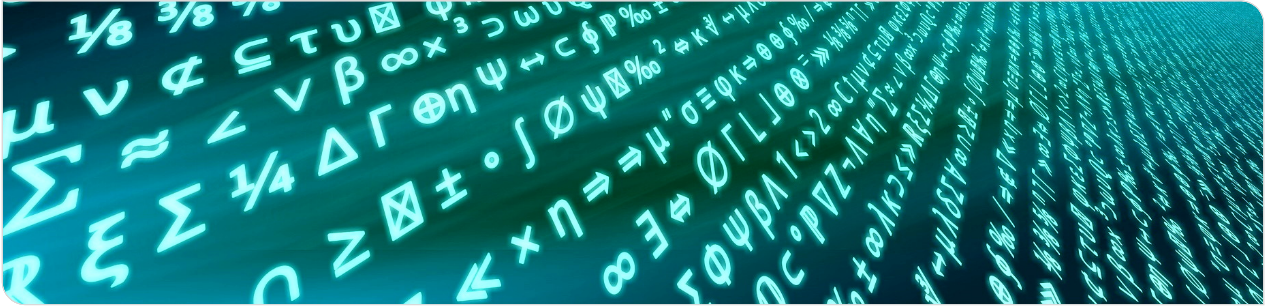
Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra 2: Zusammenfassung

LA2 für die Fachrichtung Informatik - Sommersemester 23

Jonatan Ziegler | 24. Juli 2023



Disclaimer

Dieser Foliensatz wurde von einem Tutor erstellt und ist damit **kein** offizielles Dokument und hat insbesondere keine Vollständigkeitsansprüche. Ebenso kann nicht für Fehlerfreiheit garantiert werden.
Der Foliensatz orientiert sich am Skript und der zugehörigen Vorlesung von PD Dr. Stefan Kühnlein.

Das Teilen und Weiterverbreiten des Foliensatzes in seiner ursprünglichen Form ist ausdrücklich **erlaubt**.

Feedback oder Fehler können gerne an jonatan.ziegler@student.kit.edu gemeldet werden.

Inhalt

Karlsruher Institut für Technologie

Polynomring+

Erinnerung: Polynome

kommutativer Ring R

$a_i \in R \quad (i \in \{0, \dots, n\}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_0)$:

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in R[X]$$

- grad $p = n$ (grad $p = -\infty$ falls $p = 0$)
- $R[X]$ ist Ring

Weitere Eigenschaften

$f, g \in R[X]$

- f **Teiler** von $g \iff \exists h \in R[X] : g = f \cdot h$
- f, g **teilerfremd**: nur **Einheiten** aus $R[X]$ sind gemeinsame Teiler
- $f \notin R[X]^\times$ **irreduzibel**: Bei Zerlegung $f = g \cdot h$ ist immer ein Faktor **Einheit**

Erinnerung

Einheiten $R[X]^\times = R^\times$ invertierbaren Elemente

Erinnerung: Charakteristisches Polynom

Sei $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, V),\ B$ Basis von V

Idee: Einfaches finden von Eigenwerten

$$\mathrm{CP}_\Phi(X) := \det(XI_n - D_{BB}(\Phi))$$

Unabhängig von gewählter Basis B

$$CP_\Phi(\lambda) = 0 \iff \lambda \text{ Eigenwert von } \Phi$$

Satz von Cayley-Hamilton

Sei $\Phi \in \text{Hom}(V, V)$

$$CP_{\Phi}(\Phi) = 0$$

Ideale

Sei R kommutativer Ring

Ideal I

1. I UGR $(R, +)$
2. $r \cdot i \in I \quad \forall r \in R$

- **Hauptideal** I: $\exists a \in I : I = a \cdot R$

Hinweis: Ideal vs Teilring/Unterring

Nur $I = R$ ist sowohl **Teilring** als auch **Ideal** von R,
da $1 \in I$ wegen Teilring $\implies r \cdot 1 \in I$.

