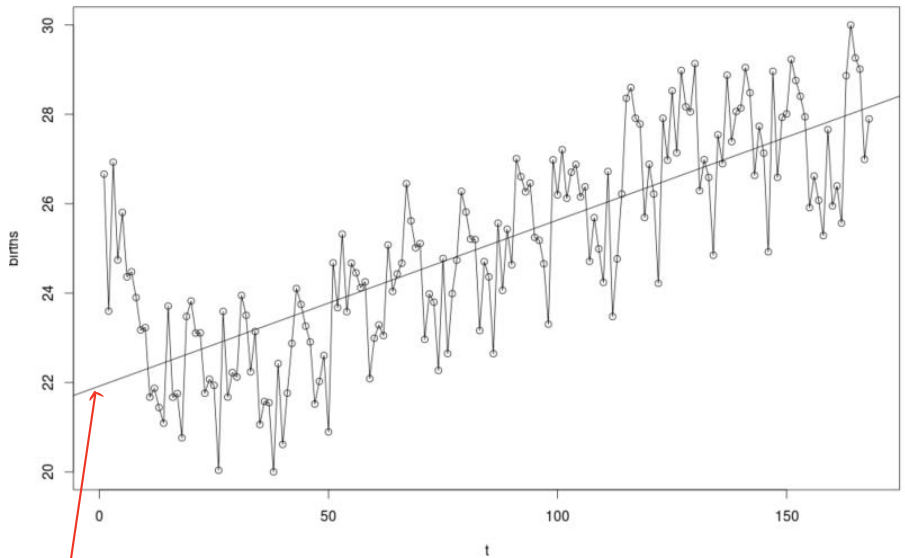
$''(2) = Corr(e_t, e_{t-2})$

Regression based Forecasting

```
t<-c(1:168)
reg1<-lm(births~t)
plot(t,births)
lines(t,births)
abline(reg1,col='red')
```

```
Call: lm(formula = births ~ t)
Coefficients: (Intercept) t
21.92028 0.03715
```

이 결과로 1960년 1월(169번째) 신생아의 수
예측값은 21.92 + 0.03715*169 = 28.2 가 된다.

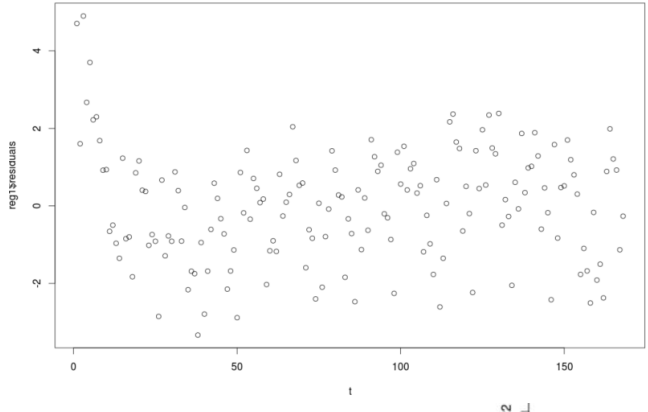


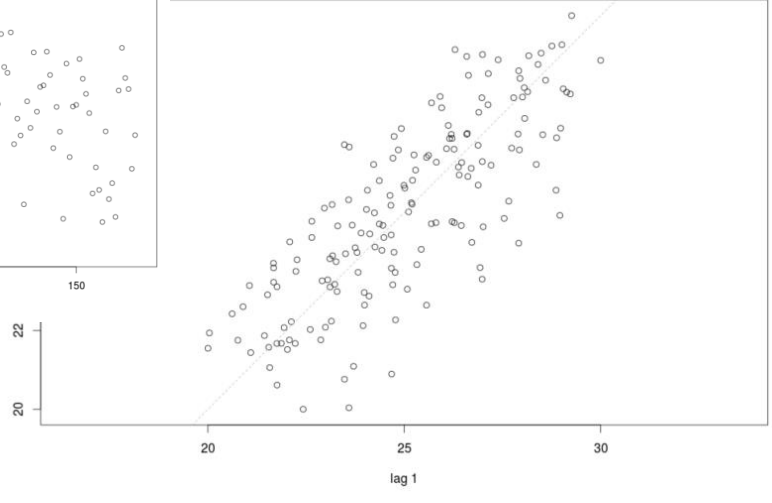
(일반적 자연현상에 deterministic trend가 존재할 가능성이 낮다.
대부분의 trend는 stochastic trend임.)
(ex) 취보)

Regression based Forecasting

```
plot(t,reg1$residuals)
lag.plot(birthsTS, 1)
library(lmtest)
dwtest(reg1)
```

```
Durbin-Watson test data: reg1 DW = 1.0733, p-value = 4.646e-10
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```





Cochrane-Orcutt Estimation

❑ Cochrane Orcutt Estimation

잔차에 자기 상관이 있다면, 해당 잔차는 random이 아닌 것임.

시계열 자료를 일반적 회귀분석으로 예측식을 만들어 잔차에 자기 상관이 존재할 때, 자기상관을 없애는 방법으로 아래와 같은 변수변환을 통해 회귀식을 추정하는 방법을 Cochrane Orcutt Estimation 이라고 한다.

$$Y_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\, Y_1$$

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1},\ t = 2, 3, \cdots, n$$

$$x_{1j}^* = \sqrt{1-\rho^2}\, x_{1j}$$

$$x_{tj}^* = x_{tj} - \rho x_{t-1,j},\ t = 2, 3, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, p$$

일반적으로 자료의 갯수가 큰 경우에는 첫번째 변환된 자료를 제외하게 되는데 이는 첫번째 변환과 다른 변환(두번째 이후의 변환)이 서로 다른 구조를 갖기 때문이다. 이러한 방법을 Cochrane & Orcutt 추정법이라고 하는데 이 방법은 오차항이 1 차 자기상관을 가질때 많이 사용되는 방법이다. 표본의 크기가 큰 경우 첫번째 관측치를 제거하는 것은 모수의 추정에 큰 영향을 줄 수 없다. 하지만, 표본의 크기가 작은 경우는 분산이 일반적인 회귀방법보다 클 수 있다. 특히, 설명변수가 추세를 가지는 경우에는 더욱 그러하게 된다.

Cochrane-Orcutt Estimation

ρ의 추정치는 일반적인 상관계수의 MME(Method of Moments Estimator) $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}$ 로 얻을수

있고 여기서, e_t는 (2.6)식의 OLS 추정에 의한 잔차(Residual)이다.

