

1. Modely předcházející IDM

Jednoduše řečeno „Car Following“ modely vycházejí z předpokladu, že pokud n -té vozidlo následuje $n - 1$ vozidlo na homogenní dálnici, trajektorie n -tého vozidla bude stejná jako vozidla před ním ($n - 1$) až na posuny v čase a místě. (Vozidlo bude ve stejném místě jako předcházející v jiný čas a ve stejný čas bude na jiném místě.) Všechny další dispozice jednotlivých modelů v sobě tento předpoklad obsahují.

1.1 Newellův model

V teorii dopravního proudu je Newellův model jeden z modelů, který popisuje chování řidiče dle vozidla před ním. Řidič se snaží držet za vozidlem jedoucím před ním v konstantní vzdálenosti. Tento model vznikl v roce 1961 a postupně se vyvíjel. Vychází z něho později Intelligent Driver Model (IDM) a z tohoto důvodu je zde zmíněn.

V článku [10] je přesně popsán nejen model, ale i jeho verifikace a porovnání s ostatními modely. Pro nás je důležitý popis modelu.

1.1.1 Popis modelu

Jestliže n -té vozidlo jede za $n - 1$ vozidlem (které jede za $n - 2$ vozidlem atd.), cíl každého Car following modelu je zjistit závislost trajektorie n -tého vozidla $x_n(t)$, jeho pozici v čase t na $n - 1$ vozidle, viz. obrázek 1.1. (To také znamená, že není žádná náhodná spojitost mezi těmito vozidly.) Jestliže se $n - 1$ vozidlo pohybuje konstantní rychlostí v ,

$$x_{n-1} = x_n + vt,$$

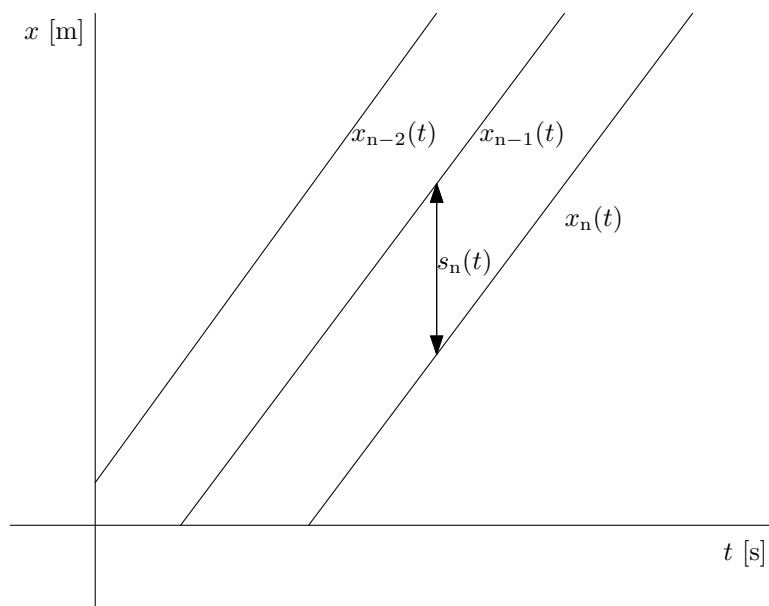
n -té vozidlo také pojede průměrnou rychlostí v . Pokud by n -té vozidlo zrychlovalo, tak by došlo ke kolizi s $n - 1$ vozidlem a naopak pokud by zpomalovalo, tak by se n -té vozidlo neustále vzdalovalo. Totéž platí pro všechna vozidla jedoucí za n -tým. Tento model se nezabývá zjištěním hodnoty rychlosti v , předpokládá se, že je určena buďto na základě omezení rychlosti či možnostech vozidla.

Vzdálenost $s_n = x_{n-1}(t) - x_n(t)$ mezi vozidly n a $n - 1$ se může měnit v čase. Pokud je dálnice homogenní, tato vzdálenost zůstane konstantní okolo hodnoty s_n . Tato hodnota se mění na základě typu vozidla a také závisí na rychlosti v .

Předpokládejme, že existuje nějaký empirický vztah mezi rychlostí v a vzdáleností mezi vozidly s_n . Pokud rychlost v roste, je logické, že řidiči chtějí dosáhnout většího rozestupu mezi vozidly. Tato závislost mezi v a s_n je znázorněna na obrázku 1.2. Každý řidič má svoji preferovanou rychlost V_n . Jestliže tato rychlost je u $n - 1$ vozidla vyšší než u n -tého $v > V_n$, znamená to, že n -té vozidlo pojede svoji preferovanou rychlostí (na obrázku 1.2 znázorněna čárkovanou čarou) a $n - 1$ vozidlo mu ujede. Hodnota rychlosti v nemůže být záporná a vzdálenost mezi vozidly při nulové rychlosti by měla být níže než polopřímka lineární závislosti, viz černá tečka na obrázku 1.2 při rychlosti $v = 0$.

