대칭행렬의 고유분해

대칭행렬에 대해서는 다음 정리가 성립한다.

`분산행렬`은 `대칭행렬`임

> [정리] 행렬 A가 실수인 대칭행렬이면 고유값이 실수이고 고유벡터는 서로 직교(orthogonal)한다.

① 행렬이 대칭행렬임 ⟶ `고유벡터`는 서로 직교함.

대각화가능

> [정리] 행렬이 대각화가능하려면 고유벡터가 선형독립이어야 한다.

② `고유벡터`가 선형독립임 ⟶ 행렬이 대각화 가능

행렬을 대각화할 수 있으면 **대각화가능(diagonalizable) 행렬**이라고 한다. 앞서 이야기했듯이 고유벡터인 열벡터로 이루어진 행렬에 역행렬이 존재하면 대각화가능이라고 했다. 그런데 앞절에서 정방행렬의 역행렬이 존재할 조건은 정방행렬의 열벡터 즉, 고유벡터들이 선형독립인 경우이다. 따라서 행렬이 대각화가능하려면 고유벡터가 선형독립이어야한다.

고윳값과 역행렬

③ `대각화 가능 행렬`에 `0`인 고유값이 없음 ⟶ 해당 행렬에 역행렬이 존재함.

> [정리] 대각화가능한 행렬에 0인 고유값이 없으면 항상 역행렬이 존재한다.

이는 다음과 같이 증명할 수 있다. 행렬 A가 대각화가능하면 다음처럼 표현할 수 있다.

$$A = V\Lambda V^{-1} \tag{3.3.63}$$

이 행렬의 역행렬은 다음처럼 계산한다.

$$A^{-1} = (V\Lambda V^{-1})^{-1} = V\Lambda^{-1}V^{-1} \tag{3.3.64}$$

대각행렬의 역행렬은 각 대각성분의 역수로 이루어진 대각행렬이므로 0인 고유값만 없으면 항상 역행렬이 존재한다.

`고유값`에 `0`이 없으면, `고유값 행렬`의 역행렬(`$\Lambda^{-1}$`)이 존재함.

a, b, c는 0이 아닌 실수일 때,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

(1) 역행렬

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to R_1\left(\frac{1}{a}\right), R_2\left(\frac{1}{b}\right), R_3\left(\frac{1}{c}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right)$$

따라서 대각행렬의 역행렬은 대각성분의 역수를 취한다.

(2) 거듭제곱

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

대각행렬의 거듭제곱은 주대각선 성분을 거듭제곱한다.

(3) 행렬곱

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & ax_3 & ax_4 \\ by_1 & by_2 & by_3 & by_4 \\ cz_1 & cz_2 & cz_3 & cz_4 \end{pmatrix}$$

한 가지 알아둬야 할 점은 **주 대각성분에 0이 올 수 있다**는 것입니다. 하지만 **이 경우에 역행렬은 존재하지 않습니다**.