Лекция 5

Производные и дифференциалы высших порядков

1. Производная n-го порядка.

а) *Вторая производная.* Пусть функция $f(x)$ имеет производную во всех точках интервала (a, b). Если функция $f'(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, то ее производную называют *второй производной* или *производной второго порядка функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначают $f''(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$, $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$, $f''_{xx}(x_0)$. Таким образом, по определению

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Заметим, что функцию $f'(x)$ часто называют первой производной или производной первого порядка функции $f(x)$, а под производной нулевого порядка $f^{(0)}(x)$ подразумевается функция $f(x)$, т. е. $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$.

Выведем, далее, формулу для второй производной функции в случае когда эта функция задана параметрически. Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ такие, что существуют $x'(t_0) \neq 0$ и $y'(t_0)$, и пусть, кроме того, существуют производные $x''(t_0)$ и $y''(t_0)$, которые будем обозначать соответственно x''_{tt}, y''_{tt}. Тогда функция $y = y(x)$ имеет в точке x_0, где $x_0 = x(t_0)$, вторую производную $y''_{xx} = y''_{xx}(x_0)$, причем

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \frac{1}{x'_t}, \tag{4}$$

или

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}. \tag{5}$$

○ Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции

$$y''_{xx} = (y'_x)'_t \, t'_x,$$

где $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$, откуда следует формула (4), которую можно представить в виде (5). ●

Пример. Найти y''_{xx}, если $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $y = \operatorname{tg} t - t$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

△ Так как $x'_t = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$, $y'_t = \dfrac{1}{\cos^2 t} - 1 = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \sin t$, и по формуле (4) получаем

$$y''_{xx} = \cos t \, \frac{1}{x'_t} = \frac{\cos^3 t}{\sin t}. \quad \blacktriangle$$

Обратимся к вопросу о вычислении второй производной сложной и неявной функции.

Если функция $y = y(x)$ имеет вторую производную в точке x_0, а функция $z = z(y)$ — вторую производную в точке y_0, где $y_0 = y(x_0)$, то существует вторая производная в точке x_0 сложной функции $w = z(y(x))$, причем

$$w''(x_0) = z''_{yy}(y'_x)^2 + z'_y y''_{xx}, \tag{6}$$

где в правой части формулы (6) опущены обозначения аргументов.
○ Заметим сначала, что в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $w = z(y(x))$, так как функции $y(x)$ и $z(y)$ непрерывны соответственно в точках x_0 и y_0, причем $y_0 = y(x_0)$. По правилу дифференцирования сложной функции $w'_x = z'_y y'_x$, откуда $w''_{xx} = (z'_y)'_x y'_x + z'_y y''_{xx}$, где $(z'_y)'_x = z''_{yy} y'_x$. Формула (6) доказана. ●

Вторую производную неявной функции в простейших случаях часто удается найти с помощью дифференцирования тождества, которое получается при вычислении первой производной

Поясним это на примере.

Пример 3. Найти y''_{xx}, где $y = y(x)$ — неявная функция, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

△ В § 15 (пример 11) было показано, что

$$y'_x = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \tag{7}$$

Дифференцируя тождество (7) по x, получаем $y''_{xx} = -\dfrac{b^2}{a^2 y} + \dfrac{b^2 x}{a^2 y^2}\, y'_x$, откуда, используя формулу (7) и равенство $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, находим

$$y''_{xx} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}. \quad ▲$$

б) *Производная n-го порядка.* Производную от второй производной функции $f(x)$ называют третьей производной или производной третьего порядка этой функции и обозначают $f'''(x)$ или $f^{(3)}(x)$. Аналогично определяются производные любого порядка.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) производные $f'(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$. Если в точке $x \in (a, b)$ существует производная функции $f^{(n-1)}(x)$, то эту производную называют ***производной n-го порядка*** или *n-й производной функции* $f(x)$ и обозначают $f^{(n)}(x)$.

