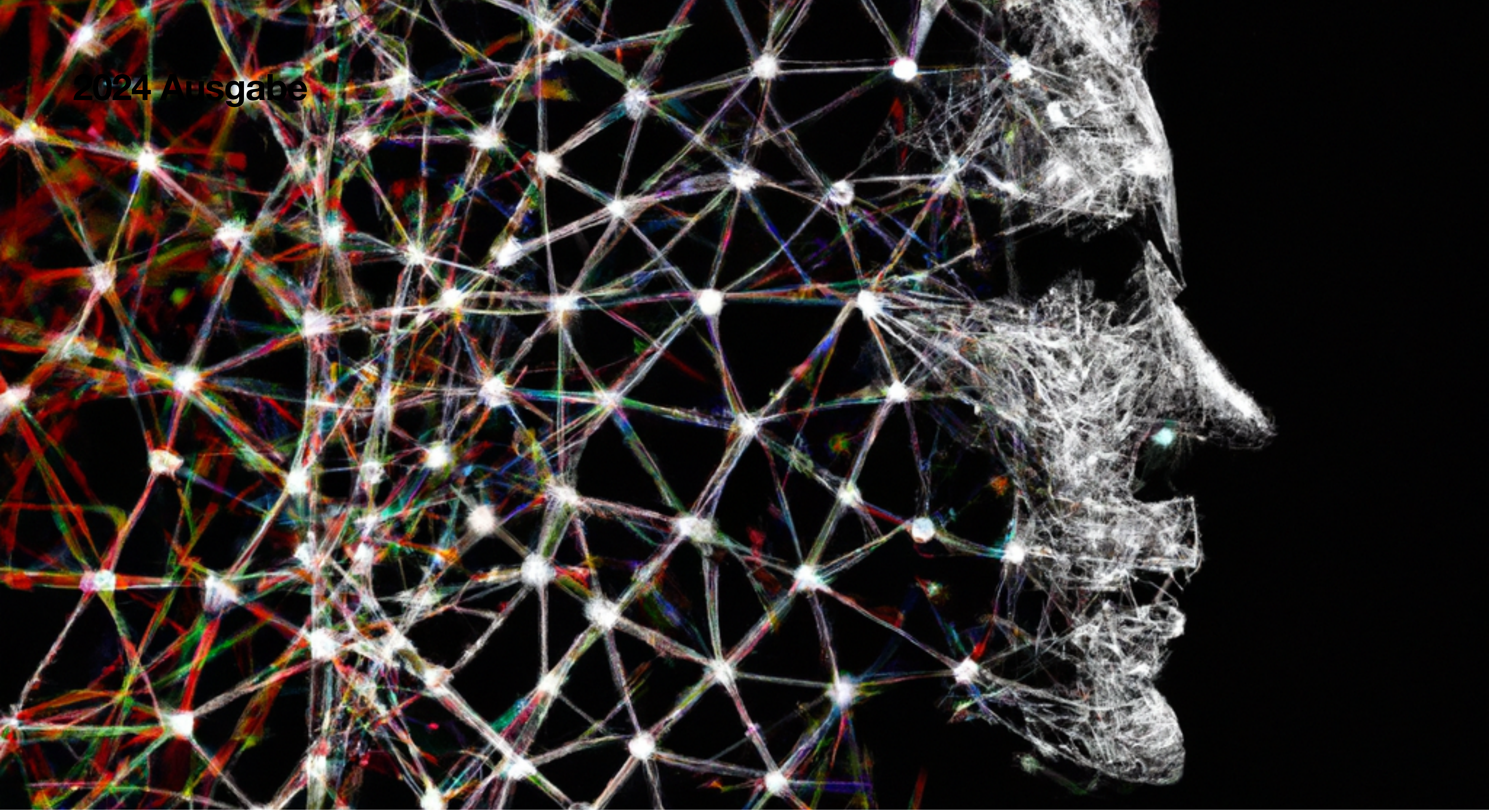


GINN SS24

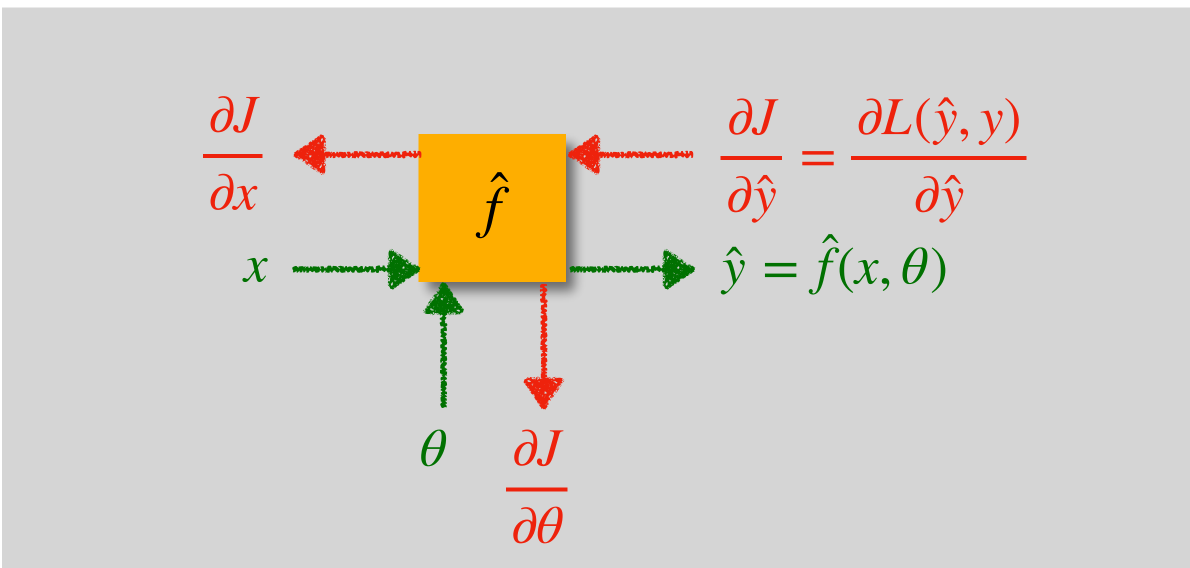
Michael Braun
Markus Döhring

Übung zur Backpropagation

Backpropagation bezeichnet die Methode die Gradienten

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} \text{ und } \frac{\partial J}{\partial x}$$

im Modell zu berechnen:



Die Herausforderung bei der Berechnung besteht darin, den Gradienten des Verlustes J durch mehrere Funktionen hindurchzuschleusen, da die Modellfunktion $\hat{f}$ als Komposition von mehreren Schichten aufgebaut ist.

In dieser Übung betrachten wir einige wichtige Typen von Schichten und ein paar foward-Funktionen.

Übungsaufgabe