Polynome und Eigenwerte

Sei $\Phi \in \mathrm{End}(V),\ f \in K[X],\ V\ K$-VR

- **Annullierendes Polynom**: $f(\Phi) = 0$
- **Verschwindugsideal** $I(\Phi) \subseteq K[X]$: Menge aller annullierenden Polynome
- $f(\mathrm{Spec}\ \Phi) \subseteq \mathrm{Spec}\ f(\Phi)$

Minimalpolynom

Sei $\Phi \in$ End(V)

Minimalpolynom $MP_\Phi(X)$

1. **annullierendes** Polynom für Φ ($MP_\Phi(\Phi) = 0$)
2. kleinstmöglicher Grad (≥ 0)
3. normiert (erster Koeffizient ist 1)

Eigenschaften

- existiert immer eindeutig
- **teilt** alle annullierenden Polynome
  $\Longrightarrow$ ist **Teiler** vom $CP_\Phi(X)$
- hat gleiche **Nullstellen** (Eigenwerte) wie $CP_\Phi(X)$
- Φ **diagonalisierbar**
  $\Longleftrightarrow$ $MP_\Phi(X)$ zerfällt in **verschiedene** Linearfaktoren

Direkte Summe char. P.

Sei $\Phi \in \text{End}(V), V$ K-VR

Für $CP_\Phi(X) = f \cdot g$ gilt:

$$V = \text{Kern } f(\Phi) \oplus \text{Kern } g(\Phi)$$

Haupträume

Erinnerung: Eigenräume und Diagonalisierbarkeit

Sei $\Phi \in \mathrm{End}(V)$, V K-VR

$$\mathrm{Eig}(\Phi, \lambda) = \mathrm{Kern}(\Phi - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V)$$

$\Phi \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar

- $\exists$ Basis B sodass $D_{BB}(\Phi)$ in **Diagonalform** (falls $\dim V < \infty$)
- V hat **Basis aus Eigenvektoren** von Φ
- V ist **Summe der Eigenräume**
- Charakteristisches Polynom **zerfällt in Linearfaktoren** und geometrische und algebraische **Vielfachheiten stimmen überein**

Hauptraum

Sei $\Phi \in \text{End}(V),\ \lambda$ EW von Φ.

Hauptraum von Φ zu EW λ

$$H := H(\Phi, \lambda) := \bigcup_{k=0}^{\infty} \underbrace{\text{Kern}(\Phi - \lambda Id_V)^k}_{:= H_k}$$

Erinnerung

$\mu_a(\Phi, \lambda)$ ist die **algebraische Vielfachheit**, also wie of λ Nullstelle im CP ist.

Eigenschaften

- Untervektorraum
- $H_0 = \{0\}$
- $H_1 = \text{Eig}(\Phi, \lambda)$
- $H_k \subseteq H_{k+1}$
- $H_k = H_{k+1} \implies H_k = H_j\ (j \geq k)$
- $H = H_{\text{dim } V} = H_{\mu_a(\Phi,\lambda)}$
- dim $H = \mu_a(\Phi, \lambda) \geq \mu_g(\Phi, \lambda)$
- $H \neq \{0\} \iff \text{Eig}(\Phi, \lambda) \neq \{0\}$
- H_k ist Φ-invariant

Direkte Summe

Sei $\Phi \in \text{End } V$

Äquivalent

- $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } \Phi} H(\Phi, \lambda)$
- $CP_\Phi(X) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } \Phi} (X - \lambda)^{\dim H(\Phi,\lambda)}$
- CP zerfällt in Linearfaktoren
- MP zerfällt in Linearfaktoren

Jordan’sche Normalform

Nilpotente Endomorphismen

Sei $\Phi \in \text{End}(V)$

Φ nilpotent

- $\iff \exists n \in \mathbb{N}: \quad \Phi^n = 0$
- $\iff X^n$ annullierendes Polynom

Zyklischer UVR

Sei $\Psi \in \text{End}(V)$ nilpotent, $v \in V,\ k \in \mathbb{N},\ \Psi^k(v) \neq 0,\ \Psi^{k+1}(v) = 0$

$$\textbf{Zyklischer UVR } U = \langle \underbrace{v, \Psi(v), \Psi^2(v), \ldots, \Psi^k(v)}_{\text{sind lin. unabh.}} \rangle$$

