ЛЕКЦИЯ 13

Несобственные интегралы

1. Определение несобственных интегралов. Интеграл Римана был введен для ограниченных на отрезке функций. Естественно поставить вопрос о распространении понятия интеграла на случай бесконечного промежутка, а также на случай, когда подынтегральная функция является неограниченной.

а) *Интеграл на бесконечном промежутке.* Рассмотрим функцию $\frac{1}{1+x^2}$. Эта функция непрерывна на отрезке $[0,\xi]$ при любом $\xi \geqslant 0$, и поэтому существует интеграл $J(\xi) = \int\limits_0^\xi \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}\xi$, откуда следует, что $\lim\limits_{\xi\to+\infty} J(\xi) = \frac{\pi}{2}$. В этом случае пишут $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, а символ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ называют несобственным интегралом от функции $\frac{1}{1+x^2}$ на бесконечном промежутке $[0,+\infty)$.

Число $\frac{\pi}{2}$ можно интерпретировать как площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \geqslant 0$, и координатными осями (рис. 38.1).

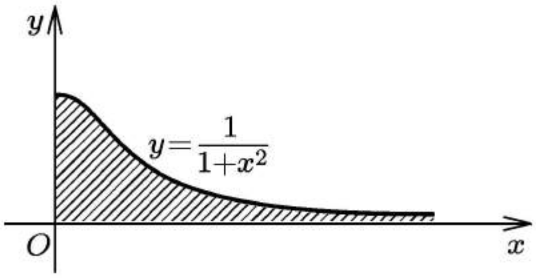

Рис. 38.1

Рассмотрим несобственный интеграл на бесконечном промежутке от функции f.

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$, где a — заданное число, и интегрируема на отрезке $[a,\xi]$ при любом $\xi \geqslant a$. Тогда символ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ будем называть несобственным интегралом от функции f на промежутке $[a,+\infty)$. Если существует конечный $\lim\limits_{\xi\to+\infty} \int\limits_a^\xi f(x)\,dx = A$, то говорят, что *несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и равен A, а функцию f называют *интегрируемой в несобственном смысле на промежутке* $[a,+\infty)$. Таким образом, сходящийся несобственный интеграл от функции f на промежутке $[a,+\infty)$ определяется равенством

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\xi\to+\infty} \int\limits_a^\xi f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если функция $\int\limits_a^\xi f(x)\,dx$ не имеет конечного предела при $\xi \to +\infty$, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

Определим, наконец, несобственный интеграл на промежутке R:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\xi\to-\infty\\ \eta\to+\infty}} \int\limits_\xi^\eta f(x)\,dx. \tag{3}$$

В этом случае предполагается, что функция f интегрируема (по Риману) на любом отрезке действительной оси, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется сходящимся в случае существования конечного предела (3), причем этот предел не должен зависеть от того, каким способом ξ и η стремятся соответственно к $-\infty$ и к $+\infty$. Иначе говоря, интеграл сходится тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{\xi\to-\infty} \int\limits_\xi^a f(x)\,dx = J_1$ и $\lim\limits_{\eta\to+\infty} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx = J_2$, где $a \in R$, и при этом несобственный интеграл по определению равен $J_1 + J_2$, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

б) *Интеграл на конечном промежутке.* Рассмотрим функцию $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Эта функция непрерывна на промежутке $[0,1)$, но не ограничена на этом промежутке. При любом $\xi \in [0,1)$ функция $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ интегрируема на отрезке $[0,\xi]$, причем $J(\xi) = \int\limits_0^\xi \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^\xi = 2(1-\sqrt{1-\xi})$, откуда следует, что существует конечный $\lim\limits_{\xi\to1-0} F(\xi) = 2$. В этом случае говорят, что несобственный интеграл от функции $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ на промежутке $[0,1)$ равен 2, т. е. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$. Число 2 можно интерпретировать как площадь заштрихованной на рис. 38.2 фигуры G.

Обратимся к несобственному интегралу на конечном промежутке. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a,b)$, интегрируема на отрезке $[a,\xi]$ при любом $\xi \in [a,b)$.

Если существует конечный $\lim\limits_{\xi \to b-0} \int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx = A$, то говорят, что *несобственный интеграл от функции* $f(x)$ *на промежутке* $[a,b)$ равен A. Его обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to b-0} \int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx. \qquad (5)$$

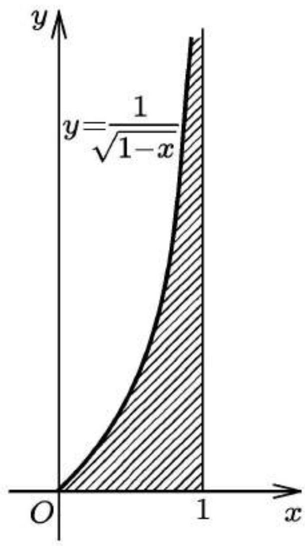

Рис. 38.2

В случае существования конечного предела (5) несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называют *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*; символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ употребляют как в случае сходимости, так и в случае расходимости интеграла.