```
reg2<-cochrane.orcutt(reg1)
reg2
```

```
Cochrane-orcutt estimation for first order autocorrelation
 Call:
lm(formula = births ~ t)
 number of interaction: 3
 rho 0.431913

Durbin-Watson statistic
(original):    1.07328 , p-value: 4.646e-10
(transformed): 2.31604 , p-value: 9.759e-01
  coefficients:
(Intercept)           t
  21.719459    0.038898
```

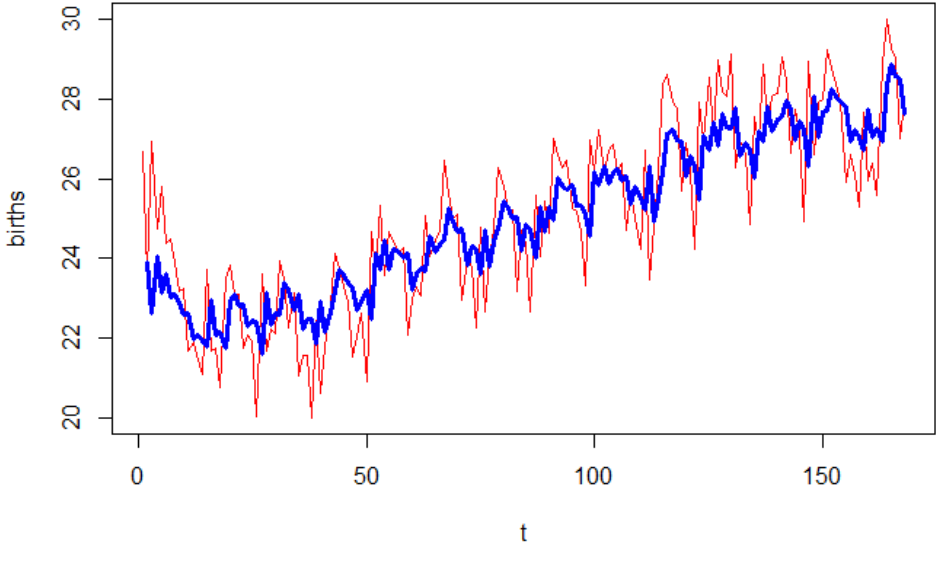
$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{\rho} Y_t + \hat{\alpha}(1 - \hat{\rho}) + \hat{\beta}(X_{t+1} - \hat{\rho} X_t)$$

$$\hat{Y}_{t+1} = 0.43 Y_t + 21.72(1 - 0.43) + 0.038(X_{t+1} - 0.43 X_t)$$

Cochrane-Orcutt Estimation

```
lag <- function(x)c(NA, x[1:(length(x)-1)])
births1<-lag(births)
birthsEst<-0.43*births1 + 21.72*(1-0.43) + 0.038*(t-0.43*(t-1))
plot(t,births,type="l",col="red")
lines(t,birthsEst,col="blue", lwd = 3)
births169<-0.43*27.897 + 21.72*(1-0.43) + 0.038*(169-0.43*168)
```

169주차 출산수는 28.05로 예측할 수 있다.



Exponential Smoothing

❑ Simple Exponential Smoothing

지수평활법은 일종의 가중평균법이다. 즉, t 번째의 시계열 값은 그 전의 시계열값의 가중평균으로 나타내는 모형인데 이 때, 가중치는 과거로 갈수록 지수적으로 감소(exponentially decay)하는 가중치를 선택하는 방법이다.

이때에는 과거의 관측치 보다는 최근의 관측치에 좀 더 많은 가중치를 주는 방법을 생각할 수 있는데 만약, 선택한다면 n번째 데이터가 주어졌을 때, 그 이후 l 번째 예측값은 아래와 같이 추정할 수 있다. Simple Exponential Smoothing은 평균이 시간에 대해 거의 일정하거나 천천히 변하는 자료에 적합하다.

$$Z_n(l) = c\sum_{t=0}^{n-1}(1-w)^t Z_{n-t}$$

$$= c[Z_n + (1-w)Z_{n-1} + \cdots + (1-w)^{n-1}Z_1]$$

여기서, w는 평활상수라고 하고 대개 0.05~0.3 사이의 값이 많이 사용된다.

c는 이 가중치의 합이 "1"이 되도록 조정해주는 상수로 w가 결정되면 아래의 식으로 구한다.

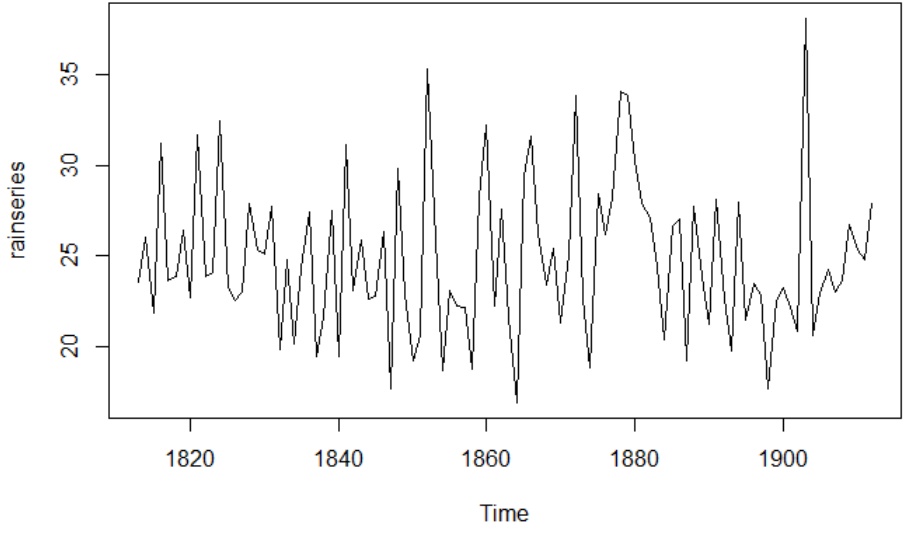
$$c = \frac{1}{\sum_{t=0}^{n-1}(1-w)^t} = \frac{1}{\frac{1(1-(1-w)^{n-1})}{1-(1-w)}} \xrightarrow{n->\infty} w$$

$L_{20}(2)$를 구할 때, '$x_{50}(1)$'을 사용함.

Exponential Smoothing

For example, the file http://robjhyndman.com/tsdldata/hurst/precip1.dat contains total annual rainfall in inches for London, from 1813-1912.

```
# Simple Exponential Smoothing
rain <- scan("http://robjhyndman.com/tsdldata/hurst/precip1.dat",skip=1)
rainseries <- ts(rain,start=c(1813))
plot.ts(rainseries)
```

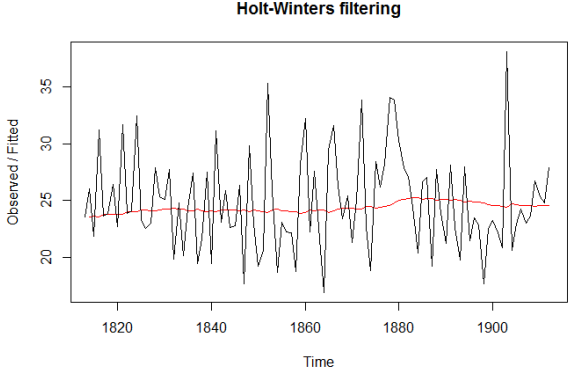


Exponential Smoothing

```
rainSeriesForecasts <- HoltWinters(rainSeries, beta=FALSE, gamma=FALSE)
rainSeriesForecasts
plot(rainseriesforecasts)
```