Таким образом, если функция $f(x)$ имеет в точке x производные до n-го порядка включительно, то

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

т. е.

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

2. Дифференциал n-го порядка. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда ее дифференциал

$$dy = f'(x)\,dx$$

в точке $x \in (a, b)$, который называют также *первым дифференциалом функции* f, зависит от двух переменных, а именно от x и dx.

Если дифференциал dx, совпадающий с приращением Δx независимого переменного x, не меняется (фиксирован), то дифференциал dy является функцией только от x. Дифференциал этой функции, т. е. дифференциал от $f'(x)\,dx$, где dx — постоянная величина, называют *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка функции* $y = f(x)$ *в точке* x и обозначают d^2y или d^2f. При этом предполагается, что при вычислении дифференциала $d(dy)$ (если он существует) приращение dx независимого переменного выбрано таким же, как и при вычислении первого дифференциала.

Пусть функция f имеет вторую производную в точке x. Тогда, пользуясь тем, что $dg = g'(x)\,dx$ и $d(Cg) = C\,dg$, где $C = \text{const}$, получаем

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = dx\,d(f'(x)) = dx\,f''(x)\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

Таким образом, при указанных выше условиях второй дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x существует, причем

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 = y''\,dx^2, \tag{21}$$

где

$$dx^2 = (dx)^2.$$

Аналогично, предполагая, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную n-го порядка, определим n-й *дифференциал* $d^n y$ как дифференциал от $d^{n-1}y$, т. е.

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Предполагая, что приращение независимого переменного при вычислении первого и всех последующих дифференциалов выбирается одним и тем же, легко доказать методом индукции формулу

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{22}$$

Из формулы (22) следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

т. е. производная n-го порядка функции $y = f(x)$ равна отношению дифференциала n-го порядка этой функции к n-й степени дифференциала независимого переменного.

Из формулы (22) следует, что

$$d^n x = 0 \quad \text{при} \quad n > 1,$$

т. е. дифференциал n-го порядка независимого переменного при $n \geqslant 2$ равен нулю.

Основные теоремы для дифференцируемых функций

1. Локальный экстремум и теорема Ферма. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что функция $f(x)$ определена в δ-окрестности точки x_0, т. е. на множестве $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, и пусть для всех $x \in U_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0). \tag{1}$$

Тогда говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум.*

Аналогично, если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in U_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0), \tag{2}$$

то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум.*

Локальный минимум и локальный максимум объединяются общим термином *локальный экстремум.* Функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 17.1, имеет локальные экстремумы в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, а именно минимумы при $x = 1$ и $x = 4$ и максимум при $x = 3$.

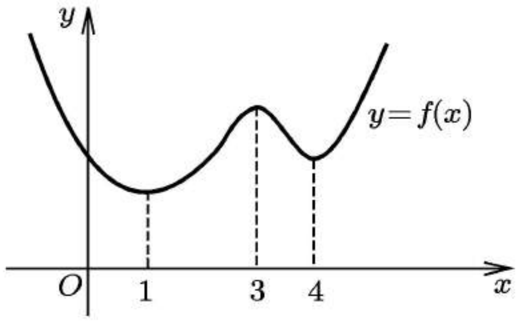


Рис. 17.1

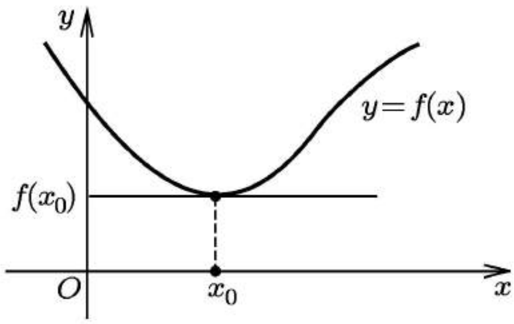


Рис. 17.2

Теорема 1 (Ферма). *Если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то*

$$f'(x_0) = 0. \tag{3}$$

○ Пусть, например, функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_0. Тогда в силу (1) для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$f(x) - f(x_0) \geqslant 0. \tag{4}$$

