

# 1. Modely předcházející IDM

Jednoduše řečeno „Car Following“ modely vycházejí z předpokladu, že pokud  $n$ -té vozidlo následuje  $n - 1$  vozidlo na homogenní dálnici, trajektorie  $n$ -tého vozidla bude stejná jako vozidla před ním ( $n - 1$ ) až na posuny v čase a místě. (Vozidlo bude ve stejném místě jako předcházející v jiný čas a ve stejný čas bude na jiném místě.) Všechny další dispozice jednotlivých modelů v sobě tento předpoklad obsahují.

## 1.1 Newellův model

V teorii dopravního proudu je Newellův model jeden z modelů, který popisuje chování řidiče dle vozidla před ním. Řidič se snaží držet za vozidlem jedoucím před ním v konstantní vzdálenosti. Tento model vznikl v roce 1961 a postupně se vyvíjel. Vychází z něho později Intelligent Driver Model (IDM) a z tohoto důvodu je zde zmíněn.

V článku [10] je přesně popsán nejen model, ale i jeho verifikace a porovnání s ostatními modely. Pro nás je důležitý popis modelu.

### 1.1.1 Popis modelu

Jestliže  $n$ -té vozidlo jede za  $n - 1$  vozidlem (které jede za  $n - 2$  vozidlem atd.), cíl každého Car following modelu je zjistit závislost trajektorie  $n$ -tého vozidla  $x_n(t)$ , jeho pozici v čase  $t$  na  $n - 1$  vozidle, viz. obrázek 1.1. (To také znamená, že není žádná náhodná spojitost mezi těmito vozidly.) Jestliže se  $n - 1$  vozidlo pohybuje konstantní rychlostí  $v$ ,

$$x_{n-1} = x_n + vt,$$

$n$ -té vozidlo také pojede průměrnou rychlostí  $v$ . Pokud by  $n$ -té vozidlo zrychlovalo, tak by došlo ke kolizi s  $n - 1$  vozidlem a naopak pokud by zpomalovalo, tak by se  $n$ -té vozidlo neustále vzdalovalo. Totéž platí pro všechna vozidla jedoucí za  $n$ -tým. Tento model se nezabývá zjištěním hodnoty rychlosti  $v$ , předpokládá se, že je určena buďto na základě omezení rychlosti či možnostech vozidla.

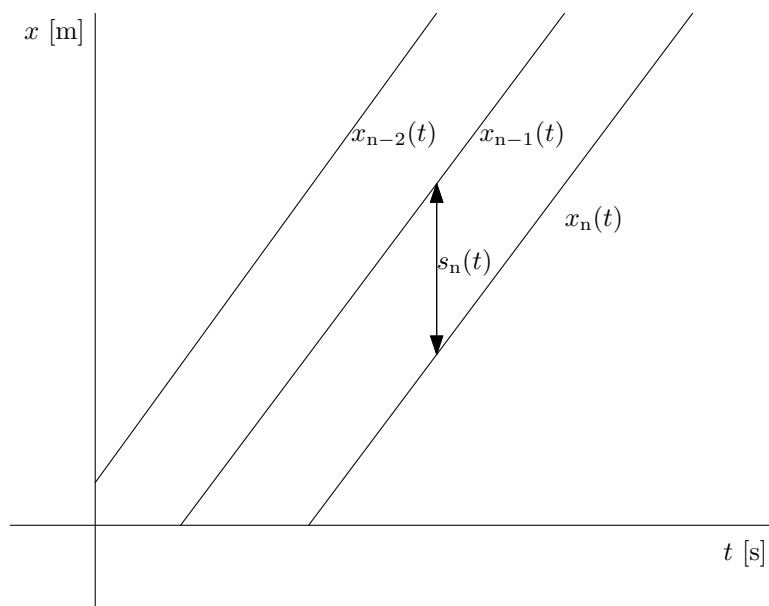
Vzdálenost  $s_n = x_{n-1}(t) - x_n(t)$  mezi vozidly  $n$  a  $n - 1$  se může měnit v čase. Pokud je dálnice homogenní, tato vzdálenost zůstane konstantní okolo hodnoty  $s_n$ . Tato hodnota se mění na základě typu vozidla a také závisí na rychlosti  $v$ .