Die folgenden Seiten zeigen einige Funktionen, die wir in der Vorlesung hatten, aber auch einige forward-Funktionen, die neu sind.

Besprich mit Deinem Team alle Funktionen und gib die gesuchten Gradienten an.

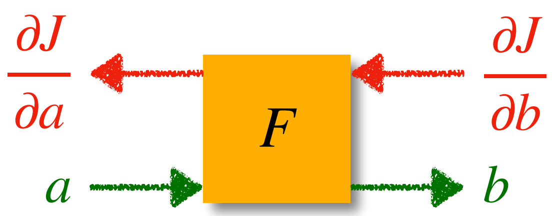
Gib auch an, welche Dimensionen alle auftretenden Eingabevektoren, Ausgabevektoren, Gradienten und Funktionalmatrizen, die in Deinen Lösungen auftauchen, besitzen.

Tauscht die Ergebnisse mit den anderen Teams aus und diskutiert die Lösungswege. Wenn ihr Fragen habt und nicht wisst wie es weitergeht, googled, chatgpt't (gibt es das Verb überhaupt?), redet mit den anderen, postet eure Fragen und Vorschläge im moodle-Forum.

Wetten, dass ihr ohne mich auskommt und die Lösungen alleine korrekt hinbekommt!

Challenge bis Monatsende!

