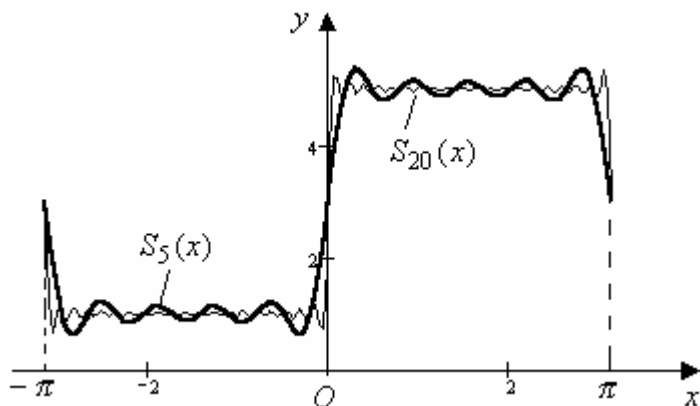


С.Ф. Ледяев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА



Севастополь – 2012

УДК 517.521+517.54+517.442

Ледяев С.Ф. Высшая математика. Лекции в третьем семестре./
С.Ф. Ледяев. – Севастополь, 2012 г. -110 с.

Данное пособие основано на конспекте лекций, читаемых автором в третьем учебном семестре студентам дневной формы обучения ряда специальностей Севастопольского национального технического университета. Пособие является продолжением конспекта лекций первого [3] и второго [4] семестров, а также широко использует материал учебных пособий [1], [2], [5] и [6].

СОДЕРЖАНИЕ

1.	РЯДЫ	3
1.1	Ряды. Основные определения	3
1.2	Свойства сходящихся числовых рядов	5
1.3	Необходимый признак сходимости ряда	6
1.4	Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами .	7
1.5	Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница	12
1.6	Функциональные ряды	14
1.7	Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости . .	16
1.8	Свойства сходящихся степенных рядов	19
1.9	Ряды Тейлора и Маклорена	20
1.10	Способы разложения функций в ряды Тейлора	22
1.11	Приложения рядов Тейлора	24
1.12	Свойство ортогональности функций. Ряды по ортогональным функциям	26
1.13	Тригонометрическая система функций. Разложение функций в ряд Фурье	28
1.14	Условия разложимости функций в ряды Фурье	30
1.15	Особенности разложения функций в ряд Фурье	32
1.16	Амплитудно-частотный и фазо-частотный спектр периодической функции	38
2.	ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	40
2.1	Функция комплексной переменной. Области и границы	40
2.2	Дифференцируемость и аналитичность	43
2.3	Степенные ряды комплексной переменной. Теорема Абеля	46
2.4	Пять элементарных функций, определяемых рядами. Формулы Эйлера	47

2.5 Свойства функций $w = z^n$ и $w = \sqrt[n]{z}$	49
2.6 Свойства показательной $w = e^z$ и логарифмической функций $w = \ln z$	53
2.7 Интегрирование функций комплексной переменной	58
2.8 Теорема Коши для односвязной и многосвязной области	61
2.9 Интегральная формула Коши	64
2.10 Ряды Тейлора	69
2.11 Ряды Лорана	70
2.12 Изолированные особые точки	73
2.13 Бесконечно удаленная особая точка	75
2.14 Вычеты и методы их вычисления	77
2.15 Теоремы Коши о вычетах	80
3. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	84
3.1 Функция оригинал и изображение по Лапласу. Линейные свойства изображения	84
3.2 Теорема о аналитичности изображения	85
3.3 Непосредственное преобразование Лапласа некоторых функций ...	86
3.4 Теоремы преобразования Лапласа	88
3.5 Методы определения оригинала по известному изображению	97
3.6 Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом	99
3.7 Применение интегралов Дюамеля при решении дифференциальных уравнений	102
Приложение А – таблица преобразований Лапласа	105
Приложение Б – таблица производных	107
Приложение В – таблица неопределенных интегралов	108
Приложение Г – разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей	109
Библиографический список	110

1. РЯДЫ

1.1 Ряды. Основные определения

Пусть $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$ бесконечная числовая последовательность.

Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots \quad (1.1)$$

Индекс, стоящий у каждого члена ряда, указывает его порядковый номер в ряде. Выражение для U_n , зависящее от номера n и являющееся функцией номера, называется *общим членом ряда*.

Пример 1.1 Написать первые шесть членов ряда, общий член которого задан формулой $U_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$.

Решение: подставляя значение n , равные 1, 2, 3, 4, 5, 6, получаем ряд

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Сумма n первых членов ряда называется его n -ой *частичной суммой*, что обозначается

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (1.2)$$

Если в ряде отбросить первые m членов, получится ряд

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} U_k = U_{m+1} + U_{m+2} + U_{m+3} + \dots \quad (1.3)$$

называемый *остатком ряда* (1.1) *после m -го члена*.

Если существует конечный предел частичной суммы при $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (1.4)$$

то его называют *суммой ряда*, а ряд (1.1) называется *сходящимся*. Если предел (1.4) частичной суммы не существует или бесконечен, ряд называется *расходящимся*.

Основная задача теории числовых рядов – поиск ответа на вопрос, сходится данный числовой ряд, или расходится. В некоторых случаях ответ на данный вопрос можно найти, вычисляя предел (1.4).

Пример 1.2 Определить сходимость ряда:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}; \text{ b) } \sum_{n=1}^{\infty} n; \text{ c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Решение

а) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ является суммой бесконечной геометрической прогрессии, у которой первый член $b_1 = 1/2$, знаменатель $q = 1/2$ (выполняется условие $|q| < 1$). По формуле, изученной в средней

школе, $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^n + \dots = \frac{b_1}{1-q}$, получим

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1. \text{ Числовой ряд сходится.}$$

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$ состоит из членов арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 1$, $d = 1$, $a_n = n$. Формула для суммы первых n членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Для заданного ряда $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{1}{2}(n + n^2)$. Вычислим предел (1.4):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(n + n^2) = \infty. \text{ Ряд расходится.}$$

с) Предел общего члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ не существует, ряд расходится.

В тех случаях, когда невозможно определить формулу частичной суммы ряда, используются *признаки сходимости числовых рядов*.

1.2 Свойства сходящихся числовых рядов

Свойства сходящихся рядов формулируются теоремами.

Теорема 1. Если все члены ряда (1.1) умножить на одно и тоже число $k \neq 0$, то ряд

$$kU_1 + kU_2 + kU_3 + \dots + kU_n + \dots \quad (1.5)$$

будет сходиться, если ряд (1.1) сходится, и будет расходиться, если ряд (1.1) расходится.

Доказательство

Частичная сумма ряда (1.5):

$$kU_1 + kU_2 + \dots + kU_n = k(U_1 + U_2 + \dots + U_n). \text{ Тогда}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (kU_1 + kU_2 + \dots + kU_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} (U_1 + U_2 + \dots + U_n).$$

Если существует (или не существует) конечный предел в правой части, то существует (или не существует) конечный предел в левой части.

Теорема 2. Если сходятся ряды $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$ и $V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots$, то будет сходитьсся и ряд, полученный от почленного сложения и вычитания членов этих рядов, т.е. будет сходитьсся ряд

$$(U_1 \pm V_1) + (U_2 \pm V_2) + \dots + (U_n \pm V_n) + \dots$$

Доказательство

Обозначим частичные суммы $\bar{S}_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ и $\tilde{S}_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{S}_n \pm \tilde{S}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n$.

Если существуют конечные пределы в правой части, то существует конечный предел в левой части.

Теорема 3. Если в ряде (1.1) приписать или отбросить конечное число членов, то полученный от этих действий новый ряд будет сходитьсся, если сходитсся первоначальный ряд (1.1), и будет расходиться, если ряд (1.1) расходится.

Теорема 4. Если ряд (1.1) сходитсся, то сумма r_m его остатка (1.3) после m -го члена стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$.

1.3 Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$ сходитсся, то его общий член U_n стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0. \quad (1.6)$$

Доказательство

По условию теоремы, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Тогда и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$. Вычитаем из первого предела второй: $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$.

Но $S_n - S_{n-1} = U_n$, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$, что требовалось доказать.

Отметим, что этот признак не является достаточным, т.е. из стремления к нулю общего члена еще не следует, что ряд сходится.

Но если общий член *не стремится к нулю* при $n \rightarrow \infty$, то можно утверждать, что *ряд расходится*.

Пример 1.3 Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$

Решение: предел общего члена $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, т.е. общий член не стремится к нулю. Необходимый признак сходимости ряда не выполнен и поэтому данный ряд является расходящимся.

Пример 1.4 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Решение: необходимый признак сходимости ряда в данном случае выполняется, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, но ввиду того, что признак не является достаточным, нельзя утверждать сходимость такого ряда.

На самом деле этот ряд расходится. В литературе его называют *гармоническим*.

1.4 Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$

положительные. Для рядов с положительными членами справедливы указанные ниже достаточные признаки сходимости.

Признак Даламбера

Пусть для ряда с положительными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$ существует предел отношения

$n+1$ -го члена к n -му, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$.

Если $q < 1$, то ряд сходится; если $q > 1$, то расходится. В случае $q = 1$ признак не даёт ответа о сходимости ряда.

Пример 1.5 Исследовать сходимость ряда а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Решение

а) Применим признак Даламбера. Рассмотрим предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$.

Выражение для n -го члена ряда задано: $U_n = \frac{5^n}{n^5}$. Чтобы получить

выражение для U_{n+1} нужно в общем члене ряда вместо n подставить

$$\begin{aligned} (n+1): U_{n+1} &= \frac{5^{n+1}}{(n+1)^5}. \text{ Таким образом, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^5}}{\frac{5^n}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \cdot n^5}{(n+1)^5 \cdot 5^n} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^5 = 5. \end{aligned}$$

Согласно признаку Даламбера ряд расходится.

б) Общий член ряда содержит выражение $n!$, которое читается « n – факториал». Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Так, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. При этом по определению факториала $0! = 1$. Тогда $(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$

По признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2 \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0, \text{ следовательно,}$$

ряд сходится.

Примечание – если общий член ряда содержит выражение под знаком факториала, как в примере 1.5 б, то признак Даламбера наиболее эффективен, по сравнению с другими признаками.

Радикальный признак Коши

Пусть для ряда с положительными членами существует предел корня n -ой степени из n -го члена ряда, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = q.$$

Если $q < 1$, то ряд сходится; если $q > 1$, то расходится. В случае $q = 1$ признак не даёт ответа о сходимости ряда.

Пример 1.6 Доказать сходимость ряда $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$

Решение. Применим признак Коши, составим и вычислим указанный в формулировке признака предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1. \quad \text{Данный ряд сходится.}$$

Интегральный признак Коши

Пусть $f(x)$ – неотрицательная, невозрастающая функция при $x > 0$, такая, что $U_1 = f(1)$, $U_2 = f(2)$, $U_3 = f(3)$, ... Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots \text{ сходится или расходится}$$

одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Замечание - нижним пределом интегрирования может быть любое другое положительное число из области существования функции $f(x)$; чтобы получить функцию $f(x)$, нужно в общем члене ряда вместо n положить x .

Пример 1.7 С помощью интегрального признака исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ в зависимости от величины параметра λ .

Решение. Заметим, что заданный ряд называется обобщенным гармоническим рядом. Составим и вычислим несобственный интеграл (см. Приложение В):

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-\lambda} dx. \quad \text{Так как} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

если $n \neq -1$, и $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$, то рассмотрим три случая для значения параметра λ .

1) Пусть $\lambda > 1$. Тогда

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-\lambda} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{(\lambda-1) \cdot x^{\lambda-1}} \Big|_1^b \right) = \frac{1}{\lambda-1}.$$

Интеграл существует, ряд сходится.

2) Пусть $\lambda < 1$. Тогда
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-\lambda} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^{1-\lambda}}{(\lambda-1)} \Big|_1^b \right) = \infty.$$

Интеграл не существует, ряд расходится.

3) Пусть $\lambda = 1$. Тогда
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \infty.$$

Интеграл не существует, ряд расходится.

Таким образом, обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ сходится при

$\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \leq 1$.

Признак сравнения

Для использования признака надо иметь на вооружении группу эталонных рядов, сходимость или расходимость которых нам хорошо известна, и применять их для сравнения с данными рядами в целях определения их сходимости. В качестве эталонных рядов чаще всего рассматривается обобщенный гармонический ряд и ряд, составленный из членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

Формулировка признака. Пусть для рядов с положительными членами

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots \quad (1.7)$$

$$\text{и } V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots \quad (1.8)$$

начиная с некоторого номера справедливо неравенство $U_k \leq V_k$. Тогда, если ряд с большими членами (1.8) сходится, то ряд (1.7) с меньшими членами также сходится.

Если ряд (1.7) с меньшими членами расходится, то ряд (1.8) с большими членами также расходится.

Пример 1.8 Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

Решение: подберем для сравнения сходящийся ряд (бесконечная убывающая геометрическая прогрессия)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Начиная со второго члена, члены данного ряда не больше соответствующих членов сходящегося ряда; поэтому данный ряд также сходится.

Пример 1.9 Исследовать сходимость ряда $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

Решение: подберем для сравнения расходящийся гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots;$$

так как члены заданного ряда, начиная со второго, больше соответствующих членов расходящегося ряда, то он тоже расходится.

Предельный признак сравнения

Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = l \neq 0,$$

то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1.10 Выяснить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n} = \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3^2-2} + \frac{1}{3^3-3} + \dots$$

Решение

Сравним данный ряд с бесконечно убывающей геометрической прогрессией

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

Как указывалось в примере 1.2, сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$ вычисляется формулой $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Для нашего случая $b_1 = 1/3$, $q = 1/3$, следовательно,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, в целях определения сходимости данного ряда мы подобрали для сравнения заведомо сходящийся ряд. Применим теперь предельный признак сравнения и вычислим следующий предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n - 1} : \frac{1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - (1/3^n)} = 1.$$

Согласно предельному признаку сравнения данный ряд сходится.

Если общий член ряда содержит многочлен по степеням n , то его можно сравнивать с обобщённым гармоническим рядом.

Пример 1.11 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\sqrt{n}}$.

Решение: сравниваем данный ряд с обобщённым гармоническим рядом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^{1/2}} : \frac{1}{n^\lambda} = \left(\sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n} \right) = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lambda - \frac{3}{2}} = \pi,$$

если $\lambda - \frac{3}{2} = 0$, $\lambda = \frac{3}{2}$; обобщённый гармонический ряд при $\lambda = \frac{3}{2}$ сходится, следовательно, сходится и данный ряд.

1.5 Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница

Ряд, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется *знакопеременным*.

Достаточный признак сходимости
Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad (1.9)$$

сходится, если сходится ряд (1.10), составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = |b_1| + |b_2| + |b_3| + \dots + |b_n| + \dots \quad (1.10)$$

Если сходится ряд (1.10), то ряд (1.9) называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд (1.9) сходится, а ряд (1.10), составленный из модулей его членов, расходится, то ряд (1.9) называется *условно сходящимся*.

Отметим, что ряд (1.10) является рядом с положительными членами и для исследования его сходимости можно применять любые перечисленные признаки (Даламбера, Коши и т.д.).

Пример 1.12 Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^6} - \frac{1}{3^7} + \dots$$

Решение

Предложен знакопеременный ряд; составим ряд из абсолютных величин его членов: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^7} + \dots$

Этот ряд сходится, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1/3$. Следовательно, данный ряд также сходится и, кроме того, он является абсолютно сходящимся рядом.

Знакопеременяющиеся ряды. Теорема Лейбница

Ряд, у которого любые два соседних члена ряда имеют разные знаки, называется *знакопеременяющимся*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots \quad (1.11)$$

При этом $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ положительны (или все отрицательны).

Теорема Лейбница. Знакопеременяющийся ряд сходится, если выполнены два условия:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине;

2) общий член ряда стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$.

При замене суммы сходящегося ряда суммой его первых членов ошибка не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов, т.е.

$$|R_n| \leq U_{n+1}.$$

Пример 1.13 Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Решение

Применим теорему Лейбница. Оба требования теоремы выполнены:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots;$$

2) предел общего члена $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; следовательно, ряд сходится.

Так как ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, расходится, как обобщённый гармонический при $\lambda < 1$, то данный ряд обладает условной сходимостью.

Примечание – теорема Лейбница гарантирует условную сходимость ряда. Чтобы исследовать ряд на абсолютную сходимость, можно применить достаточный признак сходимости.

1.6 Функциональные ряды

Ряд, члены которого являются некоторыми функциями от переменной $x \in [a, b]$, называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \dots + U_n(x) + \dots \quad (1.12)$$

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд (1.12) становится числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0) = U_1(x_0) + U_2(x_0) + U_3(x_0) + \dots + U_n(x_0) + \dots \quad (1.13)$$

Если ряд (1.13) сходится, то значение переменной $x = x_0$ называется *точкой сходимости* ряда (1.12). Совокупность всех таких точек x называется *областью сходимости* ряда.

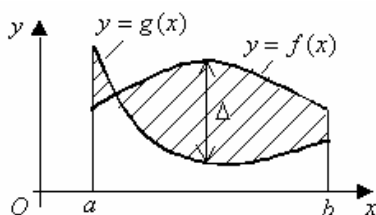
Суммой ряда (1.12) называется функция $S(x)$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n U_i(x).$$

Остатком ряда (1.12) называется следующая функция

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x).$$

Понятие о сходимости функционального ряда. Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на одном



и том же интервале $x \in [a, b]$, то равномерным отклонением их друг от друга называется величина

$$\Delta = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Геометрический смысл Δ показан на рисунке 1.1.

Рисунок 1.1 – Уклонение двух функций

Средним квадратичным отклонением двух функций называется величина

$$\delta = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Чем больше площадь заштрихованной области на рис. 1.1, тем больше δ .

Равномерное отклонение применяется, как правило, для непрерывных и ограниченных функций. Среднее квадратичное отклонение может применяться и для разрывных функций.

Определение. Если для функционального ряда (1.12) равномерное отклонение частичной его суммы $S_n(x)$ от суммы $S(x)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |S(x) - S_n(x)| = 0,$$

то ряд (1.12) *сходится к сумме $S(x)$ равномерно*.

Функциональный ряд *сходится в среднем квадратичном*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_a^b (S(x) - S_n(x))^2 dx} = 0.$$

Для проверки, обладает ли функциональный ряд равномерной сходимостью, применяют достаточный признак Вейерштрасса.

Признак Вейерштрасса. Функциональный ряд (1.12) сходится абсолютно и равномерно в некотором промежутке, если существует сходящийся числовой ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots, \quad (1.14)$$

такой, что $|U_n(x)| \leq a_n$ для всех x из данного промежутка. Числовой ряд (1.14) в этом случае называется *мажорирующим* для ряда (1.12), а ряд (1.12) называется *мажорируемым*.

Пример 1.14 Проверить равномерную сходимость ряда

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} + \dots + \frac{1}{n^2+x^2} + \dots$$

Решение: члены данного ряда не превышают членов сходящегося

числового ряда обратных квадратов $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$, поэтому,

согласно признаку Вейерштрасса, функциональный ряд сходится равномерно при $x \in R$.

1.7 Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости

Степенной ряд – частный случай функционального ряда. Он имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n + \dots, \quad (1.15)$$

где C_n – коэффициенты ряда. При $a = 0$ ряд принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots \quad (1.16)$$

Теорема Абеля. Если степенной ряд (1.16) сходится при некотором значении $x = x_0$, то он сходится и при том *абсолютно*, при всех значениях x , для которых $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_0$, то он расходится при всех значениях x , для которых $|x| > |x_0|$.

Из теоремы Абеля следует, что области сходимости и расходимости степенного ряда (1.16) расположены симметрично относительно точки

$x = 0$, согласно схеме рисунка 1.2. Все точки на оси Ox относятся или к области сходимости, или к области расходимости степенного ряда, поэтому обобщением схемы рисунка 1.2 является схема рисунка 1.3.

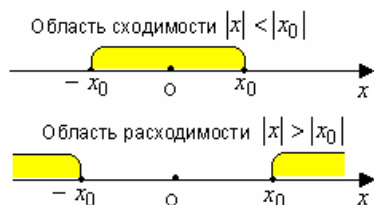


Рисунок 1.2 – К теореме Абеля



Рисунок 1.3 – Интервал сходимости

На рисунке 1.3 граничные точки между областью сходимости и расходимости обозначены $-R$, R .