Аналогично, если функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $(a,b]$, интегрируема на отрезке $[\xi,b]$ при любом $\xi \in (a,b]$, то символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называют несобственным интегралом от функции f на промежутке $(a,b]$.

Если существует конечный $\lim\limits_{\xi \to a+0} \int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx = A$, то говорят, что несобственный интеграл сходится и равен A, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to a+0} \int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Если функция $\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx$ не имеет конечного предела при $\xi \to a+0$, то несобственный интеграл называют расходящимся.

в) *Другие типы несобственных интегралов.* Если функция f определена на конечном интервале (a,b), интегрируема по Риману на отрезке $[\xi,\eta]$ при любых ξ, η таких, что $a < \xi \leqslant \eta < b$, то сходящийся несобственный интеграл от функции f на промежутке (a,b) определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\xi \to a+0 \\ \eta \to b-0}} \int\limits_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx \qquad (7)$$

при условии, что предел в правой части (7) существует и конечен.

Если функция f определена на отрезке $[a, b]$, за исключением точки $c \in (a, b)$, и интегрируема на отрезках $[a, \xi]$ и $[\eta, b]$ при любых ξ, η таких, что $a \leqslant \xi < c < \eta \leqslant b$, то несобственный интеграл от функции f на промежутке $[a, b]$ обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to c-0} \int\limits_a^\xi f(x)\,dx + \lim_{\eta \to c+0} \int\limits_\eta^b f(x)\,dx \tag{8}$$

при условии, что оба предела в правой части (8) существуют и конечны. В этом случае интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называют *сходящимся* и пишут

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

2. Свойства и вычисление несобственных интегралов. Будем рассматривать несобственные интегралы вида $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, предполагая, что:

а) функция f определена на промежутке $[a, b)$, где a — конечная точка, b — либо конечная точка, либо символ $+\infty$;

б) функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, \xi]$ при любом $\xi \in [a, b)$.

Согласно определению сходящегося несобственного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to b-0} \int\limits_a^\xi f(x)\,dx, \quad \text{если} \quad b \neq +\infty,$$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int\limits_a^\xi f(x)\,dx, \quad \text{если} \quad b = +\infty.$$

а) *Линейность интеграла.*

Утверждение 1. *Если сходятся несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a, b)$, то при любых $\lambda, \mu \in R$ сходится интеграл от функции $\lambda f(x) + \mu g(x)$ на том же промежутке и выполняется равенство*

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{9}$$

○ Для любого $\xi \in [a, b)$ в силу свойств интеграла Римана справедливо равенство

$$\int\limits_a^\xi (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int\limits_a^\xi f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^\xi g(x)\,dx,$$

правая часть которого имеет по условию конечный предел при $\xi \to b - 0$, откуда следует существование предела при $\xi \to b - 0$ в левой части и справедливость формулы (9). ●

б) *Формула Ньютона–Лейбница.*

Утверждение 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$ и если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный*
$$\lim_{\xi\to b-0} F(\xi) = F(b-0), \tag{10}$$
причем
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a). \tag{11}$$

в) *Интегрирование по частям.*

Утверждение 3. *Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ определены на промежутке $[a,b)$, имеют непрерывные производные на отрезке $[a,\xi]$ для любого $\xi\in(a,b)$. Если существует конечный предел*
$$\lim_{\xi\to b-0}[u(\xi)\,v(\xi)] = u(b-0)\,v(b-0) = uv\Big|_{\xi=b-0} \tag{12}$$
и интеграл $\int\limits_a^b vu'\,dx$ сходится, то и интеграл $\int\limits_a^b uv'\,dx$ сходится и справедлива формула интегрирования по частям
$$\int\limits_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^{b-0} - \int\limits_a^b vu'\,dx. \tag{13}$$

г) *Замена переменного.*

Утверждение 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha,\beta)$, строго возрастает и удовлетворяет условиям $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b$, то справедлива формула замены переменного*
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \tag{15}$$
при условии, что хотя бы один из интегралов в (15) сходится.

д) *Интегрирование неравенств.*

Утверждение 5. *Если сходятся интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ и для всех $x\in[a,b)$ выполняется неравенство*
$$f(x)\leqslant g(x),$$
то
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{17}$$

○ Неравенство (17) получается из неравенства

$$\int_a^\xi f(x)\,dx \leqslant \int_a^\xi g(x)\,dx, \quad a \leqslant \xi < b,$$

с помощью перехода к пределу при $\xi \to b - 0$. ●

3. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. В пп. 3–5 все утверждения формулируются и доказываются для интегралов того же типа, что и в п. 2.

