

#2. Исследование алгоритма решение задачи линейного программирования графическим методом

$$F_1(x) = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

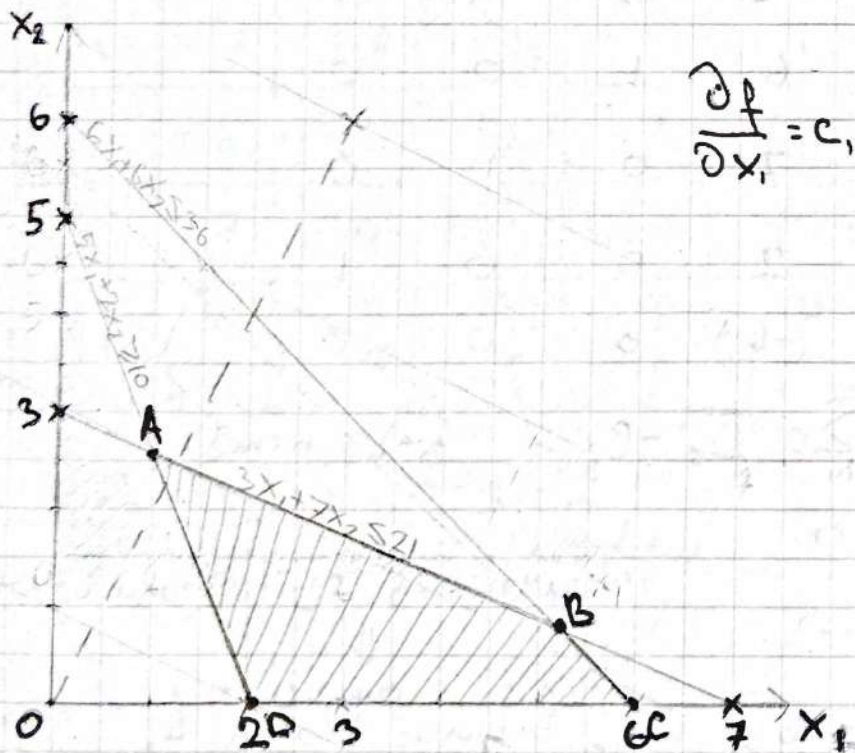
$$F_2(x) = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$6x_1 + 6x_2 = 36 \Rightarrow (0, 6) \text{ и } (6, 0)$$

$$3x_1 + 7x_2 = 21 \Rightarrow (0, 3) \text{ и } (7, 0)$$

$$5x_1 + 2x_2 = 10 \Rightarrow (0, 5) \text{ и } (2, 0)$$



$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \Rightarrow (3, 6)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 36 \\ 3x_1 + 7x_2 = 21 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_2 \\ 3x_1 + 7x_2 = 21 \end{cases} \quad \underline{F(\max) = 20.25}$$

\Downarrow

$$18 - 3x_2 + 7x_2 = 21$$

\Downarrow

$$4x_2 = 3$$

\Downarrow

$$\underline{x_2 = 0.75, \quad x_1 = 5.25}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \underline{x_1 = 2, x_2 = 0} \rightarrow \underline{F(\min) = 6}$$

#2. Исследование алгоритма решения задачи линейного программирования табличным симплекс-методом

$$F(x) = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 36 \\ 3x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 21 \\ 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 10 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Базисные переменные: x_3, x_4, x_5

	C_B	C_j	3	6	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	36	6	6	1	0	0
A_4	0	21	3	7	0	1	0
A_5	0	10	5	2	0	0	1
δ_j		0	-3	-6	0	0	0

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^m a_{i0} C_{iB} \quad \delta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} C_{iB} - C_j \quad j = [1, n+m]$$

$$\delta_0 = 36 \cdot 0 + 21 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0$$

$$\delta_1 = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$\delta_2 = 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 = -6$$

$$\delta_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$$

$$\delta_4 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$$

$$\delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 0 = 0$$

Минимальный эл-т строки $\delta_j = -6$

↓

в базис вводим A_2

$$\Theta = \min \left\{ \frac{a_{i0} \geq 0}{a_{ij} > 0} \right\} = i \quad \Theta = \min \left\{ \frac{36}{6}, \frac{21}{7}, \frac{10}{2} \right\} = \min \{6, 3, 5\} = 3$$