Předpokládejme, že existuje nějaký empirický vztah mezi rychlostí  $v$  a vzdáleností mezi vozidly  $s_n$ . Pokud rychlost  $v$  roste, je logické, že řidiči chtějí dosáhnout většího rozestupu mezi vozidly. Tato závislost mezi  $v$  a  $s_n$  je znázorněna na obrázku 1.2. Každý řidič má svoji preferovanou rychlost  $V_n$ . Jestliže tato rychlost je u  $n - 1$  vozidla vyšší než u  $n$ -tého  $v > V_n$ , znamená to, že  $n$ -té vozidlo pojede svoji preferovanou rychlostí (na obrázku 1.2 znázorněna čárkovanou čarou) a  $n - 1$  vozidlo mu ujede. Hodnota rychlosti  $v$  nemůže být záporná a vzdálenost mezi vozidly při nulové rychlosti by měla být níže než polopřímka lineární závislosti, viz černá tečka na obrázku 1.2 při rychlosti  $v = 0$ .

Nyní předpokládejme, že  $n - 1$  se vozidlo nějakou dobu  $t$  pohybuje konstantní rychlostí  $v^1$  a potom náhle změní rychlost na hodnotu  $v'$ . Trajektorie vozidel  $n$  a  $n - 1$  mohou poté vypadat jako na obrázku 1.3. Z obrázku lze také vypočítat jak časovou  $\tau_n$ , tak prostorovou  $d_n$  mezeru

---

<sup>1</sup>hodnota rychlosti osciluje okolo hodnoty  $v$



Obrázek 1.1: Trajektorie vozidel s konstantní rychlostí, zdroj: [10]

mezi vozidly  $n$  a  $n - 1$ . Z čárkovaného obdelníku poté dostáváme vztah vzdálenost mezi vozidly před změnou rychlosti  $s_n$  a po změně rychlosti  $s'_n$ ,

$$s_n = d_n + v\tau_n, \quad s'_n = d_n + v'\tau_n.$$

Z toho vyplývá, že pokud leží  $v$  a  $v'$  na polopřímce z obrázku 1.2, sklon této přímky je právě  $\tau_n$  a hodnota  $s_n$  při rychlosti  $v = 0$  je  $d_n$ .

Ze vztahu mezi  $v$  a  $s_n$ , jak je zobrazeno na obrázku 1.2, plyne nezávislost mezer  $d_n$  a  $\tau_n$  na rychlostech  $v$ , resp.  $v'$ . Pokud se tedy změní rychlost z hodnoty  $v'$  na  $v''$ ,  $d_n$  a  $\tau_n$  zůstanou při této změně rychlosti stejné. Lineární trajektorie vozidla  $x_n(t)$  potom bude jednoduše posun v čase  $\tau_n$  a místě  $d_n$ ,

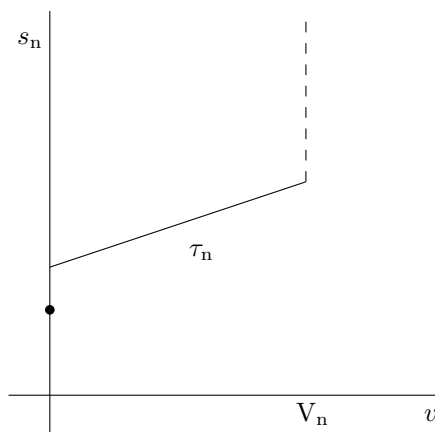
$$x_n(t + \tau_n) = x_{n-1}(t) - d_n. \quad (1.1)$$

U Newellova modelu platí, že  $n$ -té vozidlo bude (přibližně) kopírovat trajektorii  $n-1$  vozidla dle vztahu (1.1) při vhodných hodnotách  $d_n$  a  $\tau_n$ . Tím, jak se přesně dokáže  $n$ -té vozidlo dodržovat vztah (1.1), se Newellův model nezabývá, pouze předpokládá, že řidič je schopen se tímto vztahem řídit. To není tak těžké, protože pokud se změní rychlost vozidla  $n - 1$ ,  $n$ -tý řidič nemusí zareagovat okamžitě, ale může počkat dokud se mezera  $s_n$  nezvýší (neklesne) na hodnotu, která odpovídá nové rychlosti vozidla  $n-1$  (viz obrázek 1.2).