- U ist Ψ invariant

Zerlegung von $H(\Phi, \lambda)$

$H(\Phi, \lambda) = \bigoplus_{i=1}^{k} Z_i \quad Z_i$ zyklische UVR zu $(\Phi - \lambda id)$, $k \in \mathbb{N}$

Eigenschaften

- $k =$ dim Eig(Φ, λ)
- es gibt $m_d = 2 \cdot$ **dim** $H_d -$ **dim** $H_{d-1} -$ **dim** H_{d+1} viele UVR Z_i mit dim $Z_i = d,\ d \in \mathbb{N}$

Jordankästchen und -blöcke

Jordankästchen

$D_{B_iB_i}(Z_i) =$

$$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{d\times d}$$

mit $B_i =$
$\{v, (\Phi - \lambda id)(v), \dots, (\Phi - \lambda id)^r(v)\}$
für geeignetes $v \in Z_i$

Jordanblock für $H(\Phi, \lambda)$:

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda) & & & \\ & J_{d_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{d_k}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Jordan-Normalform von Φ

$$JNF = \begin{pmatrix} D(\lambda_1) & & & \\ & D(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & D(\lambda_l) \end{pmatrix}$$

Jordanbasis

Karlsruher Institut für Technologie

Bestimme Basen $B(\lambda)$ von $H(\lambda) = H_d,\ d \in \mathbb{N}$ separat:

- Finde U_i $(1 \leq i \leq d)$ sodass $H_{i+1} = H_i \oplus U_{d+1}$
- Bilde Basis B_d von U_d
- Ergänze $(\Phi - \lambda id)(B_{i+1})$ zu Basis B_i von U_i für $1 \leq i < d$
- $B(\lambda) = \bigcup_{i=1}^{d} B_i$

Übersicht: Bestimmen der JNF & Jordanbasis

1. **charakteristisches Polynom** bestimmen
2. Zerlegung in **Haupträume**
3. Bestimmen der **Dimensionen der Kerne** $H_k(\lambda)$ pro Hauptraum
4. Bestimmen der **Jordankästchengrößen** mit Formel

Für Jordanbasis:

5. Bestimme Komplemente U_i und finde deren Basen schrittweise (siehe vorherige Folie)
6. Vereine diese Basen in der richtigen Reihenfolge

Bilinearformen

Paarungen und Bilinearformen

Seien V, W K-VR

Paarung $P : V \times W \to K$

- $P(\alpha v_1 + v_2, w) = \alpha P(v_1, w) + P(v_2, w) \quad v_1, v_2 \in V,\ w \in W,\ \alpha \in K$
- $P(v, \beta w_1 + w_2) = \beta P(v, w_1) + P(v, w_2) \quad v \in V,\ w_1, w_2 \in W,\ \beta \in K$

- **Bilinearform** falls $V = W$
  - **symetrisch** falls $P(v, w) = P(w, v)$ ($v, w \in V = W$)
- **nicht ausgeartet** falls $\forall v \in V \setminus \{0\}\ \exists w \in W : \ P(v, w) \neq 0$ und umgekehrt

Fundamentalmatrix

Seien B Basis von V, C Basis von W

- P ist durch $P(b_i, c_j)$ **eindeutig bestimmt**
- durch jede Wahl von $P(b_i, c_j)$ ergibt sich eine Paarung (bilineare Fortsetzung)

Fundamentalmatrix $D_{BC}(P) = F$

$$F = (P(b_i, c_j))_{i,j}$$

- P Bilinearform $\implies$ F quadratisch
- P symetrisch $\iff$ $F = F^\top$ symetrisch
- P nicht ausgeartet $\iff$ F regulär (und quadratisch)

Basiswechsel für Fundamentalmatrix

Sei $P : V \times W \to K$ Paarung, B Basis von V, C Basis von W, $v \in V$, $w \in W$

