ЛЕКЦИЯ 10

Разложение рациональной функции на простые дроби

Разложение многочлена на множители.

Пусть $x_0 = \gamma + i\delta$ — невещественный корень ($\delta \neq 0$) многочлена $Q_n(x)$; тогда число $\overline{x}_0 = \gamma - i\delta$ также является корнем этого многочлена и

$$(x - x_0)(x - \overline{x}_0) = (x - \gamma - i\delta)(x - \gamma + i\delta) = (x - \gamma)^2 + \delta^2 = x^2 + px + q,$$

где $p = -2\gamma$, $q = \gamma^2 + \delta^2$, $p^2 - 4q = -4\delta^2 < 0$. Таким образом, многочлен $Q_n(x)$ в этом случае делится без остатка на квадратный трехчлен $x^2 + px + q$, коэффициенты которого являются действительными числами, а дискриминант трехчлена отрицателен, т. е. $p^2 - 4q < 0$. Это означает, что существует такой многочлен $\widetilde{Q}_{n-2}(x)$ с действительными коэффициентами, что

$$Q_n(x) = (x^2 + px + q)\widetilde{Q}_{n-2}(x).$$

Если число $x_0 = \gamma + i\delta$, где $\delta \neq 0$, является корнем многочлена $Q_n(x)$ кратности s, то число $\overline{x}_0$ также будет корнем этого многочлена кратности s, и поэтому многочлен $Q_n(x)$ можно представить в виде

$$Q_n(x) = (x - x_0)^s (x - \overline{x}_0)^s \widetilde{Q}_{n-2s}(x),$$

или

$$Q_n(x) = (x^2 + px + q)^s \widetilde{Q}_{n-2s}(x), \tag{9}$$

где p, q — действительные числа, $p^2 - 4q < 0$, а $\widetilde{Q}_{n-2s}(x)$ — многочлен степени $n - 2s$ с действительными коэффициентами, для которого числа x_0 и $\overline{x}_0$ не являются его корнями, т. е.

$$\widetilde{Q}_{n-2s}(x_0) \neq 0, \quad \widetilde{Q}_{n-2s}(\overline{x}_0) \neq 0. \tag{10}$$

Пусть $a_1, a_2, ..., a_k$ — все действительные корни многочлена $Q_n(x)$, а их кратности соответственно равны $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. Тогда

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} ... (x - a_k)^{\alpha_k} R(x), \tag{11}$$

где $R(x)$ — многочлен степени $t = n - \sum\limits_{m=1}^{k} \alpha_m$ с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней.

Если $R(x)$ — многочлен ненулевой степени, то каждой паре комплексно сопряженных корней x_j и $\overline{x}_j$ кратности β_j многочлена $Q_n(x)$ соответствует множитель $(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j}$ в формуле (11), где $p_j^2 - 4q_j < 0$. Поэтому

$$Q_n(x) = c_n (x - a_1)^{\alpha_1} ... (x - a_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} ... (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}, \tag{12}$$

где $\sum_{m=1}^{k} \alpha_m + 2\sum_{j=1}^{s} \beta_j = n$.

Таким образом, зная все действительные и невещественные корни многочлена с действительными коэффициентами $Q_n(x)$, можно этот многочлен разложить на множители, т. е. представить в виде (12), где числа c_n, $a_1, ..., a_k$, $p_1, ..., p_s$, $q_1, ..., q_s$ являются действительными.

Лемма 2. *Если* $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *— правильная дробь, а число* $x_0 = \gamma + i\delta$ *— невещественный корень многочлена* $Q_n(x)$ *кратности* s, *то существуют действительные числа* B *и* D, *а также многочлен* $\widetilde{P}(x)$ *с действительными коэффициентами такие, что*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Bx + D}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1}\widetilde{Q}_{n-2s}(x)}, \tag{18}$$

причем второе слагаемое в правой части равенства (18) *— правильная дробь, числа* B, D *и коэффициенты многочлена* $\widetilde{P}(x)$ *определяются однозначно, а многочлен* $\widetilde{Q}_{n-2s}(x)$ *— частное от деления* $Q_n(x)$ *на* $(x^2 + px + q)^s$, *где* $x^2 + px + q = (x - x_0)(x - \overline{x}_0)$.

