Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra 1: Zusammenfassung

LA1 für die Fachrichtung Informatik – Wintersemester 23/24

Jonatan Ziegler | 17. November 2024

Disclaimer

Karlsruher Institut für Technologie

Dieser Foliensatz wurde von einem Tutor erstellt und ist damit **kein** offizielles Dokument und hat insbesondere keine Vollständigkeitsansprüche. Ebenso kann nicht für Fehlerfreiheit garantiert werden.
Der Foliensatz orientiert sich an den Skripten und den zugehörigen Vorlesungen von PD Dr. Stefan Kühnlein und Dr. Rafael Dahmen.

Das Teilen und Weiterverbreiten des Foliensatzes in seiner urspünglichen Form ist ausdrücklich **erlaubt**.

Feedback oder Fehler können gerne an jonatan.ziegler@student.kit.edu gemeldet werden.

Inhalt

Karlsruher Institut für Technologie

Aussagenlogik

Aussagen

A : „Es schneit nicht.“ $\rightsquigarrow wahr$
$B : 1 = 2 \rightsquigarrow falsch$

Wahr oder Falsch

Junktoren

Kon**j**unktion	U**n**D	$\wedge$
Disjunktion	ODER	$\vee$
Negation	NICHT	$\neg$
Implikation	„FOLGT“	$\Longrightarrow$
Äquivalenz	„GLEICH“	$\Longleftrightarrow$

Quantoren

Existenzquantor

$$\exists x \in M : \text{ Aussage}$$

Allquantor

$$\forall x \in M : \text{ Aussage}$$

Negation

$$\neg\exists x \in M : A(x) \iff \forall x \in M : \neg A(x)$$

$$\neg\forall x \in M : A(x) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$$

$\iff$ vs. $=$

„Datentypen“	Gleichheit mit
Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$	
Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	
Mengen $\mathcal{P}(M)$	$=$
Abbildungen B^A	
...	
Aussagen $\{w, f\}$	$\iff$

Mengen

Mengen

Sammlung an Dingen
Bsp: $\{Apfel, 3, x \mapsto x^2\}$

Wichtige Mengen

Leere Menge	$\emptyset = \{\}$
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$
Natürliche Zahlen mit 0	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, ...\} \cup \{-1, -2, ...\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Es gilt:

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Mengenrelationen und -operationen

Seien A, B, M Mengen.

		formale Definition	$A = \{1,2,3\}, B = \{3,4\}$
Element	$x \in A$		$3 \in A$
nicht Element	$x \notin A$		$4 \notin A$
Teilmenge	$A \subseteq M$	$\forall x : x \in A \implies x \in M$	gilt für $M = \{1, \dots, 4\}$
Obermenge	$A \supseteq M$	$\forall x : x \in M \implies x \in A$	gilt für $M = \{2\}$
Vereinigung	$A \cup B$	$x \in A \cup B :\iff x \in A \vee x \in B$	$= \{1,2,3,4\}$
(Durch-)Schnitt	$A \cap B$	$x \in A \cap B :\iff x \in A \wedge x \in B$	$= \{3\}$
Differenz	$A \setminus B$	$x \in A \setminus B :\iff x \in A \wedge x \notin B$	$= \{1,2\}$
Kartesisches Produkt	$A \times B$		$= \{(1,3),(1,4),(2,\dots\}$
Mehrfaches Kart. Prod.	$A^n, n \in \mathbb{N}$	$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ mal}}$	
Potenzmenge	$\mathcal{P}(B)$	$M \in \mathcal{P}(B) :\iff M \subseteq B$	$= \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$

$\subset$ vs. $\subseteq$ vs. $\subsetneq$

Operation	inkl. Gleichheit?
$\subset$	Uneindeutig, meist Ja
$\subseteq$	Ja
$\subsetneq$	Nein
$\supset$	Uneindeutig, meist Ja
$\supseteq$	Ja
$\supsetneq$	Nein

Mengenabstraktion

$$\{\textbf{Element} \in \textbf{Grundmenge} \mid \textbf{mit wahrer Aussage}\}$$

Ohne Grundmenge ist jedes denkbare Element möglich (z.B. Apfel, $\mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2$, ...)
Einschrenkungen durch Aussage: „filtert“ alle möglichen Elemente

Bsp.:

- $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\} = \{1, 2, ..., 9, 10\}$
- $\left\{a \mid a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = a\right\}$

‘,’ bedeutet UND

Weiteres

Karlsruher Institut für Technologie

Große Operatoren

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{-n, n\} = \mathbb{Z}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{0, n\} = \{0\}$$

Mächtigkeit

Anzahl der Elemente

$|\{0,1,2\}| = 3 \quad |\emptyset| = 0 \quad |\mathbb{N}| = \infty$

Karlsruher Institut für Technologie

Beweise

Allgemeiner Aufbau

Beh.:
Was will ich Zeigen?

Bew.:
Annahmen / Vorrausbedingungen annehmen.
Schritte der logischen Folgerung die zur Aussage führen.

q.e.d. oder $\textbf{QED}$ oder $\rightarrow$ $\square$

quod erat demonstrandum (lat. für „was zu beweisen war")

Variablen

Jede Variable muss gebunden sein.

Bindungskonstrukte

Einführen einer **gebunden** Variable x:

- Sei $x \in \dots$
- $x := \dots$
- $\exists x : \dots, \forall x : \dots$
- $\sum_{x=\dots}^{\dots} \dots$
- $\{x \in \cdots \mid \dots\}$
- Wenn eher Nebensächlich: $(x \in \dots)$
  Bsp: $\cdots \in \mathbb{R}^x \; (x \in \mathbb{N})$

Zusammenhang und roter Faden

Jede Gleichung und Aussage hat irgendeine Bedeutung oder Zusammenhang. Dieser muss explizit erwähnt werden.

Bsp.:

Sei $x \in \mathbb{N}$
$\implies x > 0$
$\iff 0 > -x$

Sei $x, y \in A = \dots$
Gelte $f(x) = f(y)$
$\implies x = y$

Es gilt $1 = 1$
$\iff 1 = \frac{x}{x} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$
$\iff 1 - \frac{x}{x} = 0$

Beweismuster: Äquivalenz

Beh.: $A \iff B$

Bew.:

$\Rightarrow$

Gelte A

$\overset{\text{Satz xy}}{\implies}$ Mathemagie…

$\implies B$

$\Leftarrow$

Gelte B

$\implies$ Mathemagie…

$\implies A$

$\square$

Beweismuster: Mengengleichheit

Karlsruher Institut für Technologie

Beh.: $M = N$

Bew.:

$\subseteq$

Sei $x \in M$

$\implies$ Mathemagie…

$\implies x \in N$

$\supseteq$

Sei $x \in N$

$\implies$ Mathemagie…

$\implies x \in M$

$\square$

Widerspruchsbeweis

Beh.: A

Bew.:

Ann.: $\neg A$

$\implies$ $\ldots$ ($\neg A$ darf verwendet werden)

$\implies$ „falsche Aussage“ $\lightning$

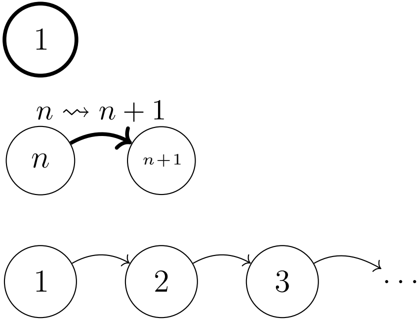
Ann. *falsch*

$\implies$ A gilt (aka. $\neg A$ gilt nicht)

$\square$

Vollständige Indukton

Induktionseigenschaft: Aussage für $n \rightsquigarrow$ Aussage für $n+1$
Häufig für Beweise über $\mathbb{N}$ oder $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$



Beh.: Aussage A_n gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

Bew.:

Induktionsanfang (IA): $n = 1$

A_1 gilt (da ...).