Радиусом сходимости ряда (1.16) называется число R такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится. В этом случае говорят об интервале сходимости ряда $-R < x < R$; на концах интервала при $x = \pm R$ сходимость ряда необходимо исследовать отдельно.

Определим формулу для вычисления радиуса сходимости степенного ряда (1.16). Для этого зададим переменной x произвольное значение x_0 . Составим ряд из абсолютных величин членов полученного числового ряда:

$$|C_0| + |C_1 x_0| + |C_2 x_0^2| + \dots + |C_n x_0^n| + |C_{n+1} x_0^{n+1}| + \dots$$

Сходимость числового ряда с положительными членами исследуем при помощи признака Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1} x_0^{n+1}|}{|C_n x_0^n|} = |x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = q.$$

Если $q < 1$, числовой ряд сходится; если $q > 1$, числовой ряд расходится. Следовательно, если $q = 1$, то значение $|x_0|$ лежит на границе между областью сходимости и расходимости, т.е. $|x_0| = R$. Таким образом,

$R \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = 1$. Окончательно, формула для радиуса сходимости степенного ряда (1.16):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|}. \quad (1.17)$$

Другая формула для определения радиуса сходимости получена с помощью радикального признака сходимости и имеет вид

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}. \quad (1.18)$$

Примечание – формулы (1.17) и (1.18) применяются, если показатель степени x пробегает все натуральные значения 1, 2, 3, 4, ...; если же показатель степени x принимает, например, только четные или только нечетные значения, то нужно вывести формулу для радиуса сходимости, как это сделано для указанных формул

Пример 1.15 Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n+1}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}.$$

Решение

$$\text{a) Полагая } x-2 = x_1 \text{ применим формулу (1.17): } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, данный ряд сходится при $-\frac{1}{3} < x-2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. Пусть $x = \frac{5}{3}$.

Получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (-1/3)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$. В силу теоремы Лейбница данный ряд сходится.

Пусть $x = \frac{7}{3}$. Получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (1/3)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Этот ряд, как гармонический ряд, расходится.

Ответ: ряд сходится при $\frac{5}{3} \leq x < \frac{7}{3}$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$. Считая x фиксированным, применим к ряду признак

Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2(n+1)}}{2^{n+1}} \right| \cdot \left| \frac{2^n}{x^{2n}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2}. \text{ Числовой ряд сходится, если}$$

$$\frac{x^2}{2} < 1, \text{ или, } x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}. \text{ При } x = \pm\sqrt{2} \text{ ряд}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \text{ расходится, так как не выполняется необходимое}$$

условие сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$.

Ответ: ряд сходится при $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

1.8 Свойства сходящихся степенных рядов

Степенные ряды обладают следующими свойствами.

1. Сумма степенного ряда при всех значениях x из интервала сходимости ряда является непрерывной функцией.
2. Степенной ряд в его интервале сходимости можно почленно дифференцировать любое число раз и при этом интервал сходимости продифференцированных рядов останется прежним; так

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}.$$

Вычислим радиус сходимости исходного ряда (1.16) и ряда, полученного дифференцированием его членов по формуле (1.17). Радиус сходимости

$$\text{исходного ряда } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|}.$$

Радиус сходимости полученного ряда

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|nC_n|}{|(n+1)C_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = R \cdot 1 \Leftrightarrow R_1 = R.$$

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, лежащему внутри интервала сходимости; ряд, полученный интегрированием от x_0 до x , имеет тот же интервал сходимости, что и прежний. Пусть $x_0 = 0$:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} \cdot x^{n+1}.$$

4. Ряд $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots$ сходится равномерно на любом интервале $-R_1 \leq x \leq R_1$, где $0 < R_1 < R$; R - радиус сходимости ряда.

Действительно, члены степенного ряда по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов числового ряда $|C_0| + |C_1 R_1| + |C_2 R_1^2| + |C_3 R_1^3| + \dots$. Последний ряд сходится, так как R_1 лежит внутри интервала сходимости.

5. Степенные ряды внутри своих интервалов сходимости можно почленно складывать, умножать на общий множитель, умножать друг на друга по правилу умножения многочленов.

1.9 Ряды Тейлора и Маклорена

Рядом Тейлора функции $f(x)$, определенной в окрестности точки a и имеющей в этой точке конечные производные любого порядка, называется степенной ряд

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (1.19)$$

Выражения $f(a)$, $\frac{f'(a)}{1!}$, ..., $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, ... называются коэффициентами

Тейлора. Если положить $a = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора - ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (1.20)$$

Пример 1.16 Разложить функцию $f(x) = \ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 1$.

Решение. Находим производные данной функции:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}; & f''(x) &= -\frac{1}{x^2}; & f'''(x) &= \frac{2}{x^3}; \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{2 \cdot 3}{x^4}; & \dots & & f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}. \end{aligned}$$

Вычисляем значение функции и её производных при $x = 1$:

$$\begin{aligned} f(1) &= \ln 1 = 0; & f'(1) &= 1; & f''(1) &= -1; & f'''(1) &= 2; \\ f^{(4)}(1) &= -3!; & \dots & & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1} (n-1)! \end{aligned}$$

Искомый ряд согласно общей формуле (1.19) имеет вид

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n} + \dots \quad (1.21)$$

Найдем радиус и интервал сходимости полученного ряда (1.21). Чтобы можно было применить формулу (1.17) приведем ряд (1.21) к виду (1.16). Для этого обозначим $(x-1) = y$, $x = y+1$, тогда

$$\ln(y+1) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{y^n}{n} + \dots$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Для переменной y интервал сходимости $-1 < y < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow$

$0 < x < 2$. Ряд (1.21) сходится при $0 < x < 2$. Выясним, сходится ли числовой ряд, полученный из степенного ряда (1.21) на концах интервала, в точках $x = 0$, $x = 2$.

Пусть $x = 0$: $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходящийся

гармонический ряд, умноженный на число (-1) ;

$$x = 2: 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

- знакочередующий числовой ряд, для которого выполняются условия теоремы Лейбница, сходится. Окончательно, степенной ряд (1.21) сходится при $x \in (0; 2]$.

1.10 Способы разложения функций в ряды Тейлора

Ряды Тейлора и Маклорена широко используются в приближённых вычислениях, поэтому важно знать основные способы разложения функций в степенные ряды.

1. Способ разложения в ряд, основанный на вычислении производных функции, с последующим определением интервала сходимости ряда. Этим способом получен ряд (1.21) в примере 1.16. Таким же способом получены разложения основных элементарных функций.

$$1. \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (1.22)$$

$$2. \quad \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots \quad (1.23)$$

$$3. \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \quad (1.24)$$

$$4. \quad (1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots \quad (1.25)$$

$$5. \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (1.26)$$

Ряды (1.22)-(1.24) сходятся при $x \in (-\infty; \infty)$, ряд (1.25) сходится при $x \in (-1; 1)$, ряд (1.26) сходится при $x \in (-1; 1]$.

2. Дробь вида $\frac{b}{x-a}$ представляется рядом с помощью формулы для бесконечной сходящейся при $|q| < 1$ геометрической прогрессии:

$$\frac{b}{1-q} = b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots + bq^n + \dots \quad (1.27)$$

Пример 1.17 Разложить в ряд по степеням x дробь $\frac{1}{2-x}$.

Решение

Используем формулу (1.27), приводим данную дробь к виду левой части формулы, разделив числитель и знаменатель на 2:

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1/2}{1-x/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}.$$

Радиус сходимости ряда определяем из условия $|q| = \left|\frac{x}{2}\right| < 1$.

Тогда $|x| < 2$, $-2 < x < 2$. Интервал сходимости $(-2; 2)$.

3. Во многих случаях разложение функций в степенной ряд можно получить, используя разложение основных элементарных функций.

Пример 1.18 Найти ряд Маклорена для функций

$$\text{a) } f(x) = \sin^2 x; \quad \text{b) } f(x) = \ln(5+x^2).$$

Решение

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$. Используем разложение (1.24), подставляя $2x$

вместо x :

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \dots \end{aligned}$$

Это разложение верно для $-\infty < 2x < \infty$, то есть $-\infty < x < \infty$.

$$\text{b) } \ln(5+x^2) = \ln\left(5\left(1+\frac{x^2}{5}\right)\right) = \ln 5 + \ln\left(1+\frac{x^2}{5}\right). \text{ Используем}$$

разложение (1.26), подставляя $\frac{x^2}{5}$ вместо x ; получим

$$\ln(5+x^2) = \ln 5 + \frac{x^2}{5} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{5}\right)^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{x^2}{5}\right)^n + \dots$$

Это разложение верно при $-1 < \frac{x^2}{5} < 1$; $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.

4. При разложении функций в степенной ряд в некоторых случаях используют почленное дифференцирование или интегрирование рядов, основываясь на свойствах степенных рядов.

Пример 1.19 Найти ряд Маклорена для функции $f(x) = \arctg x$.

Решение

Известно, что $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$. Определим с помощью формулы

(1.27) ряд для подынтегральной функции, приняв $b=1$, $q=-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Интегрируем почленно полученный ряд:

$$\arctg x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{Подставляя } x=0, \text{ получим } C=0.$$

$$\text{Окончательно, } \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Интервал сходимости $-1 < x < 1$.

1.11 Приложения рядов Тейлора

Ряды находят широкое применение в приближенных вычислениях функций, определенных интегралов, при интегрировании дифференциальных уравнений.

Приближенное вычисление функций

Значения тригонометрических функций можно вычислять, пользуясь их разложением в ряд Маклорена.

Пример 1.20 Вычислить $\sin 1$ с точностью 0,001.

Решение

$$\text{Так как } \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad \text{то } \sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \dots = 1 - 0,1666 + 0,0083 - 0,0001 = 0,842.$$

Для достижения требуемой точности вычисления достаточно просуммировать три члена ряда, это следует из теоремы Лейбница: при замене суммы сходящегося ряда суммой его первых членов ошибка не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов 0,0001.

Приближенное вычисление определенных интегралов

Часто при вычислении определенных интегралов первообразная является или достаточно сложной функцией, или нахождение ее невозможно конечной суммой элементарных функций (так называемые «не берущиеся» интегралы). При этом если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области его сходимости, то определенный интеграл можно вычислять приближенно с заданной точностью.

Пример 1.21 Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx$ с

точностью 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно.

Решение. Чтобы вычислить определённый интеграл, подынтегральную функцию представляем степенным рядом, который затем интегрируем.

Так как $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$, то $\sin x^2 = \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$

Разделим члены ряда для $\sin x^2$ на x^2 :

$$\frac{\sin x^2}{x^2} = 1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \dots$$

Интегрируем почленно полученный ряд:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx &= \left(x - \frac{x^5}{5 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 5!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 7!} + \dots \right) \Big|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{30} + \frac{1}{1080} - \frac{1}{65520} + \dots = 1 - 0,0333 + 0,0009 = 0,967. \end{aligned}$$

Суммирование членов числового ряда продолжается до члена, по абсолютной величине не превышающего заданной точности. В примере вычислена сумма только двух первых членов.

Интегрирование дифференциальных уравнений

Решения некоторых дифференциальных уравнений могут быть представлены в виде степенных рядов.

Метод решения, основанный на применении ряда Маклорена, заключается в последовательном дифференцировании данного дифференциального уравнения.

Пример 1.22 Найти первые четыре члена разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y = 1/2$ при $x = 0$.

Решение. Искомое решение запишем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Дифференцируя данное уравнение, найдем выражение для двух последующих производных y'' , y''' :

$$y'' = 2x + 2yy'; \quad y''' = 2 + 2((y')^2 + yy'').$$

Вычислим теперь значения производных y' , y'' , y''' при $x = 0$, используя начальное условие:

$$y'(0) = \frac{1}{4}; \quad y''(0) = \frac{1}{4}; \quad y'''(0) = \frac{19}{8}.$$

Таким образом, решение уравнения будет иметь вид

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3 + \dots$$

1.12 Свойство ортогональности функций. Ряды по ортогональным функциям

Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется ортогональной на некотором отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ r \neq 0 & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (1.28)$$

Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется ортогональной и нормированной (ортонормированной) на некотором отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ 1 & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x), \quad (1.29)$$

называется *ортogonalным рядом*.

Если ряд (1.29) сходится на $[a, b]$, то его сумму обозначим $f(x)$, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1.30)$$

Пусть ряд (1.30) сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда, после умножения левой и правой частей ряда на функцию $\varphi_n(x)$, он остается равномерно сходящимся и его можно почленно интегрировать:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx &= C_1 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_n(x) dx + C_2 \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_n(x) dx + \dots + \\ &+ C_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n(x) dx + \dots \end{aligned}$$

Согласно (1.28) все интегралы в правой части, кроме одного, равны нулю.

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = C_n \int_a^b \varphi_n^2(x) dx, \quad \text{откуда}$$

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \varphi_n(x) dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.31)$$

Числа C_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ называются *коэффициентами Фурье*, или коэффициентами разложения функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$. Ряд (1.30), в котором коэффициенты вычислены по формуле (1.31), называется *рядом Фурье*.

1.13 Тригонометрическая система функций. Разложение функций в ряд Фурье

Исторически первой и практически наиболее важной ортогональной системой функций является тригонометрическая система функций.

Тригонометрической называется следующая система функций:

$$1; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots, \cos nx; \sin nx; \dots \quad (1.32)$$

Она обладает свойством ортогональности на интервале $[-\pi; \pi]$, интеграл по этому отрезку от произведения любых двух различных функций системы равен нулю.

$$\text{Действительно, } \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+k)x + \sin(m-k)x) dx = 0, \text{ и т.д.}$$

Предположим, что некоторая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-\pi; \pi]$, представима рядом по тригонометрической системе функций (какой при этом должна быть функция $f(x)$, рассмотрим ниже). Подставляем в формулу (1.31) функции тригонометрической системы (1.32) и определяем коэффициенты Фурье. Для удобства различия коэффициенты при косинусах обозначают a_1, a_2, a_3, \dots , коэффициенты при синусах обозначают b_1, b_2, b_3, \dots . Коэффициент при единице обозначается a_0 . Таким образом,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; & a_n &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \\ &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx}{\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; & b_n &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \end{aligned}$$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$. Для единообразной записи формул коэффициентов,

множитель $1/2$ при вычислении a_0 выносится непосредственно в ряд. Таким образом, коэффициенты Фурье для тригонометрической системы функций, заданных на отрезке $[-\pi; \pi]$, имеют вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ряд Фурье по тригонометрической системе записывается в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots, \text{ или,}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1.34)$$

Пример 1.20 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$, $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0, \\ 5, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Решение. Коэффициенты Фурье определяем по формулам (1.33):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 1 \cdot dx + \int_0^{\pi} 5 \cdot dx \right) = \frac{1}{\pi} (\pi + 5\pi) = 6;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \cos nx dx + \int_0^{\pi} 5 \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(\sin nx \Big|_{-\pi}^0 + 5 \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \int_0^{\pi} 5 \sin nx dx \right) =$$

$$= \frac{-1}{n\pi} \left(\cos nx \Big|_{-\pi}^0 + 5 \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

С учётом того, что $\cos n\pi = (-1)^n$, запишем несколько первых членов ряда Фурье для заданной функции:

$$f(x) = 3 + \frac{8}{\pi} \sin x + \frac{8}{3\pi} \sin 3x + \dots = 3 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Пример показывает, что функцию, заданную несколькими формулами, можно представить в виде ряда.

1.14 Условия разложимости функций в ряды Фурье

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно монотонной на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ на интервалы, в каждом из которых функция либо невозрастающая, либо неубывающая.

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ кусочно-монотонная и непрерывная или имеет конечное число точек разрыва первого рода на $[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. В каждой точке x_k разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева, т.е. числу $\frac{1}{2}(f(x_k - 0) + f(x_k + 0))$. В точках $x = \pm\pi$ ряд Фурье сходится к числу $\frac{1}{2}(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$.

Положения теоремы иллюстрируют следующие рисунки. График функции примера 1.20 приведен на рисунке 1.4. На рисунке 1.5 линии, обозначенные $S_5(x)$ и $S_{20}(x)$, это графики частичных сумм ряда Фурье из примера 1.20:

$$S_5(x) = 3 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^5 \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad S_{20}(x) = 3 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{20} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

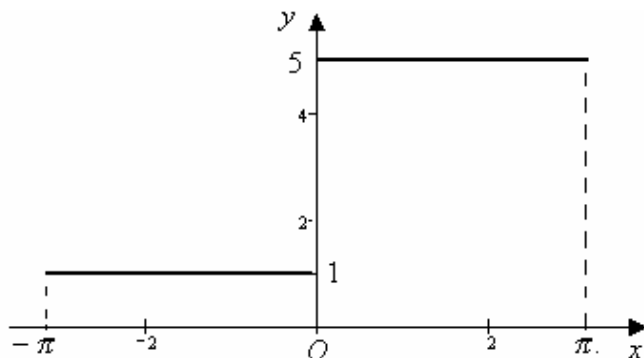


Рисунок 1.4 –График функции из примера 1.20

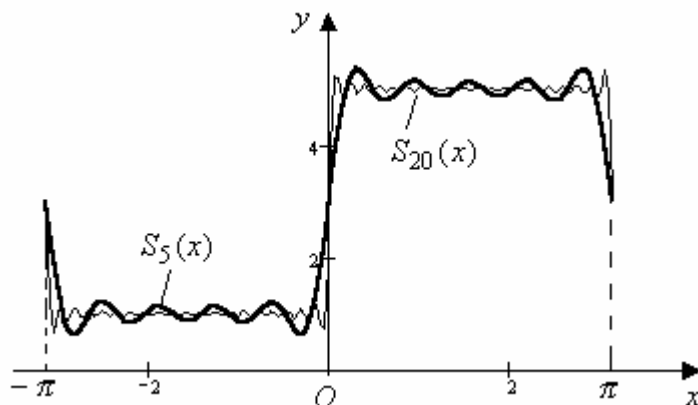


Рисунок 1.5 – Графики частичных сумм ряда Фурье из примера 1.20

На рисунке 1.6 представлен график частичной суммы

$$S_{100}(x) = 3 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Из теоремы Дирихле следует, что класс функций, представимых рядами Фурье, довольно широк. Поэтому ряды Фурье нашли широкое применение в различных разделах математики и техники.

Для непрерывной функции $f(x)$, имеющей к тому же одинаковые значения на концах отрезка $[-\pi, \pi]$, её ряд Фурье сходится к функции равномерно; если функция $f(x)$ разрывная, её ряд Фурье сходится к функции в среднем квадратичном.

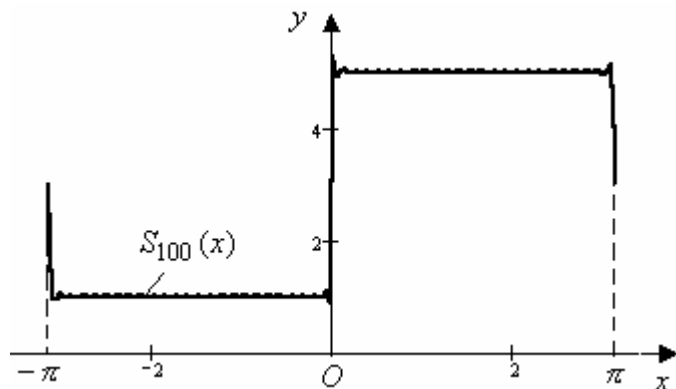


Рисунок 1.6 – График частичной суммы ряда Фурье из примера 1.20

1.15 Особенности разложения функций в ряд Фурье

Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[-l; l]$

Если систему функций (1.32) «растянуть» вдоль оси Ox в l/π раз, то получится система функций, ортогональная на отрезке $[-l; l]$. По такой системе функций можно разложить функцию $f(x)$, периодическую с периодом $T = 2l$. Ряд Фурье и коэффициенты Фурье определяются по формулам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad (1.35)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (1.36)$$

Разложение в ряд Фурье периодических функций

Ряды Фурье применяются не только для разложения функций, заданных на конечном интервале, но и для разложения периодических функций, заданных на всей оси. Пусть функция разложена в ряд (1.34)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

или в ряд (1.35)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Члены ряда (1.34) периодические с периодом $T = 2\pi$, члены ряда (1.35) периодические с периодом $T = 2l$. Значит и суммы рядов периодические с теми же периодами. Поэтому периодические с периодом $T = 2\pi$ или $T = 2l$ функции описываются рядом Фурье на всей числовой оси. Непериодические функции описываются рядом Фурье только на отрезке $[-\pi; \pi]$ или на отрезке $[-l; l]$.

Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций

Пусть функция $f(x)$ чётная, т.е. определена на симметричном относительно нуля интервале и для неё справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. Тогда произведение четных функций $f(x) \cdot \cos nx$ или $f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}$ - есть четная функция. Произведение четной и нечетной

функции $f(x) \cdot \sin nx$ или $f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$ - есть нечетная функция.

Интеграл от нечетной функции на симметричном относительно нуля интервале равен нулю; интеграл от четной функции на таком же интервале равен удвоенному интегралу, вычисленному на правой половине отрезка интегрирования (см. [4], Лекции 2-го семестра). Следовательно, коэффициенты при синусах в ряде Фурье равны нулю $b_n = 0$, коэффициенты a_0, a_1, a_2, \dots вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (1.37)$$

Ряд Фурье для четной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (1.38)$$

Пусть функция $f(x)$ нечётная, т.е. определена на симметричном относительно нуля интервале и для неё справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. Тогда произведения $f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$ - четные функции, произведения $f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}$ - нечетные функции. Все коэффициенты a_0 , a_n равны нулю, а коэффициенты b_n определяются по формуле

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (1.39)$$

Ряд Фурье по синусам имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (1.40)$$

Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[0, l]$

Иногда функция $f(x)$ задана на половине интервала $[0, l]$. В этом случае, чтобы разложить её в ряд Фурье, функцию нужно «доопределить» до полного интервала. Используют доопределение «чётным образом», когда функция считается чётной на интервале $[-l; l]$. При этом применяют формулы (1.37), (1.38). Можно также доопределять функцию «нечётным образом», считая её заданной нечётной на $[-l; l]$. Тогда применяются формулы (1.39), (1.40).

Пример 1.21 Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [-2, 0); \\ 1, & \text{при } x \in [0, 2] \end{cases}, \text{ имеющую период } T = 4.$$

Решение. График функции показан на рисунке 1.7. Коэффициент Фурье

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 dx = 1. \quad \text{Коэффициенты при синусах } b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx;$$

$$b_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n\pi} \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = \frac{-1}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = \frac{-1}{n\pi} ((-1)^n - 1).$$

Коэффициенты при косинусах: $a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = 0$.

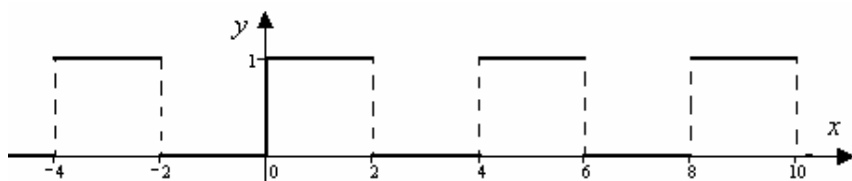


Рисунок 1.7 – График функции в примере 1.21

Ряд Фурье для заданной функции имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{2}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{2}{5\pi} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

График частичной суммы ряда

$S_{10}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}$ показан на рисунке 1.8.

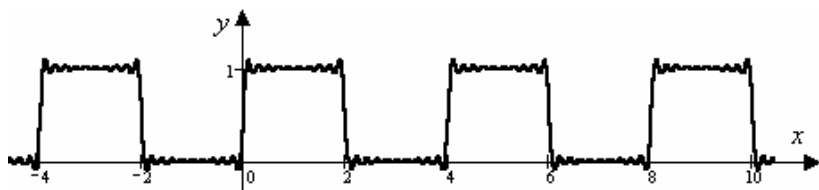


Рисунок 1.8 – График частичной суммы $S_{10}(x)$ ряда Фурье в примере 1.21

Пример 1.22 Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = |x|$ с периодом $T = 2$.

Решение

График периодической функции показан на рисунке 1.9. Это четная функция, поэтому коэффициенты Фурье $b_n = 0$. Коэффициенты при косинусах

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^1 x \cdot \cos n\pi x dx = \text{(применим формулу}$$

интегрирования по частям в определенном интеграле;

$$U = x, dV = \cos n\pi x dx, dU = dx, V = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x =$$

$$= \frac{2x}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1)$$

$$a_0 = 2 \int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

Ряд Фурье для функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi x - \frac{4}{25\pi^2} \cos 5\pi x - \dots, \text{ или}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x.$$

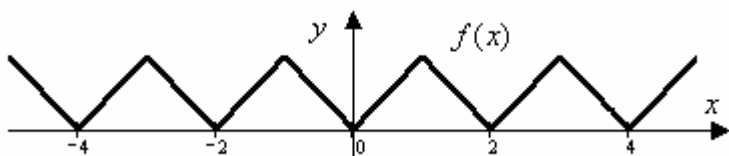


Рисунок 1.9 – График периодической функции в примере 1.22

На рисунке 1.10 показан график частичной суммы ряда Фурье для заданной периодической функции

$$S_5(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^5 \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x$$

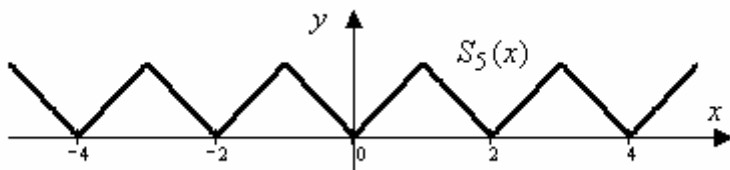


Рисунок 1.10 – График частичной суммы ряда Фурье в примере 1.22

Характер сходимости ряда Фурье

Пусть ограниченная периодическая функция $f(x)$ периода $T = 2l$ разложена в ряд Фурье. При этом все коэффициенты Фурье ограничены, например, коэффициенты b_n :

$$|b_n| = \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right| \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)| \cdot \left| \sin \frac{n\pi x}{l} \right| dx \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)| dx.$$

Если функция $f(x)$ ограничена и разрывная, её коэффициенты Фурье убывают пропорционально $1/n$, как в примере 1.21.

Если функция $f(x)$ непрерывна, но её производная имеет разрывы и ограничена, как в примере 1.22, то её коэффициенты Фурье убывают пропорционально $1/n^2$. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд Фурье сходится равномерно на всей числовой оси.

Если непрерывна не только функция $f(x)$, но и её первая производная $f'(x)$, но вторая производная имеет разрыв, то ряд Фурье сходится со скоростью $1/n^3$. Чем быстрее убывают коэффициенты Фурье, тем быстрее сходится ряд Фурье. Это наглядно видно при сравнении графиков на рисунках 1.8 и 1.10.

Если функция $f(x)$ разрывная, её ряд Фурье сходится в среднем квадратичном.

1.16 Амплитудно-частотный и фазо-частотный спектр периодической функции

Пусть периодическая функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (1.41)$$

Пару слагаемых $a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ преобразуем методом введения

дополнительного угла, для чего умножим и разделим на $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$:

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Обозначим $\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos \phi_n$, $\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \sin \phi_n$. Тогда

$$\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \cos \left(\frac{n\pi x}{l} - \phi_n \right).$$

Название следующих обозначений:

$A_0 = \frac{a_0}{2}$ - постоянная составляющая; $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ - амплитуда n -й

гармоники; $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$ - частота первой гармоники; $\cos(n\omega_1 x - \phi_n)$ - n -я

гармоника; $\phi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$ - фаза n -й гармоники.

С учетом обозначений, ряд (1.41) запишем в виде:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 x - \phi_n). \quad (1.42)$$

Формула (1.42) говорит о том, что ограниченный периодический сигнал можно представить суммой гармоник, каждая из которых имеет свою амплитуду и сдвиг вдоль оси аргумента.

Совокупность постоянной составляющей A_0 и амплитуд A_1, \dots, A_n, \dots последовательных гармоник называется *амплитудно-частотным спектром периодической функции $f(x)$* . На рисунке 1.11 показан амплитудно-частотный спектр периодической функции из примера 1.21. Амплитудно-частотный спектр изображен в виде отрезков (спектральных линий), длиной A_n , проведенных перпендикулярно оси частот $O\omega$, на которой наносятся значения $n\omega_1$ ($n=1,2,\dots$). Постоянной составляющей A_0 соответствует отрезок, исходящий из начала координат.

Совокупность фаз последовательных гармоник ϕ_n называется *фазо-частотным спектром функции $f(x)$* .

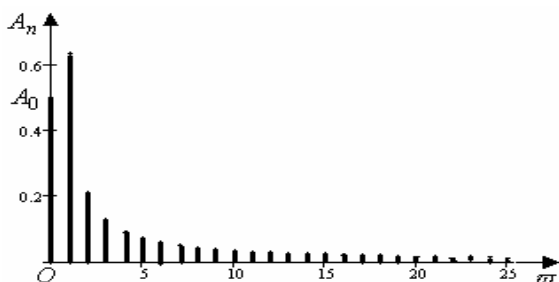


Рисунок 1.11 – Амплитудно-частотный спектр функции из примера 1.21

Амплитуды гармоник на рисунке 1.11 непрерывно убывают. Другое изменение амплитуд гармоник показано на рисунке 1.12.

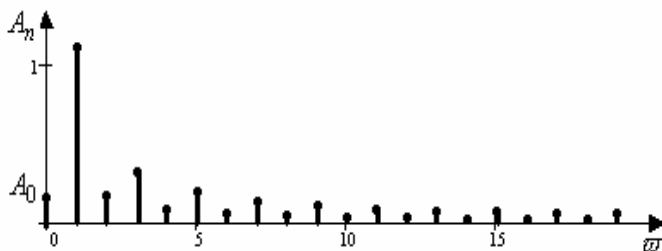


Рисунок 1.12 – Амплитудно-частотный спектр функции $f_1(x)$

Данный амплитудно-частотный спектр рассчитан для функции

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [-1; 0); \\ x^2 - 1, & \text{при } x \in [0; 1]. \end{cases} \quad \text{Период функции } T = 2.$$

В заключении отмечу, что графики функций, показанные на рисунках 1.4 – 1.12 построены в пакете MathCAD.

2. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1 Функция комплексной переменной. Области и границы

Если x и y - действительные переменные, i - мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$, то переменная $z = x + yi$ называется *комплексной переменной в алгебраической форме*. Действительную и мнимую части комплексной переменной z обозначают $\operatorname{Re}(z) = x$ и $\operatorname{Im}(z) = y$. Сопряженная комплексная переменная \bar{z} отличается от z знаком мнимой части: $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$. (О комплексных числах и действиях с ними см. [3]).

Пусть на комплексной плоскости Z задано множество точек M , а на комплексной плоскости W - множество точек N (рисунок 2.1).

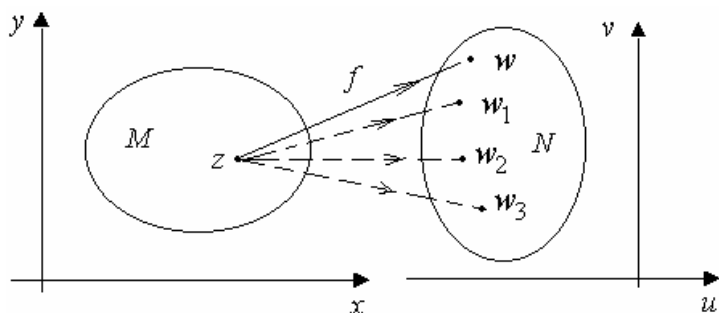


Рисунок 2.1 – К определению функции комплексной переменной

Определение. Если каждому значению z из множества M поставить в соответствие по закону f одно или несколько значений другой комплексной переменной $w = u + vi$ из множества N , то комплексная переменная w называется функцией z в области M , $w = f(z)$.

Другими словами, *функция осуществляет отображение точек плоскости z на соответствующие точки плоскости w* .

Функция $w = f(z)$ называется *однозначной*, если каждому значению $z \in M$ ставится в соответствие только одно значение w , и *многозначной*,

если каждому значению $z \in M$ ставится в соответствие несколько значений $w_1, w_2, w_3 \dots$ (см. рисунок 2.1).

Если $\operatorname{Re} w = u(x, y)$ – действительная часть функции w , $\operatorname{Im} w = v(x, y)$ – мнимая часть функции w , то функция $f(z)$ записывается в виде суммы действительной части и мнимой части, умноженной на i (запись функции $f(x)$ в алгебраической форме):

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (2.1)$$

Однозначная функция $w = f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ имеет определенный предел c (z_0 и c – комплексные числа), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $0 < |z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - c| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$.

Функция $w = f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0 , если она определена в некоторой окрестности z_0 и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области D , называется *непрерывной в этой области*.

Для непрерывности $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывными в точке (x_0, y_0) .

Пример 2.1 Исследовать на непрерывность функцию

$$w = z^2 \operatorname{Re}(z^2) - i \operatorname{Im}(\bar{z}).$$

Решение. Запишем функцию в виде (2.1), при условии, что $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} w &= (x + iy)^2 \operatorname{Re}(x + iy)^2 - i \operatorname{Im}(x - iy) = (x^2 + 2ixy - y^2) \times \\ &\times (x^2 - y^2) + iy = (x^2 - y^2)^2 + iy(2x(x^2 - y^2) + 1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функции

$$u(x, y) = (x^2 - y^2)^2 \text{ и } v(x, y) = y(2x(x^2 - y^2) + 1)$$

непрерывны на плоскости xOy , значит данная функция w также непрерывна на всей комплексной плоскости z .

Область D – это множество точек, обладающих свойством *открытости* (вместе с точкой области D принадлежит и достаточно малый круг с центром в этой точке) и свойством *связности* (две любые точки D можно соединить ломаной, полностью лежащей в D).

Замкнутой областью \bar{D} называют область D с присоединенной к ней границей Γ . Область D называют *ограниченной*, если она принадлежит некоторому кругу $|z| \leq R$.

Порядком связности ограниченной области D называется число связных частей, на которые разбивается её граница. Граница может состоять из замкнутых линий, разрезов и точек.

Границы области могут задаваться уравнениями кривых, которые рассмотрим на примере.

Пример 2.2 Определить виды кривых:

- a) $|z - (a + bi)| = R$, где a, b, R – действительные числа;
- b) $\arg(z - (a + bi)) = \varphi_0$;
- c) $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$.

Решение

a) $|z - (a + bi)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

– уравнение окружности с центром в точке $(a + bi)$ и радиусом R ;

b) уравнение равносильно уравнению

$$\arctg \frac{y - b}{x - a} \pm \pi = \varphi_0 \Rightarrow \frac{y - b}{x - a} = \operatorname{tg} \varphi_0 \Rightarrow y = b + \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot (x - a);$$

последнее уравнение – уравнение луча, выходящего из точки $(a + bi)$ и образующего с положительным направлением оси x угол φ_0 ;

c) в данном случае действительная и мнимая части комплексного переменного заданы параметрически; исключим параметр t из уравнений

$x = t^2 - 2t + 3, y = t^2 - 2t + 1$, вычитая из первого уравнения второе: $x - y = 2$; полученное уравнение определяет прямую линию.

Пример 2.3 Определить вид и связность области, заданной неравенствами: а) $|z - 2i| \leq 3$; б) $1 < |z + 1| < 2$.

Решение. а) Поскольку уравнение $|z - 2i| = 3$ задаёт окружность с центром в точке $z = 2i$ и с радиусом 3 (см. пример 2.2), то неравенство $|z - 2i| \leq 3$ задаёт замкнутую односвязную область, показанную на рисунке 2.2а.

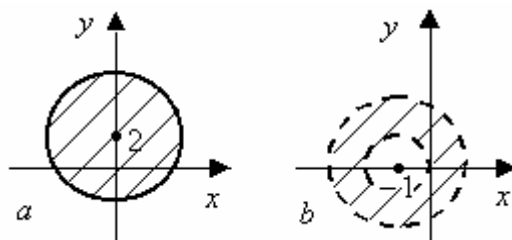


Рисунок 2.2а,б – К примеру 2.2

б) Разомкнутая двусвязная область – кольцо, границы которого $|z + 1| = 1$ и $|z + 1| = 2$ не входят в область (см. рисунок 2.2б).

2.2 Дифференцируемость и аналитичность

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z .

Функция дифференцируема в точке z , если существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z). \quad (2.2)$$

Этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z .

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D и имеющая в этой области непрерывную производную $f'(z)$, называется *аналитической в области D* .

Функция $f(z)$ аналитическая в точке $z_0 \in D$, если $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0 .

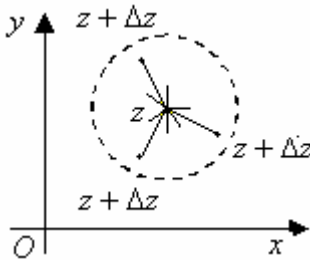
В пределе (2.2) $\Delta z \rightarrow 0$ произвольным образом. Точка $z + \Delta z$ может находиться в любом месте окрестности точки z и приближаться к ней по произвольной траектории (см. рисунок 2.3). Направление траектории движения точки $z + \Delta z$ при $\Delta z \rightarrow 0$ определяется отношением $\Delta x / \Delta y$.

Следовательно, производная $f'(z)$, исходя из определения (2.2), не зависит от отношения $\Delta x / \Delta y$.

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z . Запишем функцию в алгебраической форме $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Тогда, если существует производная,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} = \frac{d(u(x, y) + iv(x, y))}{d(x + iy)} = \frac{(u + iv)'_x dx + (u + iv)'_y dy}{dx + idy}. \quad (2.3)$$



Бесконечно малые dx, dy - одного порядка малости, отношение $dx/dy = t$ равно конечному числу.

Разделим числитель и знаменатель выражения (2.3) на dy .

Рисунок 2.3 – К определению производной

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(u + iv)'_x t + (u + iv)'_y}{t + i}. \text{ В числителе добавим выражение}$$

$(u + iv)'_x i - (u + iv)'_y i$ и сгруппируем слагаемые.

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{(u + iv)'_x t + (u + iv)'_x i - (u + iv)'_x i + (u + iv)'_y}{t + i} = \\ &= \frac{(u + iv)'_x (t + i)}{t + i} + \frac{(u + iv)'_y - (u + iv)'_x i}{t + i} = (u + iv)'_x + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(u + iv)'_y - (u + iv)'_x i}{t + i}.$$

Для существования производной $\frac{dw}{dz}$ необходимо и достаточно, чтобы полученное выражение не зависело от t . Следовательно, должно выполняться равенство $(u + iv)'_y - (u + iv)'_x \cdot i = 0$, или $u'_y + iv'_y = -v'_x + iu'_x$. Приравнявая действительные и мнимые части, получим:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Равенства (2.4) являются необходимыми и достаточными условиями для аналитичности функции комплексной переменной и называются *условиями Коши – Римана*. (Иногда эти условия называют условиями Даламбера – Эйлера).

При выполнении условий (2.4) производная $f'(z)$ может быть вычислена по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Для аналитических функций правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций комплексной переменной такие же, как для функций действительной переменной, что иллюстрирует следующий пример. (Таблица производных приведена в Приложении Б)

Пример 2.4 Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $w = z^2$, найти её производную.

Решение. $w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy, \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

$$u'_x = 2x; \quad v'_y = 2x \Rightarrow u'_x = v'_y; \quad u'_y = -2y; \quad v'_x = 2y \Rightarrow u'_y = -v'_x.$$

Условия (2.4) выполняются при всех значениях x, y , следовательно,

функция $w = z^2$ является дифференцируемой и аналитической на всей

комплексной плоскости z :

$$(z^2)' = (x^2 - y^2)'_x + i(2xy)'_x = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

Таким образом, $(z^2)' = 2z$, как и для функции действительной переменной.

2.3 Степенные ряды комплексной переменной. Теорема Абеля

Понятие о степенных рядах расширяется на комплексную переменную z .
Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1(z - z_0) + \dots + C_n(z - z_0)^n + \dots \quad (2.6)$$

называется степенным по степеням $(z - z_0)$. При $z_0 = 0$ ряд является степенным по степеням z :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n + \dots \quad (2.7)$$

С помощью замены $z - z_0 = Z$ ряд (2.6) сводится к ряду (2.7).