Если $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то $x - x_0 < 0$, и из условия (4) следует, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0, \tag{5}$$

а если $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0. \tag{6}$$

Так как функция f дифференцируема в точке x_0, то существует предел при $x \to x_0$ в левой части неравенства (5), равный $f'_-(x_0) = f'(x_0)$. По свойствам пределов из (5) следует, что

$$f'(x_0) \leqslant 0. \tag{7}$$

Аналогично, переходя к пределу в неравенстве (6), получаем

$$f'(x_0) \geqslant 0. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) следует, что $f'(x_0) = 0$. ●

З а м е ч а н и е 1. Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке локального экстремума $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси абсцисс (рис. 17.2).

2. Теорема Ролля о нулях производной.

Т е о р е м а 2 (Ролля). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, принимает в концах этого отрезка равные значения, т. е.*

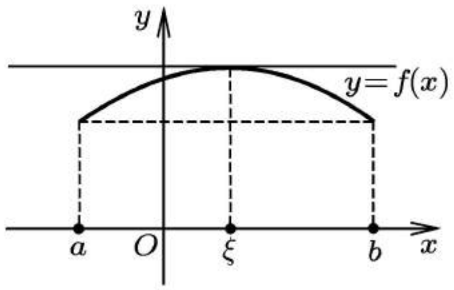
$$f(a) = f(b), \tag{9}$$

и дифференцируема на интервале (a, b), то существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$f'(\xi) = 0. \tag{10}$$

Теорему Ролля можно кратко сформулировать так: между двумя точками, в которых дифференцируемая функция принимает равные значения, найдется хотя бы один нуль производной этой функции. Для случая $f(a) = f(b) = 0$ теорема формулируется еще короче: между двумя нулями дифференцируемой функции лежит хотя бы один нуль ее производной.

З а м е ч а н и е 2. Геометрический смысл теоремы Ролля: при условиях теоремы 2 существует значение $\xi \in (a, b)$ такое, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна оси Ox (рис. 17.3).



3. Формула конечных приращений Лагранжа.

Т е о р е м а 3 (Лагранжа). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то в этом интервале найдется хотя бы одна точка ξ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{11}$$

○ Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda x,$$

где число λ выберем таким, чтобы выполнялось условие $\varphi(a) = \varphi(b)$, т. е. $f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$. Отсюда находим

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{12}$$

Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и принимает равные значения в концах этого интервала, то по теореме Ролля существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $\varphi'(\xi) = f'(\xi) + \lambda = 0$. Отсюда в силу условия (12) получаем равенство

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{13}$$

равносильное равенству (11). ●

Замечание 4. Правая часть формулы (13) равна угловому коэффициенту секущей, которая проходит через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$, а левая часть этой формулы равна угловому коэффициенту касательной к графику в точке $(\xi, f(\xi))$. Поэтому теорема Лагранжа имеет следующую геометрическую интерпретацию: существует значение $\xi \in (a,b)$ такое, что касательная к графику функции $y = f(x)$

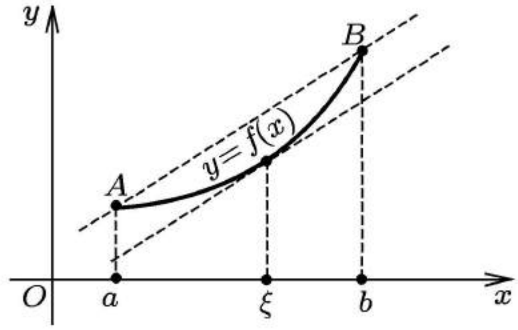


Рис. 17.7

в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна секущей (рис. 17.7), соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

Пример 1. Доказать, что

$$\ln(1+x) < x \quad \text{при} \quad x > 0, \tag{17}$$

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| \leqslant |x_2 - x_1|, \quad x_1 \in R, \quad x_2 \in R. \tag{18}$$

△ а) Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x) = \ln(1+x)$ на отрезке $[0,x]$, где $x > 0$, получаем $\ln(1+x) = \dfrac{1}{1+\xi}\,x$, откуда следует неравенство (17), так как $0 < \xi < x$.