Induktionsvorraussetzung (IV):

Aussage A_n gilt für festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss /-schritt (IS): $n \rightsquigarrow n + 1$

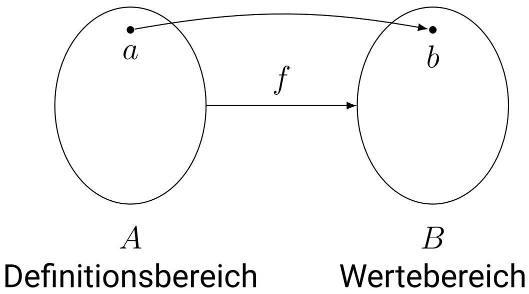
A_{n+1} umformen zu etwas mit A_n.
Wir dürfen einfach annehmen, dass A_n gilt (wegen IV), müssen nur noch den Rest zeigen.
$\implies A_{n+1}$ gilt

$\square$

Karlsruher Institut für Technologie

Abbildungen

Abbildung



$$f : A \to B, \quad x \mapsto f(x) = \dots$$

Eigenschaften

$$f : A \to B$$

f **ist ...**	**jedes Element in B wird ...getroffen**
injektiv	**höchstens** einmal
surjektiv	**mindestens** einmal
bijektiv (injektiv $\wedge$ surjektiv)	**genau** einmal

Quiz

	injektiv	surjektiv
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$	✗	✗
$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2$	✗	✓
$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$	✓	✗
$f : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto \sqrt{x}$	✓	✓
$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \frac{1}{x}$	✓	✓

Beweise

$$f, g : A \to B$$

Gleichheit $f = g$	$\forall a \in A : f(a) = g(a)$
f **injektiv**	$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$
f **surjektiv**	$\forall b \in B\ \exists a \in A : f(a) = b$
f **bijektiv**	f injektiv $\wedge f$ surjektiv

(Ur-)Bildfunktion

$$f : A \to B$$

$$\implies f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), \quad M \mapsto \{f(x) \mid x \in M\}$$

$$\implies f_*^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), \quad N \mapsto \{x \in A \mid f(x) \in N\}$$

Wenn bijektiv:

$$\implies f^{-1} : B \to A$$

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

Graphen nicht Klausurrelevant

Graphen nicht Klausurrelevant

$$\Gamma = (E, K) \text{ heißt Graph} \iff E \text{ Menge, } K \subseteq \{M \subseteq E \mid |M| = 2\}$$

Seien $\Gamma = (E, K), \tilde{\Gamma} = (\tilde{E}, \tilde{K})$ Graphen.

Isomorphismus $f : E \to \tilde{E}$ wenn $\{x, y\} \in K \iff \{f(x), f(y)\} \in \tilde{K}$.

Wenn $E = \tilde{E}$ und der gleiche Graph: **Automorphismus**

Relationen

Relation

Karlsruher Institut für Technologie

R Relation

$R \subseteq M \times M$

Schreibweise: $x, y \in R: \quad xRy \iff (x,y) \in R$

- „billige Abbildung“
- Bsp:
  - $M = \mathbb{N}, R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$
  - $M = \mathbb{N}, R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = y\}$

Eigenschaften

$x, y, z \in M$

reflexiv	xRx
symmetrisch	$xRy \iff yRx$
antisymmetrisch	$xRy \wedge yRx \implies x = y$
transitiv	$xRy \wedge yRz \implies xRz$

Aufgabe

Welche der Eigenschaften haben die folgenden Relationen?

1. Zwei Tutanden sitzen nebeneinander
2. Zwei Tutanden sitzen in der selben Reihe
3. Ein:e Tutand:in sitzt weiter vorne als ein:e andere:r
4. Eine Tutandenreihe sitzt *nicht* weiter vorne als eine andere
5. Zwei Tutanden sitzen in der gleichen Reihe oder Spalte

Gibt es eine symmetrisch und transitive Relation, die nicht reflexiv ist?

Äquivalenzrelation

1. reflexiv
2. symetrisch
3. transitiv

Bsp:

- „$=$“
- „Weglassen von Informationen“ (Gleiches Bild)
- Kongruenz modulo

Kongruenz modulo n

$a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}: \quad a \equiv b \text{ mod } n$

$\iff a, b$ mit **gleichem Rest** durch n **teilbar**

$\iff n|(a-b)$ aka. n **teilt** $a - b$

$:\iff \exists k \in \mathbb{Z} : (a-b) = k \cdot n$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : a = b + k \cdot n$

Äquivalenzklassen

Sei $\sim$ Äquivalenzrelation auf M.

- $[x]_\sim = \{y \in M \mid x \sim y\}$
- Disjunkte Zerlegung
- Quotientenmenge $M/\sim = \{[x]_\sim \mid x \in M\}$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ wobei
$[0] = \{0, n, -n, 2n, -2n, \dots\}$
$[1] = \{1, n+1, -n+1, 2n+1, -2n+1, \dots\}$

Karlsruher Institut für Technologie

Gruppen

Verknüpfung (binäre Operation)

$$* : M \times M \to M$$

Mögliche Eigenschaften:

assoziativ	$(x * y) * z = x * (y * z)$
kommutativ	$x * y = y * x$

Bsp:

- $+, \cdot$ auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $-$ auf $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $:$ auf $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$?

Wichtig

Immer zeigen, dass $a * b \in M$!

Halbgruppen

Gruppe $(S, *)$

Monoid $(S, *)$

Halbgruppe $(S, *)$

① $* : S \times S \to S \quad (a * b \in S \quad \forall a, b \in S)$

② $*$ **assoziativ**

③ $\exists$ **Neutrales Element** $e \in S$:
$x * e = e * x = x \quad (\forall x \in S)$

④ $\forall x \in S \; \exists$ **Inverses Element** $y =: x^{-1} \in S : \quad x * y = y * x = e$

Weiteres

Sei S Monoid.

- $S^\times$ **Einheitengruppe** aller invertierbaren Elemente
- **Abelsche Gruppe** $(G, *) :\Longleftrightarrow G$ Gruppe und $*$ kommutativ

Aufgabe: Halbgruppe, Monoid, Gruppe?

	Halbgruppe	Monoid	Gruppe
$(\mathbb{N}_0, +)$	✓	✓	✗
$(\mathbb{Z}, \cdot)$	✓	✓	✗
$(\mathbb{Q}, \cdot)$	✓	✓	✗
$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$	✓	✓	✓
$(\mathbb{N}_0, (x, y) \mapsto \lvert x - y \rvert)$	✗	✗	✗
$(\emptyset, \emptyset)$	✓	✗	✗
$(\{e\}, (x, y) \mapsto e)$	✓	✓	✓
$(\mathbb{N}_0, (x, y) \mapsto x)$	✓	✗	✗
$(\mathbb{N}_0, (x, y) \mapsto \max\{x, y\})$	✓	✓	✗

Symmetrische Gruppe

Sei X Menge.

- **Symmetrische Gruppe** $\mathcal{S}(X) := (X^X, \circ)^\times = (\{f : X \to X \mid f \text{ bijektiv}\}, \circ)$
- Für $X = \{1, \dots, n\} : \mathcal{S}(n) := \mathcal{S}(X) \quad (n \in \mathbb{N})$
- **Permutationen** $\sigma \in \mathcal{S}(n)$: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Untergruppen

Erinnerung: Gruppen

Gruppe $(S,*)$

Monoid $(S,*)$

Halbgruppe $(S,*)$

1. $*: S \times S \to S \quad (a * b \in S \quad \forall a, b \in S)$
2. $*$ **assoziativ**

3. $\exists$ **Neutrales Element** $e \in S$: $x * e = e * x = x \quad (\forall x \in S)$

4. $\forall x \in S \; \exists$ **Inverses Element** $y =: x^{-1} \in S: \quad x * y = y * x = e$

Untergruppe

Sei $(G, *)$ Gruppe

Gruppe $(H, *)$ **Untergruppe** von $(G, *)$ $:\Longleftrightarrow$ $H \subseteq G$.