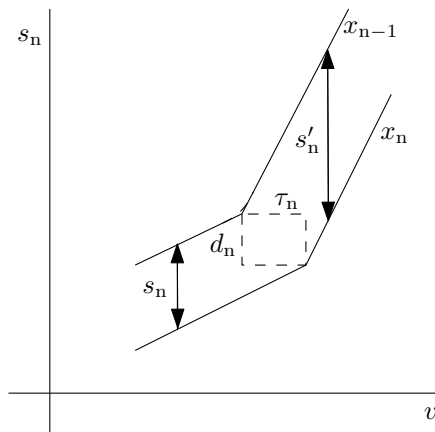
Při pozorování se došlo k závěru, že každý řidič nezkontroluje každého jiného řidiče na komunikaci, ale pouze jen vhodnou „makroskopickou“ část. Hodnoty  $\tau_n$  a  $d_n$  jsou přirozené, to vychází ze vztahu (1.1), kde postupným iterováním dostaneme

$$x_n(t + \tau_n + \tau_{n-1} + \dots + \tau_1) = x_0(t) - d_n - d_{n-1} - \dots - d_1. \quad (1.2)$$

Hodnoty  $\tau_n$  a  $d_n$  se značně liší mezi jednotlivými vozidly v závislosti na typu řidiče. První skupina řidičů raději jede blíže vozidlu před sebou ( $n - 1$ ) až na minimální bezpečnou vzdálenost,



Obrázek 1.2: Vztah mezi rychlostí  $v$  a vzdáleností mezi vozidly  $s_n$ , zdroj: [10]



Obrázek 1.3: Lineární aproximace při změně rychlosti vozidel, zdroj: [10]

zatímco druhá skupina naopak preferuje delší vzdálenost pro klidnou reakci na nenadálou událost. Je rozumné, aby se hodnoty  $\tau_n$  a  $d_n$  lišily, a to tak, že každému jednotlivému vozidlu budou hodnoty vygenerovány z nějakého pravděpodobnostního rozdělení, jehož variační koeficient se bude blížit jedné. Při generování rychlostí vozidel by naopak měl být variační koeficient zanedbatelný.

Položíme-li

$$\bar{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k, \quad \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_k, \quad (1.3)$$

kde  $\bar{\tau}$  a  $\bar{d}$  jsou průměrné posuny v čase resp. místě, potom průměrnou vlnovou rychlost spočteme jako podíl  $\bar{d}/\bar{\tau}$ .

Tento model se dá ovšem popsat nejen mikroskopicky (rychlost, mezera mezi vozidly), ale i makroskopicky (hustota  $k$ , intenzita  $q$ ). Stacionární stav nastane ve chvíli, kdy se všechna vozidla budou pohybovat konstantní rychlostí s rozdílnými posuny (časovými i prostorovými).

Jestliže

$$s_n = d_n + v\tau_n,$$

a rychlost vozidel je konstantní, tak platí

$$\bar{s} = \bar{d} + v\bar{\tau}.$$

Hustotu  $k$  lze potom vypočítat jako převrácenou hodnotu průměrné mezery mezi vozidly  $k = 1/\bar{s}$  a rychlost jako podíl intenzity a hustoty  $v = q/k$ . Tudíž platí

$$q = \frac{1}{\bar{\tau}} - \frac{\bar{d}}{\bar{\tau}}k, \quad (1.4)$$

za předpokladu, že rychlost  $v$  je menší než preferovaná rychlost jakéhokoliv vozidla  $V_k$ .