○ Найдем такие числа B и D, чтобы многочлен

$$\psi(x) = P_m(x) - (Bx + D)\widetilde{Q}_{n-2s}(x) \tag{19}$$

делился без остатка на $x^2 + px + q$. Это будет выполняться в силу теорем 1 и 2 тогда и только тогда, когда число x_0 будет корнем многочлена $\psi(x)$, т. е. в случае, когда $\psi(x_0) = 0$ или

$$P_m(x_0) - (Bx_0 + D)\widetilde{Q}_{n-2s}(x_0) = 0. \tag{20}$$

Из равенства (20) в силу условия (10) получаем

$$Bx_0 + D = \frac{P_m(x_0)}{\widetilde{Q}_{n-2s}(x_0)}. \tag{21}$$

Пусть c и d — соответственно действительная и мнимая части дроби, стоящей в правой части равенства (21). Тогда это равенство примет вид

$$D + B(\gamma + i\delta) = c + id,$$

откуда, предполагая, что B и D — действительные числа, получаем

$$\begin{cases} B\gamma + D = c, \\ \delta B = d. \end{cases} \tag{22}$$

Так как $\delta \neq 0$, то из системы уравнений (22) однозначно определяются действительные числа B и D такие, для которых выполняется условие $\psi(x_0) = 0$, и поэтому при значениях B и D, удовлетворяющих системе (22) или условию (21), многочлен $\psi(x)$ делится без остатка на $x^2 + px + q$.

Следовательно, существует единственный многочлен с действительными коэффициентами $\widetilde{P}(x)$ такой, что

$$\psi(x) = (x^2 + px + q)\widetilde{P}(x). \tag{23}$$

Из равенств (19) и (23) следует, что

$$P_m(x) - (Bx + D)\widetilde{Q}_{n-2s}(x) = (x^2 + px + q)\widetilde{P}(x). \tag{24}$$

Разделив обе части равенства (24) на $Q_n(x) = (x^2 + px + q)^s\widetilde{Q}_{n-2s}(x)$, получим соотношение (18), в котором дробь $\dfrac{\widetilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1}\widetilde{Q}_{n-2s}(x)} = \dfrac{\psi(x)}{Q_n(x)}$ является правильной. В самом деле, если r — степень многочлена $\psi(x)$, то $r \leqslant m$ и $r \leqslant n - 2s + 1$, откуда следует, что $r \leqslant n - 1$. ●

Следствие. *Применив эту лемму s раз, получим*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_s x + D_s}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{B_{s-1}x + D_{s-1}}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \ldots + \frac{B_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{P^*(x)}{\widetilde{Q}_{n-2s}(x)}, \tag{25}$$

где B_j, D_j $(j = \overline{1, s})$ — действительные числа, $P^*(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, дробь $P^*(x)/\widetilde{Q}_{n-2s}(x)$ является правильной, причем многочлен $\widetilde{Q}_{n-2s}(x)$ не делится нацело на $x^2 + px + q$.

Теорема 4. *Если $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно, причем $m < n$ и коэффициенты этих многочленов — действительные числа, а $Q_n(x)$ представляется в виде* (12), *то*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(\alpha_1 - 1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_1^{(1)}}{x - a_1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x - a_k)^{\alpha_k}} + \ldots + \frac{A_k^{(1)}}{x - a_k} + \frac{B_1^{(\beta_1)}x + D_1^{(\beta_1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{B_s^{(\beta_s)}x + D_s^{(\beta_s)}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}} + \ldots + \frac{B_s^{(1)}x + D_s^{(1)}}{x^2 + p_s x + q_s},$$