Nyní předpokládejme, že $n - 1$ se vozidlo nějakou dobu t pohybuje konstantní rychlostí v^1 a potom náhle změní rychlost na hodnotu v' . Trajektorie vozidel n a $n - 1$ mohou poté vypadat jako na obrázku 1.3. Z obrázku lze také vypočítat jak časovou τ_n , tak prostorovou d_n mezeru

¹hodnota rychlosti osciluje okolo hodnoty v



Obrázek 1.1: Trajektorie vozidel s konstantní rychlostí, zdroj: [10]

mezi vozidly n a $n - 1$. Z čárkovaného obdelníku poté dostáváme vztah vzdálenost mezi vozidly před změnou rychlosti s_n a po změně rychlosti s'_n ,

$$s_n = d_n + v\tau_n, \quad s'_n = d_n + v'\tau_n.$$

Z toho vyplývá, že pokud leží v a v' na polopřímce z obrázku 1.2, sklon této přímky je právě τ_n a hodnota s_n při rychlosti $v = 0$ je d_n .

Ze vztahu mezi v a s_n , jak je zobrazeno na obrázku 1.2, plyne nezávislost mezer d_n a τ_n na rychlostech v , resp. v' . Pokud se tedy změni rychlost z hodnoty v' na v'' , d_n a τ_n zůstanou při této změně rychlosti stejné. Lineární trajektorie vozidla $x_n(t)$ potom bude jednoduše posun v čase τ_n a místě d_n ,

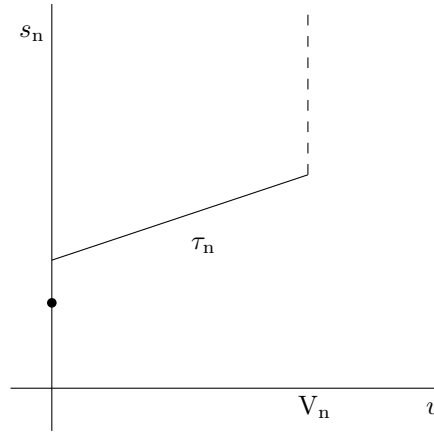
$$x_n(t + \tau_n) = x_{n-1}(t) - d_n. \quad (1.1)$$

U Newellova modelu platí, že n -té vozidlo bude (přibližně) kopírovat trajektorii $n-1$ vozidla dle vztahu (1.1) při vhodných hodnotách d_n a τ_n . Tím, jak se přesně dokáže n -té vozidlo dodržovat vztah (1.1), se Newellův model nezabývá, pouze předpokládá, že řidič je schopen se tímto vztahem řídit. To není tak těžké, protože pokud se změni rychlost vozidla $n - 1$, n -tý řidič nemusí zareagovat okamžitě, ale může počkat dokud se mezera s_n nezvýší (neklesne) na hodnotu, která odpovídá nové rychlosti vozidla $n-1$ (viz obrázek 1.2).

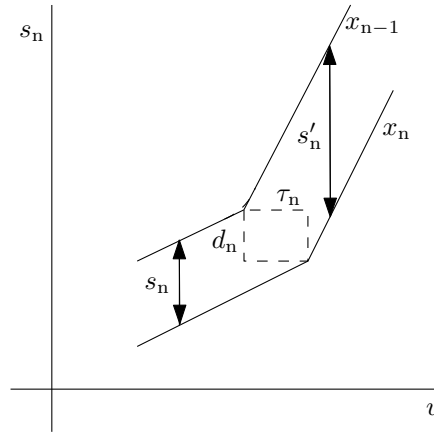
Při pozorování se došlo k závěru, že každý řidič nezkontroluje každého jiného řidiče na komunikaci, ale pouze jen vhodnou „makroskopickou“ část. Hodnoty τ_n a d_n jsou přirozené, to vychází ze vztahu (1.1), kde postupným iterováním dostaneme

$$x_n(t + \tau_n + \tau_{n-1} + \dots + \tau_1) = x_0(t) - d_n - d_{n-1} - \dots - d_1. \quad (1.2)$$

Hodnoty τ_n a d_n se značně liší mezi jednotlivými vozidly v závislosti na typu řidiče. První skupina řidičů raději jede blíže vozidlu před sebou ($n - 1$) až na minimální bezpečnou vzdálenost,



Obrázek 1.2: Vztah mezi rychlostí v a vzdáleností mezi vozidly s_n , zdroj: [10]



Obrázek 1.3: Lineární aproximace při změně rychlosti vozidel, zdroj: [10]

zatímco druhá skupina naopak preferuje delší vzdálenost pro klidnou reakci na nenadálou událost. Je rozumné, aby se hodnoty τ_n a d_n lišily, a to tak, že každému jednotlivému vozidlu budou hodnoty vygenerovány z nějakého pravděpodobnostního rozdělení, jehož variační koeficient se bude blížit jedné. Při generování rychlostí vozidel by naopak měl být variační koeficient zanedbatelný.