Untergruppe $(H, *)$

- $e_G \in H$
- $g * h \in H \quad (\forall g, h \in H)$
- $g^{-1} \in H \quad (\forall g \in H)$

Karlsruher Institut für Technologie

Homomorphismen

Gruppenhomomorphismen

„Strukturerhaltende Abbildungen“

Seien $(G, *), (H, \bullet)$ Gruppen.

Gruppenhomomorphismus $f : G \to H \in \mathrm{Hom}(G, H)$

$$f(x * y) = f(x) \bullet f(y) \quad (\forall x, y \in G)$$

Eigenschaften

Sei $f \in \text{Hom}(G, H)$

- $f(e_G) = e_h$
- $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
- U UGR von $G \implies f(U)$ UGR H
- f injektiv $\iff$ Kern$f := f^{-1}(\{e_H\}) = \{e_G\}$

Kern

Sei $f \in \text{Hom}(G, H)$

„Alle Elemente aus G die auf e_H abgebildet werden“

$$\text{Kern} f := f^{-1}(\{e_H\}) = \{g \in G : f(g) = e_H\}$$

Der Kern ist eine Untergruppe von G.

Homomorphismen

$$
\begin{tikzcd}
& \text{Homomorphismus} \arrow[dl, "\text{bijektiv}"'] \arrow[dr, "\text{auf sich selbst}"] & \\
\text{Isomorphismus} \arrow[dr, "\text{auf sich selbst}"'] & & \text{Endomorphismus} \arrow[dl, "\text{bijektiv}"] \\
& \text{Automorphismus} &
\end{tikzcd}
$$

Ringe

Errinnerung: Gruppe

Karlsruher Institut für Technologie

Gruppe $(S, *)$

Monoid $(S, *)$

Halbgruppe $(S, *)$

1. $*: S \times S \to S \quad (a * b \in S \quad \forall a, b \in S)$
2. $*$ **assoziativ**

3. $\exists$ **Neutrales Element** $e \in S$: $x * e = e * x = x \quad (\forall x \in S)$

4. $\forall x \in S\ \exists$ **Inverses Element** $y =: x^{-1} \in S: \quad x * y = y * x = e$

Ring

$$(R, +, \cdot)$$

1. $(R, +)$ ist **abelsche Gruppe** (mit neutralem Element 0_R)
2. $(R, \cdot)$ ist **Monoid** (mit neutralem Element 1_R)
3. **Distributivgesetze** $\forall x, y, z \in R:$
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$
$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$$

R **kommutativ** $:\iff$ $\cdot$ kommutativ

Aufgabe: Ringe?

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ✓

$(\{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ ✓

$(\{a + \frac{1}{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ ✗

$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, (a, b) \mapsto a^b)$ ✗

$(\{0\}, +, \cdot)$ ✓

$(\{aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$ ✗

Ringhomomorphismus

$(R, +_R, \cdot_R), (S, +_S, \cdot_s)$ Ringe

Ringhomomorphismus $\Phi : R \to S$

$\forall x, y \in R :$

- $\Phi(x +_R y) = \Phi(x) +_S \Phi(y)$
- $\Phi(x \cdot_R y) = \Phi(x) \cdot_S \Phi(y)$
- $\Phi(1_R) = 1_S$

Kern $\Phi := \Phi^{-1}(\{0_S\})$

Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Homomorphismus} \arrow[dl, "\text{bijektiv}"'] \arrow[dr, "\text{auf sich selbst}"] & \\
\text{Isomorphismus} \arrow[dr, "\text{auf sich selbst}"'] & & \text{Endomorphismus} \arrow[dl, "\text{bijektiv}"] \\
 & \text{Automorphismus} &
\end{tikzcd}$$

Karlsruher Institut für Technologie

RSA-Verschlüsselung nicht Klausurrelevant

RSA-Verschlüsselung nicht Klausurrelevant

Karlsruher Institut für Technologie

1. Wähle Primzahlen $p \neq q \in \mathbb{N}$ und $e \in \mathbb{N}$ zu $(p-1)(q-1)$ teilerfremd.
2. Veröffentliche $N := pq,\ e$ (**Public Key**),
   berechne f sodass $f \cdot e \equiv 1$ mod $(p-1)(q-1)$ (**Private Key**)
3. Andere **Sender** kodieren Nachricht als $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ und verschlüsseln als $m := a^e \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$
4. Ich **Empfänger** bekomme m und entschlüssele $a = m^f \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

Karlsruher Institut für Technologie

Körper

Errinnerung: Ring

$$(R, +, \cdot)$$

1. $(R, +)$ ist **abelsche Gruppe** (mit neutralem Element 0_R)
2. $(R, \cdot)$ ist **Monoid** (mit neutralem Element 1_R)
3. **Distributivgesetze** $\forall x, y, z \in R:$
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$
$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$$

R **kommutativ** $:\Longleftrightarrow$ $\cdot$ kommutativ

Körper (Field)

$$(K, +, \cdot)$$

1. $(K, +)$ ist **abelsche Gruppe**
2. $(K \backslash \{0_K\}, \cdot)$ ist **abelsche Gruppe**
3. **Distributivgesetz** $\forall x, y, z \in K: \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Alternativ:

$(K, +, \cdot)$ ist **Ring** mit $K^\times = K \backslash \{0_K\}$

Wichtige Körper

$\mathbb{Q}$	Rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Komplexen Zahlen
$\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}$ prim	Restklassenkörper

Polynomring

Polynome

kommutativer Ring R

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in R[X]$$

$a_i \in R \quad (i \in \{0, \ldots, n\}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_0)$

- grad $p = n$ (grad $p = -\infty$ falls $p = 0$)
- $R[X]$ ist Ring und R-Algebra falls R Körper
- Alternative Vorstellung: endliche Folge an Koeffizienten
- **Einsetzabbildung**: $f \in R[X] \mapsto f : R \to R$
  ersetzen von X durch ein Element aus R

Nullstellen

Nullstellen von $f \in R$: $\quad \{x \in R \mid f(x) = 0\}$

Zerlegung in **Linearfaktoren**:

$$f = (X - x_0) \cdot p \quad p \in R[X], x_0 \text{Nullstelle}$$

mögl. p erneut zerlegen...

