• 기본적인 적분공식이 적용되지 않을 때, 가장 먼저 '치환적분법'을 떠올린다.

• 치환적분법을 쓸 때, 피적분함수가 '두 함수의 곱' 형태를 띠어야 한다.

• $F'(x)=f(x)$일 때, $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))+C$.

↳ '$g(x)=t$'로 놓고 양변을 x로 미분하면 $g'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\cdot dt = F(t)+C = F(g(x))+C$$

ex) $\int 8x(x^2+1)^3\,dx$

· $t=x^2+1$

· $\frac{d}{dx}t=\frac{d}{dx}x^2+1$

$\Leftrightarrow \frac{dt}{dx}=2x \quad \Leftrightarrow dt=2x\cdot dx$

$\Leftrightarrow 4dt=8x\cdot dx$

· $\int t^3\cdot 4\,dt = 4\cdot\int t^3\,dt$

$= 4\cdot\frac{1}{4}t^4$

$= t^4 = (x^2+1)^4+C$

※ '$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$' 꼴에는 '치환적분법'을 적용한다.

'구분구적법'의 직사각형 한 개의 가로길이

미분

ex) $\int \frac{\ln x}{x}\,\underline{dx} = \int \underline{\ln x} \times \underline{\frac{1}{x}}\,dx$

적분

- $\ln x = t$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}t$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot dx = dt$

- $\int t \cdot dt = \frac{1}{2}\cdot t^2 + C$

$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

12-1) 정적분의 치환적분

앞에 말이 길었는데요. 사실 정적분의 계산은 부정적분을 할 수 있으면 아주 쉽게 할 수 있습니다. 딱 한가지만 조심하면 되는데요. 정적분에는 구간이 있습니다. 만약 치환적분을 해서 변수가 바뀐다면 그 구간도 바꾸어주어야 합니다.

부정적분은 다들 아시니 바로 예제를 통해서 간단하게 설명드리겠습니다.

$$\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x\ln x}dx$$

위 예제를 보면 $\ln x$의 미분 결과인 $\frac{1}{x}$ 이 있으니 치환해봅시다.

$\ln x = t$ 로 치환 후 양변을 미분하면,

$\frac{1}{x}dx = dt$

원식을 t로 치환하면,

$\int_?^? \frac{1}{t}dt$ 가 됩니다.

여기서 물음표 자리에 원래 식의 구간을 변경해서 넣어줘야 하는데요. 방법은 이렇습니다. 방금 $\ln x = t$로 치환했지 않습니까? 여기서 x 자리에 원식의 아래 끝과 위 끝을 각각 집어넣어서 나온 t값이 바로 t에 대한 새로운 구간입니다. 쉽죠? 계속 풀어보겠습니다.

핵심!!!

$\ln x = t$ 에서,

새로운 아래 끝 : $\ln e^2 = 2$

새로운 위 끝 : $\ln e^4 = 4$

따라서, 최종적인 취환 후의 식은,

$\int_2^4 \frac{1}{t}dt$ 이고, 계산하면,

$= [\ln t]_2^4$

$= \ln 4 - \ln 2$

$= \ln 2^2 - \ln 2$

$= 2\ln 2 - \ln 2$

$= \ln 2$