Теорема 1. *Если для всех $x \in [a, b)$ выполняется неравенство*

$$f(x) \geqslant 0, \tag{18}$$

то для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\int_a^\xi f(x)\,dx$ была ограничена сверху, т. е.

$$\exists C\colon\ \forall \xi \in [a, b) \to \int_a^\xi f(x)\,dx \leqslant C. \tag{19}$$

○ Заметим, что $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$ — возрастающая функция. В самом деле, из условия (18) и свойств интеграла Римана следует, что

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in [a, b)\colon\ \xi_2 > \xi_1 \to F(\xi_2) - F(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, т. е. существует конечный $\lim\limits_{\xi \to b-0} F(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx = J$, то по теореме о пределе монотонной функции $J = \sup\limits_{a \leqslant \xi < b} F(\xi)$, откуда согласно определению точной верхней грани следует, что для всех $\xi \in [a, b)$ справедливо неравенство

$$\int_a^\xi f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. выполняется условие (19).

Обратно: если выполняется условие (19), то в силу теоремы о пределе монотонной функции (F — возрастающая функция) существует конечный

$$\lim_{\xi \to b-0} F(\xi) = F(b - 0) = \sup_{a \leqslant \xi < b} F(\xi),$$

т. е. интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится. ●

Теорема 2 (теорема сравнения). *Если для всех $x \in [a, b)$ выполняется условие*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \tag{20}$$

то:

а) *из сходимости интеграла* $J_2 = \int\limits_a^b g(x)\,dx$ *следует сходимость интеграла* $J_1 = \int\limits_a^b f(x)\,dx$;

б) *из расходимости интеграла* J_1 *следует расходимость интеграла* J_2.

○ а) Из условия (20) в силу правила оценки интеграла Римана следует, что

$$\int\limits_a^\xi f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^\xi g(x)\,dx, \quad \xi \in [a, b). \tag{21}$$

Если сходится интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, т. е. существует конечный $\lim\limits_{\xi \to b-0} \int\limits_a^\xi g(x)\,dx = J_2$, где $J_2 = \sup\limits_{a \leqslant \xi < b} \int\limits_a^\xi g(x)\,dx$ (теорема 1), то из (21) следует, что для любого $\xi \in [a, b)$ выполняется неравенство $\int\limits_a^\xi f(x)\,dx \leqslant$ $\leqslant J_2$. Таким образом, для неотрицательной функции $f(x)$ выполняется условие (19), и по теореме 1 интеграл J_1 сходится.

б) Если интеграл J_1 расходится, то интеграл J_2 тоже должен расходиться: в случае сходимости интеграла J_2 сходился бы по доказанному выше интеграл J_1. ●

Следствие. *Если для всех $x \in [a, b)$ выполняются условия*

$$f(x) > 0, \quad g(x) > 0, \tag{22}$$

и, кроме того,

$$f(x) \sim g(x) \quad \textit{при} \quad x \to b - 0, \tag{23}$$

то интегралы $J_1 = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $J_2 = \int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

4. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

Теорема 3. *Для сходимости несобственного интеграла*

$$J = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta_\varepsilon \in (a, b)\colon \ \forall \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon, b) \to \left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{27}$$

○ Обозначим

$$F(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)\,dx, \quad a \leqslant \xi < b. \tag{28}$$

Тогда сходимость интеграла J означает существование конечного предела функции $F(\xi)$ при $\xi \to b-0$, а этот предел, согласно критерию Коши для функций, существует в том и только том случае, когда функция F удовлетворяет условию

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \widetilde{\delta}_\varepsilon \in (a,b)\colon \ \forall \xi', \xi'' \in (\widetilde{\delta}_\varepsilon, b) \to |F(\xi'') - F(\xi')| < \varepsilon. \tag{29}$$

Из формулы (28) в силу свойств интеграла следует, что

$$F(\xi'') - F(\xi') = \int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)\,dx.$$

Поэтому условие (29), являясь необходимым и достаточным для сходимости интеграла J, выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие (27), если взять $\widetilde{\delta}_\varepsilon = \delta_\varepsilon$. ●

5. Абсолютно и условно сходящиеся интегралы. Несобственный интеграл $J = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется:

а) *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\widetilde{J} = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$;

в этом случае говорят, что функция f *абсолютно интегрируема* на промежутке $[a,b)$;

б) *условно сходящимся*, если интеграл J сходится, а интеграл $\widetilde{J}$ расходится.