```
Holt-Winters exponential smoothing without trend and without seasonal
component.
Call: HoltWinters(x = rainSeries, beta = FALSE, gamma = FALSE)
Smoothing parameters:
alpha: 0.02412151 beta : FALSE gamma: FALSE
```

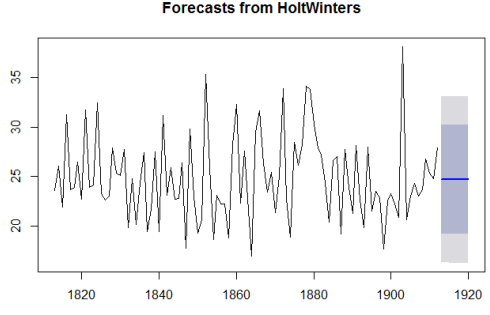
위의 결과로 부터 w는 0.024의 값이 예측오차 제곱합을 최소화하는 평활상수로 추정되었다.



Exponential Smoothing

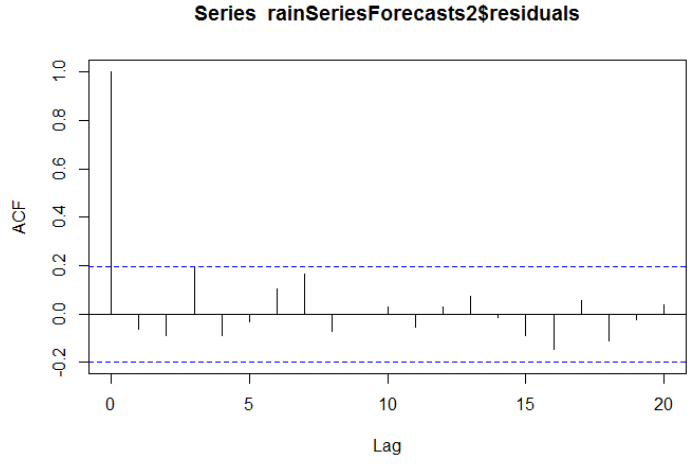
```
library(forecast)
rainSeriesForecasts2 <- forecast(rainSeriesForecasts, h=8)
rainSeriesForecasts2
plot(forecast(rainSeriesForecasts2))
```

```
     Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
1913 24.67819 19.17493 30.18145 16.26169 33.09470
1914 24.67819 19.17333 30.18305 16.25924 33.09715
1915 24.67819 19.17173 30.18465 16.25679 33.09960
1916 24.67819 19.17013 30.18625 16.25434 33.10204
1917 24.67819 19.16853 30.18785 16.25190 33.10449
1918 24.67819 19.16694 30.18945 16.24945 33.10694
1919 24.67819 19.16534 30.19105 16.24701 33.10938
1920 24.67819 19.16374 30.19265 16.24456 33.11182
```



Exponential Smoothing

```
acf(rainSeriesForecasts2$residuals, lag.max=20, na.action = na.pass)
```



잔차에 대한 ACF(Autocorrelation Function)에서 lag > 0 인 부분의 ACF 값이 작아 예측이 잘 이루어졌음을 알 수 있다.

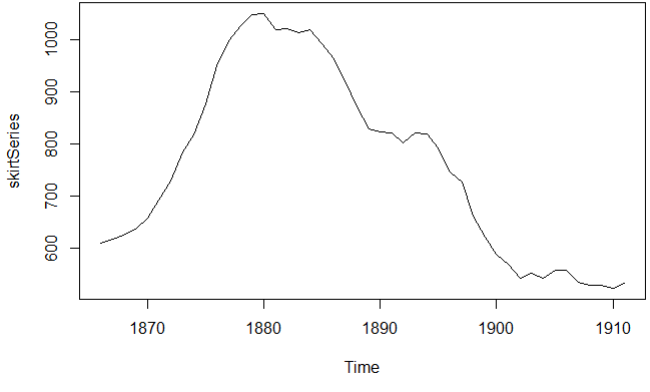
Exponential Smoothing

❑ Double Exponential Smoothing

Double Exponential Smoothing은 stochastic trend가 존재하는 시계열에 적합한 방법이다.

Time series of the annual diameter of women's skirts at the hem(밑단), from 1866 to 1911. The data is available in the file http://robjhyndman.com/tsdldata/roberts/skirts.dat

```
# Double Exponential Smoothing
skirts <- scan("http://robjhyndman.com/tsdldata/roberts/skirts.dat",skip=5)
skirtSeries <- ts(skirts,start=c(1866))
plot.ts(skirtSeries)
```

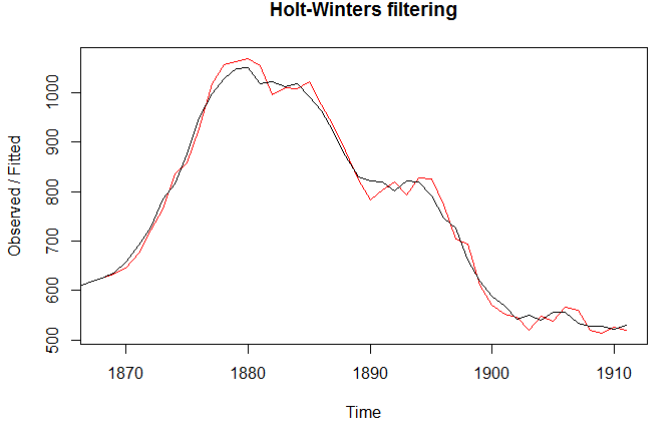


Exponential Smoothing

```
skirtSeriesForecasts <- HoltWinters(skirtSeries, gamma=FALSE)
skirtSeriesForecasts
plot(skirtSeriesForecasts)
```

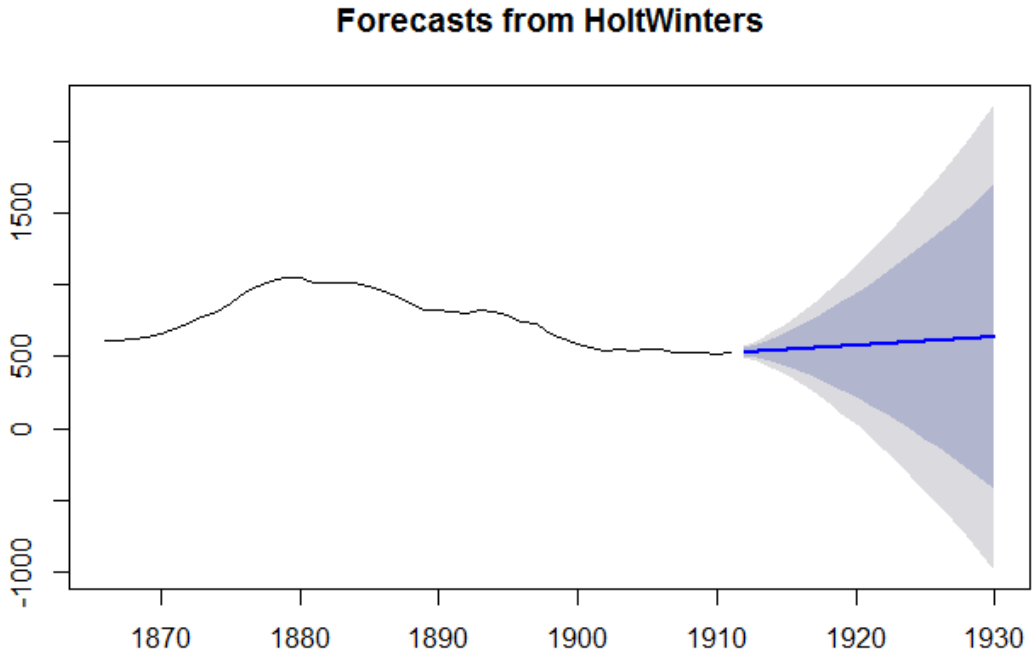
```
Holt-Winters exponential smoothing with trend and without seasonal
component. Call: HoltWinters(x = skirtSeries, gamma = FALSE)
Smoothing parameters:
alpha: 0.8383481
beta : 1
gamma: FALSE
```

beta : 1 ~ software가 스스로 결정하는 값



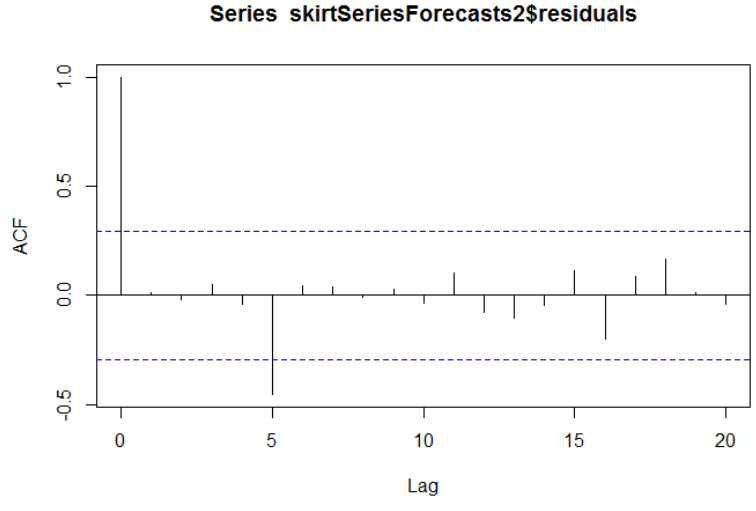
Exponential Smoothing