Max. grad f Nullstellen $\implies$ max. grad f Linearfaktoren (wenn nullteilerfrei)

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Karlsruher Institut für Technologie

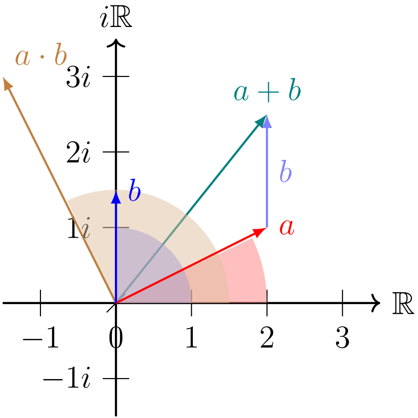
$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$$

i imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$

Sei $w = a + bi, z = c + di \in \mathbb{C}$

- $w + z = (a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$
- $w \cdot z = (a + bi) \cdot (c + di) := ac + adi + bci + bdi^2 = ac - db + (ad + bc)i$
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist Körper

Vorstellung



$$a := 2 + i$$

$$b := \frac{3}{2}i$$

$$a + b = 2 + \frac{5}{2}i$$

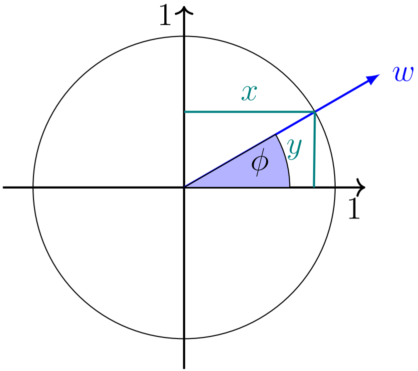
$$a \cdot b = -\frac{3}{2} + 3i$$

Weitere Operationen

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$

- **Realteil** Re $z = a$
- **Imaginärteil** Im $z = b \in \mathbb{R}$
- **komplex Konjugierte** $\bar{z} := a - bi$
- **Betrag** $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ (Radius)
- Keine Ordnung ($\leq$)
- mehrere Wurzeln (z.B. $1 = 1^4 = (-1)^4 = i^4 = (-i)^4$)

Polarkoordinaten



$$w = x + iy = r \cdot (\cos\phi + i \sin\phi) = re^{i\phi}$$

Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

LGS

LGS

p Gleichungen, q Unbekannte x_j

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1q}x_q & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2q}x_q & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \cdots & + & a_{pq}x_q & = & b_p
\end{array}$$

$a_{ij}, b_j \in \mathbb{R} \quad (i \in \{1, \dots p\}, j \in \{1, \dots, q\})$

Merkregel für Indizes

Zeile (Gleichung) zuerst, Spalte (Unbekannte) später

Homogene LGS

Homogen wenn $\forall i : b_i = 0$

Karlsruher Institut für Technologie

Matrizen

Matrix

Wichtigen Daten eines LGS

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j} \in R^{p \times q} \quad a_{ij} \in R$$

Merkregel für Indizes

Zeile zuerst, Spalte später

Rechnen mit Matrizen

$A = (a_{ij})_{i,j}, B = (b_{ij})_{i,j} \in R^{p \times q} \quad C = (c_{jk})_{j,k} \in R^{q \times r}$

$$A + B = (a_{ij})_{i,j} + (b_{ij})_{i,j} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

$$\lambda A = \lambda \cdot (a_{ij})_{i,j} = (\lambda a_{ij})_{i,j} \qquad \lambda \in R$$

transponiert: $A^\top = (a_{ij})_{i,j}^\top = (a_{ji})_{i,j} \in R^{q \times p}$ gespiegelt

$$A \cdot C = (a_{ij})_{i,j} \cdot (c_{jk})_{j,k} = \left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} c_{jk}\right)_{i,k} \in R^{p \times r}$$

Spalten A = Zeilen C

LGS und Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

Weitere Rechenregeln

Karlsruher Institut für Technologie

$$
\begin{aligned}
(\lambda A)^\top &= \lambda A^\top & A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \lambda \in \mathbb{R} \\
(A+B)^\top &= A^\top + B^\top & A, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \\
(AB)^\top &= B^\top A^\top & A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r} \\
(A^\top)^\top &= A & A \in \mathbb{R}^{m\times n}
\end{aligned}
$$

Achtung!

$$AB \neq BA$$

Invertierbare Matrizen

Inverse Matrix

Quadratische Matrizen bilden **Ring**, aber keinen **Körper**

$A \in R^{p \times p}$ **invertierbar** oder **regulär** $\iff \exists B \in R^{p \times p} : AB = BA = I_p$

$GL_p(R)$ **invertierbare Matrizen** aus $R^{p \times p}$

Kriterien für Invertierbarkeit

Sei $A \in K^{n \times n}, n \in \mathbb{N}$.

Folgende Aussagen sind Äquivalent

- A ist **invertierbar**
- $A^\top$ ist **invertierbar**
- $\exists B \in K^{n \times n} : AB = \mathbb{1}_n$
- $\ker A = \{0\}$
- $\operatorname{rg} A = n$
- $\varphi_A : K^{n \times n} \to K^{n \times n}, x \mapsto Ax$ ist **injektiv**
- $\varphi_A : K^{n \times n} \to K^{n \times n}, x \mapsto Ax$ ist **surjektiv**
- $\varphi_A : K^{n \times n} \to K^{n \times n}, x \mapsto Ax$ ist **bijektiv**

Besondere Matrizen

Elementarmatrizen $E_{kl} = \left(\begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \wedge j = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)_{i,j}$ i.A. **nicht** invertierbar

Diagonalmatrizen $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_p) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_q \end{pmatrix}$ invertierbar, wenn $a_1, \ldots, a_p$ invertierbar

Karlsruher Institut für Technologie

Gauß-Algorithmus

Gauß-Algorithmus

Eingabe $Ax = b \implies (A|b)$ über Ring R

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} & b_p \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (\vdots) \\ (p) \end{array}$$

Erlaubte Operationen

- Zeile (i) $s \in R$ mal auf Zeile (j) **addieren**
- Zeile (i) mit $s \in R^\times$ **skalieren**
- Zeile (i) und (j) **vertauschen**

Optimale Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_p \end{array}\right)$$

Ergebnis

$x_1 = b'_1,\ x_2 = b'_2,\ \ldots,\ x_p = b'_p$

Vorgehen

Karlsruher Institut für Technologie

Spalte für Spalte in gewünschte Form bringen, dazu im k-ten Durchlauf:

1. Zeile (k) mit $\frac{1}{a_{kk}}$ **skalieren**
2. Auf **alle andern** Zeilen (j) $-a_{jk}$ mal Zeile (k) **addieren**

Probleme

a_{kk} **nicht invertierbar** $(= 0)$	$\Longrightarrow$	wenn möglich, mit Zeile weiter unten **tauschen**, sonst aktuelle Spalte **ignorieren** und fortsetzen
keine weitere Zeile übrig (aber noch nicht gewünschte Form)	$\Longrightarrow$	**fertig**

Gauß-Normalform

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

Anzahl Lösungen

In Gauß-Normalform:

keine Lösung	Zeile $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \mid b \neq 0 \end{pmatrix}$
eine Lösung	Matrix in „optimaler Form“ (S. 88)
mehrere Lösungen	manche Spalten können nicht „aufgelöst“ werden (ohne andere zu zerstören)

Ablesen mehrerer Lösungen – eine Lösung

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_5 & x_6 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 & b'_1 \\
0 & 1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & d_2 & b'_2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & d_3 & b'_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & d_r & b'_r \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}$$

Eine Lösung

blaue $x_j = 0$ („falsche **Spalten**")
restliche x_j ablesen (b'_i in entsprechender Zeile)

$$\Longrightarrow \quad x_0 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ 0 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ablesen mehrerer Lösungen – alle homogenen Lösungen

$$\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_5 & x_6 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & d_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Fundamentallösung $F^{(\cdot)}$ pro **Spalte** k:

Setze $x_k = 1$, für andere **Spalten** j: $x_j = 0$

Restliche x_j durch **Zeilen** der Matrix:
-1-mal durch **1** markierter Eintrag in Spalte k

$$\implies F^{(1)} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F^{(2)} = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ 0 \\ -d_3 \\ \vdots \\ -d_r \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ablesen mehrerer Lösungen – alle Lösungen

Karlsruher Institut für Technologie

$$\mathcal{L} = \{x_0 + s \cdot F^{(1)} + t \cdot F^{(2)} + \cdots \mid s, t, \cdots \in K\}$$