Kettenregel (Basisversion)



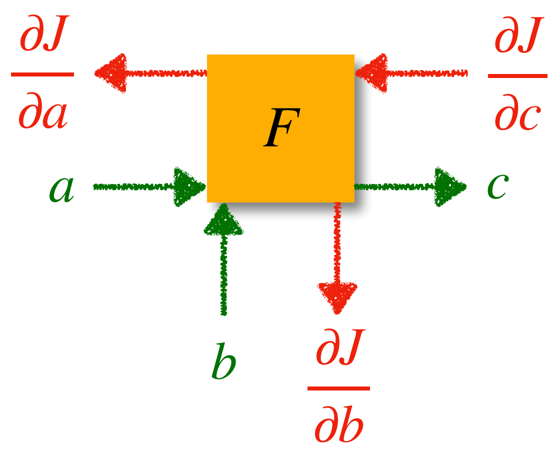
Forward

$$b = F(a)$$

Backward

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial a}$$

2 Eingabevariablen



Forward

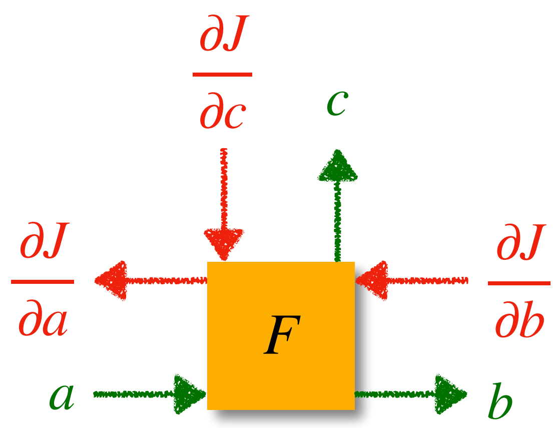
$$c = F(a, b)$$

Backward

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial a}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial b}$$

2 Ausgabevariablen



Forward

$$(b, c) = F(a)$$

Wie sieht den die Lösung aus, wenn es 3 Ausgabevariablen geben würde?

wie für a
Es gäbe insgesamt
3 Gleichungen

Backward

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial a} + \frac{\partial J}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial a}$$

Funktion #1

Forward

$$d = 3(a \cdot b + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Backward

$$\frac{dJ}{da} = \frac{dJ}{dd} \cdot \underbrace{\frac{dd}{da}}_{3b}$$

$$\frac{dJ}{db} = \frac{dJ}{dd} \cdot \frac{dd}{db}$$

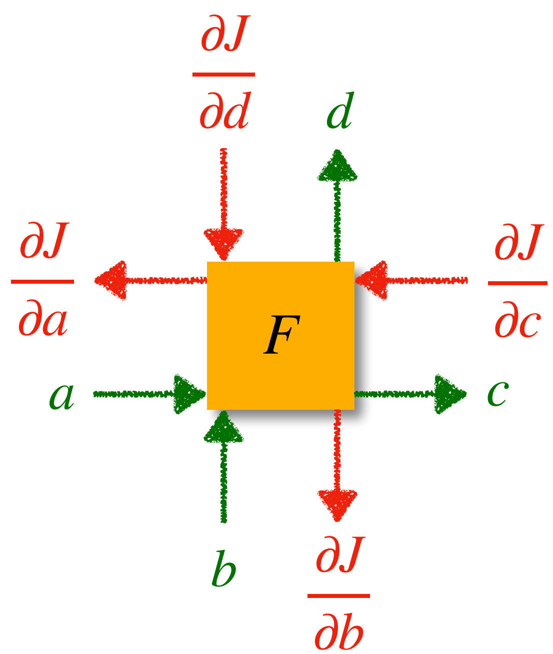
$$\frac{dJ}{dc} = \frac{dJ}{dd} \cdot \frac{dd}{dc}$$

∂ … partiell abgeleitet

d … „einfach" abgeleitet

Warum sieht das Symbol in den Ableitungen nur anders aus als vorher?

2 Eingabe und 2 Ausgabevariablen



Forward

$$(c, d) = F(a, b)$$

… und die Lösung für m Eingabevariablen und n Ausgabevariablen???