или

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_l} \frac{A_l^{(j)}}{(x - a_l)^j} + \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_l^{(j)}x + D_l^{(j)}}{(x^2 + p_l x + q_l)^j}. \tag{26}$$

Все коэффициенты разложения (26) *являются действительными числами и определяются однозначно.*

○ Применяя лемму 1, выделим сначала простые (элементарные) дроби вида $A_1^{(p)}/(x - a_1)^p$, где p принимает значения от 1 до α_1. Затем к дроби $P^*(x)/Q^*_{n-\alpha_1}(x)$ снова применим лемму 1 (формула (17)) и т. д., пока не выделим простые дроби, соответствующие всем действительным корням многочлена $Q_n(x)$. В результате правильная дробь $P_m(x)/Q_n(x)$ будет представлена в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_l} \frac{A_l^{(j)}}{(x-a_l)^j} + \frac{P(x)}{Q^*_{n-t}(x)}, \tag{27}$$

где $t = n - \sum\limits_{l=1}^{k} \alpha_l$, $P(x)/Q^*_{n-t}(x)$ — правильная дробь, а многочлен $Q^*_{n-t}(x)$ не имеет действительных корней.

Применяя к каждой паре комплексно сопряженных корней многочлена $Q_n(x)$ лемму 2 (формула (25)), получим

$$\frac{P(x)}{Q^*_{n-t}(x)} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_l^{(j)}x + D_l^j}{(x^2+p_l x+q_l)^j}. \tag{28}$$

Из формул (27) и (28) следует равенство (26), которое дает разложение правильной рациональной дроби на простые (элементарные) дроби. ●

Интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических и гиперболических функций

1. Интегрирование рациональных функций. Выше (теорема 4) было доказано, что всякая функция вида $P_m(x)/Q_n(x)$, где P_m и Q_n — многочлены с действительными коэффициентами степеней m и n соответственно и $m < n$, т. е. *правильная рациональная дробь*, представляется в виде суммы простых дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^r}, \quad r \in N, \tag{1}$$

$$\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}, \quad k \in N, \quad p^2-4q<0. \tag{2}$$

Если *дробь* $P_m(x)/Q_n(x)$ является *неправильной* ($m \geqslant n$), то, разделив числитель на знаменатель, например, способом “деления в столбик”, эту дробь можно записать в виде

$$P_m(x)/Q_n(x) = S(x) + R(x)/Q_n(x),$$

где $S(x)$ — многочлен (частное от деления P_m на Q_n), $R(x)$ — остаток от деления, $R(x)/Q_n(x)$ — правильная дробь. Например, дробь $x^4/(x^2-x+1)$ является неправильной. Выполняя деление x^4 на $x^2 - x + 1$, получаем

$$\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\qquad & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
-x^4+x^3-x^2 & x^2+x \\ \hline
x^3-x^2 & \\
-x^3+x^2-x & \\ \hline
-x &
\end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{x^4}{x^2-x+1} = x^2 + x - \frac{x}{x^2-x+1}. \tag{3}$$

Обратимся к интегрированию рациональных дробей. Рассмотрим сначала дроби вида (1). Если $r = 1$, то

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C,$$

а если $r > 1$, то

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^r} = \frac{A}{(1-r)(x-a)^{r-1}} + C.$$

Таким образом, при интегрировании дроби (1) получается либо логарифмическая функция ($r = 1$), либо правильная рациональная дробь ($r > 1$).

Обозначим

$$J_k = \int \frac{Bx + D}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$$

Так как $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$, где $q - \frac{p^2}{4} > 0$, то, полагая $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = a$, $x + \frac{p}{2} = t$, получаем

$$J_k = \int \frac{B\left(t - \frac{p}{2}\right) + D}{(t^2+a^2)^k}\,dt.$$

Следовательно, интеграл J_k является линейной комбинацией интегралов

$$J'_k = \int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} \quad \text{и} \quad J''_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

При $k = 1$ эти интегралы соответственно равны:

$$J'_1 = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+px+q) + C,$$

$$J''_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x + p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Если $k > 1$, то

$$J'_k = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C,$$

а интеграл J_k'' можно вычислить с помощью полученной ранее рекуррентной формулы, причем согласно этой формуле J_k'' является линейной комбинацией правильной рациональной дроби и арктангенса.