Berechnen einer Paarung mit der Fundamentalmatrix

$$P(v, w) = D_B(v)^\top \cdot \underbrace{D_{BC}(P)}_{F} \cdot D_C(w)$$

Basiswechsel

$$D_{\tilde{B}\tilde{C}}(P) = D_{B\tilde{B}}(id)^\top \cdot D_{BC}(P) \cdot D_{C\tilde{C}}(id)$$

Orthonormalbasis

Sei $P : V \times V \to K$ Bilinearform, B Basis von V

- B **OrthoGONALbasis (OGB)** wenn $P(b_i, b_j) = 0 \quad (i \neq j)$
- B **OrthoNORMALbasis (ONB)** wenn B OGB und $P(b_i, b_i) = 1$

- Eine OGB **existiert immer**, wenn P **symetrische** Bilinearform und Charakeristik $K \neq 2$

Fourierformel

P Bilinearform, B ONB, $v \in V$: $\qquad v = \sum_{b \in B} P(v, b) \cdot b$

Karlsruher Institut für Technologie

Skalarprodukt

Positiv-Definitheit

Sei V $\mathbb{R}$-VR
Sei $P : V \times V \to \mathbb{R}$

P positiv definit

$$\forall v \in V \setminus \{0\} : \quad P(v,v) > 0$$

Skalarprodukt

Skalarprodukt (SP) $\langle \cdot, \cdot \rangle$

- Bilinearform
- symetrisch
- positiv definit

euklidischer VR V

V $\mathbb{R}$-VR mit SP $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Standart-SP

Standart-SP auf Standart-VR

$\langle x, y \rangle = x^\top y$ auf $\mathbb{R}^n$

$\implies$ **euklidische Standardraum**

Geometrie

Sei $v, w \in V$, V eukl. VR.

Norm $||v||$

Länge $||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$

Metrik $d(v, w)$

Abstand $d(v, w) := ||v - w||$

Winkel

$\angle(v, w) := \alpha$ mit $cos\ \alpha = \frac{\langle v,w\rangle}{||v||\cdot||w||}$

$v \perp w :\Longleftrightarrow\ v, w$ **orthagonal**
$\Longleftrightarrow\ \angle(v, w) = 90° \Longleftrightarrow\ \langle v, w\rangle = 0$

(Un-)Gleichungen

Sei $v, w \in V$, V eukl. VR.

Cauchy-Schwarzsche-UGL

$$\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle$$
$$\iff \langle v, w\rangle \leq ||v|| \cdot ||w||$$

Gleichheit gdw. v, w lin. abhängig.

Dreiecks-UGL

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$

Phytagoras

$$v \perp w \iff ||v||^2 + ||w||^2 = ||v + w||^2$$

Karlsruher Institut für Technologie

Orthogonalsysteme

Erinnerung Orthonormalbasis

Sei $P : V \times V \to \mathbb{R}$ **Skalarprodukt**, B Basis von V

- B **OrthoGONALbasis (OGB)** wenn $\langle b_i, b_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$
- B **OrthoNORMALbasis (ONB)** wenn B OGB und $\langle b_i, b_i \rangle = 1$

Fourierformel

P **Skalarprodukt**, B ONB, $v \in V$: $\qquad v = \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle b$

Orthagonalsystem

Orthagonalsystem S

Menge Orthogonaler Vektoren $\neq 0$ ($\langle s_i, s_j \rangle = 0$)

Orthagonalsysteme sind **linear unabhänig**.

Orhtogonale Gruppe $O(n)$

$O(n) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n\}$
Also $A^{-1} = A^\top$

Gram-Schmidt

Ziel: Menge $V = \{v_1, \dots, v_n\} \rightsquigarrow$ ONB W von $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Vorgehen:

1. **Ortogonalisieren**

   Für $i \in \{1, \dots, n\}$: $\quad w_i' := v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, w_k' \rangle}{\langle w_k', w_k' \rangle} w_k'$

2. **Normieren**

   Für $i \in \{1, \dots, n\}$: $\quad w_i := \frac{w_i'}{||w_i'||}$

Funktioniert auch mit linear abhänigen Vektoren $\rightsquigarrow w_k' = 0$

Iwasawa-Zerlegung

$$GL_n(\mathbb{R}) = O(n) \cdot \mathcal{B}(n)$$

mit $\mathcal{B}(n) = \begin{pmatrix} + & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & + \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$