направляющая строка: A_4 ; направляющий эл-т = 7

		c_j	3	6	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	$36 - \frac{21}{7} \cdot 6$	$6 - \frac{3}{7} \cdot 6$	$6 - \frac{3}{7} \cdot 6$	$1 - \frac{0}{7} \cdot 6$	$0 - \frac{1}{7} \cdot 6$	$0 - \frac{0}{7} \cdot 6$
A_2	6	$\frac{21}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{0}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{0}{7}$
A_5	0	$10 - \frac{21}{7} \cdot 2$	$5 - \frac{3}{7} \cdot 2$	$2 - \frac{7}{7} \cdot 2$	$0 - \frac{0}{7} \cdot 2$	$0 - \frac{1}{7} \cdot 2$	$1 - \frac{0}{7} \cdot 2$
Δ_j		$0 - \frac{21}{7} \cdot (-6)$	$-3 - \frac{3}{7} \cdot (-6)$	$-6 - \frac{7}{7} \cdot (-6)$	$0 - \frac{0}{7} \cdot (-6)$	$0 - \frac{1}{7} \cdot (-6)$	$0 - \frac{0}{7} \cdot (-6)$

		c_j	3	6	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	18	$\frac{24}{7}$	0	1	$-\frac{6}{7}$	0
A_2	6	3	$\frac{3}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	0
A_5	0	4	$\frac{29}{7}$	0	0	$-\frac{2}{7}$	1
Δ_j		18	$-\frac{3}{7} \uparrow$	0	0	$\frac{6}{7}$	0

$$\Delta_0 = 18 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 0 = 18$$

$$\Delta_1 = \frac{24}{7} \cdot 0 + \frac{3}{7} \cdot 6 + \frac{29}{7} \cdot 0 = \frac{18}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 0 - 6 = 0$$

$$\Delta_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_4 = -\frac{6}{7} \cdot 0 + \frac{1}{7} \cdot 6 + \left(\frac{2}{7}\right) \cdot 0 - 0 = \frac{6}{7}$$

$$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 0 - 0 = 0$$

минимальный эл-т строки

$$\Delta_1 = -\frac{3}{7}$$



в Базис вводим A_1

$$\Theta = \min \left\{ 18 / (24 \frac{1}{2}), 3 / (3 \frac{1}{2}), 4 / (29 \frac{1}{4}) \right\} = \min \left\{ \frac{63}{12}, 7, \frac{28}{29} \right\} = \frac{28}{29}$$

направляющая строка: A_5 , направляющий эл-т = $29 \frac{1}{4}$

		c_j	3	6	0	0	0
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	$18 - \frac{0}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 24\frac{1}{2}$	$\frac{24}{3} - \frac{(\frac{18}{3})}{24\frac{1}{2}} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 24\frac{1}{2}$	$0 - \frac{0}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 24\frac{1}{2}$	$1 - \frac{0}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 24\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{3} - \frac{(-\frac{1}{3})}{24\frac{1}{2}} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 24\frac{1}{2}$	$0 - \frac{1}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 24\frac{1}{2}$
A_2	6	$3 - \frac{4}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 3\frac{1}{2}$	$\frac{3}{3} - \frac{(\frac{18}{3})}{3\frac{1}{2}} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 3\frac{1}{2}$	$1 - \frac{0}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 3\frac{1}{2}$	$0 - \frac{0}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} - \frac{(-\frac{1}{3})}{3\frac{1}{2}} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 3\frac{1}{2}$	$0 - \frac{1}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot 3\frac{1}{2}$
A_1	3	$4 / (29\frac{1}{4})$	$(29\frac{1}{4}) / (29\frac{1}{4})$	$0 / (29\frac{1}{4})$	$0 / (29\frac{1}{4})$	$(-\frac{1}{3}) / (29\frac{1}{4})$	$1 / (29\frac{1}{4})$
δ_j		$18 - \frac{4}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot (-3\frac{1}{2})$	$-\frac{3}{3} - \frac{(\frac{18}{3})}{3\frac{1}{2}} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot (-3\frac{1}{2})$	$0 - \frac{0}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot (-3\frac{1}{2})$	$0 - \frac{0}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot (-3\frac{1}{2})$	$\frac{6}{3} - \frac{(-\frac{1}{3})}{3\frac{1}{2}} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot (-3\frac{1}{2})$	$0 - \frac{1}{1} \cdot \frac{18}{24\frac{1}{2}} \cdot (-3\frac{1}{2})$

		c_j	3	6	0	0	0
базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	$\frac{426}{29}$	0	0	1	$-\frac{18}{29}$	$-\frac{24}{29}$
A_2	6	$\frac{75}{29}$	0	1	0	$\frac{5}{29}$	$-\frac{3}{29}$
A_1	3	$\frac{28}{29}$	1	0	0	$-\frac{2}{29}$	$\frac{7}{29}$
	δ_j	$\frac{534}{29}$	0	0	0	$\frac{24}{29}$	$\frac{3}{29}$