Теорема Абеля. Если степенной ряд (2.7) сходится в точке $z = z_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится для всех z , таких, что $|z| < |z_1|$, причем сходимость будет равномерной в любом замкнутом круге $|z| \leq r$, $r < |z_1|$. Если степенной ряд расходится в точке $z = z_1$, то он расходится при всех значениях z , для которых $|z| > |z_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что областью сходимости степенного ряда (2.7) является круг с центром в начале координат, для ряда (2.6) – круг с центром в точке z_0 (см. рисунок 2.4).

Радиус сходимости R определяется по методике § 1.7 и по формулам (1.17), (1.18).

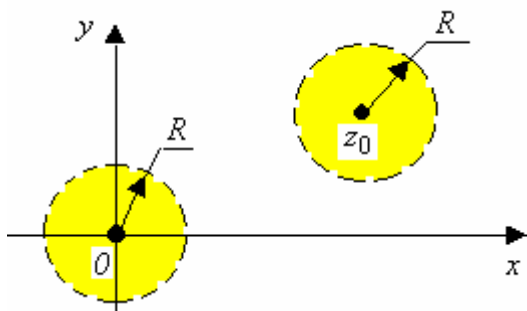


Рисунок 2.4 – Область сходимости степенного ряда

2.4 Пять элементарных функций, определяемых рядами. Формулы Эйлера

Функции комплексной переменной $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ определяются с помощью рядов, сходящихся во всей плоскости комплексной переменной:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad (2.8)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad (2.9)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad (2.10)$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad (2.11)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.12)$$

Используя разложение (2.8), определим ряд для функции e^{iz} .

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \frac{i^6 z^6}{6!} + \dots$$

Так как $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, то последний ряд запишем в

$$\text{виде: } e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Группируем слагаемые.

$$e^{iz} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right).$$

С учетом формул (2.9) и (2.10) запишем:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (2.13)$$

Полученная формула называется формулой Эйлера. Частный случай формулы Эйлера ($y \in R$):

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (2.14)$$

Формулу (2.13) запишем при $-z$: $e^{-iz} = \cos(-z) + i \sin(-z)$, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$. Тогда $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$; $e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$. Отсюда получаем формулы, выражающие тригонометрические функции через показательные (их также называют формулами Эйлера):

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}); \quad (2.15)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}); \quad (2.16)$$

Определим зависимости между тригонометрическими и гиперболическими функциями. С учетом (2.11) и (2.9):

$$\operatorname{sh} iz = iz + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \frac{i^7 z^7}{7!} + \dots = i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right),$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z.$$

Таким же образом определяются связи между другими функциями:

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z; \quad \operatorname{ch} iz = \cos z; \quad (2.17)$$

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z; \quad \cos iz = \operatorname{ch} z. \quad (2.18)$$

Элементарные функции (2.8)-(2.12) являются однозначными и непрерывными на всей комплексной области z .

На основе функций (2.8) – (2.12) определяются некоторые другие элементарные функции комплексной переменной:

- логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной функции e^z (см. далее §2.6);
- тригонометрические функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

гиперболические функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Кроме того, к элементарным функциям относятся:

общую показательную функцию $w = \alpha^z$, где $\alpha \neq 0$ - комплексное число;

общую степенную функцию $w = z^\alpha$, где α - любое комплексное число; в частном случае $\alpha = n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Пример 2.5 Представить в алгебраической форме значения следующих функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin\left(\frac{\pi}{3} + 4i\right) &= \begin{pmatrix} x = \frac{\pi}{3} \\ y = 4 \end{pmatrix} = \sin \frac{\pi}{3} \cos 4i + \cos \frac{\pi}{3} \sin 4i = \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \operatorname{ch} 4 + i \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sh} 4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 4 + i \frac{1}{2} \operatorname{sh} 4. \end{aligned}$$

Здесь использованы формулы (2.18) и формула для синуса $\sin(\alpha + \beta)$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \operatorname{ch}\left(0,5 + \frac{\pi}{6}i\right) &= \begin{pmatrix} x = 0,5 \\ y = \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \operatorname{ch} 0,5 \operatorname{ch} \frac{\pi}{6} + \operatorname{sh} 0,5 \operatorname{sh} \frac{\pi}{6} = \\ &= \operatorname{ch} 0,5 \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sh} 0,5 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 0,5 + i \frac{1}{2} \operatorname{sh} 0,5. \end{aligned}$$

Использованы формулы (2.17) и формула для $\operatorname{ch}(\alpha + \beta)$.

2.5 Свойства функций $w = z^n$ и $w = \sqrt[n]{z}$

Рассматриваем **степенную функцию** $w = z^n$, где $z = x + iy$ - комплексная переменная, $n \geq 2$ - целое положительное число.

Введем в плоскостях z и w полярные координаты $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$.

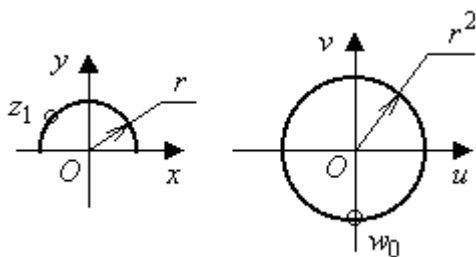
Получим $\rho e^{i\theta} = r^n e^{in\varphi}$, следовательно,

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi. \quad (2.19)$$

Из равенств (2.19) следует:

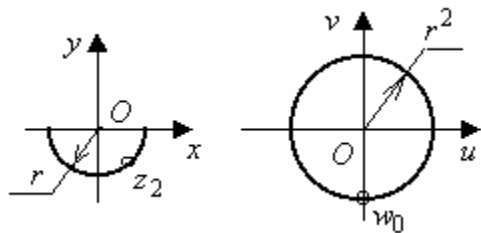
- 1) если на плоскости z точка движется по окружности радиуса r и при этом угол φ изменяется в пределах $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, то в плоскости w соответствующая точка движется по окружности радиуса $\rho = r^n$ и угол θ изменяется в пределах $n\varphi_1 < \theta < n\varphi_2$ (обе окружности с центром в началах координат);
- 2) если на плоскости z точка движется по лучу, составляющему угол φ с положительным направлением действительной оси Ox , то в плоскости w соответствующая точка движется по лучу, составляющему угол $\theta = n\varphi$ с положительным направлением действительной оси Ou .

Например, рассмотрим функцию $w = z^2$. Пусть на плоскости z точка движется по окружности радиуса r с центром в начале координат и при этом аргумент переменной z , угол φ ($\arg z = \varphi$) изменяется в пределах $0 \leq \varphi < \pi$. Тогда в плоскости w соответствующая точка движется по окружности радиуса $\rho = r^2$, угол θ изменяется в пределах $0 \leq \theta < 2\pi$ (см. рисунок 2.5). При дальнейшем движении по окружности точки плоскости z , её аргумент изменяется в пределах $\pi \leq \varphi < 2\pi$.



Соответствующая точка на плоскости w совершает второй оборот по окружности радиуса $\rho = r^2$, угол θ изменяется в пределах $2\pi \leq \theta < 4\pi$ (см. рисунок 2.6).

Рисунок 2.5 – Отображение $w = z^2$



Из рисунков 2.5 и 2.6 видно, что одной точке w_0 плоскости w соответствуют две точки z_1 и z_2 плоскости z , расположенных в концах одного диаметра окружности радиуса r .

Рисунок 2.6 – Отображение $w = z^2$

В общем случае, для функции $w = z^n$ одной точке плоскости w соответствуют n точек плоскости z , расположенных в вершинах правильного n -угольника с центром в нулевой точке.

Отображение, при котором одной точке плоскости w соответствуют n точек плоскости z , называется n -листным.

На рисунках 2.5 и 2.6 приведен пример двулистного отображения.

Таким образом, функция $w = z^n$ аналитическая, однозначная и n -листная на всей плоскости z . Производная функции $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$.

Функция $w = \sqrt[n]{z}$, где $n \geq 2$ - целое положительное число, является обратной функции $z = w^n$.

Пусть $z = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi))$, $w = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$. В соответствии с правилом возведения комплексного числа в степень, равенство $z = w^n$ обеспечивается, если $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Так как r и ρ - положительные числа, то $\rho = \sqrt[n]{r}$. Из второго равенства находим: $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$. Формула, с помощью которой можно извлечь корень из любого комплексного числа, принимает вид:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

Из формулы следует, что n различных значений $w = \sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{r}$. Аргументы двух значений $\sqrt[n]{z}$, соответствующих соседним значениям k ($k, k+1$) отличаются один от другого на $2\pi/n$.

Функция $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$ - n -значная.

Пусть точка z описывает, начиная с точки z_0 , некоторую непрерывную замкнутую линию C , не содержащую внутри себя начало координат и не проходящую через него. В плоскости w будут описаны n непрерывных кривых L_0, L_1, \dots, L_{n-1} , отличающихся лишь поворотом на угол $2k\pi/n$, $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$. Так как $\arg z$ возвращается к начальному

значению $\arg z_0$, то и все кривые L_0, L_1, \dots, L_{n-1} возвращаются к своему начальному положению w_0, w_1, \dots, w_{n-1} .

Если замкнутая линия C содержит внутри себя начало координат, то при обходе точкой z линии C в направлении против часовой стрелки (в положительном направлении) аргумент переменной z увеличивается на величину 2π . Все кривые L_0, L_1, \dots, L_{n-1} не возвращаются к своему начальному положению w_0, w_1, \dots, w_{n-1} . Конец предыдущей линии L_j сливается с началом последующей L_{j+1} .

Для иллюстрации сказанного рассмотрим функцию $w = \sqrt[3]{z}$. На рисунке 2.7 замкнутая линия C не содержит внутри себя начало координат. Кривые L_0, L_1 и L_2 не имеют общих точек, разделены.

На рисунке 2.8 замкнутая линия C проходит через начало координат. При этом кривые L_0, L_1 и L_2 имеют одну общую точку – начало координат. На рисунке 2.9 замкнутая линия C содержит внутри себя начало координат. При этом каждая из кривых L_0, L_1 и L_2 является незамкнутой линией, но конец предыдущей линии сливается с началом последующей. Вместе линии L_0, L_1 и L_2 образуют замкнутую кривую.

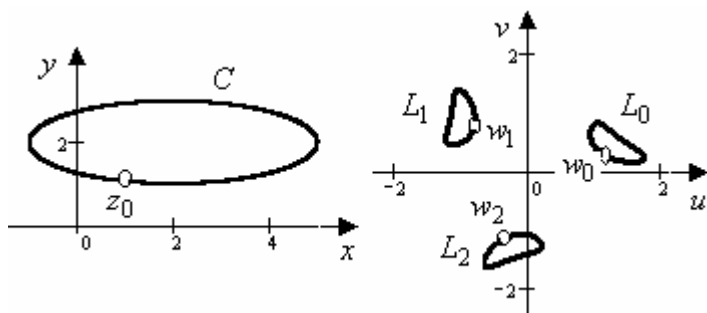


Рисунок 2.7 – Три ветви функции $w = \sqrt[3]{z}$

На рисунке 2.7 мы видим три однозначные ветви многозначной функции. Каждая ветвь осуществляет однолистное отображение и является аналитической функцией в области D , которая не содержит ни одной замкнутой кривой C , включающей точку $z = 0$.

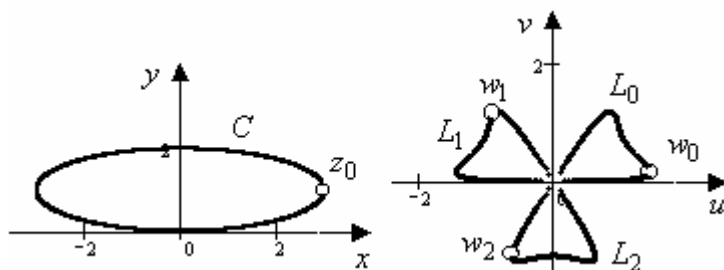


Рисунок 2.8 - Три ветви функции $w = \sqrt[3]{z}$, имеющие общую точку

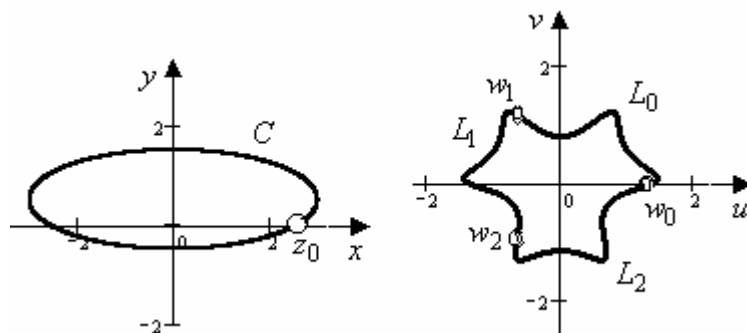


Рисунок 2.9 - Ветви функции $w = \sqrt[3]{z}$ не разделены

Если область D содержит хотя бы одну замкнутую кривую, включающую точку $z = 0$, то ветви нельзя отделить друг от друга, как на рисунке 2.8. В такой области нельзя рассматривать функцию $w = \sqrt[n]{z}$ как совокупность отдельных аналитических функций. Точка $z = 0$, в любой окрестности которой нельзя отделить n отдельных ветвей функции, называется *точкой разветвления* этой функции. Второй точкой разветвления функции $w = \sqrt[n]{z}$ является точка $z = \infty$, так как $\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt[n]{z} = \infty$.

2.6 Свойства показательной $w = e^z$ и логарифмической функций $w = \ln z$

Показательная функция $w = e^z$ определена как сумма сходящегося на всей комплексной плоскости степенного ряда (2.8). С учетом формулы Эйлера (2.14) показательная функция записывается в алгебраической форме:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sin y.$$

То есть, $\operatorname{Re}(e^z) = u(x, y) = e^x \cos y$, $\operatorname{Im}(e^z) = v(x, y) = e^x \sin y$.

Отсюда:

- 1) при $y = 0$ показательная функция комплексной переменной превращается в показательную функцию действительной переменной e^x ;
- 2) функция e^z аналитическая, для неё выполняются условия Коши-Римана, $(e^x \cos y)'_x = (e^x \sin y)'_y$ и $(e^x \cos y)'_y = -(e^x \sin y)'_x$;
- 3) сохраняется обычная формула дифференцирования $e^z' = e^z$;
- 4) для функции справедливо свойство $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;
- 5) показательная функция не превращается в ноль ни в одной точке комплексной плоскости. Действительно, пусть $z_1 = z$, $z_2 = -z$. Тогда по свойству 4, $e^z \cdot e^{-z} = 1$, или, $e^{-z} = 1/e^z$. Если бы в точке z функция обращалась в ноль, то в точке $-z$ показательная функция была бы не определена, что противоречит формуле (2.8);
- 6) показательная функция e^z периодическая с чисто мнимым основным периодом $i2\pi$. Действительно, $e^{z+i2k\pi} = e^z \cdot e^{i2k\pi} = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z$. Ввиду свойства периодичности изучение показательной функции на всей комплексной плоскости сводится к изучению функции на полосе $0 < y < 2\pi$. Отображение $w = e^z$ однолистно в этой полосе.

Изучим отображение $w = e^z$ в полосе $0 < y < 2\pi$. Введем в плоскости w полярные координаты, положив $w = \rho \cdot e^{i\theta}$. В плоскости z введем декартовы координаты. Тогда равенство $\rho \cdot e^{i\theta} = e^x \cdot e^{iy}$ запишется в виде двух равенств: $\rho = e^x$, $\theta = y$.

Равенства показывают, что прямая $y = y_0$ в плоскости z преобразуется в луч $\theta = y_0$ плоскости w . Отрезок $x = x_0$ преобразуется в окружность $\rho = e^{x_0}$. В частности, полоса $0 < y < \pi$ ширины π отображается функцией $w = e^z$ взаимно однозначно на верхнюю полуплоскость w .

Полоса $0 < y < 2\pi$ ширины 2π - на всю плоскость w с разрезом по положительной действительной полуоси: $0 < \theta < 2\pi$. Указанные отображения иллюстрирует рисунок 2.10.

Логарифмическая функция $w = \text{Ln}z$ определяется как обратная показательной функции $e^w = z$.

Из определения вытекают основные свойства логарифмической функции: если $w_1 = \text{Ln}z_1$ и $w_2 = \text{Ln}z_2$, то $\text{Ln}z_1 + \text{Ln}z_2 = \text{Ln}(z_1 \cdot z_2)$.

Если $z_1 = |z|$, $z_2 = e^{i(\arg z + 2k\pi)}$, то

$$\text{Ln}\left(|z| \cdot e^{i(\arg z + 2k\pi)}\right) = \text{Ln}|z| + i \cdot (\arg z + 2k\pi).$$

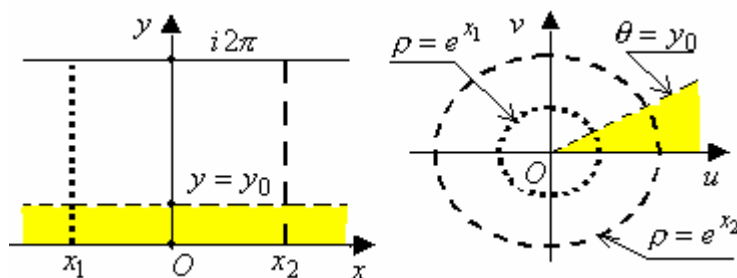


Рисунок 2.10 – Отображение $w = e^z$

Так как $|z| \cdot e^{i(\arg z + 2k\pi)} = z$ - комплексная переменная в показательной форме, то логарифмическая функция в алгебраической форме имеет вид:

$$\text{Ln}z = \ln|z| + i \cdot (\arg z + 2k\pi). \quad (2.20)$$

В формуле (2.20) символ $\arg z$ обозначает главное значение аргумента z (отметим, что $-\pi < \arg z \leq \pi$, см. [3], стр. 52).

Все значения аргумента комплексной переменной обозначаются как $\text{Arg}z = \arg z + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При этом логарифм комплексной переменной принимает бесконечное множество значений. Логарифмическая функция – бесконечно значная функция. Её действительная часть $\ln|z|$ определяется однозначно, а мнимая часть с точностью до слагаемого, кратного 2π .

Если $k = 0$, аргумент переменной z принимает главное значение $\varphi = \arg z$, при этом логарифмическая функция принимает главное значение

$$\text{и обозначается } \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \cdot \arg z. \quad (2.21)$$

Пусть точка z описывает, начиная с точки z_0 , некоторую непрерывную замкнутую линию C , не содержащую внутри себя начало координат и не проходящую через него. В плоскости w будут описаны бесконечное множество непрерывных кривых $L_0, L_{-1}, L_1, L_{-2}, L_2, \dots$. Положение двух соседних, одинаковых по форме кривых отличается на величину $i2\pi$. Так как $\arg z$ возвращается к начальному значению $\arg z_0$, то и все кривые $L_0, L_{-1}, L_1, L_{-2}, L_2, \dots$ возвращаются к своему начальному положению $w_0, w_0^{-1}, w_0^1, w_0^{-2}, w_0^2 \dots$ (см. рисунок 2.11). Различным значениям числа k соответствуют различные ветви функции $w = \operatorname{Ln} z$.

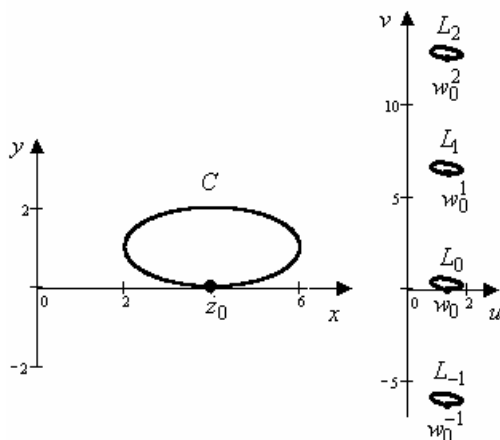
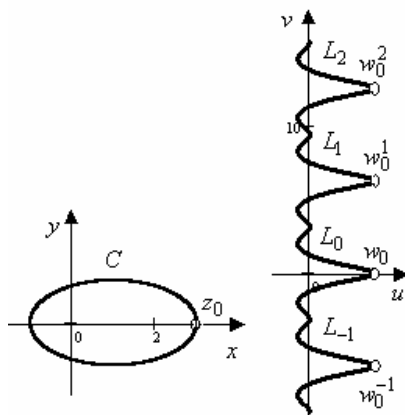


Рисунок 2.11 – Отображение $w = \operatorname{Ln} z$

Если замкнутая линия C содержит внутри себя начало координат, то при пробеге точкой z линии C в направлении против часовой стрелки (в положительном направлении) аргумент переменной z увеличивается на величину 2π . Все кривые $L_0, L_{-1}, L_1, L_{-2}, L_2, \dots$ не возвращаются к своему начальному положению $w_0, w_0^{-1}, w_0^1, w_0^{-2}, w_0^2 \dots$. Конец предыдущей линии L_j сливается с началом последующей L_{j+1} (см. рисунок 2.12). Следовательно, точка $z = 0$ является точкой разветвления функции $w = \operatorname{Ln} z$.

