

1. 유리함수의 기본형

★ $y = \frac{1}{x}$

중학교 1학년 때 배웠던 반비례 함수가 바로 고1 수2 유리함수의 기본적인 형태가 된다.
분수식은 분모가 0이 될 수 없으므로 이 유리함수는 $x=0$ 의 값을 가질 수 없게 된다.
그러므로 정의역은 다음과 같다.

$\{x | x \neq 0 \text{인 실수}\}$

그럼 치역은?

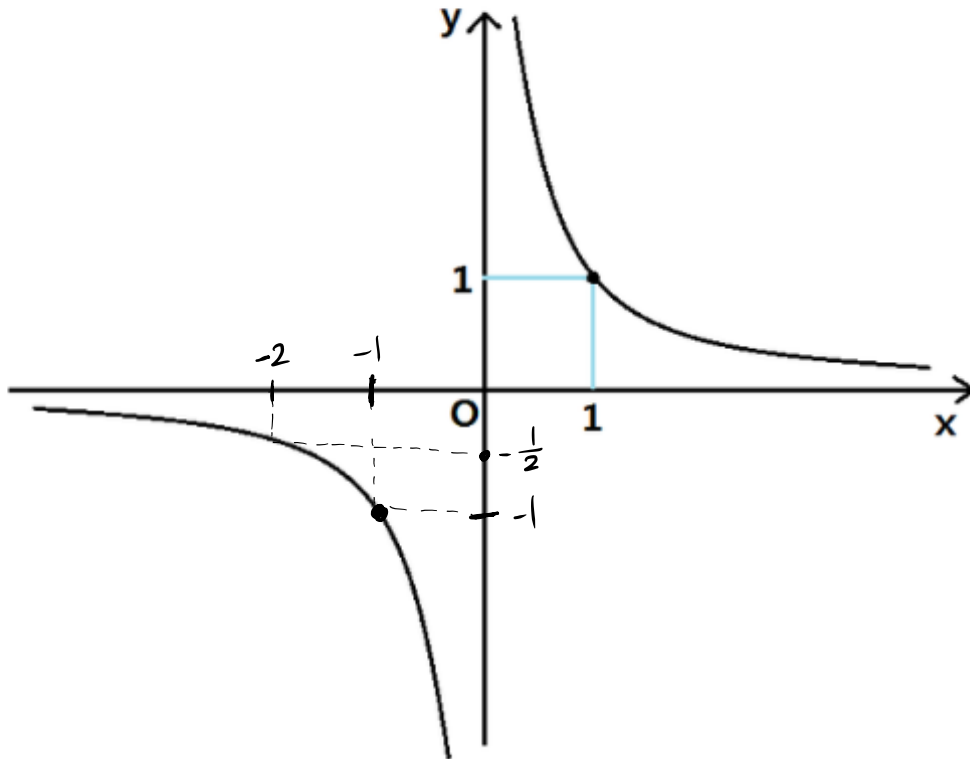
우변의 값이 절대로 0이 될 수 없음을 알 수 있다.

$\{y | y \neq 0 \text{인 실수}\}$

이제 가장 중요한 그래프를 그려보자.

그런데 유리함수의 핵심 포인트가 점근선이라 했지!

점근선은 바로 $x=0$, $y=0$ 이 되어 기본적인 유리함수의 점근선은 y 축과 x 축이 된다.



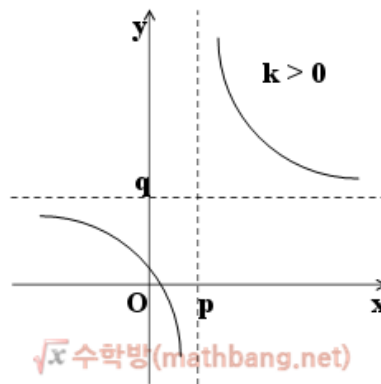
• 점근선: $x=0$, $y=0$

분수함수

분수함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$) 의 그래프 (분수함수의 표준형)

점과 도형의 평행이동에서 x축 방향으로 p만큼 평행이동하면 x 대신 $x - p$, y축 방향으로 q만큼 평행이동하면 y 대신 $y - q$ 를 대입한다고 했어요.