Т.к. среди δ_j нет отриц. эл-тов \Rightarrow найдено оптимальное решение

$$X_1 = \frac{28}{29}, \quad X_2 = \frac{75}{29}$$

$$X_1 = 0.97, \quad X_2 = 2.59$$

$$F(x) = 3 \cdot \frac{28}{29} + 6 \cdot \frac{75}{29} = \frac{534}{29}$$

$$F(x) = 18.41$$

#3. Исследование алгоритма решения задачи линейного программирования методом искусственного базиса

$$F(x) = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + x_3 = 36 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_4 = 21 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_5 = 10 \end{cases}$$

Введём искусственную переменную:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + x_3 = 36 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_4 = 21 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 10 \end{cases} \quad F(x) = 3x_1 + 6x_2 - \mu x_6 \rightarrow \max$$

Выразим искусственную переменную:

$$x_6 = 10 - 5x_1 - 2x_2 + x_5 \Rightarrow F(x) = 3x_1 + 6x_2 - \mu(10 - 5x_1 - 2x_2 + x_5) = (3+5\mu)x_1 + (6+2\mu)x_2 + (-\mu)x_5 + (-10\mu) \rightarrow \max$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Базисные переменные: x_3, x_4, x_6

			c_j					
			3	6	0	0	0	μ
Базис	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	36	6	6	1	0	0	0
A_4	0	21	3	7	0	1	0	0
A_6	$-\mu$	10	5	2	0	0	-1	1
Δ_j			-10μ	$-5\mu - 3$	$-2\mu - 6$	0	0	μ

$$\delta_0 = 36 \cdot 0 + 21 \cdot 0 + 10 \cdot (-\mu) = -10\mu$$

$$\delta_1 = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-\mu) - 3 = -5\mu - 3$$

$$\delta_2 = 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot (-\mu) - 6 = -2\mu - 6$$

$$\delta_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-\mu) - 0 = 0$$

$$\delta_4 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-\mu) - 0 = 0$$

$$\delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-\mu) - 0 = +\mu$$

$$\delta_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-\mu) - (-\mu) = 0$$

минимальный эл-т строки

$$\delta_j = -5\mu - 3$$

↓

в базис вводим A_1

$$\Theta = \min \left\{ \frac{36}{6}, \frac{21}{3}, \frac{10}{5} \right\} = \min \{ 6, 7, 2 \} = 2$$

направляющая строка: A_6 , направляющий эл-т = 5

Базис	Сб	c_j	3	6	0	0	0	μ
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	$36 - \frac{10}{5} \cdot 6$	$6 - \frac{5}{5} \cdot 6$	$6 - \frac{2}{5} \cdot 6$	$1 - \frac{0}{5} \cdot 6$	$0 - \frac{0}{5} \cdot 6$	$0 - \frac{(-1)}{5} \cdot 6$	$0 - \frac{1}{5} \cdot 6$
A_4	0	$21 - \frac{10}{5} \cdot 3$	$3 - \frac{5}{5} \cdot 3$	$7 - \frac{2}{5} \cdot 3$	$0 - \frac{0}{5} \cdot 3$	$1 - \frac{0}{5} \cdot 3$	$0 - \frac{(-1)}{5} \cdot 3$	$0 - \frac{1}{5} \cdot 3$
A_1	3	$\frac{10}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$
δ_j		$-10\mu - \frac{10}{5}$	$-5\mu - 3$	$-2\mu - 6$	$0 - \frac{0}{5}$	$0 - \frac{0}{5}$	$\mu - \frac{(-1)}{5}$	$0 - \frac{1}{5}$
		$(-5\mu - 3)$	$-\frac{10}{5} \cdot (-5\mu - 3)$	$-\frac{2}{5} \cdot (-5\mu - 3)$	$(-5\mu - 3)$	$(-5\mu - 3)$	$(-5\mu - 3)$	$(-5\mu - 3)$

		c_j	3	6	0	0	0	μ
База	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	24	0	$18/5$	1	0	$6/5$	$-6/5$
A_4	0	15	0	$29/5$	0	1	$3/5$	$-3/5$
A_1	3	2	1	$2/5$	0	0	$-1/5$	$1/5$
δ_j		6	0	$-24/5$	0	0	$-3/5$	$3/5 + \mu$