Рисунок 2.12 – Отображение $w = \text{Ln} z$

Примечание – рисунки 2.7 –2.12 выполнены в пакете MathCAD и показывают конкретные отображения.

Пример 2.6 Представить в алгебраической форме значения следующих функций:

$$\text{а) } \text{Ln}(3 + \sqrt{3} - i) = \left(\begin{array}{l} x = 3; \quad |3 + \sqrt{3} - i| = \sqrt{12}; \\ y = \sqrt{3}; \quad \arg(3 + \sqrt{3} - i) = \pi/6 \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 12 + i \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right). \quad \text{Использована формула (2.20).}$$

$$\text{г) } (1 - i\sqrt{3})^{1-i}.$$

Это выражение можно принимать как значение общей показательной функции (см. §2.4). Для представления числа в алгебраической форме переходим к основанию e :

$$\begin{aligned} (1 - i\sqrt{3})^{1-i} &= e^{(1-i)\text{Ln}(1-i\sqrt{3})} = e^{(1-i)(\ln 2 + i(2k\pi - \frac{\pi}{3}))} = \\ &= e^{(\ln 2 + 2k\pi - \frac{\pi}{3}) + i(2k\pi - \ln 2 - \frac{\pi}{3})} = 2e^{2k\pi - \frac{\pi}{3}} \left(\cos(\ln 2 + \frac{\pi}{3}) - i \sin(\ln 2 + \frac{\pi}{3}) \right). \end{aligned}$$

2.7 Интегрирование функций комплексной переменной

Пусть задана ориентированная линия C и на ней функция $w = f(z)$. Пусть $z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_n = b$ – последовательные точки, разбивающие линию C на n участков; a, b – концы линии C (см. рисунок 2.13). Частичные дуги заменяются отрезками $[z_{k-1}, z_k]$; длина k -го отрезка обозначается $\Delta z_k = |z_k - z_{k-1}|$. Точка λ_k – произвольная точка кривой C , лежащая на отрезке $[z_{k-1}, z_k]$;

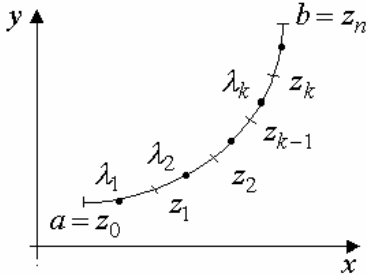


Рисунок 2.13 – К определению интеграла

Интегралом от функции $f(z)$ вдоль линии C называют предел

$$\lim_{\substack{\max \Delta z_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) = \int_C f(z) dz. \quad (2.22)$$

Интеграл существует, если функция $f(z)$ непрерывна на C .

2.7.1 Вычисление интеграла для функции, заданной в алгебраической форме

Если подынтегральная функция задана в алгебраической форме $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, вычисление интеграла (2.22) сводится к вычислению криволинейных интегралов второго рода от действительных функций. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_C (u(x, y) + iv(x, y)) \cdot d(x + iy) &= \int_C (u(x, y) + iv(x, y)) \cdot (dx + i dy) = \\ &= \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Кривая C может быть как незамкнутой, так и замкнутой.

Пример 2.7а Вычислить $\int_C \bar{z} \operatorname{Re} z dz$, где C – кривая, заданная

уравнением $y = x^2$, соединяет точки $A(0,0)$ и $B(2,4)$.

Решение. Найдем действительную и мнимую части подынтегральной функции $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$.

$$\begin{aligned} \int_C \bar{z} \operatorname{Re} z dz &= \int_C x^2 dx + xy dy + i \int_C x^2 dy - xy dx = \left(\begin{array}{l} y = x^2 \\ dy = 2x dx \end{array} \right) = \\ &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 2x^4 dx + i \int_0^4 y dy - i \int_0^2 x^3 dx = \frac{232}{15} + 4i. \end{aligned}$$

Формула (2.23) справедлива как для аналитических, так и для неаналитических функций $f(z)$.

2.7.1 Вычисление интеграла в полярной системе координат

Если кривая интегрирования задана в полярной системе координат, например $|z| = 2$, или $\varphi = \frac{\pi}{4}$, то переменную интегрирования следует

задать в показательной форме: $z = \rho e^{i\varphi}$. Тогда дифференциал переменной интегрирования определяется в виде

$$dz = \left(\rho e^{i\varphi} \right)'_{\rho} d\rho + \left(\rho e^{i\varphi} \right)'_{\varphi} d\varphi, \quad dz = e^{i\varphi} d\rho + i \rho e^{i\varphi} d\varphi.$$

Действительную и мнимую части комплексной переменной определим, перейдя к тригонометрической форме $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Тогда $\operatorname{Re} z = \rho \cos \varphi$, $\operatorname{Im} z = \rho \sin \varphi$.

Пример 2.7б Вычислить интеграл $\int_C z^2 \operatorname{Re} z dz$,

если $C: |z| = 1$, $(0 \leq \arg z \leq \pi/2)$.

Решение. Так как $C: |z| = 1$, $(0 \leq \arg z \leq \pi/2)$ – часть дуги окружности с центром в начале координат, то вычисления удобно производить в полярной системе координат, при этом переменную интегрирования представим в

показательной форме, с учетом, что $\rho = |z| = 1$, $\arg z = \varphi$.

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi} = e^{i\varphi}, \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi; \quad z^2 = e^{i2\varphi}; \quad \operatorname{Re} z = \rho \cos \varphi = \cos \varphi.$$

В свою очередь, по формуле Эйлера $\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_C z^2 \operatorname{Re} z dz &= \int_0^{\pi/2} e^{i2\varphi} \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) ie^{i\varphi} d\varphi = \frac{i}{2} \int_0^{\pi/2} (e^{i4\varphi} + e^{i2\varphi}) d\varphi = \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{4i} e^{i4\varphi} + \frac{1}{2i} e^{i2\varphi} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Из определения (2.22) и из формулы (2.23) получим *свойства интеграла*:

- 1) $\int_C (k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)) dz = k_1 \int_C f_1(z) dz + k_2 \int_C f_2(z) dz$;
- 2) $\int_{MN} f(z) dz = - \int_{NM} f(z) dz$ (знак интеграла меняется при изменении направления интегрирования);
- 3) если $C = C_1 + C_2$, то $\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$;
- 4) если $|f(z)| \leq M$ во всех точках дуги C и длина дуги равна l ,

$$\text{то } \left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \cdot l;$$

- 5) $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| \cdot |dz|$ (модуль интеграла равен интегралу от произведения модуля подынтегральной функции на модуль дифференциала переменной интегрирования).

2.8 Теорема Коши для односвязной и многосвязной области

Теорема Коши для односвязной области. Если $f(z)$ является аналитической функцией на замкнутом контуре C и в односвязной области, ограниченной этим контуром, то

$$\oint_C f(z)dz = 0. \quad (2.24)$$

Доказательство

Вычисление интеграла от функции комплексной переменной сводится к вычислению криволинейных интегралов второго рода от действительных функций:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \oint_C v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Известно, (см.[4] - Лекции по высшей математике за 2-й семестр, §5.13), что криволинейный интеграл по замкнутому контуру в односвязной области равен нулю $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ тогда и только тогда, когда

выполняется условие равенства частных производных $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ во всех

точках области. В применении к интегралам $\oint_C udx - vdy$ и $\oint_C vdx + udy$ это

условие сводится к условиям Коши-Римана: $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. По условию теоремы условия Коши-Римана выполняются. Теорема доказана.

Если $f(z)$ – аналитическая функция, C – незамкнутая линия с началом в точке A и концом в точке B ($A, B, C \subset D$), то интеграл $\int_C f(z)dz$ не зависит от вида кривой, соединяющей точки A и B , и вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_C^B f(z)dz = \int_A^B f(z)dz = F(B) - F(A), \quad (2.25)$$

где $F(z)$ первообразная для $f(z)$ ($F'(z) = f(z)$).

Первообразные аналитических функций определяются по таким же формулам, как и функций действительной переменной (см. Приложение В)

Пример 2.8 Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \oint_{|z|=6} z^5 \cdot \sin 3z dz; \quad \text{б) } \int_{MN} (z^3 + \operatorname{ch} 2z) dz, \quad \text{где линия } MN \text{ задана}$$

уравнением $y = 2x - 1$, $M(0; -1)$, $N(1; 1)$.

Решение. а) Подынтегральная функция $z^5 \sin 3z$ – произведение двух аналитических функций, поэтому также аналитическая функция во всех точках комплексной плоскости z . Замкнутый контур интегрирования $|z| = 6$ – окружность радиуса 6 с центром в начале координат. Поэтому,

$$\oint_{|z|=6} z^5 \cdot \sin 3z dz = 0.$$

б) Подынтегральная функция $z^3 + \operatorname{ch} 2z$ – сумма двух аналитических на всей комплексной плоскости функций, следовательно, аналитическая. Для вычисления интеграла по не замкнутой кривой можно применить формулу (2.25).

$$\begin{aligned} \int_{MN} (z^3 + \operatorname{ch} 2z) dz &= \int_M^N (z^3 + \operatorname{ch} 2z) dz = \left(\frac{z^4}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2z \right) \Big|_{-i}^{1+i} = \\ &= \frac{(1+i)^4}{4} - \frac{(-i)^4}{4} + \frac{1}{2} (\operatorname{sh}(2+2i) - \operatorname{sh}(-i)) = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2+2i) + \operatorname{sh} i = \\ &= -1,25 + 0,5(\operatorname{sh} 2 \cdot \operatorname{ch} 2i + \operatorname{ch} 2 \cdot \operatorname{sh} 2i) + \operatorname{sh} i = -1,25 + 0,5(\operatorname{sh} 2 \cdot \cos 2 + \\ &+ i \operatorname{ch} 2 \cdot \sin 2) + i \sin 1 = (0,5 \cdot \operatorname{sh} 2 \cdot \cos 2 - 1,25) + i(0,5 \cdot \operatorname{ch} 2 \cdot \sin 2 + \sin 1). \end{aligned}$$

Теорема Коши для многосвязной области

Пусть многосвязная область ограничена внешним контуром C_0 и внутренними контурами C_1, C_2, \dots, C_n (рисунок 2.14). Пусть функция $f(z)$ является аналитической в многосвязной области и на контурах $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$. Все контуры соединим разрезами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, так, что область становится односвязной.

Граница односвязной области L составлена из замкнутых контуров и разрезов: $L = C_0 + \gamma_1 + C_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n + C_n$.

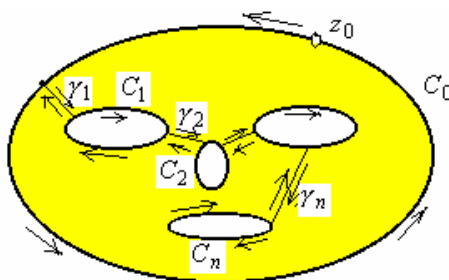


Рисунок 2.14 – Интеграл в многосвязной области

Из точки z_0 по границе L происходит интегрирование так, что при движению по L область остается слева. По теореме Коши для односвязной области, $\oint_L f(z)dz = 0$. Или,

$$\oint_{C_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz + \sum_{k=1}^n \int_{+\gamma_k} f(z)dz + \sum_{k=1}^n \int_{-\gamma_k} f(z)dz = 0.$$

Сумма каждой пары интегралов $\int_{+\gamma_k} f(z)dz + \int_{-\gamma_k} f(z)dz = 0$, поэтому

$$\oint_{C_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz = 0. \text{ Если в интегралах } \oint_{C_k} f(z)dz \text{ изменить}$$

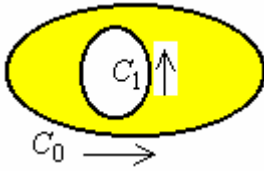
направление движения по контуру на противоположное, интегралы изменят знак. Получим (движение по каждому контуру происходит против часовой стрелки):

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz. \quad (2.26)$$

Тем самым доказана **теорема**:

Интеграл от аналитической функции $f(z)$ по внешнему контуру равен сумме интегралов по всем внутренним контурам.

В частном случае, если функция $f(z)$ является аналитической на контурах C_0 и C_1 (рисунок 2.15) и в двусвязной области между контурами, то из (2.26) при $n = 1$ получится:



$$\oint_{C_0} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz. \quad (2.27)$$

Рисунок 2.15 – Интеграл в двусвязной области

2.9 Интегральная формула Коши

2.9.1 Интегралы вида $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}$

Пусть в интеграле

$$I = \oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} \quad (2.28)$$

по замкнутому контуру C число n является целым положительным (если целое $n \leq 0$, то по теореме Коши $I = 0$). Если точка a лежит вне контура C , то по теореме Коши $I = 0$. Пусть контур C один раз обходит точку a против часовой стрелки. В силу формулы (2.27) и рисунка 2.15 величина интеграла (2.28) не зависит от вида контура C . Поэтому в качестве контура C можно взять окружность радиуса R с центром в точке a .

Уравнение такой окружности в комплексной форме имеет вид $z - a = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Отсюда $dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$. Сделаем подстановку в интеграле (2.28):

$$I = \oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi} d\varphi}{R^n e^{ni\varphi}} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi} d\varphi. \quad (2.29)$$

Если $n \neq 1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), то $I = \frac{i}{R^{n-1}} \cdot \frac{1}{i(1-n)} e^{i(1-n)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0$, так как

$e^{2\pi i(1-n)} = e^0 = 1$ (см. §2.6). Если $n = 1$, то из (2.29) следует:

$$I = \frac{1}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi} d\varphi = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \quad (2.30)$$

Вывод: интеграл (2.28) отличен от нуля только при $n = 1$ и если точка a находится внутри контура. Если контур C обходит k раз точку a в

положительном направлении, то $\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2k\pi i$. Если контур C обходит

k раз точку a в отрицательном направлении, то $\oint_C \frac{dz}{z-a} = -2k\pi i$.

2.9.2 Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z)$ - аналитическая на контуре C и в односвязной области D , ограниченной этим контуром, z_0 - фиксированная точка внутри контура C .

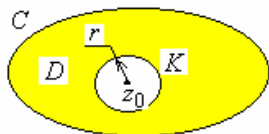
Интегральная формула Коши позволяет находить значение аналитической функции в любой точке z_0 области D , если известны значения этой функции на контуре C , ограничивающем область D :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{z-z_0}. \quad (2.31)$$

Доказательство

Из точки z_0 , как из центра проведем окружность K радиуса r (см. рисунок 2.16). Подынтегральная функция интеграла (2.31) аналитическая в области D , за исключением точки z_0 . В области между контурами C и K

функция аналитическая и в силу формулы (2.27) и рисунка 2.16



$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \oint_K \frac{f(z)dz}{z-z_0}.$$

Рисунок 2.16 – К выводу интегральной формулы Коши

Перепишем последнее равенство, прибавив в правой части и отняв интеграл

$$\begin{aligned} \oint_K \frac{f(z_0)dz}{z-z_0} : \quad \oint_C \frac{f(z)dz}{z-z_0} &= \oint_K \frac{f(z)dz}{z-z_0} - \oint_K \frac{f(z_0)dz}{z-z_0} + \oint_K \frac{f(z_0)dz}{z-z_0} = \\ &= \oint_K \frac{f(z_0)dz}{z-z_0} - \oint_K \frac{f(z_0) - f(z)}{z-z_0} dz. \end{aligned}$$

В интеграле $\oint_K \frac{f(z_0)dz}{z - z_0}$ величина $f(z_0)$ не зависит от переменной интегрирования. Тогда $\oint_K \frac{f(z_0)dz}{z - z_0} = f(z_0) \oint_K \frac{dz}{z - z_0} =$ (по формуле (2.30)) $= f(z_0) \cdot 2\pi i$. Итак,

$$\oint_K \frac{f(z_0)dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0). \quad (2.32)$$

К интегралу $\oint_K \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz$ применим свойства 4 и 5 из §2.7.

А именно:

$$\left| \oint_K \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \oint_K \left| \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} \right| |dz| \leq 2\pi r \cdot \max_{|z - z_0|} \frac{|f(z_0) - f(z)|}{|z - z_0|} =$$

$$= 2\pi \cdot \max |f(z_0) - f(z)|.$$

Так как функция $f(z)$ - непрерывная, радиус $r = |z - z_0|$ может быть сколь угодно мал, то при $r \rightarrow 0$ $\max |f(z_0) - f(z)| \rightarrow 0$.

Следовательно, интеграл $\oint_K \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz \rightarrow 0$. Окончательно,

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \oint_K \frac{f(z_0)dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0), \text{ откуда следует формула (2.31), что}$$

требовалось доказать.

Перепишем формулу (2.31) в виде

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0). \quad (2.33)$$

Интеграл по замкнутому контуру (2.33) равен произведению $2\pi i f(z_0)$.

Интегральная формула Коши в виде (2.33) используется при вычислении контурных интегралов.

Пример 2.9 Вычислить интеграл с помощью интегральной формулы

Коши:
$$\int_{|z+i|=1} \frac{e^{3z}}{(z+i)(z-2)} dz.$$

Решение

Контур интегрирования – окружность радиусом $R=1$ с центром в точке $(0,-1)$. Внутри контура находится точка $z_0 = -i$ в которой знаменатель подынтегральной функции превращается в нуль. Преобразуем подынтегральную функцию к виду $\frac{e^{3z}}{z+i} \cdot \frac{1}{z-2}$. Так как функция

$f(z) = \frac{e^{3z}}{z-2}$ аналитическая во всех точках внутри контура и на самом контуре, то можно применить формулу (2.33)

$$\begin{aligned} \int_{|z+i|=1} \frac{e^{3z}}{(z+i)(z-2)} dz &= 2\pi i \left(\frac{e^{3z}}{z-2} \right)_{z=-i} = 2\pi i \frac{e^{-3i}}{-i-2} = \\ &= \frac{2\pi \cdot i(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} e^{-3i} = \frac{-4\pi i - 2\pi}{5} (\cos(-3) + i \sin(-3)) = \\ &= -\frac{2\pi}{5} (1+2i)(\cos 3 - i \sin 3). \end{aligned}$$

2.9.3 Обобщенная интегральная формула Коши

С помощью формулы Коши найдем производную функции $f(z)$ в точке

z_0 . По определению производной $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$.

Или,
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - \Delta z} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right) =$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}.$$

Таким образом,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}.$$

Используя формулу для первой производной, можно найти формулу для 2-й производной и т.д. В общем виде

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (2.34)$$

Формула (2.34) называется обобщенной интегральной формулой Коши.

Вывод: аналитическая функция имеет аналитические производные любого порядка.

Перепишем формулу (2.34) в виде

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0). \quad (2.35)$$

Формула (2.35) используется для вычисления контурных интегралов.

Пример 2.10 Вычислить $\oint_C \frac{e^{2z} + z}{z^2(z+4)} dz$, где C – окружность $|z - 1| = 2$.

Решение

Один нуль знаменателя $z = 0$ расположен внутри контура интегрирования, другой $z = -4$ – вне контура. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{e^{2z} + z}{z^2(z+4)} = \frac{(e^{2z} + z)/(z+4)}{(z-0)^2}.$$

Функция $f(z) = \frac{e^{2z} + z}{z+4}$ аналитическая в круге $|z - 1| \leq 2$, точка $z_0 = 0$

принадлежит указанному кругу. Поэтому можно воспользоваться формулой (2.35) для случая $n = 1$:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{2z} + z}{z^2(z+4)} dz &= \oint_C \frac{(e^{2z} + z)/(z+4)}{z^2} dz = \\ &= \frac{2\pi}{1!} i \left(\frac{e^{2z} + z}{z+4} \right)' \Big|_{z=0} = 2\pi i \frac{(2e^{2z} + 1)(z+4) - (e^{2z} + z)}{(z+4)^2} \Big|_{z=0} = \frac{11}{8} \pi i. \end{aligned}$$

2.10 Ряды Тейлора

Теорема. Функция $f(z)$ представима рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (2.36)$$

в любом открытом круге с центром в точке a , в котором она аналитическая. Во всякой замкнутой области, принадлежащей этому кругу, ряд Тейлора сходится равномерно.

