Berechnung der Abbildungsmatrix linearer Abbildungen mit gg. geordneten Basen und Abbildungsvorschrift

Benedikt Wolters

May 18, 2011

Aufgabe:
Sei $V = \mathbb{Q}^{2x3}$ der $\mathbb{Q}-$Vektorraum der $2x3-$Matrizen,
$W := \mathbb{Q}^{2x2}$ der $\mathbb{Q}-$Vektorraum der $2x2-$Matrizen und $\varphi : V \to W$ die folgende $\mathbb{Q}-$lineare Abbildung:

$$\varphi : V \to W,\ M \to M \cdot A, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}^C M_\varphi^B$ bezüglich der geordneten Basen:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung:

$${}^C M_\varphi^B := (s_1, ..., s_n), s_i := \kappa_C(\varphi(v_i)).$$

Wobei A,B geordnete Basen und $v_i \in B$. κ_CKoordinatenabbildung unter der geordneten Basis C.
Die Anordnung ist hierbei wichtig.

$$\begin{aligned}
\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \kappa_C(\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \kappa_C(\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \kappa_C(\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \kappa_C(\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \kappa_C(\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \kappa_C(\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Schreiben wir diese Koordinatenvektoren $\kappa_C(\mathbb{E}_i)$ nun in eine Matrix erhalten wir die Abbildungsmatrix:

$$^{C}M_{\varphi}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$\square$