```
skirtSeriesForecasts2 <- forecast(skirtSeriesForecasts, h=19)
plot(forecast(skirtSeriesForecasts2))
```



Exponential Smoothing

```
acf(skirtSeriesForecasts2$residuals, lag.max=20, na.action = na.pass)
```



Exponential Smoothing

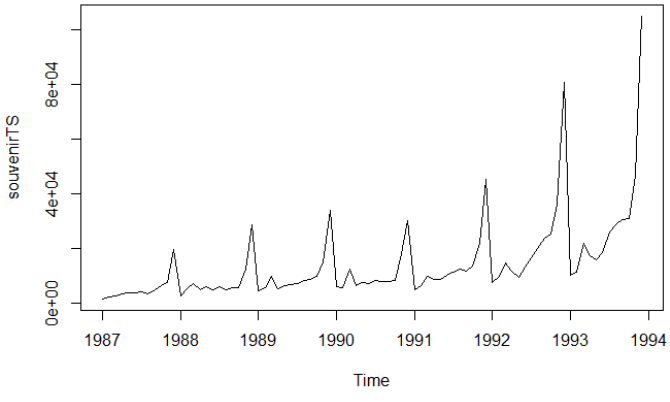
❑ Holt & Winter Exponential Smoothing

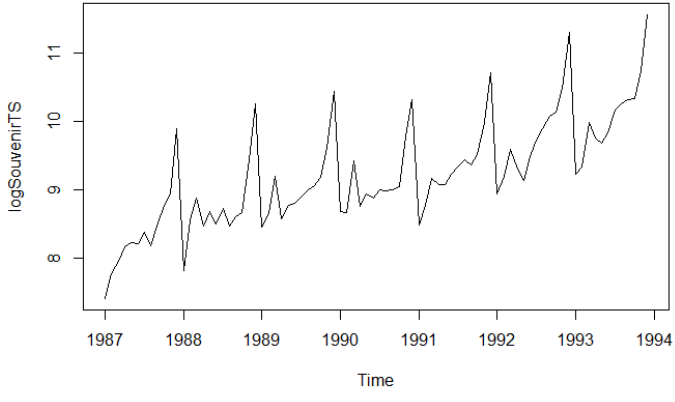
Holt & Winter Exponential Smoothing 은 stochastic trend와 계절성이 존재하는 시계열에 적합한 방법이다.

An example of a time series that can probably be described using an additive model with a trend and seasonality
is the time series of the log of monthly sales for the souvenir shop at a beach resort town in Queensland, Australia

```
# Holt and Winter Seasonal Exponential Smoothing
souvenir <- scan("http://robjhyndman.com/tsdldata/data/fancy.dat")
souvenirTS <- ts(souvenir, frequency=12, start=c(1987,1))
plot.ts(souvenirTS)
logSouvenirTS <- log(souvenirTS)
plot.ts(logSouvenirTS)
```

Exponential Smoothing



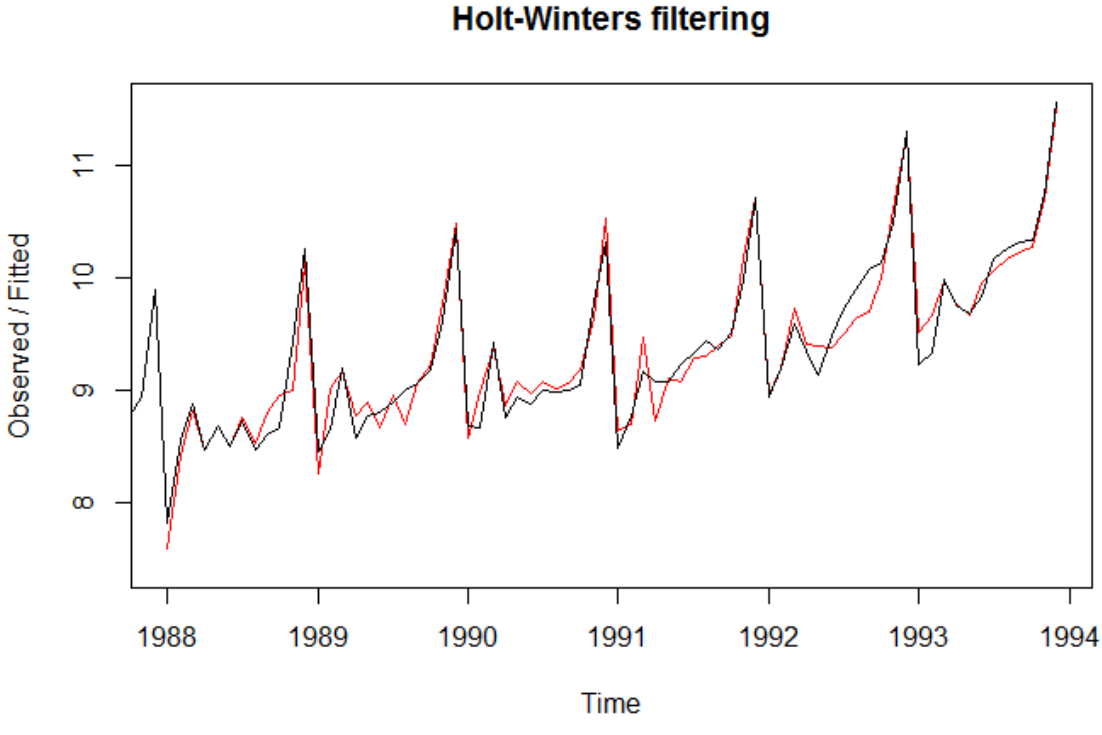