Минимальный эл-т строки $\delta_j = -24/5 \Rightarrow$ в базу вводим A_2

$$\theta = \min \left\{ 24/(18/5), 15/(29/5), 2/(2/5) \right\} = \min \left\{ \frac{20}{3}, \frac{75}{29}, 5 \right\} = \frac{75}{29}$$

Направляющая строка: A_4 , направляющий эл-т = $29/5$

		c_j	3	6	0	0	0	μ
База	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	$24 - 15 \cdot (29/5) / (18/5)$ $= 18/5$	$0 - 0 / (18/5)$ $= 0$	$18/5 - (29/5) \cdot (18/5) / (18/5)$ $= -18/5$	$1 - 0 / (18/5)$ $= 1$	$0 - 1 / (18/5)$ $= -18/5$	$6/5 - (3/5) \cdot (18/5) / (18/5)$ $= 12/5$	$-6/5 - (-3/5) \cdot (18/5) / (18/5)$ $= 18/5$
A_2	6	$15 / (29/5)$ $= 75/29$	$0 / (29/5)$ $= 0$	$(29/5) / (29/5)$ $= 1$	$0 / (29/5)$ $= 0$	$1 / (29/5)$ $= 5/29$	$(3/5) / (29/5)$ $= 3/29$	$(-3/5) / (29/5)$ $= -3/29$
A_1	3	$2 - 15 \cdot (29/5) / (2/5)$ $= -23/5$	$1 - 0 / (2/5)$ $= 1$	$2/5 - (29/5) \cdot (2/5) / (2/5)$ $= -29/5$	$0 - 0 / (2/5)$ $= 0$	$0 - 1 / (2/5)$ $= -5/2$	$-1/5 - (3/5) \cdot (2/5) / (2/5)$ $= -2/5$	$1/5 - (-3/5) \cdot (2/5) / (2/5)$ $= 2/5$
		δ_j	$6 - 15 \cdot (29/5) / (18/5)$ $= -24/5$	$0 - 0 / (18/5)$ $= 0$	$-18/5 - (29/5) \cdot (-18/5) / (18/5)$ $= 24/5$	$0 - 1 / (18/5)$ $= -18/5$	$12/5 - (3/5) \cdot (-18/5) / (18/5)$ $= 24/5$	$18/5 - (-3/5) \cdot (-18/5) / (18/5)$ $= -24/5$

		c_j	3	6	0	0	0	μ
База	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	$426/29$	0	0	1	$-18/29$	$24/29$	$-24/29$
A_2	6	$75/29$	0	1	0	$5/29$	$3/29$	$-3/29$
A_1	3	$-23/29$	1	0	0	$-2/29$	$-7/29$	$7/29$
		δ_j	$534/29$	0	0	$24/29$	$-3/29$	$3/29 + \mu$

минимальный эл-т строки $\delta_j = -3/29 \Rightarrow$ в базу вводим A_5

$$\Theta = \min \left\{ \left(\frac{426}{29} \right) / \left(\frac{24}{29} \right), \left(\frac{75}{29} \right) / \left(\frac{3}{29} \right), \left(\frac{25}{29} \right) / \left(\frac{7}{29} \right) \right\} = \min \left\{ \frac{213}{12}, 25 \right\} = \frac{213}{12} = \frac{71}{4}$$