Rovnice (1.4) propojuje Newellův model s klasickými makroskopickými modely. Problém nastává ve chvíli, kdy průměrná rychlost  $v$  je vyšší, než některá s preferovaných rychlostí jednotlivých vozidel. Vozidla se v tomto modelu nemohou předjíždět a proto vznikne kongesce za vozidlem s malou preferovanou rychlostí. V následujících řádcích předpokládáme, že aktuální rychlost vozidla bude menší než preferovaná rychlost  $V_n$ .

Uvažujme, že se vozidlo  $n$  pohybuje přesně podle rovnice (1.1) a vozidlo za ním  $(n-1)$  jede plynule za ním.

Rovnici (1.1) můžeme přepsat do tvaru

$$x_n(t + \tau_n) = x_n(t) + \tau_n v_n(t + T_n). \quad (1.5)$$

Rovnice (1.5) lze pro rovnoměrný pohyb zjednodušit na tvar

$$x_n(t + \tau_n) = x_n(t) + \tau_n v_n(t).$$

Tvar rovnice (1.5) plyne z matematické analýzy<sup>2</sup>, přičemž hodnota  $T_n$  se nachází někde mezi nulou a  $\tau_n$ . Pokud je funkce hladká bude přibližně

$$T_n = \frac{\tau_n}{2}. \quad (1.6)$$

Rovnici (1.5) lze přepsat na přibližný tvar

$$x_n(t + \tau_n) = x_n(t) + \tau_n v_n(t) + \tau_n T_n a_n(t), \quad (1.7)$$

který uvažuje zrychlení vozidla  $a_n$ <sup>3</sup>. Kombinací rovnic (1.7) a (1.1) dostáváme vztah pro rychlost

$$v_n(t + \tau_n) = \frac{1}{\tau_n} [x_{n-1}(t) - x_n(t)] - \frac{d_n}{\tau_n}. \quad (1.8)$$

Po zderivování rovnice (1.8) dostáváme vztah pro zrychlení vozidla

$$a_n(t + \tau_n) = \frac{1}{\tau_n} [v_{n-1}(t) - v_n(t)]. \quad (1.9)$$

---

<sup>2</sup>věta o střední hodnotě

<sup>3</sup>Předpokládejme vozidlo v klidu, které se rozjíždí. Na začátku zvolíme  $\tau_n = 5s, t = 0s, T_n = \tau_n/2 = 2,5s$ , potom platí

$$x_n(5) = x_n(0) + 5v_n(0 + 2,5).$$

Pro výpočet dráhy bereme hodnotu rychlosti v čase 2,5s. Nemůžeme vzít hodnotu v nule, vozidlo by v tomto případě stálo na místě. Přibližná hodnota bude tedy opravdu v polovině hodnoty  $\tau_n$ .

Z rovnic (1.8) a (1.9) je vidět zřejmá závislost na vozidle, které jede před aktuálním, členem  $v_{n-1}(t)$ , resp.  $x_{n-1}(t)$ . Řidič volí svoji rychlost na základě odstupu od předchozího vozidla, resp. zrychlení na základě rychlostí. **Konečný vztah pro Newellův model je tedy**

$$a_n(t) = \frac{\frac{1}{\tau_n} [v_{n-1}(t) - v_n(t)] - \frac{d_n}{\tau_n} - v_n(t)}{T_n}. \quad (1.10)$$

## 1.2 Gippsův model

Další model, kterým se zde budeme zabývat, se jmenuje Gippsův. Tento model byl poprvé popsán v roce 1981 a odvolává se i na zmíněný Newellův model. I v dnešní době se tento model využívá pro simulaci dopravy. Hlavním zdrojem pro tuto podkapitulu je článek P.G. Gippse[4]. Většina modelů, které vznikly před Gippsovým, jsou různé variace na rovnici

$$a_n(t + T_n) = l_n \frac{[v_{n-1}(t) - v_n(t)]^k}{[x_{n-1}(t) - x_n(t)]^m}, \quad (1.11)$$

kde jednotlivé proměnné mají stejný význam jako při popisu Newellova modelu 1.1. Proměnné  $l_n$ ,  $k$  a  $m$  jsou parametry, které je nutno empiricky odhadnout. Tyto modely se nazývají Modely General Motors a jsou blíže rozebrány v [16].