Теорема 4. *Если несобственный интеграл $\widetilde{J}$ сходится, то интеграл J также сходится и выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{32}$$

○ Из сходимости интеграла $\widetilde{J}$ по теореме 3 (необходимое условие) следует, что для него выполняется условие Коши (27), т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon \in (a,b)\colon \ \forall \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon, b) \to \left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon. \tag{33}$$

По определению несобственного интеграла J функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке с концами ξ', ξ'', и поэтому функция $|f(x)|$ также интегрируема по Риману на этом отрезке. Применяя правило оценки интеграла, получаем

$$\left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int\limits_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|\,dx \right|,$$

откуда в силу (33) следует, что функция f удовлетворяет условию Коши (27), и по теореме 2 (достаточное условие) сходится интеграл J.

Для доказательства неравенства (32) воспользуемся неравенством

$$\left|\int_a^\xi f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^\xi |f(x)|\,dx, \tag{34}$$

справедливым при любом $\xi \in [a,b)$. В силу сходимости интегралов J и $\widetilde{J}$ существуют пределы при $\xi \to b-0$ левой и правой частей (34), равные соответственно J и $\widetilde{J}$. Переходя в (34) к пределу при $\xi \to b-0$, получаем неравенство (32). ●

При исследовании сходимости интегралов часто может оказаться полезным следующее утверждение.

Теорема 5. *Если функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[a,b)$, т. е. несобственный интеграл $\widetilde{J} = \int_a^b |g(x)|\,dx$ сходится, то несобственные интегралы $J_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ и $J_2 = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$ либо оба абсолютно сходятся, либо оба условно сходятся, либо оба расходятся.*

Теорему 5 коротко можно сформулировать так: прибавление (вычитание) под знаком интеграла абсолютно интегрируемой функции не влияет ни на сходимость интеграла, ни на характер сходимости (абсолютная, условная сходимость).

6. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

Теорема 6 (признак Дирихле). *Пусть функция f непрерывна, а функция g имеет непрерывную производную на промежутке $[a,+\infty)$ и выполняются следующие условия:*

1) *функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (первообразная для f) ограничена на $[a,+\infty)$, т. е.*

$$\exists\, M > 0\colon\ \forall x \in [a,+\infty) \to |F(x)| \leqslant M; \tag{36}$$

2) *функция $g'(x)$ не меняет знака на промежутке $[a,+\infty)$, т. е.*

$$g'(x) \leqslant 0 \tag{37}$$

или

$$g'(x) \geqslant 0; \tag{38}$$

3)
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0. \tag{39}$$

Тогда интеграл

$$J = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \tag{40}$$

сходится.

○ Покажем, что функция fg удовлетворяет на промежутке $[a, +\infty)$ условию Коши (27). Согласно формуле интегрирования по частям для $\xi' > a$, $\xi'' > a$ получаем

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)\, g(x)\, dx = F(x)\, g(x)\Big|_{\xi'}^{\xi''} - \int_{\xi'}^{\xi''} F(x)\, g'(x)\, dx. \tag{41}$$

Из условия (36) следует, что

$$\left| (Fg)\Big|_{\xi'}^{\xi''} \right| \leqslant M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|), \tag{42}$$

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} F(x)\, g'(x)\, dx \right| \leqslant M \left| \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)|\, dx \right|. \tag{43}$$

Заметим, что $|g'(x)| = -g'(x)$, если выполнено условие (37), и $|g'(x)| = g'(x)$, если выполнено условие (38). Поэтому в первом случае $J_1 = \int\limits_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)|\, dx = -\int\limits_{\xi'}^{\xi''} g'(x)\, dx = g(\xi') - g(\xi'')$, а во втором случае $J_1 = g(\xi'') - g(\xi')$. Следовательно,

$$|J_1| = \left| \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)|\, dx \right| = |g(\xi'') - g(\xi')| \leqslant |g(\xi')| + |g(\xi'')|. \tag{44}$$

Поэтому из равенства (41), используя оценки (42)–(44), получаем неравенство

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) g(x)\, dx \right| \leqslant 2M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|). \tag{45}$$

Согласно условию (39)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta_\varepsilon > a\colon \ \forall x \in [\delta_\varepsilon, +\infty) \to |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{46}$$

Поэтому для ξ', $\xi'' \in [\delta_\varepsilon, +\infty)$ из (45) и (46) следует, что

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)\, g(x)\, dx \right| < 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \varepsilon,$$

т. е. функция fg удовлетворяет на промежутке $[a, +\infty)$ условию Коши (27), и по теореме 3 интеграл (40) сходится. ●

Следствие (признак Абеля). *Если функция f непрерывна на промежутке $\Delta = [a, +\infty)$, интеграл $J = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, а функция $g(x)$ ограничена на Δ и ее производная $g'(x)$ не меняет знака на Δ (удовлетворяет условию (37) или (38)), то интеграл (40) сходится.*