Quiz: Lösungen ablesen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \mathcal{L} = \mathrm{LH}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ & 0 \end{array}\right) \qquad \mathcal{L} = \{2\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right) \qquad \mathcal{L} = \emptyset$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 3 & 2 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & & 0 \end{array}\right) \qquad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{LH}(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & & 2 & -1 \\ & & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top + \mathrm{LH}(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^\top)$$

Begriffe

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 & b'_1 \\
0 & 1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & d_2 & b'_2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & d_3 & b'_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_r & b'_r \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Rang	Anzahl der Stufen (**1**en)
Stufenindizes	Spaltennummern der **1**en
Fundamentallösungen	$F^{(\cdot)}$ siehe vorhin

Eingeschaften des Rang

Sei $A \in R^{p \times q},\ \Phi_A : R^q \to R^p, x \mapsto Ax.$

$$\operatorname{Rang} A = \dim \operatorname{Bild} A = \dim\{Ax \mid x \in R^q\}$$

LGS $Ax = b$ **keine Lösung**	$\iff$	$\operatorname{Rang}(A) \neq \operatorname{Rang}(A\vert b)$
Anzahl **Fundamentallösungen**	$=$	$q - \operatorname{Rang}(A)$
Φ_A **injektiv**	$\iff$	$\operatorname{Rang}(A) = q$
Φ_A **surjektiv**	$\iff$	$\operatorname{Rang}(A) = p$
$B \in R^{p \times p}$ **invertierbar**	$\iff$	$\operatorname{Rang}(B) = p$

Invertieren einer Matrix

Mit Gauß-Verfahren (I Einheitsmatrix):

$$(A|I) \rightsquigarrow (I|X) \implies X = A^{-1}$$

Vektorraum

Erinnerung: Körper

$$(K, +, \cdot)$$

1. $(L, +)$ ist **abelsche Gruppe**
2. $(K \backslash \{0_K\}, \cdot)$ ist **abelsche Gruppe**
3. **Distributivgesetz** $\forall x, y, z \in K : \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Alternativ:

$(K, +, \cdot)$ ist **Ring** mit $K^\times = K \backslash \{0_K\}$

Vektorraum

V K-Vektorraum (K-VR)

- K **Körper**
- $(V, +)$ **abelsche Gruppe**
- **Skalarmultiplikation** $\cdot : K \times V \to V$

Mit $(u, v \in V, \lambda, \mu \in K)$:

1. $1_K \cdot v = v$
2. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
3. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
4. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

Untervektorraum

Sei V K-VR, $U \subseteq V$ **Untervektorraum** von V:

- U ist K-VR mit selber Verknüpfung und Skalarmultiplikation.

Untervektorraumkriterium

- $0 \in U$
- $v + w \in U \quad (v, w \in U)$
- $\lambda v \in U \quad (v \in U, \lambda \in K)$

Aufgabe: Vektorraum?

K Körper, $n, m \in \mathbb{N}$, (als K-VR, mit komponentenweise Addition, Skalarmult.)

- ✓ K^n
- ✗ $K \times \{1\}$
- ✓ $K^{n \times m}$
- ✗ $\emptyset$
- ✓ $\{0\}$
- ✗ $\mathbb{Q}^{n \times n}$ als $\mathbb{R}$-VR

- ✓ $K^K := \{f \mid f : K \to K\}$ punktweise Addition, Skalarmult.
- ✓ $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-VR
- ✗ $\mathrm{GL}_n(K)$ (invertierbare Matrizen)
- ✓ $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}$ $\mathbb{R}$-VR
- ✓ $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = 0\}$ als $\mathbb{R}$-VR

Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen aka. Vektorraumhomomorphismen

Sei V, W K-VR

K-lineare Abbildung $\Phi : V \to W \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$

- $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y) \quad (\forall x, y \in V)$
- $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x) \quad (\forall x \in V, \lambda \in K)$

Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
& \text{Homomorphismus} \arrow[dl, "\text{bijektiv}"'] \arrow[dr, "\text{auf sich selbst}"] & \\
\text{Isomorphismus} \arrow[dr, "\text{auf sich selbst}"'] & & \text{Endomorphismus} \arrow[dl, "\text{bijektiv}"] \\
& \text{Automorphismus} &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe: Lineare Abbildung?

Über Körper $\mathbb{R}$ wenn nicht anders angegeben.

- ✓ $K^m \to K^n, \quad x \mapsto Ax \quad A \in K^{n\times m}$ — Körper K
- ✗ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x + 1$
- ✓ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (y, 0, x)$
- ✗ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$
- ✓ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(1)$
- ✗ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_i)_{1\leq i\leq n} \mapsto \max_{1\leq i\leq n} x_i \quad (n \in \mathbb{N})$
- ✓ $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad f \mapsto f'$
- ✓ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad x \mapsto x^3$ — Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Weiteres

Sei K Körper, V, W K-VR, $\Phi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Kern Φ

$$\mathrm{Kern}(\Phi) := \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\}$$

$\mathrm{Kern}(\Phi)$ ist **Untervektorraum**

$$\mathrm{Kern}(\Phi) = \{0\} \iff \Phi \text{ injektiv}$$

$\mathrm{Hom}_K(V, W)$ als VR

$\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist selbst **Vektorraum**

$$\mathrm{Hom}_K(K^p, K^q) \cong K^{q \times p}$$

Basen von VR

Erinnerung: Vektorraum

V K-Vektorraum (K-VR)

- K **Körper**
- $(V, +)$ **abelsche Gruppe**
- **Skalarmultiplikation**
  $\cdot : K \times V \to V$

Mit $(u, v \in V, \lambda, \mu \in K)$:

1. $1_K \cdot v = v$
2. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
3. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
4. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

Linearkombinationen

Sei V K-VR, $M \subseteq V$
Sein $n \in \mathbb{N},\ v_1, \ldots, v_n \in M,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$

Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \in V$

Achtung!

Linearkombinationen werden immer nur aus **endlich** vielen Vektoren gebildet.

Lineare Hülle

Sei V K-VR, $M \subseteq V$.

Lineare Hülle

$LH(M) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i, v_i \mid n \in \mathbb{N}_0, v \in M, \lambda_i \in K (i \in \{, .., n\})\}$
$=$„Menge aller Linearkombinationen aus M“

- $LH(M)$ ist der kleinste **Untervektorraum**, der M enthält
- M heißt **Erzeugendensystem** von $LH(M)$
- $K^p = LH(\{v_1, \ldots, v_p\}) \iff$ Rang$\big((v_1| \ldots |v_p)\big) = p \quad (v_1, \ldots, v_p \in K^p)$

Kombinieren von UVR

V K-VR $U, W \leq V$

- $U \cap W$ ist K**-VR**
- **Summe:** $U + W := LH(U \cup W) = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ ist K**-VR**

ACHTUNG!

$U \cup W$ ist i.A. **kein** VR!

Basis

V K-VR

$$B \subseteq V \text{ **Basis**}$$

1. $V = LH(B)$
2. jedes $v \in V$ lässt sich **eindeutig** durch B darstellen ($\Longrightarrow$ **linear unabhängig**)

Lineare Unabhänigkeit

Wann ist die Darstellung **eindeutig**?

V K-VR, $M = \{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq V$

M linear unabhänig

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i = 0 \iff \forall i : \lambda_i = 0 \quad (\lambda_i \in K)$$

($\Longleftarrow$ trivial)

Eingenschaften der Basis

Sei V K-VR
Folgende Aussagen sind äquivalent ($B \subseteq V$):

- B ist **Basis**
- B ist **maximal linear unabhänig**
- B ist **minimales Erzeugendensystem**
- B ist **linear unabhänig** und **Erzeugendensystem**

Existenz einer Basis (ZFC)

- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis
- Jede **linear unabhänige** Menge lässt sich zu einer Basis **erweitern**
- Jedes **Erzeugendensystem** lässt sich zu einer Basis **reduzieren**
- Jede Basis hat **gleich viele Elemente**

Dimension

B Basis von V K-VR

$$\textbf{Dimension}\ \dim(V) = |B|$$

Monotonie der Dimension

Sei U UVR von V, es gilt:

- $\dim(U) \leq \dim(V)$
- $\dim(U) = \dim(V) \iff U = V$

Achtung!