```
souvenirTSForecasts <- HoltWinters(logSouvenirTS)
souvenirTSForecasts
```

```
Holt-Winters exponential smoothing with trend and additive seasonal
component.
Call: HoltWinters(x = logSouvenirTS)
Smoothing parameters: alpha: 0.413418 beta : 0 gamma: 0.9561275
```

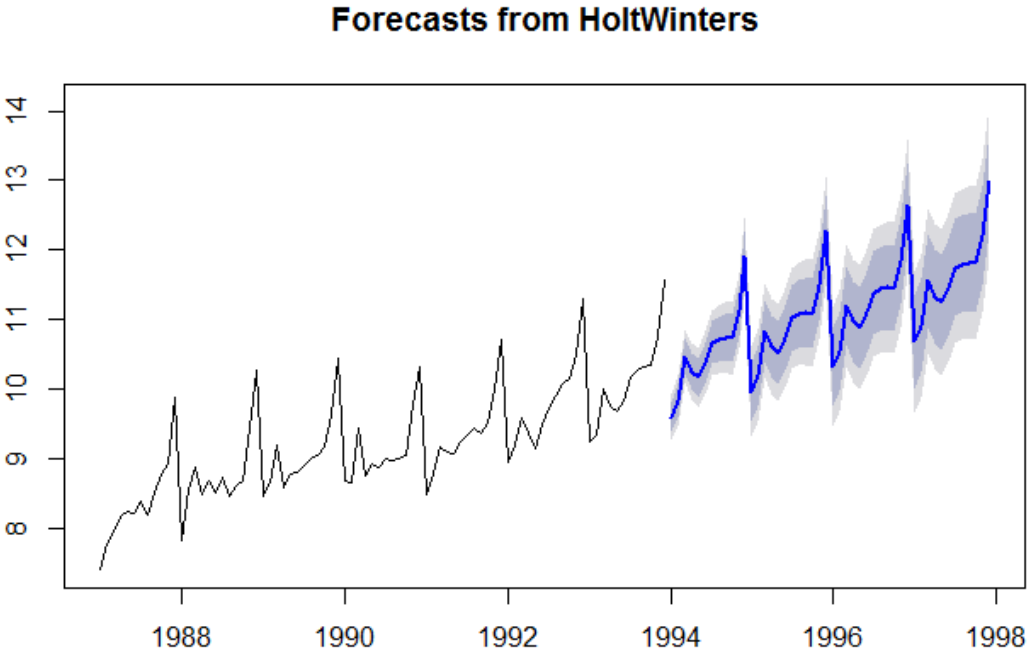
Exponential Smoothing

```
plot(souvenirTSForecasts)
```



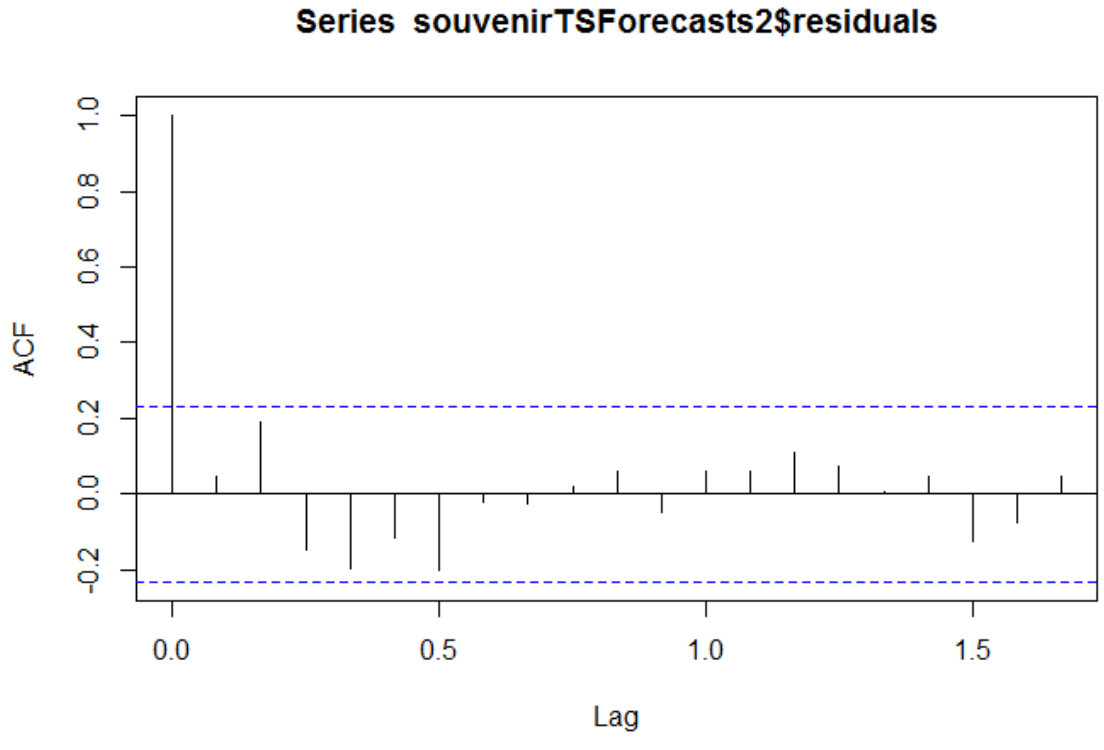
Exponential Smoothing

```
souvenirTSForecasts2 <- forecast(souvenirTSForecasts, h=48)
plot(forecast(souvenirTSForecasts2))
```



Exponential Smoothing

```
acf(souvenirTSForecasts2$residuals, lag.max=20, na.action = na.pass)
```



ARIMA Model

ARIMA: Auto-Regressive Integrated Moving Average

- *Stationary Process:* 엄격한 의미의 정상시계열은 시계열의 확률적인 성질들이 시간의 흐름에 따라 불변하는 시계열을 말한다.

$$f(z_{t_1}, z_{t_2}, \cdots, z_{t_n}) = f(z_{t_1+k}, z_{t_2+k}, \cdots, z_{t_n+k})$$

정상시계열은 모든 시간 t에서 평균과 분산이 일정하고 공분산과 상관계수는 시차 k에만 영향을 받게 된다.

- *Weakly Stationary Process:* 실제 상황에서 시계열이 정상성을 만족하는지 알 수 없기 때문에 모든 시간 t에 대하여 평균과 분산이 일정한지를 파악하여 정상시계열로 간주한다.

First order Autoregressive process : AR(1) (Markov process)

$$Z_t - \mu = \phi(Z_{t-1} - \mu) + a_t$$

a_t : White Noise

시계열 값에서 평균을 빼주면 $Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$ 으로 표현 가능하다. 이를 확장하면 AR(p)는 $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$ 로 쓸 수 있다.

백색잡음이란 Pure Noise의 의미로 더 이상 분해할 수 없는 Random한 프로세스를 의미한다.

ARIMA Model

First order Moving Average process : MA(1)

$Z_t - \mu = a_t - \theta a_{t-1}$

MA(q)는 $Z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$ 로 쓸 수 있다.

ARMA(p,q) process

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

이 모형은 모두 Stationary Process에서 사용할 수 있는 모형이다.
만약, 시계열이 Non-Stationary Process 라면 위의 모형을 직접적으로 사용할 수 없다.
일반적으로 Non-Stationary Process는 차분(difference)을 통해 Stationary Process로 변환할 수 있다.

↑ 현재 시점의 값과 이전 시점의 값 차이

$$\text{First order Difference : } \nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

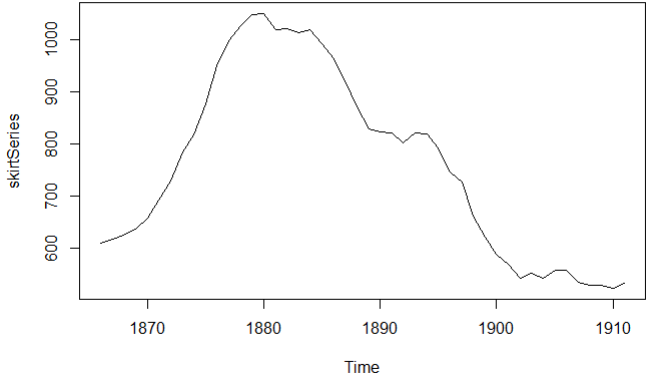
$$\text{Second order Difference : } \nabla^2 Z_t = \nabla Z_t - \nabla Z_{t-1}$$

시계열을 차분하고 그래프를 그려서 시간에 따라 평균과 분산이 일정하게 변환이 되었다면 정상시계열로 변환되었다고 판단한다.

ARiMA(p,d,q) process : d차 차분 후, ARMA(p,q)로 표현 가능한 모형을 말한다.

ARIMA Model

diameter of women's skirts at the hem



위의 시계열은 Non-Stationary process로 보인다. 차분을 통해 Stationary Process로 변환해보자.