Ačkoliv podávají tyto modely dobré výsledky v mnoha situacích, je žádoucí, aby během přepočtů poloh, rychlostí a zrychlení nějakým způsobem byl zahrnut reakční čas řidiče  $T_n$ . To si vyžaduje značné množství historických dat, pokud model bude použit v simulačním programu. Navíc, parametry  $l_n$ ,  $k$  a  $m$  nemají přímou souvislost s vlastnostmi vozidla či řidiče.

Gipps se proto rozhodl, že vytvoří model, který bude splňovat následující podmínky:

- model by měl napodobovat chování opravdového provozu,
- parametry modelu by měly odpovídat vlastnostem řidiče a vozidla, které jsou jasné; to znamená, že pro nastavení parametrů není potřeba model kalibrovat,
- model by se měl chovat správně i v případě, že doba mezi přepočítáváním polohy a rychlosti je stejná, jako reakční čas řidiče.

### 1.2.1 Popis modelu

Následující model je odvozen z omezení jak řidiče, tak i vozidla a pomocí těchto omezení se dopočítávají bezpečná rychlost podle předcházejícího vozidla. Předpokládá se přitom, že řidič volí svoji rychlost tak, aby zajistil bezpečné zastavení nebo aby dokázal náhle rychle zastavit při nenadálé události.

První podmínka, kterou aplikujeme na vozidlo  $n$ , souvisí s rychlostí vozidla. Ta nepřekročí jeho preferovanou rychlost  $V_n$  a jeho zrychlení na volné komunikaci<sup>4</sup> se zvyšuje stejně tak jako rychlost dokud se také zvyšuje kroutící moment motoru vozidla a poté začne klesat na nulovou hodnotu a té nabude ve chvíli, kdy se vozidlo bude pohybovat svoji preferovanou rychlostí  $V_n$

$$v_n(t + T_n) = v_n(t) + 2,5a_n\tau \left( \frac{1 - v_n(t)}{V_n} \right) \sqrt{\left( 0,025 + \frac{v_n(t)}{V_n} \right)}. \quad (1.12)$$

Koeficienty v nerovnici 1.12 byly stanoveny na základě z měření na hlavních dopravních komunikacích při průměrném provozu. Využití nerovnice 1.12 pro tento model je považované za

<sup>4</sup>tj. komunikace, na které se nevyskytuje žádné další vozidlo

přijatelné až do chvíle, kdy se vozidlo přiblíží vozidlu jedoucím před ním. Od té chvíle důraz na tuto podmínku klesá, naopak největší důležitost je ve chvíli, kdy vozidlo nemá před sebou žádné vozidlo či vozidlo před ním se nachází velmi daleko.

Další omezení, které je nutno zmínit, se týká brždění. Jestliže  $n - 1$  (první) vozidlo zahájí brždění v čase  $t$ , zpomalí a následně zastaví v místě  $x_n^* - 1$ , které dostáváme rovnicí

$$x_{n-1}^* = x_{n-1}(t) - \frac{v_{n-1}(t)^2}{2b_{n-1}}, \quad (1.13)$$

kde se člen  $b_{n-1}$  nazývá nejvyšší kritická decelace, kterou je řidič vozidla  $n - 1$  schopen vykonat. Její hodnota je vždy záporná.