Položíme-li

$$\bar{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k, \quad \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_k, \quad (1.3)$$

kde $\bar{\tau}$ a \bar{d} jsou průměrné posuny v čase resp. místě, potom průměrnou vlnovou rychlost spočteme jako podíl $\bar{d}/\bar{\tau}$.

Tento model se dá ovšem popsat nejen mikroskopicky (rychlost, mezera mezi vozidly), ale i makroskopicky (hustota k , intenzita q). Stacionární stav nastane ve chvíli, kdy se všechna vozidla budou pohybovat konstantní rychlostí s rozdílnými posuny (časovými i prostorovými).

Jestliže

$$s_n = d_n + v\tau_n,$$

a rychlost vozidel je konstantní, tak platí

$$\bar{s} = \bar{d} + v\bar{\tau}.$$

Hustotu k lze potom vypočítat jako převrácenou hodnotu průměrné mezery mezi vozidly $k = 1/\bar{s}$ a rychlost jako podíl intenzity a hustoty $v = q/k$. Tudíž platí

$$q = \frac{1}{\bar{\tau}} - \frac{\bar{d}}{\bar{\tau}}k, \quad (1.4)$$

za předpokladu, že rychlost v je menší než preferovaná rychlost jakéhokoliv vozidla V_k .

Rovnice (1.4) propojuje Newellův model s klasickými makroskopickými modely. Problém nastává ve chvíli, kdy průměrná rychlost v je vyšší, než některá s preferovaných rychlostí jednotlivých vozidel. Vozidla se v tomto modelu nemohou předjíždět a proto vznikne kongesce za vozidlem s malou preferovanou rychlostí. V následujících řádcích předpokládáme, že aktuální rychlost vozidla bude menší než preferovaná rychlost V_n .

Uvažujme, že se vozidlo n pohybuje přesně podle rovnice (1.1) a vozidlo za ním $(n-1)$ jede plynule za ním.

Rovnici (1.1) můžeme přepsat do tvaru

$$x_n(t + \tau_n) = x_n(t) + \tau_n v_n(t + T_n). \quad (1.5)$$

Rovnice (1.5) lze pro rovnoměrný pohyb zjednodušit na tvar

$$x_n(t + \tau_n) = x_n(t) + \tau_n v_n(t).$$

Tvar rovnice (1.5) plyne z matematické analýzy², přičemž hodnota T_n se nachází někde mezi nulou a τ_n . Pokud je funkce hladká bude přibližně

$$T_n = \frac{\tau_n}{2}. \quad (1.6)$$

Rovnici (1.5) lze přepsat na přibližný tvar

$$x_n(t + \tau_n) = x_n(t) + \tau_n v_n(t) + \tau_n T_n a_n(t), \quad (1.7)$$

který uvažuje zrychlení vozidla a_n ³. Kombinací rovnic (1.7) a (1.1) dostáváme vztah pro rychlost

$$v_n(t + \tau_n) = \frac{1}{\tau_n} [x_{n-1}(t) - x_n(t)] - \frac{d_n}{\tau_n}. \quad (1.8)$$

Po zderivování rovnice (1.8) dostáváme vztah pro zrychlení vozidla

$$a_n(t + \tau_n) = \frac{1}{\tau_n} [v_{n-1}(t) - v_n(t)]. \quad (1.9)$$

²věta o střední hodnotě

³Předpokládejme vozidlo v klidu, které se rozjíždí. Na začátku zvolíme $\tau_n = 5s, t = 0s, T_n = \tau_n/2 = 2,5s$, potom platí

$$x_n(5) = x_n(0) + 5v_n(0 + 2,5).$$

Pro výpočet dráhy bereme hodnotu rychlosti v čase 2,5s. Nemůžeme vzít hodnotu v nule, vozidlo by v tomto případě stálo na místě. Přibližná hodnota bude tedy opravdu v polovině hodnoty τ_n .