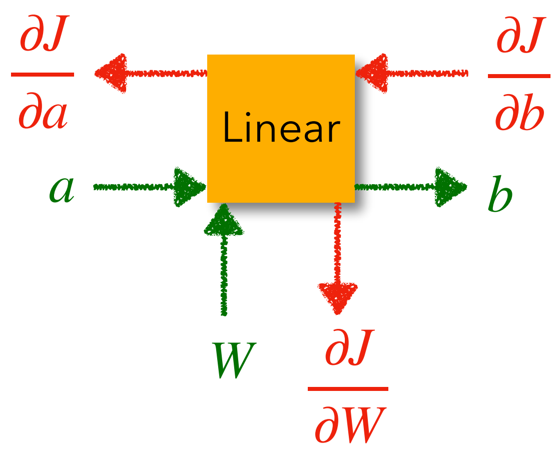
m Summanden und n Gleichungen

Backward

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial a} + \frac{\partial J}{\partial d} \cdot \frac{\partial d}{\partial a}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial b} + \frac{\partial J}{\partial d} \cdot \frac{\partial d}{\partial b}$$

Lineare Abbildung



Forward

$$b = aW$$

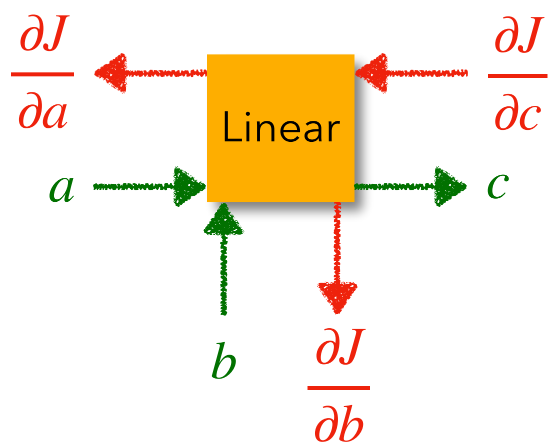
Backward

$\frac{\partial b}{\partial a}$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial b} \cdot W^T$$

$$\frac{\partial J}{\partial W} = a^T \cdot \frac{\partial J}{\partial b}$$

Translation



Forward

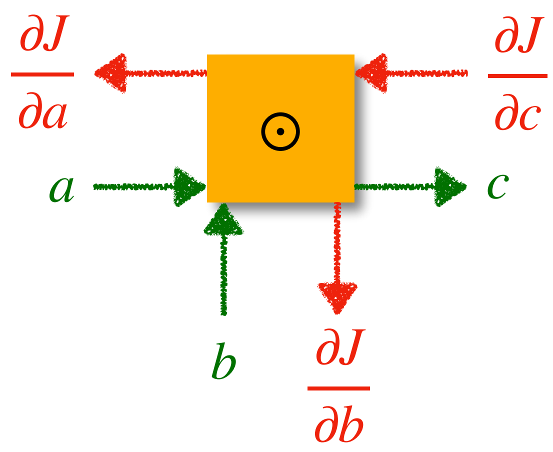
$$c = a + b$$

Backward

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot 1$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial J}{\partial c}$$

Hadamard-Produkt



$a, b, c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$\frac{\partial J}{\partial c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

Forward

$$c = a \odot b$$

a und b gleichgroße Matrizen

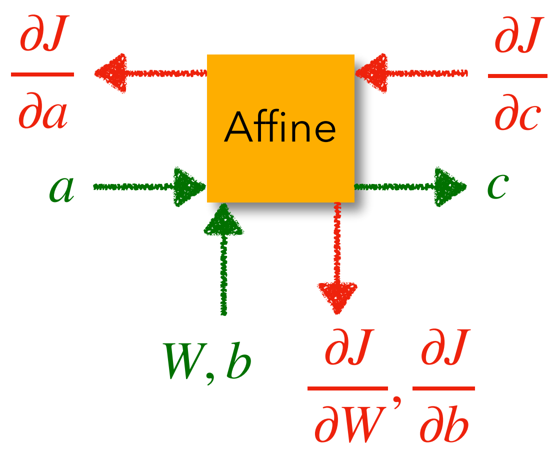
$a_{11} \cdot b_{11} = c_{11}$

Backward

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial c} \odot b$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial J}{\partial c} \odot a$$