Die Dimension ist abhängig vom Körper des VR!

Isomorphismen von Basen

Seien V, W K-VR, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Es gilt:

- $M \subseteq V$ **Erzeugendensystem** von V, Φ **surjektiv**
  $\implies \Phi(M)$ **Erzeugendensystem**
- $L \subseteq V$ **linear Unabhäning**, Φ **injektiv** $\implies \Phi(L)$ **linear Unabhäning**
- $B \subseteq V$ **Basis** von V, Φ **bijektiv** $\implies \Phi(B)$ **Basis** von W

Koordinatendarstellung

Sei V endl. dim. K-VR

$$V \cong K^{\dim V}$$

Durch Wahl einer **Basis** $B = b_1, \ldots, b_n$:

$$\textbf{Isomorphismus } \Lambda_B : K^n \to V : \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

Interessant für „komische“ Vektorräume

Summe von VR

Direkte Summe

Sei U, W UVR von V, V K-VR

$$U \oplus W = U + W \iff U \cap W = \{0\}$$

Darstellung von $v \in U \oplus W$ als $v = u + w, u \in U, w \in W$ **eindeutig**.

Achtung!

Bei der direkten Summe **mehrerer** UVR gilt das Kriterium nicht mehr so einfach. Stattdessen ist folgendes nötig:

$$\sum_{i=1}^{m} U_i = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$$

$$\iff \forall j \in \{1, \ldots, m\} : U_j \cap \sum_{i=1, i \neq j}^{m} U_i = \{0\}$$

Dimensionsformeln

$U, W \leq V$, V K-VR

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Komplement

Sein $U \leq V$, V K-VR

$$W \text{ ist } \textbf{Komplement} \text{ von } U \iff U \oplus W = V$$

$\text{dim}(U) + \text{dim}(W) = \text{dim}(V)$

Achtung!

Das Komplement ist i.A. nicht eindeutig!

Rechentechniken VR

Häufige Aufgabe

Gegeben:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Gesucht:

Basis und Dimension von $U,\ W,\ U \cap W,\ U + W$

(Klausur WS 16/17)

lineare Unabhänigkeit, Dimension, Basis

Option 1: Spalten

Löse LGS $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & \dots & v_m & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{GNF}$$

Option 2: Zeilen

Gauß macht Linearkombinationen

$$\begin{pmatrix} v_1^\top \\ \vdots \\ v_m^\top \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{GNF}$$

linear unabhänig $\iff$ Rang $= m$

Dimension $=$ Rang

Basis: Vektoren mit 1en in jew. GNF Spalte

Extra: lin. Abhängigkeiten unter Vektoren

Basis: Zeilen $\neq 0$

Extra: besonders einfache Basis

Summe, Schnitt, Komplement

Summe
(vereinfachte) Spannvektoren vereinigen, dann vorherige Folie

Schnitt $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \cap \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$
Ansatz: $\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_m v_m = \mu_1 w_1 + \mu_n w_n$
$\iff \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_m v_m - \mu_1 w_1 - \mu_n w_n = 0$
LGS lösen, Lösung für λ_i in $\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_m v_m$ einsetzen, vereinfachen

Komplement
Einfache Basis mit Standartbasisvektoren erweitern

Karlsruher Institut für Technologie

Faktorraum

Erinnerung: Äquivalenzrelation

1. **reflexiv** xRx
2. **symmetrisch** $xRy \iff yRx$
3. **transitiv** $xRy \land yRz \implies xRz$

Bsp:

- „$=$“
- „Weglassen von Informationen“ (Gleiches Bild)
- Kongruenz modulo

Faktorraum bzw. Quotientenraum

Sei V K-VR, U UVR von V

$$v \sim w :\Longleftrightarrow v - w \in U$$

$\sim$ ist **Äquivalenzrelation**

Faktorraum $V/U := V/\sim$ = Menge der ÄQ-Klassen von $\sim$

- V/U ist ein K**-VR** mit $[v] + [w] := [v + w],\ \lambda[v] := [\lambda v]$

Homomorphiesatz

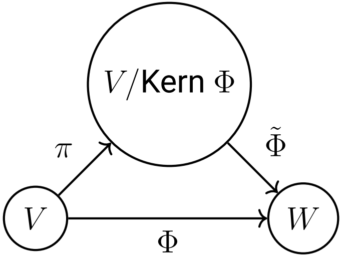
$\text{Hom}(V, W) \ni \Phi : V \to W$

„Zwischenstufe" $V/\text{Kern}\ \Phi$

$$\pi : V \to V/\text{Kern}\ \Phi,\quad v \mapsto [v] \text{ (surrj.)}$$

$$\tilde{\Phi} : V/\text{Kern}\ \Phi \to W,\quad [v] \mapsto \Phi(v) \text{ (inj.)}$$

$$\Phi = \tilde{\Phi} \circ \pi$$



$$V/\text{Kern}\ \Phi \cong \text{Bild}\ \Phi := \Phi(V)$$

Basis Faktorraum

Basis B_V von V mit Basis von U : $B_U = \{b_1, \dots, b_k\} \subseteq B_V$

$$B_V = \{\underbrace{b_1, \dots, b_k}_{B_U}, \quad \underbrace{b_{k+1}, \dots, b_n}_{\text{wird zu Basis von } V/U} \quad \}$$

Basis von V/U $B_{V/U} = \{[b_{k+1}], \dots, [b_n]\}$

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

Rang

Sei $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$$\textbf{Rang}\ \Phi := \dim \mathrm{Bild}\ \Phi$$

$$\dim V = \mathrm{Rang}\ \Phi + \dim \mathrm{Kern}\ \Phi = \dim \mathrm{Bild}\ \Phi + \dim \mathrm{Kern}\ \Phi$$

Lineare Fortsetzung

Lineare Fortsetzung

Sei V, W K-VR, B Basis von V

$\Phi \in$ Hom(V, W) ist durch $\Phi|_B$ **eindeutig definiert**

Dualraum nicht Klausurrelevant

Linearformen

Sei V, W K-VR, Erinnerung:

$\text{Hom}(V, W)$ ist **Vektorraum**

- $W = K^1 = K$ ist auch K-VR

$\text{Elemente aus Hom}(V, K)$ heißen **Linearformen**

Vorstellung

„**Messwerkzeuge**“, um Vektoren zu messen

Dualraum

Sei V K-VR

$$V^* = \text{Hom}(V, K) \text{ heißt } \textbf{Dualraum} \text{ von } V$$

Duale Basis

Sei $B_V = \{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis von V

Zu B_V **duale Basis** von V^*:

$$B_{V^*} = \{b_1^*, \ldots, b_n^*\} \text{ mit } b_i^*(b_j) := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b_i^* „misst“ den b_i-Anteil eines Vektors zur Basis B_V

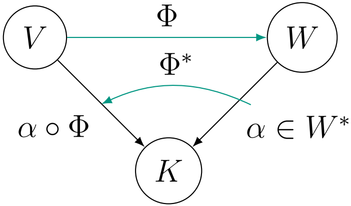
$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(v) \cdot b_i \quad (\forall v \in V)$$

Duale Abbildung

Seien V, W K-VR, $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$

Wie können wir „Messwerkzeuge“ aus W^* in „Messwerkzeuge“ in V^* umwandeln?

$$\Phi^* : W^* \to V^*, \alpha \mapsto \alpha \circ \Phi$$

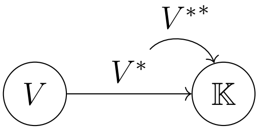


Bidualraum

Sei V K-VR. V^* ist VR.