б) По теореме Лагранжа для функции $\operatorname{arctg} x$ на отрезке с концами x_1 и x_2 находим

$$\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_2 - x_1),$$

откуда получаем $|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_2| = \dfrac{|x_2 - x_1|}{1+\xi^2} \leqslant |x_2 - x_1|$, так как $0 < \dfrac{1}{1+\xi^2} \leqslant 1$. ▲

Полагая в соотношении (18) $x_2 = x$, $x_1 = 0$, получаем

$$|\operatorname{arctg} x| \leqslant |x|, \quad x \in R, \tag{19}$$

4. Некоторые следствия из теоремы Лагранжа.

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, то*

$$f(x) = C = \text{const}, \quad x \in (a, b).$$

○ Пусть x_0 — фиксированная точка интервала (a, b), x — любая точка этого интервала. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке с концами x_0 и x, получаем

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi),$$

где $\xi \in (a, b)$, $f'(\xi) = 0$, откуда $f(x) = f(x_0) = C$. ●

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и для всех $x \in (a, b)$ выполняется равенство $f'(x) = k$, где k — постоянная, то*

$$f(x) = kx + B, \quad x \in [a, b],$$

т. е. f — линейная функция.

○ Применяя теорему Лагранжа к функции f на отрезке $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$, получаем $f(x) - f(a) = k(x - a)$, откуда следует, что $f(x) = kx + B$, где $B = f(a) - ka$. ●

Следствие 3. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), за исключением, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$, и непрерывна в точке x_0. Тогда если существует конечный или бесконечный*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) = A, \tag{21}$$

то в точке x_0 существует левая производная, причем

$$f'_-(x_0) = A. \tag{22}$$

Аналогично, если существует

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) = B, \tag{23}$$

то

$$f'_+(x_0) = B. \tag{24}$$

Следствие 4. *Если функции φ и ψ дифференцируемы при $x \geqslant x_0$ и удовлетворяют условиям $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ при $x > x_0$, то $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > x_0$.*

○ Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ на отрезке $[x_0, x]$, где $x > x_0$, получаем $f(x) = f'(\xi)(x - x_0)$, так как $f(x_0) = 0$. Отсюда, учитывая, что

$$\xi > x_0, \quad f'(\xi) = \varphi'(\xi) - \psi'(\xi) > 0,$$

получаем $f(x) > 0$, т. е. $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > x_0$. ●

5. Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши).

Теорема 4. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x) \neq 0$ во всех точках этого интервала, то найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a,b)$ такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{28}$$

○ Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x),$$

где число λ выберем таким, чтобы выполнялось равенство $\varphi(a) = \varphi(b)$, которое равносильно следующему:

$$f(b) - f(a) + \lambda(g(b) - g(a)) = 0. \tag{29}$$

Заметим, что $g(b) \neq g(a)$, так как в противном случае согласно теореме Ролля существовала бы точка $c \in (a,b)$ такая, что $g'(c) = 0$ вопреки условиям теоремы 4. Итак, $g(b) - g(a) \neq 0$, и из равенства (29) следует, что

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{30}$$

Так как функция φ при любом λ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), а при значении λ, определяемом формулой (30), принимает равные значения в точках a и b, то по теореме Ролля существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $\varphi'(\xi) = 0$, т. е. $f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$, откуда $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda$. Из этого равенства и формулы (30) следует утверждение (28). ●

Замечание 6. Теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши ($g(x) = x$).