Karlsruher Institut für Technologie

Positiv-Definite Matrizen

Erinnerung: Positiv-Definitheit

Sei V $\mathbb{R}$-VR
Sei $P : V \times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform

P positiv definit

$$\forall v \in V \backslash \{0\} : \quad P(v,v) > 0$$

Positiv-definite Matrizen

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit

- A symmetrisch
- $x^\top A x > 0 \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Kriterien: A pos. def $\iff$

- **Cholesky-Zerlegung**
  $A = R^\top R$ mit $R \in GL_n(\mathbb{R})$ **invertierbar** und **obere Dreiecksmatrix**
- **Hurwitz-Kriterium**
  alle **führenden Hauptminoren positiv**
- später: **Alle Eigenwerte positiv**

Führende Hauptminoren

Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

① **Streichen** der **letzten** k **Zeilen** und **Spalten** von A (Cholesky-Zerlegung)

② **Determinate** bestimmen

$$det\left(a_{11}\right), \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots$$

Karlsruher Institut für Technologie

Orthogonales Komplement

Orthogonalraum

Sei $M \subseteq V$ $\mathbb{R}$-VR

Orthogonalraum $M^\perp$

$$M^\perp := \{v \in V \mid v \perp m \quad \forall m \in M\}$$

- $M^\perp$ ist UVR
- $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$
- $N \subseteq M \implies M^\perp \subseteq N^\perp$

Orthogonales Komplement

Sei U endl. dim. UVR von V $\mathbb{R}$-VR

- $U \oplus U^\perp = V$
- $U^\perp$ **orthogonales Komplement** (eindeutig)

Karlsruher Institut für Technologie

Orthogonale Projektion

Erinnerung: Orthogonales Komplement

Sei U endl. dim. UVR von V $\mathbb{R}$-VR

- $U \oplus U^\perp = V$
- $U^\perp$ **orthogonales Komplement** (eindeutig)

Orthogonale Projektion

Sei $U \leq V$ $\mathbb{R}$-VR.

$$\pi_U : V = U + U^\perp \to U, \quad v = u + u^\perp \mapsto u$$

Abstand zwischen Vektormengen

Seien $A, B \subseteq V$, $U, W \leq V$, $v \in V$ $\mathbb{R}$-VR.

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- $d(\underbrace{u + u^\perp}_{=:v}, U) = ||u^\perp|| = ||\pi_{U^\perp}(v)||$
- $d(A, U) = d(\pi_{U^\perp}(A), 0)$
- $d(v + W, U) = ||\pi_{(U+W)^\perp}(v)||$

Unitäre Vektorräume

Komplexe Sklarprodukte

Sei $v, v_1, v_2, w \in V$ $\mathbb{C}$-VR, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ Skalarprodukt

1. **sesquilinear**
   $\langle \alpha v_1 + v_2, w \rangle = \alpha \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$
   $\langle w, \alpha v_1 + v_2, \rangle = \overline{\alpha} \langle w, v_1 \rangle + \langle w, v_2 \rangle$
2. **hermitesch** $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
3. **positiv definit** $\langle v, v \rangle > 0 \in \mathbb{R} \quad (v \neq 0)$

Unterschiede und Gemeinsamkeiten

Körper	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
Bezeichnung	**euklidisch**	**unitär**
CSU: $\lvert\langle v, w\rangle\rvert \leq \lvert\lvert v\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert w\rvert\rvert$	gilt	gilt
$\perp \overset{?}{\iff} a^2 + b^2 = c^2$	$\iff$	$\implies$
Matrizen	orthogonal $O(n)$ mit $A^\top = A$	unitär $U(n)$ mit $A^\top = \overline{A}$

Isometrien

Isometrie

Karlsruher Institut für Technologie

Sei M Menge, $d : M^2 -> \mathbb{R}$

(M, d) metrischer Raum

$\forall x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, x) = 0$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, $\Phi : X \to Y$.

