미분법을 이용해서 비선형 연립방정식 해를 구합니다.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\because f'(x_n) \neq 0)$$

위의 뉴턴-랩슨 법(Newton-Raphson method)을 행렬로 확장하면 아래와 같은 식이 됩니다.

$$\therefore O(x_{n+1}) = P(x_n) - J^{-1}(x_n)F(x_n)$$

벡터함수

위식에서 J는 야코비안 행렬이며 J-1은 야코비안 행렬의 역행렬입니다.

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_a}f_1(x_a, x_b, \cdots, x_n) & \frac{d}{dx_b}f_1(x_a, x_b, \cdots, x_n) & \cdots & \frac{d}{dx_n}f_1(x_a, x_b, \cdots, x_n) \\ \frac{d}{dx_a}f_2(x_a, x_b, \cdots, x_n) & \frac{d}{dx_b}f_2(x_a, x_b, \cdots, x_n) & \cdots & \frac{d}{dx_n}f_2(x_a, x_b, \cdots, x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx_a}f_n(x_a, x_b, \cdots, x_n) & \frac{d}{dx_b}f_n(x_a, x_b, \cdots, x_n) & \cdots & \frac{d}{dx_n}f_n(x_a, x_b, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$$

독일의 수학자 Karl Gustav Jacob Jacobi의 이름을 따서 야코비안 행렬(Jacobian matrix)이라하며 각항에 대한 미분함수로 이루어집니다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\because ad-bc \neq 0)$$

2차 행렬의 역행렬을 구하면 위와 같습니다.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix} \quad (\because |A| \neq 0)$$

$$|A| = a(ei-fh) - b(di-fg) - c(dh-eg)$$

3차 행렬의 역행렬은 위와 같습니다.

예제1)

$f_1(x_a, x_b) = (x_a)^3 - \sin(x_b)$

$f_2(x_a, x_b) = x_a - \cos(x_b)$

위의 연립 방정식의 해를 구하겠습니다.

입력벡터 내 요소

$$P(x) = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix}, P(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

입력벡터

초기 값을 1,1로 적당히 정합니다.

$$F(x) = \begin{pmatrix} (x_a)^3 - \sin(x_b) \\ x_a - \cos(x_b) \end{pmatrix}, F(x_0) = \begin{pmatrix} 0.1585290151921 \\ 0.4596976941319 \end{pmatrix}$$

위는 함수 행렬이며 초기 값을 넣어 계산을 하면 위와 같습니다.

$$J(x) = \begin{pmatrix} 3(x_a)^2 & -\cos(x_b) \\ 1 & \sin(x_b) \end{pmatrix}, J(x_0) = \begin{pmatrix} 3 & -0.5403023058681 \\ 1 & 0.8414709848079 \end{pmatrix}$$

야코비안 행렬이며 값을 넣어 계산하면 위와 같습니다.

$$J^{-1}(x_0) = \begin{pmatrix} 0.2745674274248 & 0.1762977177256 \\ -0.3262945869577 & 0.9788837608732 \end{pmatrix}$$

야코비안 행렬의 역행렬은 위와 같습니다.

위에서 구한 값을 아래식에 대입합니다.

$$O(x_1) = P(x_0) - J^{-1}(x_0)F(x_0)$$

$$O(x_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2745674274248 & 0.1762977177256 \\ -0.3262945869577 & 0.9788837608732 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1585290151921 \\ 0.4596976941319 \end{pmatrix}$$

$$O(x_1) = \begin{pmatrix} 0.8754294418073 \\ 0.6017365518363 \end{pmatrix}$$

구해진 값을 다시 초기 값에 넣습니다.

$$P(x_1) = \begin{pmatrix} 0.8754294418073 \\ 0.6017365518363 \end{pmatrix}$$

위의 값으로 위의 과정을 F(x)가 0일때까지 반복하면 해를 구할 수 있으며 아래는 구한 값을 표로 나타냈습니다.

n	x_a	x_b	$f_1(x_a, x_b)$	$f_2(x_a, x_b)$
0	1	1	0.158529015192103	0.459697694131860
1	0.875429441807366	0.601736551836384	0.104833873952473	0.051075601774741
2	0.827707837978701	0.595811544056067	0.005882210344138	0.000014489348108
3	0.826035537346383	0.598765693112411	0.000009391865649	0.000003609224628
4	0.826031357666770	0.598766705233376	0.000000000043580	0.000000000000423
5	0.826031357654187	0.598766705254952	0.000000000000000	0.000000000000000