Vozidlo  $n$  jedoucí za ním nebude reagovat na toto zpomalení ihned, ale až v čase  $t + T_n$  a tudíž zastaví až v místě  $x_n^*$  dané rovnicí

$$x_n^* = x_n(t) + [v_n(t) + v_n(t + T_n)] \frac{T_n}{2} - \frac{v_n(t + T_n)^2}{2b_n} \quad (1.14)$$

A proto pro bezpečnost musí řidič vozidla  $n$  zajistit, že bude splněna podmínka

$$x_{n-1}^* - s_{n-1} < x_n^*, \quad (1.15)$$

kde  $s_{n-1}$  je délka vozidla  $n - 1$  sečtena s bezpečnou vzdáleností následujícího ( $n$ ) vozidla. Nicméně pokud tato podmínka neplatí, vozidlo nemá žádný prostor pro případnou řidičovu chybu. Z toho důvodu obsahuje tento model ještě další podmínku; bezpečný odstup s další časovou rezervou,  $\theta$ . Řidič začne reagovat na vozidlo před sebou až v čase  $t + T_n$ . Od této chvíle tedy máme reakční čas  $T_n$  a bezpečný reakční čas  $T_n + \theta$ , který budeme ve výpočtech dále využívat. S využitím rovnic (1.13), (1.14) a (1.15) můžeme tuto podmínku přepsat do rovnice

$$x_{n-1}(t) - \frac{v_{n-1}(t)^2}{2b_{n-1}} - s_{n-1} \geq x_n(t) + [v_n(t) + v_n(t + T_n)] \frac{T_n}{2} + v_n(t + T_n)\theta - \frac{v_n(t + T_n)^2}{2b_n} \quad (1.16)$$

Bez parametru  $\theta$  by řidič vozidla byl nucen brzdit až ve chvíli, kdy opravdu musí, to znamená na maximální výkon brzd. Do té chvíle by se stále pohyboval svoji preferovanou rychlostí. Parametr  $\theta$  slouží k dřívějšímu a přitom ne tak prudkému brždění.

Při skutečném pozorování dopravy jsme schopni změřit všechny parametry vozidla  $n$  v rovnici (1.16) kromě členu  $b_{n-1}$ . Tento člen nahradíme odhadnutou hodnotou  $\hat{b}$ , upravíme tuto rovnici a dostáváme

$$-\frac{v_n(t + T_n)^2}{2b_n} + v_n(t + T_n) \left( \frac{T_n}{2} + \theta \right) - [x_{n-1}(t) - s_{n-1} - x_n(t)] + v_n(t) \frac{T_n}{2} + \frac{v_{n-1}(t)^2}{2\hat{b}} \leq 0. \quad (1.17)$$

Relativní hodnoty  $T_n$  a  $\theta$  jsou důležité v určování chování vozidel. Stejně jako v případě Newellova modelu 1.1, (1.6), pokud je hodnota  $\theta$  rovna právě jedné polovině  $T_n$ , vozidlo jedoucí bezpečnou rychlostí bude schopno udržovat tento stav nekonečně dlouhou dobu. Díky tomu můžeme rovnici (1.17) přepsat do tvaru

$$-\frac{v_n(t + T_n)^2}{2b_n} + v_n(t + T_n)T_n - [x_{n-1}(t) - s_{n-1} - x_n(t)] + v_n(t) \frac{T_n}{2} + \frac{v_{n-1}(t)^2}{2\hat{b}} \leq 0. \quad (1.18)$$

Z toho plyne

$$v_n(t + T_n) \leq b_n T_n + \sqrt{\left( b_n^2 T_n^2 - b_n \left( 2[x_{n-1}(t) - s_{n-1} - x_n(t)] - v_n(t)T_n - \frac{v_{n-1}(t)^2}{2\hat{b}} \right) \right)}. \quad (1.19)$$

Z nerovnice (1.18) vychází, že bezpečné rychlosti  $v_n$  budou ležet mezi dvěma kořeny této nerovnice, ale pokud bude mít spodní kořen zápornou hodnotu můžeme ho ignorovat, protože nás zajímají pouze kladné hodnoty rychlostí. Podcenění plynulého brždění řidiče vozidla  $n$  nastane ve chvíli, kdy

$$v_n(t + T_n) < v_n(t) + b_n T_n.$$

V tuto chvíli musí vozidlo začít brzdit rychleji, než by sám řidič chtěl. Řidič tedy volí rychlost na základě preferované decelarace, ale může brzdit i rychleji pokud by to bylo nutné.