```
skirtSeriesD1 <- diff(skirtSeries, differences=1)
plot.ts(skirtSeriesD1)
skirtSeriesD2 <- diff(skirtSeries, differences=2)
plot.ts(skirtSeriesD2)
```

ARIMA Model

AR(1) 모형 $Z_t = \emptyset Z_{t-1} + a_t$에서 $\emptyset = 1$ 인 시계열을 Random Walk 모형이라고 하는데
이 경우, AR 모형을 적용할 수 없다.
아래 식에서 $\emptyset = 1$ 인 경우, γ_0 는 정의할 수 없다. 또한, ρ_k=1이 된다.
이를 검정하기 위해 Dickey-Fuller 검정을 사용한다.

$$\gamma_0 = Cov(Z_t, Z_t) = V(Z_t) = V(\emptyset Z_{t-1} + a_t) = \emptyset^2 V(Z_{t-1}) + \sigma^2 = \emptyset^2 \gamma_0 + \sigma^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \emptyset^2} \to \infty$$

$$\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t-k}) = E(Z_t \cdot Z_{t-k}) = E(\emptyset Z_{t-1} Z_{t-k} + Z_{t-k} a_t) = \emptyset \gamma_{k-1} = \emptyset^k \gamma_0$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\emptyset^k \gamma_0}{\gamma_0} = \emptyset^k, \text{ if } \emptyset = 1, \rho_k = 1$$

ARIMA Model

Dickey-Fuller 검정은 $H_0: \emptyset = 1, H_1: |\emptyset| < 1$ 을 검정하는 문제로 아래 식에서 $\gamma = \emptyset - 1 = 0$ 인지를 검정하는 문제다.

OLS 추정을 통해 γ 를 추정하고 $DF = \frac{\hat{\gamma}}{SE(\hat{\gamma})}$ 값을 구해 검정통계량과 비교해 stationary 여부를 판단한다.

$$Z_t = \emptyset Z_{t-1} + a_t$$

$$Z_t - Z_{t-1} = \emptyset Z_{t-1} - Z_{t-1} + a_t = (\emptyset - 1) Z_{t-1} + a_t$$

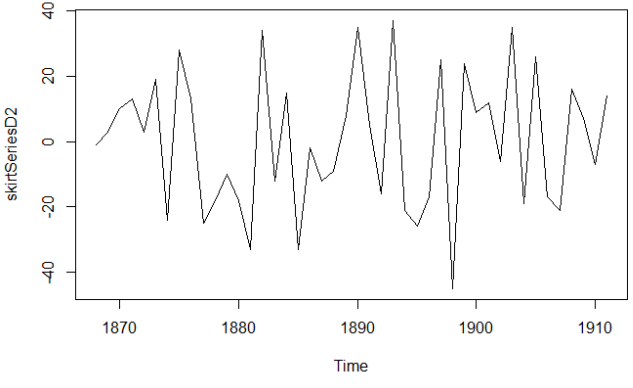
$$H_0: \gamma = 0, H_1: \gamma < 0$$

$$DF = \frac{\hat{\gamma}}{SE(\hat{\gamma})}$$

ARIMA Model

Difference=1

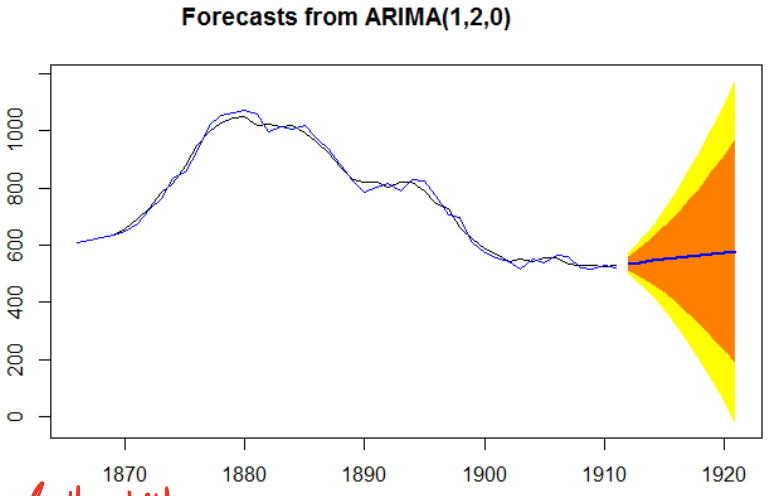
Difference=2



3차 차분의 결과는 어느 정도 Stationary Process로 간주할 수 있다.
그러므로, ARIMA(p,3,q) 모형을 사용할 수 있다. p, q는?

```
library(forecast)
fit<-auto.arima(skirtSeries)
forecast(fit, level=c(95), h=8)
plot(forecast(fit), shadecols="oldstyle")
lines(fitted(fit),col="blue")
```

ARIMA Model



(p, q)를 결정하는 trendy한 방법

auto.arima는 여러가지, p, q를 대입해 예측오차를 계산한 결과, ARIMA(1,2,0)을 최적의 모형으로 선정하였다. auto.arima는 AIC 최소화하는 모형을 자동으로 선정한다.

ARIMA Model

