“ 선형사상(linear map)은 두 벡터공간 사이에 정의되는 사상(베낄 사 寫 형상 상 像, map) 가운데 벡터공간의 성질을 보존하는, 즉 선형성을 갖는 함수를 말합니다. 선형변환(linear transform)이라고도 합니다.

-※ 사상(map) = 함수

↳ <입력 벡터에 특정 함수를 적용시켜, 입력 벡터를 변환시킨 출력벡터를 도출하는 것.>

선형변환과 행렬

- 선형변환은 행렬로 표현할 수 있다.
- 행렬을 선형변환으로 이해하기

$$\text{“}\vec{y} = M\vec{x}\text{”}$$

이 식 자체가 "선형변환"이다!!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}}_{\text{출력값}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad \end{bmatrix}}_{\text{변환행렬.}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}}_{\text{입력값}}$$

↳ 두 벡터의 차원 차이가 존재할 수 있다.

Given		Interpret
linear transformation	⟶	matrix
matrix	⟶	linear transformation

$\vec{x}$ input $\xRightarrow{\text{linear transformation}}$ $\vec{y}$ output

1. 선형 변환/선형 사상 (Linear Transformation)

o 벡터 공간 간에 다음 2가지 연산 성질을 보존하며 사상하는 변환

`선형대수학'과 `기하학'에선 `함수'를 `변환'으로 나타낸다.

- T(**u**+**v**) = T(**u**) + T(**v**) (가산성,Additivity) ...①
- T(c**u**) = cT(**u**) (동차성,Homogeneity,Scaling) ...②

  * `벡터덧셈(①)`과 `스칼라곱(②)`에 대한 연산을 보존함
    . 벡터 공간 간에 수학적 연산 구조(선형성)를 그대로 보존하는 변환

  * `가산성`,`동차성`은 중첩의 원리라고도 함

o 이 공간에서 저 공간으로 갈 때 선형성을 보존하는 사상
  - 벡터 공간 간에 특정한 관계를 보여주는 일종의 함수

※ 함수 또는 사상 또는 변환 이란? ☞ 함수 사상 변환 참조

ex) $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

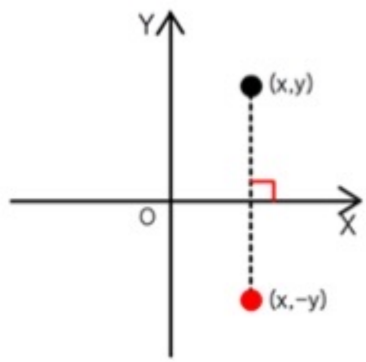
• $u+v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, · $T(u+v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

• $T(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, · $T(v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

• $T(2u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$2 \cdot T(u) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

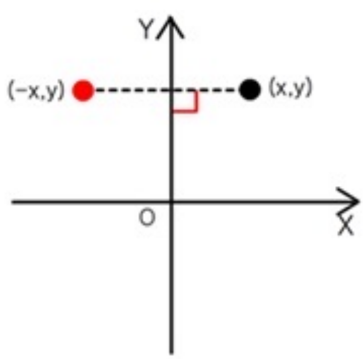
x축 대칭변환 행렬



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

x축 대칭변환 행렬

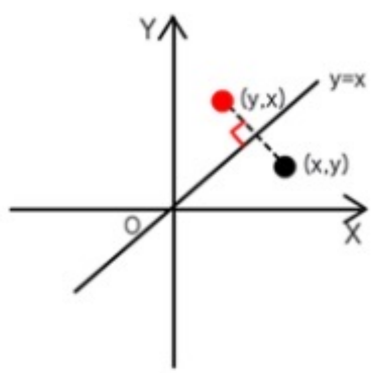
y축 대칭변환 행렬



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

y축 대칭변환 행렬

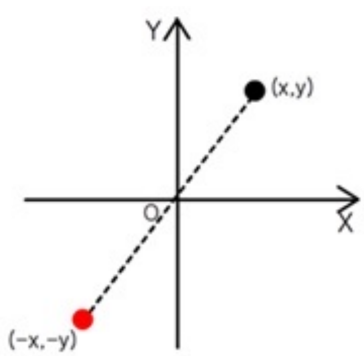
$y = x$ 대칭변환 행렬



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

y=x 대칭변환 행렬

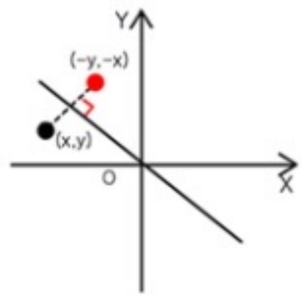
원점 대칭변환 행렬



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

원점 대칭변환 행렬

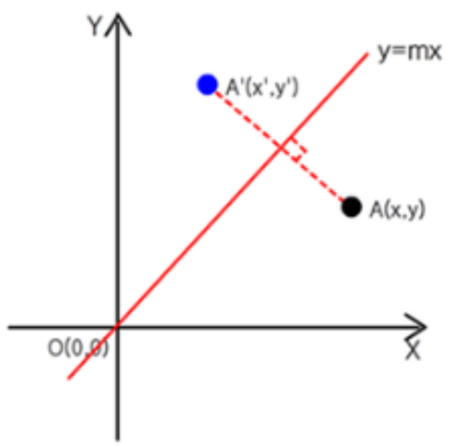
$y=-x$ 대칭변환 행렬



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

y=-x 대칭변환 행렬

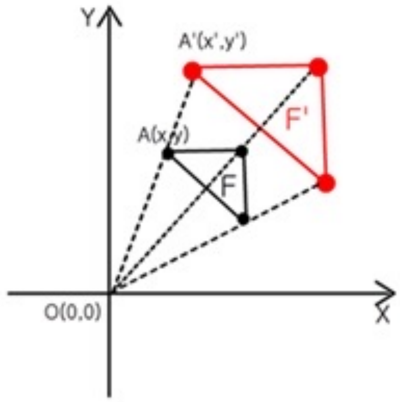
$y=mx$ 대칭변환 행렬



$$\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -1+m^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

y=mx 대칭변환 행렬

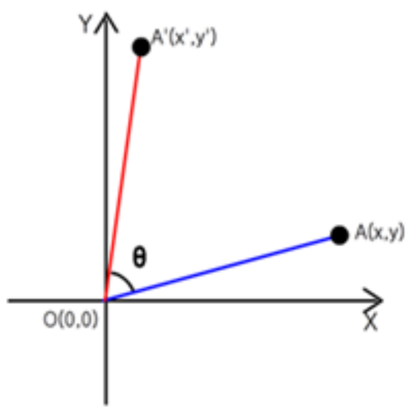
닮음변환 행렬



$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

k배 확대 닮음변환 행렬

회전변환 행렬



$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

θ 만큼 회전한 회전변환 행렬