Nerovnice (1.12) pro vozidlo  $n$  na volné komunikaci a (1.19) pro vozidlo  $n$  před kterým se nachází vozidlo  $n - 1$  představují dvě hlavní podmínky pro rychlost  $v_n$  v čase  $t + T_n$  a jestliže řidič přizpůsobí rychlost parametrům vozidla a tak, aby jízda byla bezpečná, dostáváme **konečný vztah pro Gippsův model**:

$$v_n(t+T_n) = \min \left( v_n(t) + 2, 5a_n\tau \left( \frac{1 - v_n(t)}{V_n} \right) \sqrt{\left( 0,025 + \frac{v_n(t)}{V_n} \right)}, \right. \\ \left. b_n T_n + \sqrt{\left( b_n^2 T_n^2 - b_n \left( 2[x_{n-1}(t) - s_{n-1} - x_n(t)] - v_n(t)T_n - \frac{v_{n-1}(t)^2}{2\hat{b}} \right) \right)} \right) \quad (1.20)$$

Pokud platí pro téměř všechna vozidla nižší hodnota v rovnici (1.20) nerovnice (1.19), vozidla jedou blízko sebe, z čehož vyplývá vysoká hustota provozu. Pokud platí opak, tz. nerovnice (1.12), dopravní proud je volný.

# Literatura

- [1] Barceló J, *Fundamentals of traffic simulation*, proceedings, International Series in Operations Research and management science, Springer, 2010
- [2] Barrow J, *Nové teorie všeho*, Dokořán, Praha, 2008
- [3] Brdička M, Samek L, Sopko B, *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2011
- [4] Gipps, P. G. (1981). A behavioural car-following model for computer simulation. *Transportation Research Part B: Methodological*, 15(2), 105-111.
- [5] Haberman R, *Mathematical models: Mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1988
- [6] Helbing D, Herrmann H J, Schreckenberg M, Wolf D E, *Microscopic Simulation of Congested Traffic* v knížce *Traffic and Granular Flow*, Springer, Berlin, 2000
- [7] Horák J, Krlín L, Raidl A, *Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace*, Academia 2003
- [8] Xiaoliang Ma, *A Neural-Fuzzy Framework for Modeling Car-following Behavior* [online], dostupné z [http://www.ctr.kth.se/publications/ctr2006\\_08.pdf](http://www.ctr.kth.se/publications/ctr2006_08.pdf)
- [9] May A D, *Traffic flow fundamentals*, Prentice Hall, 1989
- [10] Newell, G. F. (2002). A simplified car-following theory: a lower order model. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(3), 195-205.
- [11] Příkryl P, *Numerické metody matematické analýzy*, SNTL, Praha, 1988
- [12] Scholtz M, *Classical mechanics and deterministic chaos* [online], dostupné z <http://www.fd.cvut.cz/personal/scholma1/>
- [13] Scholtz M, Vaniš M, Veselý P, Matějka P, *Applied mathematics on Faculty of Transportation Sciences*, vyjde ve sborníku k výročí Fakulty dopravní ČVUT
- [14] Treiber M, Hennecke A, Helbing D, *Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations*, *Physical Review E*, **62** (2), pp. 1805–1824, 2000
- [15] Treiber M, *Microsimulation of road traffic flow* [online], dostupné z <http://www.traffic-simulation.de/>
- [16] VANIŠ, Miroslav. *Matematické modelování vybraných problémů v dopravě v jazyce Java*. Praha, 2013. Bakalářská práce. FD ČVUT.
- [17] Vitásek E, *Numerické metody*, SNTL, Praha, 1987



# Seznam obrázků

1.1	Trajektorie vozidel s konstantní rychlostí, zdroj: [10]	2
1.2	Vztah mezi rychlostí $v$ a vzdáleností mezi vozidly $s_n$ , zdroj: [10]	3
1.3	Lineární aproximace při změně rychlosti vozidel, zdroj: [10]	3

# Seznam tabulek