Affine Transformation



Forward

$$c = aW + b$$

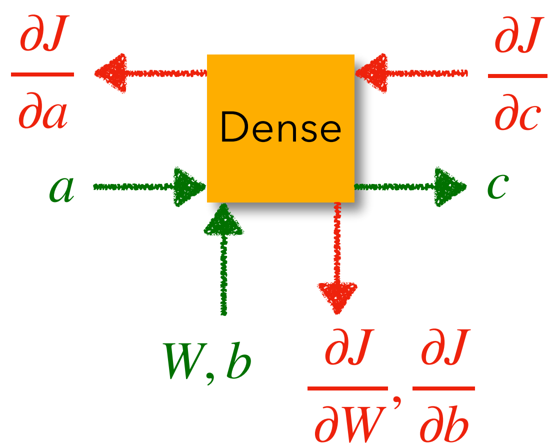
Backward

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot W^T$$

$$\frac{\partial J}{\partial W} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot a^T$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial J}{\partial c}$$

Dense-Layer



Forward

$$c = \bar{\alpha}(aW + b)$$

Mean (Konstante)

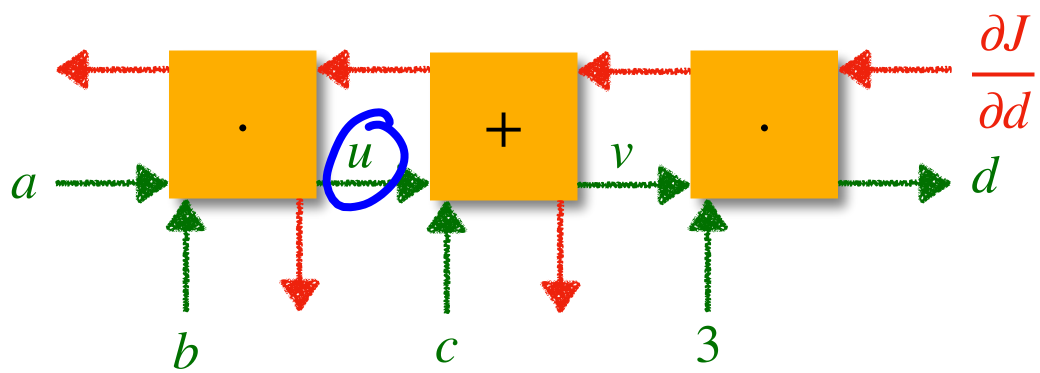
Backward

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot \bar{\alpha} W^T$$

$$\frac{\partial J}{\partial W} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot \bar{\alpha} a^T$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial J}{\partial c} \cdot \bar{\alpha}$$

Hello again…



$$d = 3(ab+c) = 3 \cdot v$$
$$v = ab+c = u+c$$
$$u = ab$$

Zurück zur Funktion #1 von vorhin – aber jetzt als Berechnungsgraph.

Berechne nochmals die Ableitungen, in dem Du die Kettenregel von hinten nach vorne anwendest und auch die Zwischengradienten berechnest.

Das ist einfacher als Du denkst: Die Variablen a, b, c repräsentieren „nur" reelle Zahlen und die Funktionalmatrizen haben damit alle die Dimension 1x1.

Backward

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \frac{\partial J}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u}$$

$$\frac{\partial J}{\partial v} = \frac{\partial J}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial v} = 3 \frac{\partial J}{\partial d}$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial d} \cdot 3 \cdot 1 \cdot b$$

$$\frac{\partial J}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial a}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial J}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial b}$$

$$\frac{\partial J}{\partial d} \, 3 \cdot 1 \cdot a$$

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\partial J}{\partial d} \cdot \frac{\partial d}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial c}$$

$$\frac{\partial J}{\partial d} \, 3 \cdot 1$$