Φ Isometrie

$$d(x, y) = e(\Phi(x), \Phi(y)) \quad \forall x, y \in X$$

Lineare Isometrie

Seien V, W euklidische oder unitäre VR, $\Phi : V \to W$, B ONB von V.

Φ **lineare Isometrie** $\iff$ **linear** und **Isometrie**

Sei Φ linear.

Kriterien Φ lineare Isometrie

- $\iff \langle x, y \rangle_V = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_W \quad \forall x, y \in V$
- endlichdim.: $\iff$ $\Phi(B)$ **orthonormal**
- endlichdim. und $V = W$: $\iff$ $D_{BB}(\Phi)$ **orthogonal** bzw. **unitär** $(A^\top = \overline{A})$

Lin. Isometrien: Drehungen und Spiegelungen

Drehkästchen mit Winkel φ

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Spiegelung an Hyperebene $\langle v\rangle^\perp$

$$\sigma_v(x) := x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

Karlsruher Institut für Technologie

Isometrienormalform

Erinnerung: Lineare Isometrie

Seien V, W euklidische oder unitäre VR, $\Phi : V \to W$, B ONB von V.

Φ **lineare Isometrie** $\iff$ **linear** und **Isometrie**

Sei Φ linear.

Kriterien Φ lineare Isometrie

- $\iff \langle x, y\rangle_V = \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_W \quad \forall x, y \in V$
- endlichdim.: $\iff \Phi(B)$ **orthonormal**
- endlichdim. und $V = W$: $\iff D_{BB}(\Phi)$ **orthogonal** bzw. **unitär** ($A^\top = \overline{A}$)

Eigenschaften von Isometrien

Karlsruher Institut für Technologie

Sei Φ lin. Iso auf V, $U \leq V$.

- Alle EW von Φ haben **Betrag** 1
- U Φ-invariant $\implies U^{\perp}$ Φ-invariant

Isometrienormalform

Sei Φ lineare Isometrie.

In $\mathbb{C}$

Φ ist **orthogonal diagonalisierbar** (alle EW Betrag 1)

In $\mathbb{R}$

$$\Phi = \underbrace{\mathrm{Eig}(\Phi, 1)}_{=:d_+} \oplus \underbrace{\mathrm{Eig}(\Phi, -1)}_{=:d_-} \oplus \bigoplus_{k=1}^{l} W_k$$

- $\dim W_k = 2$
- $D_{BB}(\Phi|_{W_k}) = D_{\varphi_k}$ für B bel. ONB von W_k
- ER und UVR paarweise **orthogonal**

Mit Matrizen ($\mathbb{R}$)

Sei $A \in O(n)$.

$$\exists S \in O(n): \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} I_{d_+} & & & & \\ & -I_{d_-} & & & \\ & & D_{\varphi_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_{\varphi_l} \end{pmatrix}$$

Drehkästchen mit Winkel φ

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Tricks

Zusammenhang komplexe EW und Drehwinkel

$\lambda = a + bi = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Warum $\varphi \in (0, \pi)$?

- $\varphi = 0$: EW zu 1
- $\varphi = \pi$: EW zu -1
- $\varphi > \pi$: Rotation in gegenrichtung um $2\pi - \varphi < \pi$

Tricks 2

Drehebene U finden

Falls $V = \mathbb{R}^3$:

- $\Phi(v) - v$ liegt in Drehebene U falls $\det \Phi = 1$
- $\Phi(v) + v$ liegt in Drehebene U falls $\det \Phi = -1$

Drehwinkel bestimmen

- $\varphi = \angle(v, \Phi(v)) = \arccos \frac{\langle v, \Phi(v) \rangle}{||v||^2}$ mit $v \in U$
- $\varphi = \arccos \frac{\langle \pi_U(v), \pi_U(\Phi(v)) \rangle}{||\pi_U(v)||^2} \quad v \notin U^\perp$

Karlsruher Institut für Technologie

Selbstadjungierte Endomorphismen

Adjungierter Homomorphismus

Sei $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$

Adjungierte Abbildung Φ^*

Eindeutige Abbildung $\Phi^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$ falls existent mit:

$$\langle \Phi(v), w \rangle_W = \langle v, \Phi^*(w) \rangle_V \quad \forall v, w \in V$$

V, W endlich-dimensional:

Adjungierte existiert und $D_{CB}(\Phi^*) = D_{BC}(\Phi)^*$ mit $A^* = \overline{A^\top}$, B, C ONB

Selbstadjungierte Abbildung

Sein V eukl. oder unitärer VR.