$y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 의 그래프를 x축 방향으로 p만큼, y축 방향으로 q만큼 평행이동해보죠. x대신 $x - p$, y 대신 $y - q$ 를 대입하고 정리하면 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$) 가 돼요.



$y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$) 의 그래프는 어떤 특징이 있을까요?

중학교 때 공부했던 이차함수 그래프, $y = (x-p)^2 + q$ 에서 $y = ax^2$ 의 그래프를 x축 방향으로 p만큼, y축 방향으로 q만큼 평행이동하면 $y = ax^2$ 의 특징 중 x와 관련된 모든 항목은 p로, y와 관련된 모든 항목은 q로 바뀐다고 했어요. 여기서도 마찬가지예요.

$$y = \frac{k}{x-p} + q \quad (k \neq 0) \text{ 의 그래프}$$

• 점근선: $x = p, y = q$

분수함수 $y = \frac{cx + d}{ax + b}$ ($a \neq 0, ad - bc \neq 0$) **의 그래프** (분수함수의 일반형)

$a = 0$ 이면 $y = \frac{cx + d}{b} = \frac{c}{b}x + \frac{d}{b}$ 가 되죠. 이건 분수함수가 아니라 다항함수예요. 그래서 $a \neq 0$ 이라는 조건이 붙어요. 또 $ad - bc = 0$ 이 되면 분수함수가 아니라 그냥 **상수함수**가 되어버리기 때문에 $ad - bc \neq 0$ 이라는 조건이 붙습니다.

$y = \frac{cx + d}{ax + b}$ ($a \neq 0, ad - bc \neq 0$)의 그래프는 $y = \frac{k}{x - p} + q$ ($k \neq 0$) 꼴로 바뀌서 풀어요.

... 분수함수 모양 바꾸는 과정 펼치기

$y = \frac{cx + d}{ax + b}$ ($a \neq 0, ad - bc \neq 0$)의 모양을 바꿔보면 $y = \frac{k}{x + \frac{b}{a}} + \frac{c}{a}$ ($k \neq 0$)가 되는

데, $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)의 그래프를 x 축 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축 방향으로 $\frac{c}{a}$ 만큼 평행이동한 걸 알 수 있어요. 여기서 $-\frac{b}{a}$ 는 분모 = 0이 되게하는 x 값이고, $\frac{c}{a}$ 는 일차항의 계수의 비예요.

$y = \frac{cx + d}{ax + b}$ ($a \neq 0, ad - bc \neq 0$)의 점근선은 $x = -\frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$ 가 되죠. 대칭점은 $(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$ 이예요.

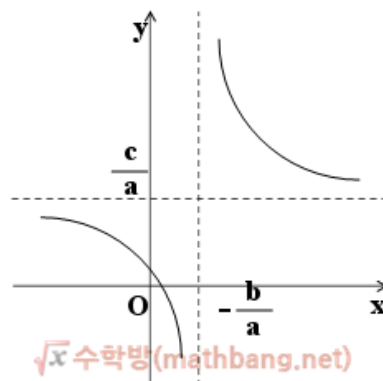
$y = \frac{cx + d}{ax + b}$ ($a \neq 0, ad - bc \neq 0$)의 그래프

$y = \frac{k}{x - p} + q$ ($k \neq 0$) 꼴로 바꾼다.

점근선: $x = (\text{분모가 } 0 \text{이 되는 } x\text{값}), y = (\text{일차항의 계수비})$

대칭점: (분모가 0이 되는 x 값, 일차항의 계수비)

핵심!!!



함수 $y = \frac{3x - 1}{2x + 1}$ 의 점근선의 방정식을 구하여라.

$y = \frac{cx + d}{ax + b}$ ($a \neq 0, ad - bc \neq 0$) 의 점근선은 $x =$ (분모가 0이 되는 x 값), $y =$ (일차항의 계수 비)에요.

$$x = -\frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$$