```
Series: skirtSeries ARIMA(1,2,0)
Coefficients:
ar1 -0.2997
s.e. 0.1424
sigma^2 estimated as 388.7:
log likelihood=-193.66 AIC=391.33 AICc=391.62 BIC=394.9
```

$\cdot z_t = -0.2997 \cdot z_{t-1} + a_t$ ~ $a_t \sim N(0,)$

$\cdot z_{t+1} = -0.2997 \cdot z_t + 0$ — 0으로 예측 잘 합당함

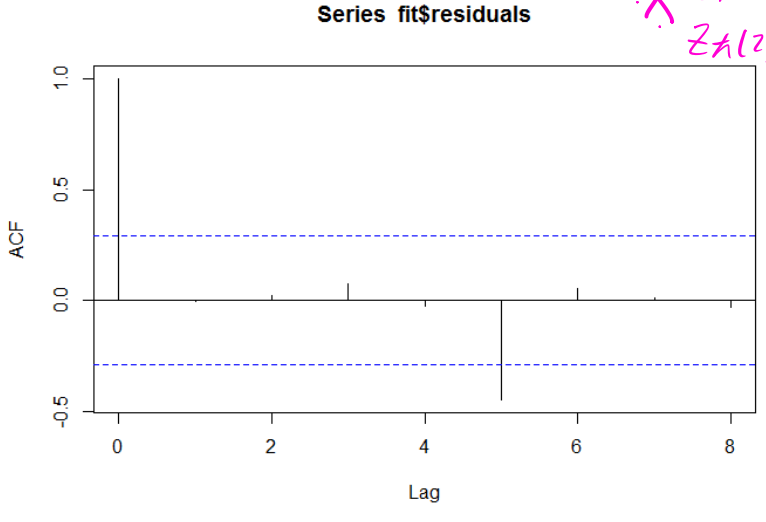
$\cdot z_t(1) = -0.2997\, z_t$

$\cdot z_t(2) = -0.2997 \cdot z_t(1)$

```
acf(fit$residuals, lag.max=8)
```

$\cdot z_t(1) = \hat{z}_{t+1}$

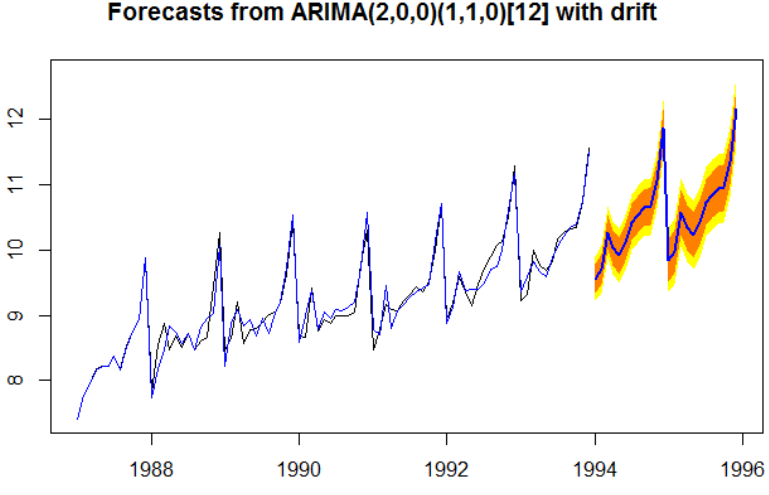
$z_t(2) = \hat{z}_{t+2}$



ARIMA Model

```
souvenir <- scan("http://robjhyndman.com/tsdldata/data/fancy.dat")
souvenirTS <- ts(souvenir, frequency=12, start=c(1987,1))
plot.ts(souvenirTS)
logSouvenirTS <- log(souvenirTS)
plot.ts(logSouvenirTS)
fit<-auto.arima(logSouvenirTS)
forecast(fit, level=c(95), h=8)
plot(forecast(fit), shadecols="oldstyle")
lines(fitted(fit),col="blue")
```

auto.arima 가 자동으로
계절모형을
고려해서 예측해준다.



ARIMA Model

auto.arima 대신 수동으로 직접 (p,d,q)(P,D,Q)s 를 지정해서 모형을 적합할 수 있다.
아래의 코드는 ARIMA(1,0,0)(1,1,0)12 로 적합한 예이다.

domain 지식으로 결정함

```
souvenir <- scan("http://robjhyndman.com/tsdldata/data/fancy.dat")
souvenirTS <- ts(souvenir, frequency=12, start=c(1987,1))
plot.ts(souvenirTS)
logSouvenirTS <- log(souvenirTS)
ARIMAForecast<-Arima(logSouvenirTS, order=c(1,0,0), seasonal=c(1,1,0))
forecast(ARIMAForecast, level=c(95), h=8)
plot(forecast(ARIMAForecast), shadecols="oldstyle")
lines(fitted(ARIMAForecast),col="blue")
```

```
Series: logSouvenirTS ARIMA(1,0,0)(1,1,0)[12]
Coefficients: ar1    sar1
           0.8579 -0.1868
      s.e. 0.0663  0.1434
sigma^2 estimated as 0.04255:
log likelihood=10.64 AIC=-15.29 AICc=-14.94 BIC=-8.46
```

독립변수 'X'

ARIMAX

ARIMAX는 독립변수(외생변수)가 존재하는 경우의 ARIMA 모형이다.

일반적으로 여러 개의 시계열 변수가 서로 연관되어 움직이는 경우가 많다.

R에서는 Arima 함수에서 아래와 같은 명령을 통해 사용할 수 있다.

```
fit <- Arima(y, xreg=x, order=c(1,1,0))
```

차분에 의해 회귀식은 아래 식이 되고 상수항은 차분에 의해 사라진다.

만약, 상수항을 넣으려면 include.drift=TRUE 옵션을 사용해야 한다.

$$y'_t = \beta_1 x'_t + \eta'_t \quad \eta'_t = \phi_1 \eta'_{t-1} + \varepsilon_t \text{는 AR(1) 오차}$$

ARIMAX

아래는 소비액과 개인소득의 분기별 시계열 자료다.

```
library(fpp2)
autoplot(uschange[,1:2], facets=TRUE) +
  xlab("연도") + ylab("") +
  ggtitle("미국 소비와 개인 소득의 분기별 변화")
```

ARIMAX

Income을 X로 두고 소비액을 Y로 회귀한 결과 auto.arima 모형은 arima(1,0,2)를 선택했다.

```
fit <- auto.arima(uschange[,"Consumption"], xreg=uschange[,"Income"])
fit
```

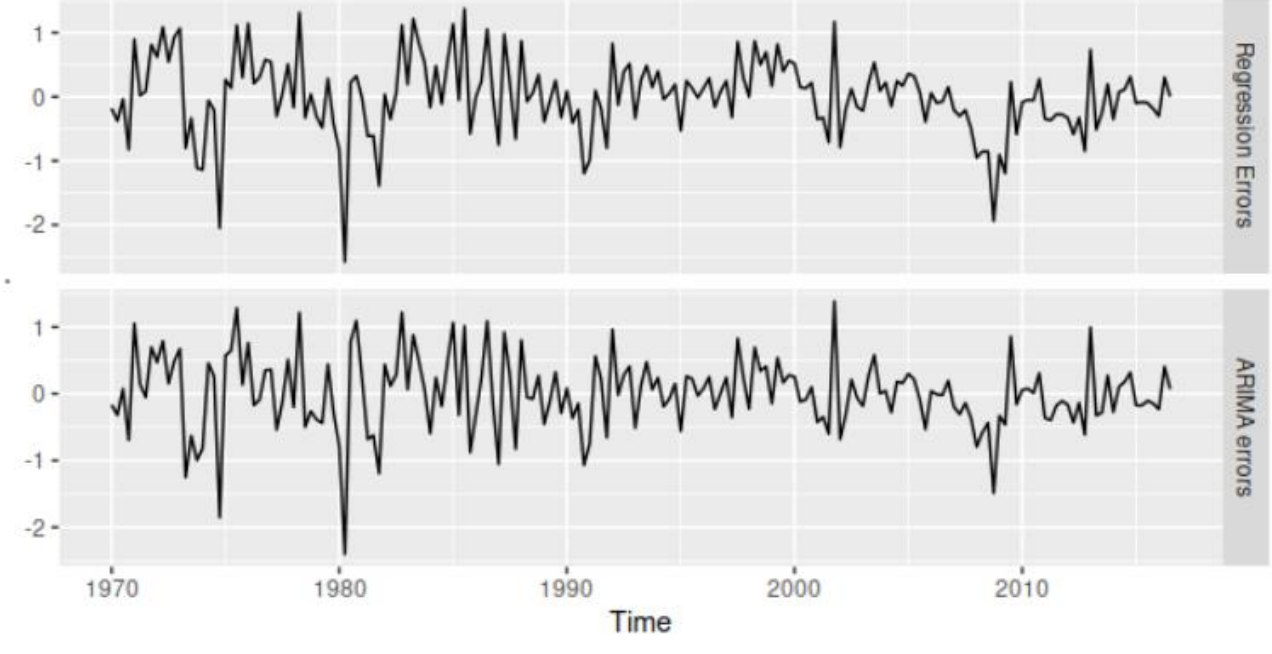
```
Series: uschange[, "Consumption"]
Regression with ARIMA(1,0,2) errors