$(V^*)^* := V^{**}$ heißt **Bidualraum** von V

$$\beta \in V^{**} : \alpha = \underbrace{(v \mapsto \alpha(v))}_{\alpha} \mapsto \beta(\alpha)$$



„Messwerkzeuge“, um „Messwerkzeuge“ zu messen

Beispiel: $V = K^2$

$$B_V = \{(1,0),(0,1)\} \quad \implies (x,y) \in V, \quad x,y \in K$$

$$B_{V^*} = \{(x,y) \mapsto x, (x,y) \mapsto y\} \quad \implies (x,y) \mapsto ax+by \in V^*, \quad a,b \in K$$

$$B_{V^{**}} = \{((x,y) \mapsto ax+by) \mapsto a, ((x,y) \mapsto ax+by) \mapsto b\}$$

$$\implies ((x,y) \mapsto ax+by) \mapsto \alpha a + \beta b \in V^{**}, \quad \alpha,\beta \in K$$

Wie kann man „Messwerkzeuge“ aus dem (Bi-)Dualraum herstellen?

KIT Karlsruher Institut für Technologie

Dualraum ($V \to V^*$)

Man muss eine **Basis („Maßskala“)** wählen, dann bekommt man ein „Messwerkzeug“ **für jeden Basisvektor** (Duale Basis).

Bidualraum ($V \to V^{**}$)

Man kann sein „Messwerkzeug“ messen/testen, indem man einen einen **fixen Referenz-Vektor** wählt und schaut was darauf rauskommt.

$$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{(\underbrace{\beta}_{\in V^*} \mapsto \underbrace{\beta(v)}_{\in K})}_{\in V^{**}}$$

Basiswechsel

Basisdarstellung

Sei V K-VR, $\mathsf{B} = (b_1, \dots, b_n)$ geordnete Basis

- Basisdarstellung **eindeutig**
  $V \ni v = \sum_i \lambda_i b_i$
- **Isomorphismus** $(\cdot)_\mathsf{B} : V \to K^n, v \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad = (b_1^*(v), \dots, b_n^*(v))$
  (*also auch rückwärts*)

Geordnete Basis

Mengen haben keine Reihenfolge. Für die Basisdarstellung ist diese jedoch wichtig.

Geordnete Basis $\mathsf{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von $V \iff B = \{b_1, \dots, b_n\}$ **Basis** von V

Abbildungsmatrix

Bekannt

$\forall \Phi \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)\ \exists A \in K^{m\times n}: \quad \Phi(v) = A \cdot v \quad (v \in K^n)$

Erweiterung

Sei V, W K-VR mit $\mathsf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis von V, $\mathsf{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ Basis von W

$$\forall \Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)\ \exists M_{\mathsf{CB}}(\Phi) \in K^{m\times n}:$$
$$(\Phi(v))_{\mathsf{C}} = M_{\mathsf{CB}}(\Phi) \cdot (v)_{\mathsf{B}} \quad (v \in V)$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "(\cdot)_{\mathsf{B}}"'] & W \arrow[d, "(\cdot)_{\mathsf{C}}"] \\
K^n \arrow[r, "M_{\mathsf{CB}}(\Phi)\cdot"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

Basiswechsel

Sei V K-VR mit B $= (b_1, \ldots, b_n)$, C $= (c_1, \ldots, c_n)$ Basis von V

Wie $(v)_{\mathsf{B}} \rightsquigarrow (v)_{\mathsf{C}}$*?*

$$(v)_{\mathsf{C}} = M_{\mathsf{CB}}(id_V) \cdot (v)_{\mathsf{B}} \quad (v \in V)$$

Hinweis

Die Indizes von M werden von **rechts nach links** gelesen (wie bei Verkettung).
M_{CB}: von B nach C

Regeln

Sei V, W, T K-VR mit je B, C, F geordnete Basis

Sei $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W), \Psi \in \mathrm{Hom}(W, T)$

$$M_{\mathsf{FB}}(\Psi \circ \Phi) = M_{\mathsf{FC}}(\Psi) \cdot M_{\mathsf{CB}}(\Phi)$$

Sei Φ bijektiv

$$M_{\mathsf{BC}}(\Phi^{-1}) = M_{\mathsf{CB}}(\Phi)^{-1}$$

Konstruktion

Sei V, W K-VR mit B $= (b_1, \dots, b_n)$ geordnete Basis von V, C g. Basis von W

$$M_{\mathsf{CB}}(\Phi) = \big((\Phi(b_1))_{\mathsf{C}} | \cdots | (\Phi(b_n))_{\mathsf{C}} \big)$$

Trick für Basiswechselmatrix

Für $V = K^n$, E Standartbasis

$$M_{\mathsf{CB}}(id) = M_{\mathsf{CE}}(id) \cdot M_{\mathsf{EB}}(id) = M_{\mathsf{EC}}(id)^{-1} \cdot M_{\mathsf{EB}}(id)$$

mit $M_{\mathsf{EX}}(id) = \big(x_1 | \dots | x_n \big)$ (diese lassen sich am einfachsten bestimmen)

Äquivalenz von Matrizen

Sei $A, B \in K^{m \times n}$

A, B äquivalent

$$\exists T \in \mathsf{GL}_m(K), S \in \mathsf{GL}_n(K) : \quad B = TAS$$

$$A, B \text{ äquivalent} \iff \text{Rang } A = \text{Rang } B$$

Karlsruher Institut für Technologie

Affine Räume

Affiner Unterraum

Affiner Unterraum

Sei U UVR, **Fußpunkt** $p \in \mathbb{R}^n$:

$$R = p + U := \{p + x \mid x \in U\}$$

„Verschobener Vektorraum"

Affine Kombinationen

Sein $n \in \mathbb{N},\ v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^{\ltimes},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Affinkombination $\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 v_1 \in V$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Eingeschaften

Folgendes ist äquivalent:

- R ist **affiner Unterraum** von $\mathbb{R}^n$
- $R = q + U$ mit $q \in \mathbb{R}^n$, U UV R
- $R \neq \emptyset$ und $x + \lambda(y - z) \in R$ für $x, y, z \in R,\ \lambda \in \mathbb{R}$
- $R \neq \emptyset$ und R ist abgeschlossen bzgl. Affinkombinationen

Algebren

Algebren

Sei K Körper.

$(A, +, \bullet, \cdot)$ Algebra (assoziative Algebra mit Eins)

1. $(A, +, \cdot)$ **K-Vektorraum**
2. $(A, +, \bullet)$ **Ring**
3. $(\lambda \cdot a) \bullet b = a \bullet (\lambda \cdot b) = \lambda \cdot (a \bullet b) \quad (\forall \lambda \in K, a, b \in A)$

U.A. folgende Begriffe werden geerbt:

- Ring: **kommutativ**
- VR: **Dimension**
- VR und Ring: **Unteralgebra, Algebra-Homom.**

Quiz: Algebra?

Sei K Körper.