направляющая строка A_3 , направляющий эл-т $= 24/29$

		c_j	3	6	0	0	0	$-\mu$
Базис	СБ	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_5	0	$(426/29) / (24/29)$	$0 / (24/29)$	$0 / (24/29)$	$1 / (24/29)$	$(-18/29) / (24/29)$	$(24/29) / (24/29)$	$(-14/29) / (24/29)$
A_2	6	$\frac{75}{29} - \frac{(426)}{29} \cdot \frac{(3)}{24}$	$0 - \frac{0}{24} \cdot \frac{(3)}{24}$	$1 - \frac{0}{24} \cdot \frac{(3)}{24}$	$0 - \frac{1}{24} \cdot \frac{(3)}{24}$	$\frac{5}{29} - \frac{(-18/29)}{24} \cdot \frac{(3)}{24}$	$\frac{3}{29} - \frac{24/29}{24} \cdot \frac{(3)}{24}$	$\frac{3}{29} - \frac{24/29}{24} \cdot \frac{(3)}{24}$
A_1	3	$\frac{25}{29} - \frac{426/29}{24} \cdot \frac{(-7/29)}{24}$	$1 - \frac{0}{24} \cdot \frac{(-7/29)}{24}$	$0 - \frac{0}{24} \cdot \frac{(-7/29)}{24}$	$0 - \frac{1}{24} \cdot \frac{(-7/29)}{24}$	$\frac{2}{29} - \frac{(-18/29)}{24} \cdot \frac{(-7/29)}{24}$	$\frac{7}{29} - \frac{24/29}{24} \cdot \frac{(-7/29)}{24}$	$\frac{7}{29} - \frac{24/29}{24} \cdot \frac{(-7/29)}{24}$
δ_j		$\frac{534}{29} - \frac{426/29}{24} \cdot \frac{(-3/29)}{24}$	$0 - \frac{0}{24} \cdot \frac{(-3/29)}{24}$	$0 - \frac{0}{24} \cdot \frac{(-3/29)}{24}$	$0 - \frac{1}{24} \cdot \frac{(-3/29)}{24}$	$\frac{24}{29} - \frac{(-18/29)}{24} \cdot \frac{(-3/29)}{24}$	$\frac{3}{29} - \frac{24/29}{24} \cdot \frac{(-3/29)}{24}$	$(\frac{3}{29} + \mu) - \frac{24/29}{24} \cdot \frac{(-3/29)}{24}$

		c_j	3	6	0	0	0	$-\mu$
Базис	СБ	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_5	0	$71/4$	0	0	$29/24$	$-3/4$	1	-1
A_2	6	$3/4$	0	1	$-1/8$	$1/4$	0	0
A_1	3	$21/4$	1	0	$7/24$	$-1/4$	0	0
δ_j		$81/4$	0	0	$1/8$	$3/4$	0	μ

т.к. в оптимальном решении отсутствуют искусственные переменные (равны 0), то данное решение явл. допустимым

$$\underline{x_1 = 21/4, \quad x_2 = 3/4}$$

$$\underline{F(x) = 3 \cdot \frac{21}{4} + 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{4}}$$

$$\underline{x_1 = 5.25, \quad x_2 = 0.75}$$

$$\underline{F(x) = 20.25}$$

решение верное и совпадает с графическим методом

#4. Исследование алгоритма решения задачи линейного программирования модифицированным симплекс-методом

$$F(x) = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + x_3 = 36 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_4 = 21 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_5 = 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Введём искусственную переменную:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + x_3 = 36 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_4 = 21 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 10 \end{cases}$$

$$3x_1 + 7x_2 + x_4 = 21$$

$$5x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 10$$

$$F(x) = 3x_1 + 6x_2 + \mu x_6 \rightarrow \min$$

Базис	C_b	C_j	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	36	6	6	1	0	0	0	0
A_4	0	21	3	7	0	1	0	0	0
A_6	μ	10	5	2	0	0	1	1	1
Δ_j		10μ	$5\mu - 3$	$2\mu - 6$	0	0	$-\mu$	0	0

$$\Lambda_j = \sum C_i e_{ij}$$

$$\Lambda_0 = 0 \cdot 36 + 21 \cdot 0 + 10\mu = 10\mu$$

$$\Lambda_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

$$\Lambda_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \mu \cdot 0 = 0$$

$$\Lambda_3 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu$$

$$\Delta_j = \Lambda^T A_j - C_j \quad \Delta_0 = \Lambda_0 = 10\mu$$

$$\Delta_1 = [0 \ 0 \ \mu] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} - 3 = 5\mu - 3$$

$$\Delta_2 = [0 \ 0 \ \mu] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} - 6 = 2\mu - 6$$

База	C_0	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	Θ
A_3	0	36	1	0	0	6	6
A_4	0	21	0	1	0	3	7
A_6	μ	10	0	0	1	5	2
A_5	λ	10μ	0	0	μ		

$$\Delta_3 = [0 \ 0 \ \mu] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

самый большой положительный эл-т
в вспомогательной таблице $\Delta_1 = 5\mu \rightarrow$

$$\Delta_4 = [0 \ 0 \ \mu] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

в базу вводит вектор A_1

$$\Delta_5 = [0 \ 0 \ \mu] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = -\mu$$

$$\Delta_6 = [0 \ 0 \ \mu] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \mu = 0$$

$$A^* = A_x^{-1} \cdot A_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \frac{e_{i0}}{a_{i1}^*} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