Если $a = 0$, ряд (2.36) называют также рядом *Маклорена*.

Разложения некоторых элементарных функций, данные формулами (2.8) – (2.12), являются рядами Тейлора для этих функций. Кроме того, ряды Тейлора

$$\begin{aligned} (1+z)^m &= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} z^n + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} z^n, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad (2.38)$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (2.40)$$

сходятся для $|z| < 1$. Способы получения этих разложений и свойства разложений такие же, как для функций действительной переменной (см. §1.10).

Пользуясь обобщенной интегральной формулой Коши, ряд Тейлора можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, \quad (2.41)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad r < R. \quad (2.42)$$

Здесь R – радиус сходимости ряда Тейлора (см. §2.3).

Радиус сходимости ряда Тейлора определяется расстоянием от точки a до ближайшей точки z , в которой $f(z)$ не аналитическая.

В качестве точки a в формуле (2.41) можно взять любую точку, в которой функция аналитическая. Разложение (2.41) называется разложением функции $f(z)$ в окрестности точки a . Если точка a является нулем функции кратности (порядка) k , то ряд Тейлора в её окрестности имеет вид:

$$f(z) = C_k(x-a)^k + C_{k+1}(x-a)^{k+1} + \dots, \quad \text{то есть}$$

$C_0 = C_1 = \dots = C_{k-1} = 0$. Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что если точка a является нулем функции кратности (порядка) k , то $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, но $f^{(k)}(a) \neq 0$.

Если $k = 1$, точка a называется *простым нулём* функции $f(z)$.

2.11 Ряды Лорана

Для функций, аналитических в кольцевых областях (см. рисунок 2.17) $r < |z-a| < R$, где $r \geq 0$, $R \leq \infty$, можно построить разложения по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$ вида

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n, \quad (2.43)$$

являющиеся обобщением тейлоровских разложений.

Ряд (2.43) называется рядом Лорана; при этом ряд

$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ называется правильной частью ряда Лорана, а ряд

$f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$ называется главной частью, при

этом $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

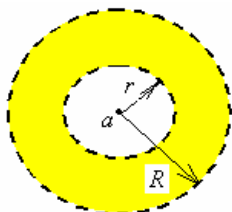


Рисунок 2.17 – Кольцевая область

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $r < |z - a| < R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана (2.43), коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad (r < \rho < R, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2.44)$$

Разложение функций в ряды Лорана, так же, как в ряды Тейлора, можно осуществить различными способами: используя разложения основных элементарных функций, дифференцируя или интегрируя известные разложения, представляя разлагаемую в ряд рациональную дробь суммой простейших дробей. Рассмотрим на примерах некоторые способы разложения в ряд.

Пример 2.11 Разложить в ряд по степеням $(z + 4)$ функцию

$$f(z) = z \cos \frac{z}{z+4}.$$

Решение. Преобразуем исходную функцию

$$\begin{aligned} f(z) &= z \cos \frac{z}{z+4} = [(z+4) - 4] \cos(1 - \frac{4}{z+4}) = \\ &= [(z+4) - 4] \cdot [\alpha \cos(\frac{4}{z+4}) + \beta \sin(\frac{4}{z+4})], \end{aligned}$$

где $\alpha = \cos 1$, $\beta = \sin 1$. Используем формулы (2.9), (2.10), в которых

вместо z подставляем $\frac{4}{z+4}$, тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+4) \left[\alpha - \frac{\alpha \cdot 4^2}{(z+4)^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{\alpha \cdot 4^4}{(z+4)^4 4!} - \dots + \beta \frac{4}{z+4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta \cdot 4^3}{(z+4)^3 \cdot 3!} + \dots \right] - 4 \left[\alpha - \frac{\alpha \cdot 4^2}{(z+4)^2 2!} + \frac{\alpha \cdot 4^4}{(z+4)^4 4!} - \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta \cdot 4}{z+4} - \frac{\beta \cdot 4^3}{(z+4)^3 \cdot 3!} + \frac{\beta \cdot 4^5}{(z+4)^5 \cdot 5!} - \dots \right] = (z+4)\alpha + (4\beta - 4\alpha) - \\ &\quad - \frac{1}{z+4} \left(\frac{\alpha \cdot 4^2}{2!} + \beta \cdot 4^2 \right) - \frac{1}{(z+4)^2} \left(\frac{\beta \cdot 4^3}{3!} - \frac{\alpha \cdot 4^3}{2!} \right) + \dots \end{aligned}$$

Полученный ряд является рядом Лорана для аналитической в кольце $0 < |z + 4| < \infty$ функции $f(z)$. Ряд содержит два члена правильной и бесконечное число членов главной части.

Пример 2.12 Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \frac{2}{z(z+2)}$ во всех круговых кольцах аналитичности.

Решение

Функция имеет две особые точки $z = 0$ и $z = -2$ (точки, в которых функция не определена). Следовательно, имеется два «кольца» с центром в точке $z = 0$, в каждом из которых функция аналитическая: 1) круг с удаленным центром $0 < |z| < 2$; 2) внешность круга $|z| > 2$ (см. рисунок 2.18).

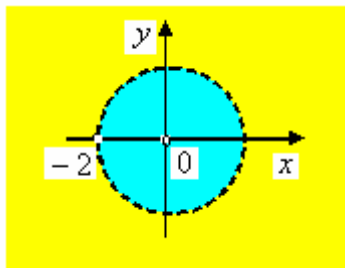


Рисунок 2.18 – К примеру 2.12

Разложение функции в ряд Лорана получим, применяя формулу (2.40). Функцию $f(z)$ представим в виде суммы двух элементарных дробей (см. [4] - Лекции за 2 семестр, §1.7): $\frac{2}{z(z+2)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}$.

$$\begin{aligned} \text{В области } 0 < |z| < 2, \text{ когда } \left| \frac{z}{2} \right| < 1 \text{ дробь } -\frac{1}{z+2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{2}\right)} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда функция } \frac{2}{z(z+2)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ содержит один член главной части, $C_{-1} = 1$, и бесконечное множество членов правильной части.

$$\text{В области } |z| > 2, \text{ когда } \left| \frac{2}{z} \right| < 1, \text{ дробь } -\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{z}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \frac{2^3}{z^3} + \dots \right) = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{2^2}{z^3} + \dots \quad \text{Тогда функция}$$

$$\frac{2}{z(z+2)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{2^2}{z^3} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}. \quad \text{Ряд Лорана}$$

содержит бесконечное множество членов главной части.

2.12 Изолированные особые точки

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $w = f(z)$, если $f(z)$ – однозначная и аналитическая функция в круговом кольце $0 < |z - z_0| < \delta$ (т.е. кроме самой точки z_0).

Различают три типа изолированных особых точек. Точка называется:

- *устранимой*, если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$;
- *полюсом*, если предел равен бесконечности, то есть $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;
- *существенно особой*, если предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует.

Характер изолированной особой точки $z = z_0 \neq \infty$ функции $f(z)$ может быть установлен по количеству членов главной части ряда Лорана этой функции в окрестности особой точки z_0 (количество членов правильной части во внимание не принимается).

Точка $z = z_0$ будет *устранимой*, если ряд Лорана в окрестности особой изолированной точки не содержит членов главной части:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n.$$

Действительно, в этом случае

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 \neq \infty.$$

Точка $z = z_0$ является *полюсом*, если главная часть ряда Лорана содержит конечное число членов, причем порядок полюса определяется номером старшего отрицательного члена (полюс 1-го порядка называется простым):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^m \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

В этом случае предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^m \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} = C_0 + \infty = \infty.$$

То, что точка z_0 является полюсом для функции $f(z)$, можно определить и по виду функции, а именно:

а) в случае полюса порядка m функция $f(z)$ может быть представлена в

виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$, где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке

$z = z_0$ и $\varphi(z_0) \neq 0$;

б) если для аналитической функции $\varphi(z)$ число z_0 есть нуль порядка m ,

то для функции $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ это число является *полюсом порядка m* ;

в) если $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены, не имеющие общих

корней, то нули многочлена $Q(z)$ являются полюсами $f(z)$, причем порядок полюсов совпадает с кратностью соответствующих нулей многочлена $Q(z)$.

Точка $z = z_0$ является *существенно особой*, если ряд Лорана содержит бесконечное число членов главной части:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

В этом случае предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Предел не существует. В данном случае имеет место неопределенность, связанная с тем, что суммируется бесконечно большое число бесконечно больших величин.

Пример 2.13 Определить тип особой точки для функций

$$\text{a) } \frac{e^{z^2} - 1}{e^{2z} - \cos z + z^2 - 2z}; \quad \text{b) } \frac{4z + 1}{z^2(z - 1)}.$$

Решение

а) Особая точка $z = 0$. Вычисляем предел, раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{e^{2z} - \cos z + z^2 - 2z} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2ze^{z^2}}{2e^{2z} + \sin z + 2z - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^{z^2} + 4z^2e^{z^2}}{4e^{2z} + \cos z + 2} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Точка $z = 0$ является устранимой особой точкой.

б) Точка $z = 0$ является полюсом второго порядка, так как для многочлена $z^2(z - 1)$ она является нулем кратности 2. При этом числитель $(4z + 1) \neq 0$ для $z = 0$. Точка $z = 1$ – простой полюс.

Пример 2.14 Определить тип особой точки для $f(z) = z \cos \frac{z}{z + 4}$.

Решение

В примере 2.11 получен ряд Лорана для этой функции в окрестности изолированной особой точки $z = -4$. Ряд содержит бесконечное число членов главной части, следовательно, $z = -4$ – существенно особая точка.

2.13 Бесконечно удаленная особая точка

Точка $z = \infty$ (бесконечно удаленная) для любой функции $f(z)$ является особой, так как понятие аналитичности в этой точке не определено. Не всякая бесконечно удаленная особая точка является изолированной.

Если в кольце $R < |z| < \infty$, называемом *окрестностью точки* $z = \infty$, функция $f(z)$ – однозначная аналитическая (не содержит особых точек), то *бесконечно удаленную особую точку называют изолированной*.

Как и изолированные особые точки на плоскости, изолированная точка $z = \infty$ может быть:

- устранимой особой, если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$;
- полюсом, если предел равен бесконечности $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$;
- существенно особой, если предел $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ не существует.

Окрестность бесконечно удаленной изолированной точки, кольцо $R < |z| < \infty$, имеет центр $z = 0$, поэтому ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}.$$

В случае устранимой особой точки ряд Лорана не имеет членов с положительными степенями z . В этом случае предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} C_0 + \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n} = C_0.$$

В случае полюса порядка m ряд Лорана имеет конечное число членов правильной части. В этом случае существует предел, равный бесконечности:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m C_n z^n + \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n} = C_0 + \infty = \infty.$$

В случае существенно особой точки $z = \infty$ ряд Лорана имеет бесконечное число членов правильной части. В этом случае не существует предела

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n + \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}.$$

Пример 2.14 Определить типы всех особых точек для функций

$$\text{а) } f(z) = \frac{4z^2 + z - 2}{z^3 + 2z^2 - 3z}; \quad \text{б) } f(z) = z^2 - z + \cos \frac{1}{z}.$$

Решение

а) Перепишем данную функцию так:

$$f(z) = \frac{4z^2 + z - 2}{z(z-1)(z+3)}.$$

Изолированные особые точки этой функции $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 3$. Так как эти точки – простые нули знаменателя и не нули числителя, то они являются простыми полюсами функции. Область $|z| > 3$, где нет особых точек на плоскости, является окрестностью бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2 + z - 2}{z^3 + 2z^2 - 3z} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4/z + 1/z^2 - 2/z^3}{1 + 2/z - 3/z^2} = 0.$$

Функция имеет в точке $z = \infty$ устранимую особенность. Такие функции, с устранимой особенностью при $z = \infty$ считают аналитическими в бесконечности.

б) Функция $f(z) = z^2 - z + \cos \frac{1}{z}$ аналитическая во всех точках плоскости за исключением $z = 0$. Область $0 < |z| < \infty$ является как окрестностью точки $z = \infty$, так и окрестностью особой точки $z = 0$; разложим в этой области функцию в ряд Лорана (используем формулу 2.10):

$$f(z) = z^2 - z + 1 - \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^4 4!} - \dots$$

Точка $z = \infty$ является полюсом 2-го порядка, так как высшая положительная степень z равна двум. Точка $z = 0$ является существенно особой, так как ряд Лорана содержит бесконечное множество членов главной части.

2.14 Вычеты и методы их вычисления

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке a (обозначается $\text{res } f(a)$) называется число

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (2.45)$$

где γ – окружность малого радиуса $|z - a| = \rho$. Величина вычета не зависит от радиуса ρ для достаточно малых значений ρ .

Из формул (2.44) для коэффициентов ряда Лорана при $n = -1$ вытекает, что

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = C_{-1}, \quad (2.46)$$

т. е. *вычет функции $f(z)$ в особой точке a равен коэффициенту номера минус один лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки a .*

Отсюда следует, что в *устранимой* особой точке вычет функции всегда равен нулю, так как ряд Лорана в окрестности *устранимой* особой точки не имеет членов главной части.

Если особая точка – полюс порядка m , ряд Лорана в её окрестности имеет m членов главной части:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^m \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Из последней формулы можно определить коэффициент C_{-1} . Для этого равенство умножим на $(z-a)^m$, затем $(m-1)$ раз продифференцируем по z , а потом вычислим предел при $z \rightarrow a$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^{n+m} + \\ &+ \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (C_{-1}(z-a)^{m-1} + C_{-2}(z-a)^{m-2} + \dots + C_{-m}). \end{aligned}$$

Отсюда, $\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] = (m-1)! C_{-1}$. Окончательно, вычет в *полюсе* порядка m можно определить по формуле

$$C_{-1} = \operatorname{res} f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]. \quad (2.47)$$

Если $m=1$, формула для вычета в простом полюсе принимает вид

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)]. \quad (2.48)$$

Если функция $f(z)$ определена как частное двух аналитических в точке a функций $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ (a – нуль функции $\psi(z)$ первого порядка), то формулу (2.48) можно преобразовать:

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{(\psi(z) - \psi(a))/(z-a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Таким образом, если функция $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ имеет простой полюс $z = a$, то

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (2.49)$$

Вычет в *существенно* особой точке определяется только по коэффициенту C_{-1} в лорановском разложении.

Пример 2.15 Вычислить вычеты в изолированных особых точках следующих функций: а) $\frac{z+2}{z^2(z-3)}$; б) $\frac{z}{\sin z}$; в) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

Решение

а) Особыми точками функции $(z+2)/(z^2(z-3))$ является простой полюс $z_1 = 3$ и полюс второго порядка $z_2 = 0$. Для точки $z_1 = 3$ по формуле (2.48) находим

$$\operatorname{res}_{z=3} \frac{z+2}{z^2(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{z+2}{z^2(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z+2}{z^2} = \frac{5}{9}.$$

Для точки $z_2 = 0$ при $m = 2$ по формуле (2.47) имеем

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{z+2}{z^2(z-3)} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{z+2}{z^2(z-3)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-3-z-2}{(z-3)^2} = -\frac{5}{9}.$$

б) Для функции $z/\sin z$ особыми точками являются точки $z_k = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Точка $z_0 = 0$ – устранимая особая точка, так как $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$. Поэтому

$$\operatorname{res}_{z=0} (z/\sin z) = 0.$$

Точки $z_k = k\pi (k = \pm 1; \pm 2; \dots)$ для данной функции являются простыми полюсами. Для вычисления вычетов применяем формулу (2.49):

$$\operatorname{res}_{z=k\pi} \frac{z}{\sin z} = \frac{z}{(\sin z)'} \Big|_{z=k\pi} = \frac{z}{\cos z} \Big|_{z=k\pi} = (-1)^k k\pi.$$

с) Данная функция имеет существенно особую точку $z = 0$, поэтому вычет в ней определяем по коэффициенту C_{-1} разложения в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots \right) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{z 3!} + \frac{1}{z^2 4!} + \dots$$

$$C_{-1} = \operatorname{res}_{z=0} z^2 e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Вычетом функции в бесконечности (обозначается $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$) называют число, определяемое выражением

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z) dz,$$

где γ – достаточно большая окружность с уравнением $|z| = \rho, \rho > r$, проходимая по часовой стрелке.

Вычет функции в бесконечности равен минус коэффициенту при z^{-1} ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной особой точки:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}. \quad (2.50)$$

2.15 Теоремы Коши о вычетах

Применение теории вычетов основывается на следующих теоремах Коши о вычетах.

Основная теорема Коши о вычетах. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области \bar{D} , ограниченной контуром C , за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n; (a_k \in D)$. Тогда интеграл по замкнутому контуру C равен умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов подынтегральной функции во всех особых точках, расположенных внутри контура:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k). \quad (2.51)$$

Доказательство. С центром в каждой точке a_1, a_2, \dots, a_n проведем окружности C_1, C_2, \dots, C_n малых радиусов так, чтобы окружности не пересекались между собой и с контуром C (рисунок 2.19). По теореме

Коши для многосвязных областей $\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz$. Умножим и

разделим каждый интеграл в левой части на $2\pi i$:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z)dz.$$

Так как $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z)dz = \operatorname{res} f(a_k)$, то справедлива формула (2.51).

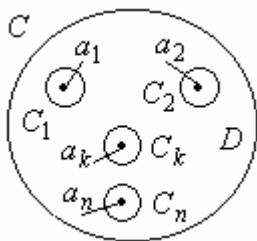


Рисунок 2.19 – Теорема Коши о вычетах

Теорема Коши обо всех вычетах на плоскости. Если функция $f(z)$ аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = \infty$, то сумма всех вычетов функции, включая и вычет в бесконечности, равна нулю:

$$\operatorname{res} f(a_1) + \dots + \operatorname{res} f(a_{n-1}) + \operatorname{res} f(\infty) = 0. \quad (2.52)$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Пример 2.16 Вычислить вычеты относительно бесконечно удаленной точки функций:

$$\text{a) } f(z) = \frac{z^2 + 2z - 1}{z - 2i}; \quad \text{b) } f(z) = \frac{\sin z}{z^4 - 1}.$$

Решение. а) Особая точка для данной функции $z = 2i$, она лежит на окружности $|z| = 2$, следовательно окрестностью точки $z = \infty$ является

область $|z| > 2$. В этой области разложим функцию в ряд Лорана по степеням z , разделив числитель на знаменатель:

$$\frac{z^2 + 2z - 1}{z - 2i} = z + (2 + 2i) + \frac{1}{z}(-5 + 4i) + \frac{1}{z^2}(-8 - 10i) + \dots$$

Из разложения видим, что $z = \infty$ является простым полюсом и, согласно формуле (2.50), $\operatorname{res}_{z=\infty} = -C_{-1} = 5 - 4i$.