$\Phi \in \operatorname{End} V$ selbstadjungiert

$$\langle v, \Phi(w) \rangle = \langle \Phi(v), w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Eigenschaften

- endl. dim.: $\iff \; D_{BB}\Phi = (D_{BB}\Phi)^* \; \left(= \overline{D_{BB}(\Phi)^\top}\right)$ mit ONB B
- Alle EW von Φ sind reell, $CP_\Phi(X)$ zerfällt
- $U \leq V$ endl. dim., U Φ-invariant $\implies U^\perp$ Φ-invariant

Spektralsatz

Sei $\Phi \in \operatorname{End} V$.

Spektralsatz

Φ ist **orthogonal reell diagonalisierbar** (ONB aus EV) $\iff$ Φ **selbstadjungiert**

Symmetrische reelle Matrizen sind diagonalisierbar.

Positiv Definit

A symmetrisch: **positiv definit** $\iff$ alle EW **positiv**

Karlsruher Institut für Technologie

Normale Endomorphismen

Wiederholung: Adjungierter Homomorphismus

Sei $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$

Adjungierte Abbildung Φ^*

Eindeutige Abbildung $\Phi^* \in \text{Hom}(W, V)$ falls existent mit:

$$\langle \Phi(v), w \rangle_W = \langle v, \Phi^*(w) \rangle_V \quad \forall v, w \in V$$

V, W endlich-dimensional:

Adjungierte existiert und $D_{CB}(\Phi^*) = D_{BC}(\Phi)^*$ mit $A^* = \overline{A^\top}$, B, C ONB

Wiederholung: Selbstadjungierte Abbildung

Sein V eukl. oder unitärer VR.

$\Phi \in \operatorname{End} V$ selbstadjungiert

$$\langle v, \Phi(w) \rangle = \langle \Phi(v), w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Eigenschaften

- endl. dim.: $\iff D_{BB}\Phi = (D_{BB}\Phi)^* \left(= \overline{D_{BB}(\Phi)^\top}\right)$ mit ONB B
- Alle EW von Φ sind reell, $CP_\Phi(X)$ zerfällt
- $U \leq V$ endl. dim., U Φ-invariant $\implies U^\perp$ Φ-invariant

Normale Endomorphismen

Sei $\Phi \in \operatorname{End} V$.

Φ normal

$$\Phi \text{ normal} \iff \Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$$

Sei $U \leq V$ endl. dim. und **Φ-invariant**.
$\implies U^\perp$ **Φ-invariant**.

Spektralsatz für normale Endomorphismen

Sein V endl. dim., Φ normal.

Spektralsatz für normale Endomorphismen

- In $\mathbb{C}$: Φ ist **orthogonal diagonalisierbar**
- In $\mathbb{R}$: Φ ist **orthogonal** in 1 und 2-dim. **Φ-invariante UVR** zerlegbar

Übersicht: Normal, Selbstadjungiert, Isometrie

Φ normal

$$\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$$

$$A\overline{A^\top} = \overline{A^\top}A$$

diag.bar oder Drehstreck-Kästchen

EW belibig

Φ selbstadjungiert

$$\Phi^* = \Phi$$

$$\overline{A^\top} = A$$

diag.-bar

EW reell

Φ Isometrie

$$\Phi^* = \Phi^{-1}$$

$$\overline{A^\top} = A^{-1}$$

diag.-bar oder Drehkästchen

EW $|\cdot| = 1$

U Φ-invariant $\implies$ $U^\perp$ Φ-invariant

Viel Freude beim Lernen und

Viel Erfolg bei der Klausur