Z rovnic (1.8) a (1.9) je vidět zřejmá závislost na vozidle, které jede před aktuálním, členem $v_{n-1}(t)$, resp. $x_{n-1}(t)$. Řidič volí svoji rychlost na základě odstupu od předchozího vozidla, resp. zrychlení na základě rychlostí. **Konečný vztah pro Newellův model je tedy**

$$a_n(t) = \frac{\frac{1}{\tau_n} [v_{n-1}(t) - v_n(t)] - \frac{d_n}{\tau_n} - v_n(t)}{T_n}. \quad (1.10)$$

1.2 Gippsův model

Další model, kterým se zde budeme zabývat, se jmenuje Gippsův. Tento model byl poprvé popsán v roce 1981 a odvolává se i na zmíněný Newellův model. I v dnešní době se tento model využívá pro simulaci dopravy. Hlavním zdrojem pro tuto podkapitulu je článek P.G. Gippse[4]. Většina modelů, které vznikly před Gippsovým, jsou různé variace na rovnici

$$a_n(t + T_n) = l_n \frac{[v_{n-1}(t) - v_n(t)]^k}{[x_{n-1}(t) - x_n(t)]^m}, \quad (1.11)$$

kde jednotlivé proměnné mají stejný význam jako při popisu Newellova modelu 1.1. Proměnné l_n , k a m jsou parametry, které je nutno empiricky odhadnout. Tyto modely se nazývají Modely General Motors a jsou blíže rozebrány v [16].

Ačkoliv podávají tyto modely dobré výsledky v mnoha situacích, je žádoucí, aby během přepočtů poloh, rychlostí a zrychlení nějakým způsobem byl zahrnut reakční čas řidiče T_n . To si vyžaduje značné množství historických dat, pokud model bude použit v simulačním programu. Navíc, parametry l_n , k a m nemají přímou souvislost s vlastnostmi vozidla či řidiče.

Gipps se proto rozhodl, že vytvoří model, který bude splňovat následující podmínky:

- model by měl napodobovat chování opravdového provozu,
- parametry modelu by měly odpovídat vlastnostem řidiče a vozidla, které jsou jasné; to znamená, že pro nastavení parametrů není potřeba model kalibrovat,
- model by se měl chovat správně i v případě, že doba mezi přepočítáváním polohy a rychlosti je stejná, jako reakční čas řidiče.

Literatura

- [1] Barceló J, *Fundamentals of traffic simulation*, proceedings, International Series in Operations Research and management science, Springer, 2010
- [2] Barrow J, *Nové teorie všeho*, Dokořán, Praha, 2008
- [3] Brdička M, Samek L, Sopko B, *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2011
- [4] Gipps, P. G. (1981). A behavioural car-following model for computer simulation. *Transportation Research Part B: Methodological*, 15(2), 105-111.
- [5] Haberman R, *Mathematical models: Mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1988
- [6] Helbing D, Herrmann H J, Schreckenberg M, Wolf D E, *Microscopic Simulation of Congested Traffic* v knížce Traffic and Granular Flow, Springer, Berlin, 2000
- [7] Horák J, Krlín L, Raidl A, *Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace*, Academia 2003
- [8] Xiaoliang Ma, *A Neural-Fuzzy Framework for Modeling Car-following Behavior* [online], dostupné z http://www.ctr.kth.se/publications/ctr2006_08.pdf
- [9] May A D, *Traffic flow fundamentals*, Prentice Hall, 1989
- [10] Newell, G. F. (2002). A simplified car-following theory: a lower order model. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(3), 195-205.
- [11] Příkryl P, *Numerické metody matematické analýzy*, SNTL, Praha, 1988
- [12] Scholtz M, *Classical mechanics and deterministic chaos* [online], dostupné z <http://www.fd.cvut.cz/personal/scholma1/>
- [13] Scholtz M, Vaniš M, Veselý P, Matějka P, *Applied mathematics on Faculty of Transportation Sciences*, vyjde ve sborníku k výročí Fakulty dopravní ČVUT
- [14] Treiber M, Hennecke A, Helbing D, *Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations*, Physical Review E, **62** (2), pp. 1805–1824, 2000
- [15] Treiber M, *Microsimulation of road traffic flow* [online], dostupné z <http://www.traffic-simulation.de/>
- [16] VANIŠ, Miroslav. *Matematické modelování vybraných problémů v dopravě v jazyce Java*. Praha, 2013. Bakalářská práce. FD ČVUT.
- [17] Vitásek E, *Numerické metody*, SNTL, Praha, 1987

Seznam obrázků

1.1	Trajektorie vozidel s konstantní rychlostí, zdroj: [10]	2
1.2	Vztah mezi rychlostí v a vzdáleností mezi vozidly s_n , zdroj: [10]	3
1.3	Lineární aproximace při změně rychlosti vozidel, zdroj: [10]	3

Seznam tabulek