

▶ 투영(projection)이란?

우선 투영의 의미를 국어사전에서 찾아보면 '물체의 그림자를 어떤 물체 위에 비추는 일 또는 그 비친 그림자', '도형이나 입체를 다른 평면에 옮기는 일'이라고 나와있다[1]. 그림1과 같이 주황색 막대 바로 위에 태양이 있을 때 바닥에 그림자를 생기게 하는 것을 투영이라고 생각하면 된다. 만약 태양의 위치에서 주황색 막대를 본다면 그림자와 같은 길이로 보일 것이다.

↖ 핵심!!

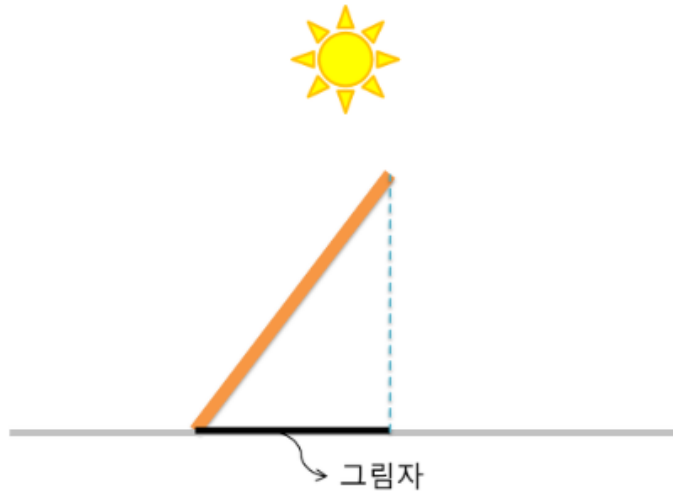


그림1. 투영의 의미

이것을 벡터와 관련지어서 생각해보자. 아래와 같은 서로 다른 두 벡터 a, b 가 있다(그림2).

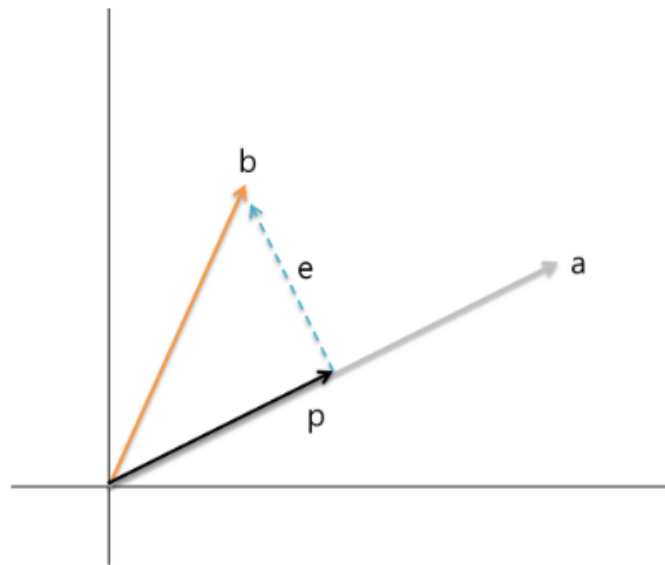


그림2. 벡터 b 를 벡터 a 에 투영시킨 결과.

벡터 b 를 벡터 a 로 투영시키면 투영벡터 p 가 생긴다. 벡터 p 는 벡터 b 를 벡터 a 를 이용해서 나타낼 수 있는 최선의 결과라고 볼 수 있다. 왜냐하면 벡터 a 하나만으로는 완벽하게 벡터 b 를 설명해낼 수 없기 때문이다. 벡터 a 에 어떠한 수 x 를 곱하더라도 $ax = b$ 는 불가능하다. 벡터 a 의 크기만 달라질 뿐 방향이 달라지지는 않기 때문이다. 반면 투영벡터 p 는 벡터 a 에 어떤 계수 \hat{x} 를 곱하는 것으로 표현할 수 있다:

$$p = \hat{x} a \text{ ... (공식1: 투영벡터)}$$

↑ 핵심!!

그러면 \hat{x} 를 어떻게 계산할 수 있을까? 에러벡터 e 와 벡터 a 가 서로 수직관계에 있다는 것을 이용한다.
 우선 에러벡터 e 는 그림2를 보면

$$e = b - \hat{p} = b - \hat{x} a \quad \dots (\text{공식2: 에러벡터})$$

임을 알 수 있다. 벡터 a 와 벡터 e 가 수직이므로

$$a^T e = a^T (b - \hat{x} a) = 0$$

↑ 두 벡터가 직교하면, 내적은 0.

이 성립해야 한다. 이것을 계산하면

~~X~~ 직교: 평면 위에 2개의 직선이 서로 직각으로 만나는 것.

$$\begin{aligned} a^T b - \hat{x} a^T a &= 0 \\ \hat{x} a^T a &= a^T b \\ \hat{x} &= \frac{a^T b}{a^T a} \end{aligned}$$

이 된다. 즉 계수 \hat{x} 는 벡터 a 와 벡터 b 를 이용해서 나타낼 수 있다는 것을 알게 되었다. 그러면 투영벡터에 관한 공식1은 이렇게 다시 쓸 수 있다:

$$\hat{p} = \hat{x} a = \frac{a^T b}{a^T a} a \quad \dots (\text{공식1-1: 투영벡터})$$