- ✅ $(K^{n\times m}, +, ((a_{ij}), (b_{ij})) \mapsto (a_{ij}b_{ij})$, Skalar-$\cdot)$
- ✅ $(K^{n\times n}, +,$ Matrix-$\cdot$, Skalar-$\cdot)$
- ❌ $(\mathbb{R}^3, +,$ Kreuzprodukt $\times$, Skalar-$\cdot)$

Determinanten

Determinanten

Sei K Körper, $n \in \mathbb{N}$ $\quad v_1, \dots, v_n, w \in K^n, \alpha \in K$

Determinantenform $D : (K^n)^n \to K$

1. $D(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad$ (e_i Standartbasisvektoren)
2. $D(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + w, v_{i+1}, \dots, v_n) =$ $D(v_1, \dots, v_n) + D(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n) \quad (1 \leq i \leq n)$
3. $D(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha \cdot v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \alpha \cdot D(v_1, \dots, v_n) \quad (1 \leq i \leq n)$
4. $v_i = v_j \ (i \neq j) \implies D(v_1, \dots, v_n) = 0$

Determinanten sind existent und eindeutig

Es gibt **genau eine Determinantenform** auf K^n

Eigenschaften

Sei D Determinantenform auf K^n $\quad v_1, \dots, v_n \in K^n$

- D ist **multilinear** (linear in jedem Argument)

- **Linearkombinationen**
  $D(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_n) = D(v_1, \dots, v_n) \quad (1 \leq j \leq n)$
- **Vertauschen** zweier Vektoren: $D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -D(v_1, \dots, v_n)$

Determinanten von Matrizen

Sei $A = (v_1 | \dots | v_n) \in K^{n\times n}$

$$\det A = D(v_1, \dots, v_n)$$

Sei $M, N \in K^{n\times n}$

- $\det M^\top = \det M$
- $\det M \neq 0 \iff M \in \mathrm{GL}_n(K)$ (**invertierbar**)
  Dann gilt: $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$
- $\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N$
- $\det(\lambda A) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \cdot A\right) = \lambda^n \cdot \det A$

Determinante berechnen – Zielform

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (a, b, c, d \in K)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \quad (a_1, \ldots, a_n \in K)$$

Determinante berechnen – Gauß

Seien $A, B \in K^{n\times n}$

$A \rightsquigarrow B$ mit **Gaußoperation**

$$\begin{aligned}
\text{Z1} + \alpha\text{Z2} \quad & \det A = \det B \\
\alpha\text{Z} \quad & \det A = \frac{1}{\alpha}\det B \\
\text{Z1} \leftrightarrow \text{Z2} \quad & \det A = -\det B
\end{aligned}$$

Auf **Zeilen und Spalten** möglich!

Determinante berechnen – Entwickeln

Entwickeln nach der k**-ten Zeile/Spalte** $\quad (A = (a_{ij})_{ij} \in K^{n \times n})$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det A_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det A_{kj} \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$A_{ij} \in K^{n-1 \times n-1}$$

A ohne i-te Zeile und j-te Spalte

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & \cdots & \\ + & - & + & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & - \\ & & \cdots & - & + \end{pmatrix}$$

Determinante berechnen – Vorgehen

1. Solange wie möglich mit **Gauß** vereinfachen

   Ziel: Dreiecksmatrix oder **Zeile/Spalte mit vielen Nullen**
   (Es sind auch **Spaltenoperationen** möglich)
2. Wenn nicht weiter möglich, nach passender Zeile/Spalte **entwickeln**
3. Wiederholen bis „**Zielform**“ anwendbar

Cramersche Regel

Sei $A \in K^{n \times n}, n \in \mathbb{N}$.

Adjunkte $A^\sharp$

$$A^\sharp = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

mit $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ (**Achtung! Indizes vertauscht**),
A_{ij} ist A ohne i-te Zeile und j-te Spalte.

Cramersche Regel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\sharp$$

Endomorphismen

Erinnerung: Äquivalenz von Matrizen

Sei $A, B \in K^{m \times n}$

A, B äquivalent

$$\exists T \in \mathsf{GL}_m(K), S \in \mathsf{GL}_n(K) : \quad B = TAS$$

$$A, B \text{ äquivalent} \iff \text{Rang } A = \text{Rang } B$$

Ähnlichkeit von Matrizen

Sei $A, B \in K^{n \times n}$ (quadratisch)

A, B ähnlich

$$\exists S \in \mathsf{GL}_n(K) : \quad B = SAS^{-1}$$

Ähnlichkeitsinvarianten

Ähnlich $\implies$ „gleich“

- Rang
- Determinante
- Spur
- Spektrum (Eigenwerte)
- Charakteristisches Polynom

Achtung!

„gleich“ $\not\Rightarrow$ ähnlich

Definitionen

Spur

$$\operatorname{tr} A = \text{Spur } A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad (A = (a_{ij})_{ij} \in K^{n\times n})$$

Determinante Endomorphismus

$$\text{det } \Phi := \text{det } D_{BB}(\Phi) = \text{det } D_{CC}(\Phi) \quad (\Phi \in \text{Hom}(V,V),\ B, C \text{ Basis von } V)$$

Invarianter UVR

$$U \ \Phi\text{-invariant} \iff \Phi(U) \subseteq U \quad (\Phi \in \text{Hom}(V,V), U \leq V)$$

Eigenräume

Eigen*

Sei $\Phi \in \text{Hom}(V, V)$

$v \in V\backslash\{0\}$ **Eigenvektor** von Φ	$\iff$	$\Phi(v) = \lambda v \quad (\lambda \in K)$
$\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von Φ	$\iff$	$\exists$ Eigenvektor v mit $\Phi(v) = \lambda v$
Eigenraum $\text{Eig}(\Phi, \lambda)$		Menge aller **Eigenvektoren** zum Eigenwert λ (und 0) $\text{Eig}(\Phi, \lambda) = \text{Kern}(\Phi - \lambda \cdot \text{Id}_V)$
Spektrum $\text{Spec}(\Phi)$		Menge aller **Eigenwerte**

Ebenfalls für quadratische Matrizen $A \in K^{n \times n}$ mit $\Phi_A : K^n \to K^n, x \mapsto Ax$

Eigenschaften von Eigenvektoren

- Summe von Eigenräumen ist **direkt**
- $|\mathrm{Spec}(\Phi, \lambda)| \leq \dim V \quad (\Phi \in \mathrm{Hom}(V, V))$
- Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind **linear unabhänig**

Charakteristisches Polynom

Sei $\Phi \in \text{Hom}(V, V),\ B$ Basis von V

Idee: Einfaches finden von Eigenwerten

$$\text{CP}_\Phi(X) := \det(XI_n - D_{BB}(\Phi))$$

Unabhängig von gewählter Basis B

$$CP_\Phi(\lambda) = 0 \iff \lambda \text{ Eigenwert von } \Phi$$

Diagonalisierbarkeit

$\Phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ diagonalisierbar

- $\exists$ Basis B sodass $D_{BB}(\Phi)$ in **Diagonalform** (falls $\dim V < \infty$)
- V hat **Basis aus Eigenvektoren** von Φ
- V ist **Summe der Eigenräume**
- Charakteristisches Polynom **zerfällt in Linearfaktoren** und geometrische und algebraische **Vielfachheiten stimmen überein**

Vielfachheiten

Sei $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, V),\ \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)$

geometrische Vielfachheit

$$\mu_g(\Phi, \lambda) := \dim(\mathrm{Eig}(\Phi, \lambda))$$

algebraische Vielfachheit

$$\mu_a(\Phi, \lambda) := \text{„Häufigkeit der Nullstelle } \lambda \text{ in } CP_\Phi(X)\text{“}$$

Für $\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)$ gilt: $1 \leq \mu_g(\Phi, \lambda) \leq \mu_a(\Phi, \lambda) \leq \dim V \quad (\Phi \in \mathrm{Hom}(V, V))$

Satz von Cayley-Hamilton

Sei $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$

$$CP_\Phi(\Phi) = 0$$

Viel Freude beim Lernen und

Viel Erfolg bei der Klausur!