б) Точки $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$ являются простыми полюсами данной функции. По формуле (2.48) определяем вычеты в этих точках:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} = \frac{\sin z}{(z^4 - 1)'} \bigg|_{z=a} = \frac{\sin z}{4z^3} \bigg|_{z=a}$$

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{\sin 1}{4}, \quad \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \frac{\sin 1}{4}, \quad \operatorname{res}_{z=i} f(z) = \operatorname{res}_{z=-i} f(z) = -\frac{\operatorname{sh} 1}{4}.$$

Затем применяем формулу (2.52):

$$\operatorname{res} f(1) + \operatorname{res} f(-1) + \operatorname{res} f(i) + \operatorname{res} f(-i) + \operatorname{res} f(\infty) = 0, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res} f(1) - \operatorname{res} f(-1) - \operatorname{res} f(i) - \operatorname{res} f(-i).$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{\sin z}{z^4 - 1} = 2 \frac{\operatorname{sh} 1}{4} - 2 \frac{\sin 1}{4} = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} 1 - \sin 1).$$

Пример 2.17 С помощью теорем Коши о вычетах вычислить интегралы:

$$\text{а) } \oint_{|z+2i|=2} \frac{dz}{(z-2)(z^2+1)}; \quad \text{б) } \oint_{|z|=2} \frac{z^5 + 2z^3 - 1}{z^4 + 2} dz; \quad \text{в) } \oint_{|z-2|=2} z \sin \frac{i}{z-2} dz.$$

Решение

а) Особые точки подынтегральной функции $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$

Внутри контура $|z + 2i| = 2$ лежит только точка $z = -i$ — простой полюс.

$$\operatorname{res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{1}{(z-2)(z+i)(z-i)} = \frac{1}{(-i-2)(-2i)} = -\frac{1}{10} - \frac{2}{5}i.$$

$$\oint_{|z+2i|=2} \frac{dz}{(z-2)(z^2+1)} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-i} f(z) = 2\pi i \left(-\frac{1}{10} - \frac{2}{5}i\right) = -\frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{5}i.$$

б) Особыми точками подынтегральной функции z_1, z_2, z_3, z_4 являются корни уравнения $z^4 + 2 = 0$ (точки лежат на окружности $|z| = \sqrt[4]{2}$, расположенной внутри контура интегрирования). На основании формул (2.51), (2.52) получаем

$$J = \oint_{|z|=2} \frac{z^5 + 2z^3 - 1}{z^4 + 2} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{z=z_k} \frac{z^5 + 2z^3 - 1}{z^4 + 2} = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^5 + 2z^3 - 1}{z^4 + 2}.$$

Вычет в точке $z = \infty$ определим, разложив подынтегральную функцию в ряд Лорана при $|z| > \sqrt[4]{2}$ делением числителя на знаменатель:

$$\frac{z^5 + 2z^3 - 1}{z^4 + 2} = z + \frac{2}{z} - \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \frac{4}{z^5} + \dots$$

Коэффициент при $1/z$ равен 2, следовательно $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -2$,

$$J = 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 4\pi i.$$

с) Подынтегральная функция имеет особую точку $z = 2$, содержащуюся внутри контура $|z - 2| = 2$, поэтому $I = \oint_{|z-2|=2} z \sin \frac{i}{z-2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2} f(z)$.

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$:

$$\begin{aligned} f(z) &= z \sin \frac{i}{z-2} = (z-2+2) \sin \frac{i}{z-2} = \\ &= (z-2) \left(\frac{i}{z-2} - \frac{i^3}{(z-2)^3 3!} + \frac{i^5}{(z-2)^5 5!} + \dots \right) + \\ &+ 2 \left(\frac{i}{z-2} - \frac{i^3}{(z-2)^3 3!} + \frac{i^5}{(z-2)^5 5!} + \dots \right) = i + \frac{2i}{z-2} + \frac{i}{6(z-2)^2} + \frac{i}{3(z-2)^3} + \dots \end{aligned}$$

Из разложения видно, что $z = 2$ является существенно особой точкой и $\operatorname{res}_{z=2} f(z) = 2i$. Следовательно, $I = 2\pi i \cdot 2i = -4\pi$.

3. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1 Функция оригинал и изображение по Лапласу.

Линейные свойства изображения

Функцией - оригиналом называют функцию $f(t)$ действительного аргумента t , удовлетворяющую условиям:

- 1) для всех отрицательных значений аргумента функция тождественно равна нулю, т.е. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
- 2) функция $f(t)$ при $t > 0$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие постоянные $M > 0$ $S_0 \geq 0$, что

$$|f(t)| \leq M e^{S_0 t} \text{ при } t > 0;$$

- 3) на любом конечном отрезке положительной полуоси Ot функция $f(t)$ и ее производные достаточно высокого порядка непрерывны или имеют конечное число разрывов 1-го рода.

Простейшей функцией - оригиналом является единичная функция Хевисайда

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Если функция $f(t) = \cos \omega t$ не удовлетворяет условию 1, то произведение $f(t)\Phi(t) = \Phi(t)\cos \omega t$ уже ему удовлетворяет, т.е. будет оригиналом.

Для простоты записи множитель $\Phi(t)$ чаще всего опускается, например, пишут 1 вместо $\Phi(t)$, $\sin \omega t$ вместо $\Phi(t)\sin \omega t$ и т.д.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу (преобразованием по Лапласу) называют функцию комплексной переменной $p = s + i\sigma$, определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (3.2)$$

Интеграл (3.2) называют *интегралом Лапласа*.

То, что функция комплексной переменной $F(p)$ является изображением по Лапласу функции действительного аргумента $f(t)$, обозначается $F(p) = L\{f(t)\}$. Применяются также обозначения $f(t) \doteq F(p)$ (оригиналу $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$), а также $f(t) \leftarrow F(p)$ или $F(p) \rightarrow f(t)$.

Преобразование, основанное на интеграле Лапласа (3.2), обладает линейными свойствами.

1. Преобразование суммы функций равно сумме преобразований этих функций $L\{f_1(t) + f_2(t)\} = L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\}$;

2. Постоянный множитель можно выносить за знак преобразования:

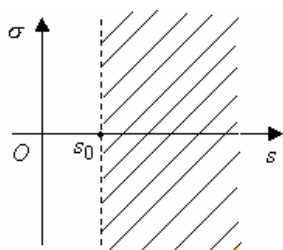
$$L\{cf(t)\} = cL\{f(t)\}, \text{ где } c = \text{const.}$$

Из этих двух свойств следует, что линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация их преобразований:

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_m f_m(t)\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\} + \dots + c_m L\{f_m\}. \quad (3.3)$$

3.2 Теорема о аналитичности изображения

Теорема. Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\text{Re } p = s > s_0$, где s_0 - показатель роста $f(t)$, и является в этой области аналитической функцией.



Доказательство

Доказательство теоремы сводится:

- 1) к доказательству существования несобственного интеграла (3.2);
- 2) к доказательству существованию производной от этого интеграла.

Интеграл абсолютно сходится, так как мажорируется сходящимся интегралом:

Рисунок 3.1 – К теореме об аналитичности изображения

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| \cdot |e^{-pt}| dt \leq \int_0^{\infty} M e^{s_0 t} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = M \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{s-s_0} e^{-(s-s_0)t} \right) \Big|_0^b = \frac{M}{s-s_0}. \quad (3.3)$$

Дифференцируем интеграл (3.2) по параметру: $F'(p) = \int_0^{\infty} f(t)(-t)e^{-pt} dt$.

Полученный интеграл также сходится, так как,

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)te^{-pt} dt \right| \leq M \int_0^{\infty} t \cdot e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{(s-s_0)^2}.$$

Следовательно, функция $F(p)$ в любой точке полуплоскости $s > s_0$ существует и дифференцируема, то есть аналитическая.

Примечание – из неравенства (3.3) следует, что при $s \rightarrow +\infty$ изображение стремится к нулю, $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(p) = 0$.

3.3 Непосредственное преобразование Лапласа некоторых функций

3.3.1 Изображение по Лапласу функции $\Phi(t)$, e^{at}

Изображение указанных функций определяем, вычисляя для них интеграл Лапласа. Изображение функции Хевисайда:

$$\begin{aligned} L\{\Phi(t)\} &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-pb} + \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p}, \quad \Phi(t) \doteq \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Изображение показательной функции:

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(a-p)t} dt =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \Big|_0^b = \frac{1}{p-a}, \text{ так как } \operatorname{Re}(a-p) < 0.$$

Таким образом, $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}.$

3.3.2 Изображение по Лапласу функций $\sin bt$, $\cos bt$, $\operatorname{sh} bt$, $\operatorname{ch} bt$

При определении изображения указанных функций используем полученное соотношение $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$, формулы (2.11), (2.12), (2.15), (2.16) из §2.4 и линейные свойства преобразования Лапласа.

Из формулы (2.15) $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ следует:

$$\begin{aligned} \sin bt &= \frac{1}{2i}(e^{ibt} - e^{-ibt}). \text{ Тогда } L\{\sin bt\} = \frac{1}{2i}(L\{e^{ibt}\} - L\{e^{-ibt}\}) = \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p-ib} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p+ib} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{p+ib - p+ib}{p^2 + b^2} = \frac{b}{p^2 + b^2} \end{aligned}$$

Таким образом, $\sin bt \doteq \frac{b}{p^2 + b^2}.$

Аналогичным образом определяются изображения:

$$\cos bt \doteq \frac{p}{p^2 + b^2}, \quad \operatorname{sh} bt \doteq \frac{b}{p^2 - b^2}, \quad \operatorname{ch} bt \doteq \frac{p}{p^2 - b^2}.$$

Пример 3.1 Определить изображение по Лапласу линейной комбинации функций: $f(t) = 4e^{-2t} + 3 \cos 5t - 7 \operatorname{sh} t + 0,5 \sin 3t - 0,7 \operatorname{ch} 8t + 12.$

Решение

Используем линейные свойства преобразования Лапласа

$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_m f_m(t)\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\} + \dots + c_m L\{f_m\}$ и полученные формулы изображений.

$$\begin{aligned}
L\{f(t)\} &= 4 \cdot L\{e^{-2t}\} + 3 \cdot L\{\cos 5t\} - 7 \cdot L\{\text{sh}t\} + 0,5 \cdot L\{\sin 3t\} - \\
&\quad - 0,7 \cdot L\{\text{ch}8t\} + 12 \cdot L\{1\} = \\
&= 4 \cdot \frac{1}{p+2} + 3 \cdot \frac{p}{p^2+5^2} - 7 \cdot \frac{1}{p^2-1} + 0,5 \cdot \frac{3}{p^2+3^2} - \\
&\quad - 0,7 \cdot \frac{p}{p^2-8^2} + 12 \cdot \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

3.4 Теоремы преобразования Лапласа

1. **Теорема подобия.** Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то для любого постоянного $\alpha > 0$

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad (3.4)$$

Доказательство. Определим интеграл Лапласа от функции $f(at)$:

$$\begin{aligned}
L\{f(at)\} &= \int_0^{\infty} f(at) \cdot e^{-pt} dt = (\text{пусть } at = t_1, \quad t = \frac{t_1}{a}, \quad dt = \frac{1}{a} dt_1) = \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(t_1) \cdot e^{-\frac{p}{a}t_1} dt_1 = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \text{ что требовалось доказать.}
\end{aligned}$$

2. **Теорема дифференцирования оригинала.** Допустим, что производная оригинала $f(t)$ также является оригиналом. Тогда, если $L\{f(t)\} = F(p)$, то

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0). \quad (3.5)$$

Доказательство

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \left(\begin{array}{l} U = e^{-pt}, \quad dU = -pe^{-pt} dt \\ dV = f'(t) dt, \quad V = f(t) \end{array} \right) =$$

(применена формула интегрирования по частям)

$$= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + p \cdot F(p), \quad \text{ч.т.д.}$$

Методом индукции на основании формулы (3.5) получены формулы изображения высших производных:

$$L\{f''(t)\} = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0); \quad (3.6)$$

$$L\{f'''(t)\} = p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0); \quad (3.7)$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - (p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)). \quad (3.8)$$

Пример 3.2 Определить изображение $\cos \omega t$, используя теорему о дифференцировании оригинала.

Решение: так как $\cos \omega t = \frac{1}{\omega} (\sin \omega t)'$, и $\sin \omega \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, $\sin 0 = 0$,

то по формуле (3.5) получим:

$$L\{\cos \omega t\} = \frac{1}{\omega} L\{\sin' \omega t\} = \frac{1}{\omega} \left(p \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} - 0 \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

3. Теорема дифференцирования изображения. Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\{-tf(t)\} = F'(p)$, т.е. дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала. В общем случае,

$$F^{(n)}(p) = L\{(-t)^n f(t)\}. \quad (3.9)$$

Действительно, так как изображение $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > s_0$ является аналитической функцией, то её можно дифференцировать по p сколько угодно раз:

$$\begin{aligned} F'(p) &= \left(\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right)' = - \int_0^\infty t \cdot f(t) e^{-pt} dt, \\ F''(p) &= \left(\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right)'' = \int_0^\infty t^2 \cdot f(t) e^{-pt} dt, \dots, \\ F^{(n)}(p) &= \left(\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right)^{(n)} = (-1)^n \int_0^\infty t^n \cdot f(t) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Пример 3.3 Определить изображения функций: t, t^2, \dots, t^n .

Решение: так как $1 \doteq \frac{1}{p}$, то $L\{-t\} = \left(\frac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2}$, $t \doteq \frac{1}{p^2}$;

$$L\{t^2\} = \left(\frac{1}{p}\right)'' = \frac{2}{p^3}, \quad L\{-t^3\} = -\frac{2 \cdot 3}{p^4}, \quad t^3 \doteq \frac{3!}{p^4};$$

в общем случае $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$.

4. Теорема интегрирования оригинала Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (3.10)$$

Доказательство

Обозначим $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Функция $g(t)$ - оригинал, так как:

1) при $t < 0$ функция $g(t) = 0$;

2) если $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, то $|g(t)| < \int_0^t Me^{s_0 \tau} d\tau = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1)$;

3) интегрирование «сглаживает» функцию, например, если функция $f(t)$ имеет разрыв с конечным скачком, то функция $g(t)$ будет уже непрерывной.

Из зависимости $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ следует: $g'(t) = f(t)$. Последнее

равенство преобразуем по Лапласу: $pG(p) - g(0) = F(p)$. Но $g(0) = 0$, следовательно, $G(p) = \frac{F(p)}{p}$, что и утверждает формула (3.10).

Пример 3.4 Найти изображение функции $\int_0^t e^{\tau} d\tau$.

Решение: так как $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$, то по формуле (3.10) $\int_0^t e^\tau d\tau \doteq \frac{1}{p(p-1)}$.

5. Теорема интегрирование изображения. Интегрирование изображения равносильно делению на t оригинала (если существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(t)}{t}:$$

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(p) dp. \quad (3.11)$$

Доказательство

Имеем $\int_p^\infty F(p) dp = \int_p^\infty dp \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$. Предполагая, что путь

интегрирования $[p; \infty)$ лежит весь в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, получим оценку внутреннего интеграла:

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}.$$

Интеграл равномерно сходится относительно p . Поэтому можно изменить

порядок интегрирования: $\int_p^\infty F(p) dp = \int_0^\infty f(t) dt \int_p^\infty e^{-pt} dp =$

$$= \int_0^\infty f(t) dt \left(-\frac{1}{t} e^{-pt} \Big|_p^\infty \right) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f(t) e^{-pt} dt. \text{ Так как } \frac{f(t)}{t} - \text{оригинал, то}$$

последний интеграл сходится. Теорема (3.11) доказана.

Пример 3.5 Найдем изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Так как $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$, то по формуле (3.11) получаем:

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$$

6. Теорема смещения. При умножении оригинала $f(t)$ на e^{at} , где a - любое вещественное или комплексное число, изображение получает смещение аргумента на a :

$$e^{at} f(t) \doteq F(p-a). \quad (3.12)$$

Доказательство

Из оценки $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ следует $|e^{at} \cdot f(t)| < Me^{(s_0 + \operatorname{Re} a)t}$ при $t > 0$.

Следовательно, произведение $e^{at} f(t)$ - оригинал.

$$e^{at} f(t) \doteq \int_0^{\infty} f(t) e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt.$$

В последнем интеграле аргумент изображения p заменен на $(p-a)$, следовательно, $e^{at} f(t) \doteq F(p-a)$.

Пример 3.6 Ранее, в §3.3 и в настоящем параграфе найдены изображения функций $\sin bt$, $\cos bt$, t^n . По формуле (3.12) находим:

$$e^{at} \cdot \sin bt \doteq \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}; \quad e^{at} \cdot \cos bt \doteq \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2};$$

$$e^{at} \cdot t^n \doteq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

7. Теорема запаздывания

На рисунке 3.2a показан график функции Хевисайда $y = \Phi(t)$. На рисунке 3.2b - график функции Хевисайда $y = \Phi(t-\tau)$, «включение» которой происходит с запаздыванием на величину τ .

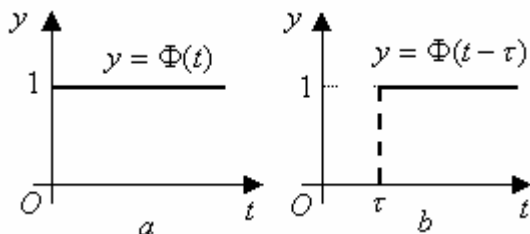


Рисунок 3.2 – Графики функции Хевисайда

Считая функцию, например, $y = \sin(t)$, оригиналом, мы опускаем при её написании множитель $\Phi(t)$ (см. §3.1). Но если та же функция $y = \sin(t)$ «включается» с запаздыванием на величину τ , то при её записи функция Хевисайда должна обязательно присутствовать:

$$y = \Phi(t - \tau) \cdot \sin(t - \tau).$$

Теорема. Если $f(t) \doteq F(p)$, то для любого положительного τ

$$\Phi(t - \tau) \cdot f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p) \quad (3.13)$$

("включение" оригинала с запаздыванием на τ равносильно умножению её изображения на $e^{-p\tau}$).

Доказательство. $L\{\Phi(t - \tau) \cdot f(t - \tau)\} = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt$. В нижнем пределе интеграла стоит τ , так как при $t < \tau$ функция $f(t - \tau) \equiv 0$. Пусть

$$\begin{aligned} t - \tau = t_1, \quad dt = dt_1. \text{ Тогда } \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-p(t_1 + \tau)} dt_1 = \\ &= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = e^{-p\tau} \cdot F(p), \text{ что требовалось доказать.} \end{aligned}$$

Из теоремы следует: так как $L\{\Phi(t)\} = \frac{1}{p}$, то изображение единичной функции Хевисайда с запаздывающим аргументом

$$L\{\Phi(t - \tau)\} = e^{-p\tau} \cdot \frac{1}{p}.$$

Функция Хевисайда с запаздыванием применяется для записи кусочно-аналитического оригинала и определения его изображения.

Пример 3.7 Функция - оригинал задана в виде

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, 1) \\ \sin(t - 1)\Phi(t - 1), & \text{если } t \geq 1. \end{cases}$$

Выписать функцию одним выражением и найти её изображение.

Решение

График функции изображен на рисунке 3.3. Запись функции одним выражением: $f(t) = t \cdot \Phi(t) - t \cdot \Phi(t-1) + \sin(t-1)\Phi(t-1)$.

Чтобы можно было применить формулу (3.13), второе слагаемое в последнем выражении преобразуем:

$$-t \cdot \Phi(t-1) = -(t-1+1)\Phi(t-1) = -(t-1)\Phi(t-1) - \Phi(t-1). \text{ Тогда}$$

$$f(t) = t \cdot \Phi(t) - (t-1)\Phi(t-1) - \Phi(t-1) + \sin(t-1)\Phi(t-1).$$

Применим к последнему выражению формулу (3.13):

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{p^2} - e^{-p} \cdot \frac{1}{p^2} - e^{-p} \frac{1}{p} + e^{-p} \frac{1}{p^2 + 1}.$$

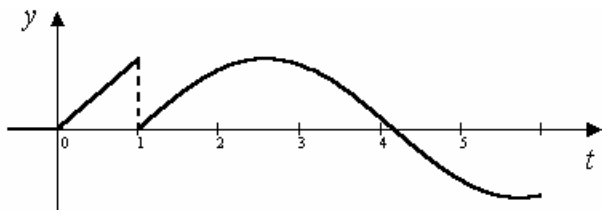


Рисунок 3.3 – График функции в примере 3.7

8. Теорема умножения. Интегралы Дюамеля

Если $F(p) \doteq f(t)$, $G(p) \doteq g(t)$, то произведение двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ также является изображением, причем

$$F(p) \cdot G(p) \doteq \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau. \quad (3.14)$$

Доказательство

Интеграл в правой части соотношения (3.14) является оригиналом, так свойства 1-е и 3-е очевидны (см. теорему интегрирования оригинала). Докажем свойство 2-е. Пусть s_0 - число, наибольшее из показателей роста оригиналов $f(t)$, $g(t)$. Тогда

$$\left| \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right| < M \left| \int_0^t e^{s_0 \tau} \cdot e^{s_0(t-\tau)} d\tau \right| = M \left| \int_0^t e^{s_0 t} d\tau \right| = M t e^{s_0 t}.$$

Но $t < e^{\varepsilon t}$, где $\varepsilon > 0$ - малое положительное число. Следовательно,

$$\left| \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right| < Me^{(s_0+\varepsilon)t}, \text{ т.е. выполняется 2-е свойство оригинала.}$$

Изображение интеграла

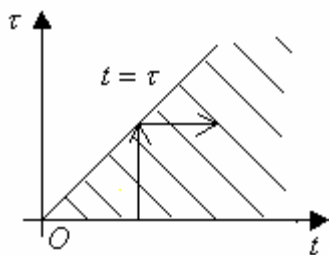
$$\int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)d\tau \doteq \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \text{является} \quad \text{двойным}$$

интегралом, область интегрирования которого показана на рисунке 3.4 заштрихованным сектором. При фиксированном значении t интегрирование идет по переменной τ от нуля до бесконечности. Так как при $\operatorname{Re} p > s_0$ интеграл Лапласа абсолютно сходится, то в нем можно изменить порядок интегрирования.

$$\int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-pt} dt =$$

(обозначим $t - \tau = t_1$, $dt = dt_1$, тогда)=

$$= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty g(t_1) \cdot e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty g(t_1)e^{-pt_1} dt_1 = \\ = F(p) \cdot G(p), \text{ что требовалось доказать.}$$



$$\text{Интеграл} \quad \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)d\tau$$

называется *свёрткой функций* $f(t)$, $g(t)$ и обозначается $(f * g)$. Таким образом, теорема умножения утверждает, что *умножение изображений соответствует свёртыванию оригиналов*:
 $(f * g) \doteq F(p) \cdot G(p)$.