Coefficients:
         ar1      ma1     ma2  intercept    xreg
      0.692  -0.576  0.198       0.599  0.203
s.e.  0.116   0.130  0.076       0.088  0.046

sigma^2 estimated as 0.322:  log likelihood=-156.9
AIC=325.9   AICc=326.4   BIC=345.3
```

$$
\begin{aligned}
y_t &= 0.599 + 0.203x_t + \eta_t, \\
\eta_t &= 0.692\eta_{t-1} + \varepsilon_t - 0.576\varepsilon_{t-1} + 0.198\varepsilon_{t-2}, \\
\varepsilon_t &\sim \text{NID}(0, 0.322).
\end{aligned}
$$

ARIMAX

잔차 그림이 회귀모형보다 더 i.i.d. 에 가까운 것을 알 수 있다.

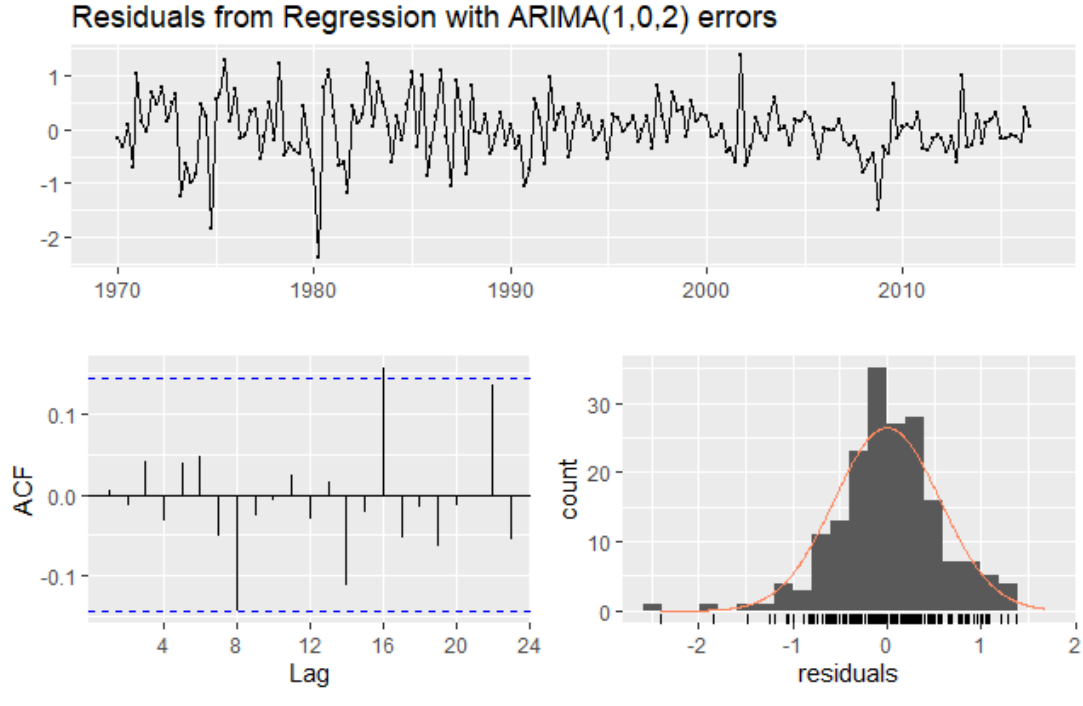
```
cbind("Regression Errors" = residuals(fit, type="regression"),
      "ARIMA errors" = residuals(fit, type="innovation")) %>%
  autoplot(facets=TRUE)
```



ARIMAX

잔차가 백색잡음의 성질을 만족하는지 알아보자.

checkresiduals(fit)



"다를 이"

ARCH ← 'GARCH'로 가기위한 중간단계일 뿐

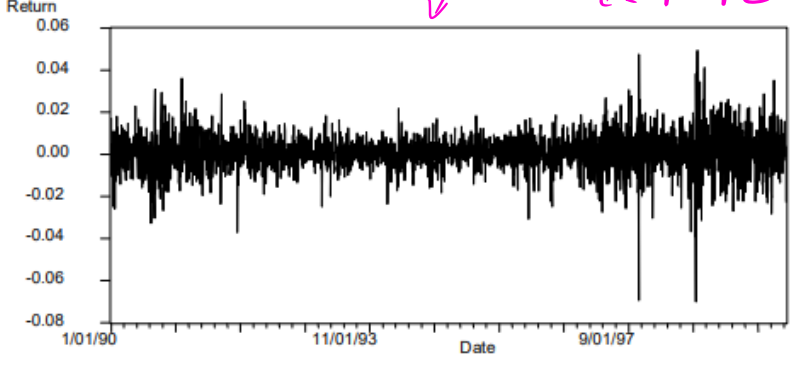
조건부 이분산성 (특정 범위에서 분산이 달라짐)

ARCH(AutoRegressive Conditional Hetroskedasticity) 모형은 오차의 분산이 변하는 변동성 모형이다. 아래 시계열은 분산이 변하는 것을 알 수 있다.

이 경우, ARIMA 모형을 사용할 수 없다.

아래 식은 ARCH(q) 모형이다.

'difference'를 했음에도 불구하고 분산이 다른 부분이 발견됨.



$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + \ldots + \gamma_k X_{kt} + e_t, \quad e_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q e_{t-q}^2 \rightarrow \text{ARCH(q)}$$

GARCH

GARCH 모형은 ARCH 모형을 개선한 모형으로 대부분의 경우, GARCH: Generalized ARCH 모형을 사용한다.

ARCH 모형은 q 값을 결정하기 어려운 문제와 q가 커져 추정해야할 모수가 증가하는 문제점을 가지고 있는 반면 GARCH는 그렇지 않다.

아래 GARCH 모형은 GARCH(1,1) 이다.

GARCH(p, q) 모형은 아래 우측 모형이다.

$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + \ldots + \gamma_k X_{kt} + e_t, \quad e_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q e_{t-q}^2 \rightarrow \text{ARCH(q)}$$

$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + \ldots + \gamma_k X_{kt} + e_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\, e_{t-1}^2 + \beta\, \sigma_{t-1}^2$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-i}^2$$

p : 는 GARCH 항의 차수, q : ARCH 항의 차수