минимальный эл-т 2 \Rightarrow выводим вектор A_6

т.к. A_6 соответствует искусственной переменной, то
 A_6 в дальнейшем рассмотрении не участвует

$$e_{ij}^{l+1} = \begin{cases} e_{ij}^l - \frac{e_{rj}^l}{a_{r1}^*} \cdot a_{i1}^*, & \text{при } i \neq r \\ \frac{e_{rj}^l}{a_{r1}^*}, & \text{при } i = r \end{cases}$$

База	Cb	e ₀	e ₁	e ₂	e ₃	A*	Θ
A ₃	0	$36 - \frac{10}{3} \cdot 6$	$1 - \frac{0}{3} \cdot 6$	$0 - \frac{0}{3} \cdot 6$	$0 - \frac{1}{3} \cdot 6$		
A ₄	0	$21 - \frac{10}{3} \cdot 3$	$0 - \frac{0}{3} \cdot 3$	$1 - \frac{0}{3} \cdot 3$	$0 - \frac{1}{3} \cdot 3$		
A ₁	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$		
A₂	1						



База	Cb	e ₀	e ₁	e ₂	e ₃	A*	Θ
A ₃	0	24	1	0	$-\frac{6}{5}$		
A ₄	0	15	0	1	$-\frac{3}{5}$		
A ₁	3	2	0	0	$\frac{1}{5}$		
A₂	1	6	0	0	$\frac{3}{5}$		

$$\Lambda_0 = 0 \cdot 24 + 0 \cdot 15 + 3 \cdot 2 = 6$$

$$\Lambda_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

$$\Lambda_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0$$

$$\Lambda_3 = 0 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\Delta_0 = \Lambda_0 = 6$$

$$\Delta_1 = [0 \ 0 \ \frac{3}{5}] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} - 3 = 0$$

$$\Delta_2 = [0 \ 0 \ \frac{3}{5}] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} - 6 = \frac{6}{5} - 6 = -\frac{24}{5}$$

$$\Delta_3 = [0 \ 0 \ \frac{3}{5}] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$\Delta_4 = [0 \ 0 \ \frac{3}{5}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$\Delta_5 = [0 \ 0 \ \frac{3}{5}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{3}{5}$$

~~самый~~ Самый большой положительный эл-т в вспомогательной таблице отсутствует и вектор, соответствующий искусственной переменной выведен из базы — достигнуто оптимальное решение

		C_j	3	6	0	0	0	μ
Sague	C_B	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	36	6	6	1	0	0	0
A_4	0	21	3	7	0	1	0	0
A_6	μ	10	5	2	0	0	-1	1
Δ_0		10μ	$5\mu-3$	$2\mu-6$	0	0	$-\mu$	0
Δ_1		6	0	$-\frac{24}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	-

$F(\min) = 6$

$X_{opt} = (2, 0, 24, 15, 0)$

$x_1 = 2, x_2 = 0$

#5. Исследование алгоритма решения задачи линейного - программирования двойственным симплекс - методом

$$F(x) = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 5x_1 + 12x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ -5x_1 - 2x_2 \leq -10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Сформулируем двойственную задачу:

$$\begin{cases} 6y_1 + 3y_2 - 5y_3 \geq 3 \\ 6y_1 + 7y_2 - 2y_3 \geq 6 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases} \quad F(y) = 36y_1 + 21y_2 - 10y_3 \rightarrow \min$$

Приведём прямую задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 36 \\ 3x_1 + 7x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 21 \\ -5x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = -10 \end{cases}$$

$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{matrix}$

Возьмём в качестве базиса векторы (A_1, A_3, A_5) и проверим:

$$\begin{cases} 6y_1 + 3y_2 - 5y_3 = 3 \\ y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (A_1) \\ (A_3) \\ (A_5) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

подставим найденные значения в A_2 и A_4 :

$$\begin{cases} 6 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 \geq 3 \\ 1 \cdot 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \geq 3 \text{ - да} \\ 1 \geq 0 \text{ - да} \end{cases}$$

Следовательно, базис (A_1, A_3, A_5) удовлетворяет системе ограничений

Находим преобразование, которому удовлетворяет базис

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для этого разложим векторы, не вошедшие в базис, по векторам A_1, A_3, A_5 .