Рисунок 3.4 – К теореме умножения

Так как произведение $F(p) \cdot G(p) = G(p) \cdot F(p)$, то свёртка обладает свойством симметрии:

$$\int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau) \cdot f(t-\tau)d\tau. \quad (3.15)$$

Пример 3.8 Найти оригинал по заданному изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)(p - 1)}.$$

Решение

$$\frac{p}{(p^2 + 4)(p - 1)} = \frac{p}{p^2 + 4} \cdot \frac{1}{p - 1} \doteq \int_0^t \cos 2\tau \cdot e^{(t-\tau)} d\tau,$$

так как $\frac{p}{p^2 + 2^2} \doteq \cos 2t$, $\frac{1}{p - 1} \doteq e^t$. Вычисляем интеграл свёртки.

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos 2\tau \cdot e^{(t-\tau)} d\tau &= e^t \cdot \int_0^t \cos 2\tau \cdot e^{-\tau} d\tau = \left(\begin{array}{l} U = \cos 2\tau, dU = -2 \sin 2\tau \\ dV = e^{-\tau} d\tau, V = -e^{-\tau} \end{array} \right) = \\ &= e^t \left(-e^{-\tau} \cos 2\tau \Big|_0^t - 2 \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau \right) = e^t - \cos 2t - 2e^t \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau d\tau = \\ &= \left(\begin{array}{l} U = \sin 2\tau, dU = 2 \cos 2\tau \\ dV = e^{-\tau} d\tau, V = -e^{-\tau} \end{array} \right) = e^t - \cos 2t - 2e^t \left(-e^{-\tau} \sin 2\tau \Big|_0^t + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^t e^{-\tau} \cos 2\tau d\tau \right) = e^t - \cos 2t + 2 \sin 2t - 4e^t \int_0^t e^{-\tau} \cos 2\tau d\tau. \end{aligned}$$

Дважды проинтегрировав по частям, получили возвратный интеграл:

$$e^t \int_0^t e^{-\tau} \cos 2\tau d\tau = e^t - \cos 2t + 2 \sin 2t - 4e^t \int_0^t e^{-\tau} \cos 2\tau d\tau,$$

откуда
$$\int_0^t e^{t-\tau} \cos 2\tau d\tau = \frac{1}{5} e^t - \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{2}{5} \sin 2t$$

Следствие теоремы умножения. Определим оригинал произведения $p \cdot F(p) \cdot G(p)$. Используя теорему дифференцирования оригинала, данное произведение преобразуем к виду:

$$p \cdot F(p) \cdot G(p) = (pF(p) - f(0)) \cdot G(p) + f(0) \cdot G(p) \doteq$$

$$\div \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau + f(0) \cdot g(t). \text{ Таким образом,}$$

$$pF(p)G(p) \div \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau + f(0) \cdot g(t). \quad (3.16)$$

С учетом симметрии свёртки (3.15), можно также записать, что

$$pF(p)G(p) \div \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau + f(0) \cdot g(t). \quad (3.17)$$

Формулы (3.16) и (3.17) называются **интегралами Дюамеля**. Применение интегралов Дюамеля для решения дифференциальных уравнений рассмотрим ниже.

3.5 Методы определения оригинала по известному изображению

Если известно изображение, то соответствующий ему оригинал можно найти, используя следующие приёмы.

1. Если изображение – правильная рациональная дробь $F(p) = \frac{Q(p)}{R(t)}$,

то эту дробь разлагают на сумму простейших дробей (см. Приложение Г) и, используя линейные свойства, теоремы преобразования Лапласа и таблицу преобразований Лапласа (см. Приложение А), находят оригиналы для каждой простейшей дроби.

Пример 3.9 По известному изображению найти оригинал:

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p^2(p+3)}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{8p^2 + 15p + 35}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Решение

- а) Представим изображение в виде суммы простейших дробей.

$$\frac{1}{p^2(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+3} = \frac{Ap(p+3) + B(p+3) + Cp^2}{p^2(p+3)}.$$

Из равенства числителей исходной и полученной дроби найдем неизвестные коэффициенты A, B, C , задавая переменной p ряд целых действительных значений: $p = 0, -3, 1$. Получим систему:

$$\begin{cases} 3B = 1, \\ 9C = 1, \\ 4A + 4B + C = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1/3, \\ C = 1/9, \\ A = -1/9. \end{cases} \quad \text{Таким образом,}$$

$$\frac{1}{p^2(p+3)} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{p+3} \doteq -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}e^{-3t}.$$

Для перехода к оригиналу использована таблица преобразований Лапласа, пункты 1, 2, 5.

б) Представим изображение в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{8p^2 + 15p + 35}{p(p^2 + 2p + 5)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 5} = \frac{A(p^2 + 2p + 5) + p(Bp + C)}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

$$8p^2 + 15p + 35 = (A + B)p^2 + (2A + C)p + 5A.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях p в числителе исходной и полученной дроби, составим систему уравнений относительно неизвестных A, B, C :

$$\begin{cases} A + B = 8, \\ 2A + C = 15, \\ 5A = 35, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 7, \\ B = 1, \\ C = 1. \end{cases}$$

$$\frac{7}{p} + \frac{p+1}{p^2 + 2p + 5} = \frac{7}{p} + \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} \doteq 7 + e^{-t} \cos 2t.$$

В знаменателе изображения выделен полный квадрат. Для перехода к оригиналу использованы 1-й и 18-й пункты таблицы преобразований Лапласа.

2. Оригинал можно найти с помощью теоремы разложения, которая утверждает, что для изображения $F(p)$ оригиналом служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \operatorname{res}[F(p_k) \cdot e^{p_k t}], \quad (3.18)$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

Пример 3.10 Для изображения $F(p) = \frac{1}{p^2(p+3)}$ найти оригинал с помощью теоремы разложения.

Решение

Функция $F(p) = \frac{1}{p^2(p+3)}$ имеет две изолированные особые точки:

простой полюс $p_1 = -3$ и полюс $p_2 = 0$ второго порядка. Находим вычет

функции $\frac{e^{pt}}{p^2(p+3)}$ в простом полюсе по формуле (2.48):

$$\operatorname{res}_{p=-3} \left(\frac{e^{pt}}{p^2(p+3)} \right) = \lim_{p \rightarrow -3} \left((p+3) \frac{e^{pt}}{p^2(p+3)} \right) = \frac{1}{9} e^{-3t}.$$

Вычет функции $F(p)e^{pt}$ в полюсе 2-го порядка находим по формуле (2.47):

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=0} \left(\frac{e^{pt}}{p^2(p+3)} \right) &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(p^2 \frac{e^{pt}}{p^2(p+3)} \right)' = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{e^{pt}}{p+3} \right)' = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{te^{pt}(p+3) - e^{pt}}{(p+3)^2} = \frac{3t-1}{9} = \frac{t}{3} - \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{1}{p^2(p+3)} \doteq -\frac{1}{9} + \frac{t}{3} + \frac{1}{9} e^{-3t}$.

3.6 Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом

Решение дифференциальных уравнений – основное приложение операционного метода, основанного на преобразовании Лапласа.

Операционный метод включает следующие этапы:

- 1) преобразование дифференциального уравнения с заданными начальными условиями по Лапласу; при этом образуется комплексное алгебраическое уравнение относительно изображения неизвестной функции;
- 2) решение комплексного алгебраического уравнения;
- 3) отыскание оригинала, искомого частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Последовательность решения дифференциального уравнения операторным методом представлена схемой на рисунке 3.5.

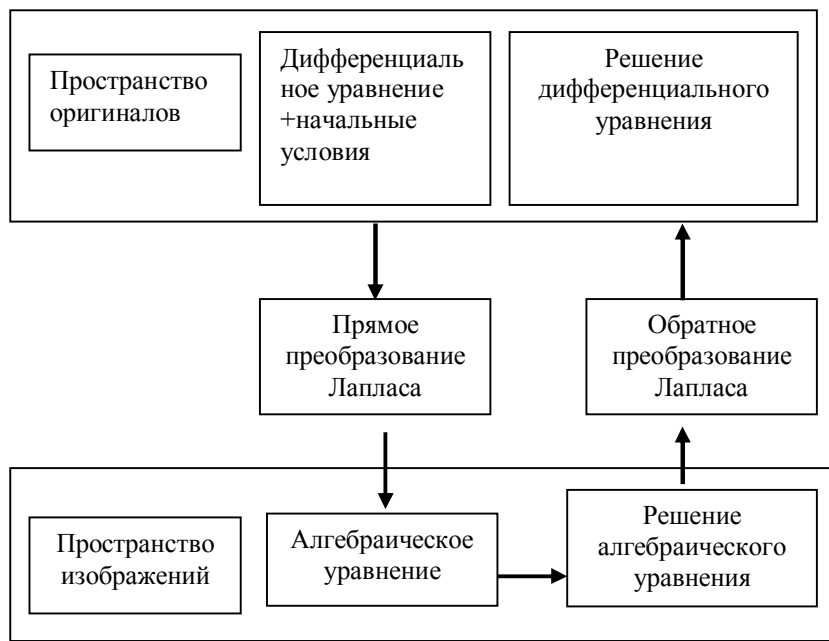


Рисунок 3.5 – Схема решения дифференциального уравнения

Операционный метод решения системы линейных дифференциальных уравнений включает следующие этапы:

- 1) преобразование системы дифференциальных уравнений по Лапласу; при этом образуется система линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций;
- 2) решение системы алгебраических уравнений, например, методом Крамера;
- 3) отыскание оригиналов методами обратного преобразования Лапласа.

Пример 3.11 Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$x'' + 3x' - 4x = e^{-t} + 2; \quad x(0) = 1; \quad x'(0) = 0.$$

Решение

Введем обозначения $L\{x(t)\} = X(p)$. Преобразуем обе части дифференциального уравнения по Лапласу. С учетом линейных свойств

преобразования, формул (3.5), (3.6) и таблицы преобразований Лапласа, получим:

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) + 3(pX(p) - x(0)) - 4X(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p},$$

$$X(p)(p^2 + 3p - 4) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p} + p + 3.$$

Решим уравнение относительно $X(p)$:

$$X(p) = \left(\frac{1}{p+1} + \frac{2}{p} + p + 3 \right) / (p^2 + 3p - 4), \quad X(p) = \frac{p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(p+1)(p-1)(p+4)}.$$

Для нахождения оригинала используем теорему разложения (3.18); особые точки функции $X(p)$ – простые полюсы $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = 1$,

$p_4 = -4$. Вычисляем вычеты функции $X(p)e^{pt}$ в полюсах:

$$\operatorname{res}_{p=0} X(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(p+1)(p-1)(p+4)} e^{pt} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{res}_{p=-1} X(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1) \frac{p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(p+1)(p-1)(p+4)} e^{pt} = -\frac{1}{6} e^{-t};$$

$$\operatorname{res}_{p=1} X(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow 1} (p-1) \frac{p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(p+1)(p-1)(p+4)} e^{pt} = \frac{13}{10} e^t;$$

$$\operatorname{res}_{p=-4} X(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow -4} (p+4) \frac{p^3 + 4p^2 + 6p + 2}{p(p+1)(p-1)(p+4)} e^{pt} = \frac{11}{30} e^{-4t}.$$

Ответ: $x(t) = \frac{13}{10} e^t - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^{-t} + \frac{11}{30} e^{-4t}.$

Пример 3.12 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

Решение

Введём обозначения: $L\{x(t)\} = X(p)$, $L\{y(t)\} = Y(p)$. Преобразуем систему уравнений по Лапласу:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 2X(p) + Y(p), \\ pY(p) - 2 = X(p) + 2Y(p), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-2)X(p) - Y(p) = 1, \\ -X(p) + (p-2)Y(p) = 2. \end{cases}$$

Решаем полученную систему алгебраических уравнений методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -1 \\ -1 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 4p + 3; \quad \Delta_X = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & p-2 \end{vmatrix} = p;$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2p-3;$$

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{p}{p^2 - 4p + 3} = \frac{p}{(p-1)(p-3)};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{2p-3}{p^2 - 4p + 3} = \frac{2p-3}{(p-1)(p-3)}.$$

Теперь по изображениям $X(p)$, $Y(p)$ определяем оригиналы $x(t)$ и $y(t)$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{res}_{p=1} \frac{p \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} + \operatorname{res}_{p=3} \frac{p \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} (p-1) \frac{p \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} + \lim_{p \rightarrow 3} (p-3) \frac{p \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} = \\ &= -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{3t}; \end{aligned}$$

аналогично,

$$y(t) = \operatorname{res}_{p=1} \frac{(2p-3) \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} + \operatorname{res}_{p=3} \frac{(2p-3) \cdot e^{pt}}{(p-1)(p-3)} = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{3t}.$$

3.7 Применение интегралов Дюамеля при решении дифференциальных уравнений

Формулы Дюамеля (3.16), (3.17) применяются для решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (3.19)$$

и нулевыми начальными условиями $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$, в случаях, когда правую часть уравнения $f(t)$ сложно преобразовать по Лапласу, или когда нужно найти решение уравнения при нескольких различных правых частях.

Способ решения заключается в следующем.

Определяется решение вспомогательного уравнения, левая часть которого совпадает с левой частью уравнения (3.19), а в правой части стоит единица:

$$x_1^{(n)} + a_1 x_1^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x_1' + a_n x_1 = 1. \quad (3.20)$$

Начальные условия – нулевые: $x_1(0) = x_1'(0) = \dots = x_1^{(n-1)}(0) = 0$.

Уравнению (3.19) соответствует в комплексной области алгебраическое операторное уравнение $A(p)X(p) = F(p)$, откуда $X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}$.

Уравнению (3.20) соответствует операторное уравнение

$$A(p)X_1(p) = \frac{1}{p}, \text{ откуда } A(p) = \frac{1}{pX_1(p)}.$$

Из двух полученных соотношений следует, что

$$X(p) = pX_1(p)F(p).$$

По формулам Дюамеля (3.16) или (3.17) с нулевыми начальными условиями получим:

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (3.21)$$

$$\text{или } x(t) = \int_0^t f(\tau) x_1'(t - \tau) d\tau. \quad (3.22)$$

Пример 3.13 Решить уравнение

$$x'' + 4x' + 4x = \frac{e^{-2t}}{(1 + 2t)^2}, \text{ при } x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение

Решаем вспомогательное уравнение $x_1'' + 4x_1' + 4x_1 = 1$ при $x_1(0) = x_1'(0) = 0$. Уравнение преобразуем по Лапласу:

$(p^2 + 4p + 4)X_1(p) = \frac{1}{p}$. $X_1(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}$. Здесь $p = 0$ - простой полюс, $p = -2$ - полюс второго порядка.

$$\operatorname{res}_{p=0} \left(\frac{e^{pt}}{p(p+2)^2} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{e^{pt}}{p(p+2)^2} \right) = \frac{1}{4}.$$

$$\operatorname{res}_{p=-2} \left(\frac{e^{pt}}{p(p+2)^2} \right) = \lim_{p \rightarrow -2} \left((p+2)^2 \cdot \frac{e^{pt}}{p(p+2)^2} \right)' = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

$$x_1(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}.$$

Применяем формулу (3.22), так как производная от правой части уравнения более сложная, чем от $x_1(t)$:

$$x_1'(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + te^{-2t} = te^{-2t}$$

Определяем решение исходного уравнения.

$$x(t) = \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} (t-\tau)e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} \int_0^t \frac{t-\tau}{(1+2\tau)^2} d\tau,$$

$$x(t) = \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \ln(1+2t).$$

Приложение А - таблица преобразований Лапласа

	$F(p)$	$f(t)(t > 0)$
	1	2
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{1}{p^2}$	t
3	$\frac{2}{p^3}$	t^2
4	$\frac{(n-1)!}{p^n} (n=1,2,\dots)$	t^{n-1}
5	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
6	$\frac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
7	$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n} (n=1,2,3,\dots)$	$t^{n-1} \cdot e^{at}$
8	$\frac{a-b}{(p-a)(p-b)}$	$e^{at} - e^{bt}$
9	$\frac{p(a-b)}{(p-a)(p-b)}$	$ae^{at} - be^{bt}$
10	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$
11	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
12	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\text{sh } at$

продолжение таблицы преобразований Лапласа

	1	2
13	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{ch} at$
14	$\frac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2}$	$\sin at - at \cos at$
15	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
16	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
17	$\frac{a}{(p - b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \sin at$
18	$\frac{p - b}{(p - b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
19	$\frac{a}{(p - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \operatorname{sh} at$
20	$\frac{p - b}{(p - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \operatorname{ch} at$

Приложение Б – таблица производных и правила дифференцирования

$$1. (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \neq 0.$$

$$2. (e^x)' = e^x.$$

$$4. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$6. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$10. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$14. \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x).$$

$$16. \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

$$7. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$13. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$15. \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x).$$

$$17. \operatorname{cth}'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}.$$

Правила дифференцирования

1) Производная постоянной равна нулю $C' = 0$.

2) Производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций $(U(x) + V(x))' = U'(x) + V'(x)$.

3) Производная произведения двух функций $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$.

4) Постоянный множитель выносится за знак производной

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot (f(x))'.$$

5) Производная дроби двух функций $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$

6) Производная сложной функции $y = f(g(x))$: $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Приложение В – таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$
7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$
15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$
8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$
16. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

Приложение Г – разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей в пакете MathCAD

Преобразование Лапласа всех рассмотренных выше функций – всегда правильная рациональная дробь комплексного аргумента p , которую можно разложить на сумму простейших дробей. Для этого нужно знаменатель разложить на произведение линейных множителей, соответствующих действительным его корням, и на квадратные трёхчлены, соответствующие комплексным сопряженным корням знаменателя. Разложение на простейшие дроби удобно выполнять в пакете MathCAD [7].

Набираем изображение, не забывая вводить знак умножения (*), затем выделяем переменную p и щелкаем по строке **Convert to Partial Fraction** в пункте **Variable** меню **Symbolics**. Получим:

$$\frac{p^2 - 3 \cdot p + 5}{(p - 2) \cdot (p^2 + 4) \cdot (p^2 - 4p + 13)}$$

$$\frac{1}{[24 \cdot (p - 2)]} - \frac{1}{1160} \cdot \frac{(206 + 11 \cdot p)}{(p^2 + 4)} - \frac{1}{435} \cdot \frac{(-97 + 14 \cdot p)}{(p^2 - 4 \cdot p + 13)}$$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие для студентов вузов/Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1985. – Т.1.-456 с. Т.2. -576 с.
2. Ледяев С.Ф. Основы высшей математики: учеб. пособие / С.Ф. Ледяев, Ю.М. Рудов. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – 278 с.
3. Ледяев С.Ф. Лекции по высшей математике в первом семестре / С.Ф. Ледяев. – Севастополь. 2009 г. – 115 с.
4. Ледяев С.Ф. Высшая математика. Лекции во втором семестре / С.Ф. Ледяев. – Севастополь. 2012 г. – 123 с.
5. Лунц Г.Л. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления/ Г.Л. Лунц, П.Э. Эльсгольц. – М.: Физматгиз, 1958 г.- 296 с.
6. Плис А.И. MATHCAD 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. - М.: Финансы и статистика, 2000.- 656 с.

Для заметок