$$\text{Для вектора } A_0: \begin{pmatrix} 36 \\ 21 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{10} = 7 \\ a_{20} = -6 \\ a_{30} = 25 \end{cases}$$

$$\text{Для вектора } A_2: \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 7/3 \\ a_{22} = -8 \\ a_{32} = 29/3 \end{cases}$$

$$\text{Для вектора } A_4: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{14} = 1/3 \\ a_{24} = -2 \\ a_{34} = 5/3 \end{cases}$$

		C_j	3	6	0	0	0
базис	C_b	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	7	1	$7/3$	0	$1/3$	0
A_3	0	-6	0	-8	1	-2	0
A_5	0	25	0	$29/3$	0	$5/3$	1
	θ	21	0	1	0	1	0

$$\delta_0 = 7 \cdot 3 + (-6) \cdot 0 + 25 \cdot 0 = 21$$

$$\delta_1 = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 3 = 0$$

$$\delta_2 = \frac{7}{3} \cdot 3 + (-8) \cdot 0 + \frac{29}{3} \cdot 0 - 6 = 1$$

$$\delta_3 = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$$

$$\delta_4 = \frac{1}{3} \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + \frac{5}{3} \cdot 0 - 0 = 1$$

$$\delta_5 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 0 = 0$$

Т.к. не все компоненты вектора A_0 положительны, то оптимальное решение ещё не получено

~~Следующий~~ Отрицательный эл-т столбца $A_0 : -6 \Rightarrow A_2$ - вектор, выводимый из базиса.

Вектор, который будет вводиться в базис, определяется по правилу:

$$\min \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{ij} < 0} \right\} \Rightarrow j^*$$

$$\min \left\{ \frac{-1}{-8}, \frac{-1}{-2} \right\} = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{направляющим столбцом, вводимым в базис будет вектор } A_2$$

Базис	СБ	C_j	3	6	0	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	$7 - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{3}$	$1 - 0 \cdot \frac{7}{3}$	$\frac{7}{3} - 1 \cdot \frac{7}{3}$	$0 - (-\frac{1}{8}) \cdot \frac{7}{3}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{3}$	$0 - 0 \cdot \frac{7}{3}$
A_2	6	$\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
A_5	0	$25 - \frac{3}{4} \cdot \frac{29}{3}$	$0 - 0 \cdot \frac{29}{3}$	$\frac{29}{3} - 1 \cdot \frac{29}{3}$	$0 - (-\frac{1}{8}) \cdot \frac{29}{3}$	$\frac{5}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{29}{3}$	$1 - 0 \cdot \frac{29}{3}$
δ		$21 - \frac{3}{4} \cdot 1$	$0 - 0 \cdot 1$	$1 - 1 \cdot 1$	$0 - \frac{1}{8} \cdot 1$	$1 - \frac{1}{4} \cdot 1$	$0 - 0 \cdot 1$

		C_j	3	6	0	0	0
базис	СВ	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	3	$2\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{7}{24}$	$-\frac{3}{12}$	0
A_2	6	$\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
A_5	0	$7\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{29}{24}$	$-\frac{9}{12}$	1
	δ	$8\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0

$$\delta_0 = \frac{21}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 6 + 7\frac{1}{4} \cdot 0 = 8\frac{1}{4}$$

$$\delta_1 = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 0 - 3 = 0$$

$$\delta_2 = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 0 - 6 = 0$$

$$\delta_3 = \frac{7}{24} \cdot 3 + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 6 + \frac{29}{24} \cdot 0 - 0 = \frac{1}{8}$$

$$\delta_4 = \left(-\frac{3}{12}\right) \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 6 + \left(-\frac{9}{12}\right) \cdot 0 - 0 = \frac{3}{4}$$

$$\delta_5 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 0 - 0 = 0$$

Т.к. все элементы вектора A_0 положительны \Rightarrow оптимальное решение достигнуто

Получен оптимальный план: $X_{opt} = (5.25; 0.75)$

$$\underline{F_{max}} = 3 \cdot 5.25 + 6 \cdot 0.75 = \underline{20.25}$$

Значения переменных y : $y_1 = \frac{1}{8}$, $y_2 = \frac{3}{4}$, $y_3 = 0$

$$\underline{y_1 = 0.125} \quad \text{или} \quad \underline{y_2 = 0.75} \quad \underline{y_3 = 0}$$