Таким образом, интеграл от любой рациональной дроби представляется в виде линейной комбинации многочлена (если рассматривается неправильная дробь), правильной рациональной дроби, логарифмической функции и арктангенса.

Пример 1. Найти $J = \int \frac{x^4}{x^2 - x + 1}\, dx$.

$\triangle$ Запишем равенство (3) в следующем виде:

$$\frac{x^4}{x^2 - x + 1} = x^2 + x - \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Отсюда находим

$$J = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacktriangle$$

2. Интегрирование иррациональных функций. Многие часто встречающиеся в приложениях интегралы от иррациональных функций удается преобразовать в интегралы от рациональных функций с помощью различных подстановок.

Здесь и в дальнейшем будем обозначать буквой R рациональную функцию. Например, запись $R(u, v)$ будет означать, что рассматривается *рациональная функция переменных* u, v, т. е. функция, представимая в виде $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$, где P и Q — многочлены относительно u, а коэффициенты этих многочленов являются многочленами относительно v. Так, $\frac{u^2 - 3uv + 4v^2u^3 - 1}{u^4v + v - u^2v^2}$ — рациональная функция относительно u и v, $\frac{\sin^3 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 1}{\cos^4 x - 2\,\mathrm{ctg}^2 x}$ — рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Рассмотрим некоторые типы интегралов от рациональных функций.

а) Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx, \tag{9}$$

где $r_k \in \mathbb{Q}$ $(k = \overline{1, n})$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$$

(p — общий знаменатель рациональных чисел $r_1, \ldots, r_n$) приводятся к интегралу от рациональной функции б) Интегралы вида

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a \neq 0, \quad b^2-4ac \neq 0, \tag{10}$$

можно представить в виде

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + R_2(x),$$

где R_1 и R_2 — рациональные дроби. Записывая $R_1(x)$ в виде суммы многочлена $P_n(x)$ и суммы простых дробей, сведем интеграл (10) к линейной комбинации интегралов следующих трех типов:

а) $$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx; \tag{14}$$

б) $$\int \frac{dx}{(x-a)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad r \in N; \tag{15}$$

в) $$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad k \in N, \quad p^2-4q<0. \tag{16}$$

При нахождении интеграла (14), где $P_n(x)$ — многочлен степени n, удобно использовать формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{17}$$

В этой формуле $Q(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$, λ — некоторое число. Дифференцируя тождество (17) и умножая затем обе части получаемого соотношения на $2\sqrt{ax^2+bx+c}$, находим

$$2P_n(x) = 2Q'(x)(ax^2+bx+c) + Q(x)(2ax+b) + 2\lambda. \tag{18}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в тождестве (18), вычислим коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число λ. Заметим, что интеграл в правой части формулы (17) сводится к табличному с помощью линейной подстановки.

Рассмотрим интеграл (15). Подстановкой

$$t = \frac{1}{x-\alpha}$$

этот интеграл сводится к интегралу (14).

Обратимся, наконец, к интегралу (16). Если существует число ω такое, что для всех $x \in R$ выполняется равенство $ax^2+bx+c = \omega(x^2+px+q)$, т. е. $b = ap$, $c = aq$, то интеграл (16) можно представить в виде линейной комбинации интегралов

$$J_1 = \int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^{k+1/2}} \quad \text{и} \quad J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k+1/2}}.$$

Интеграл J_1 сводится к табличному, а интеграл J_2 *подстановкой Абеля*

$$u = (\sqrt{x^2 + px + q})' = \frac{2x + p}{2\sqrt{x^2 + px + q}} \tag{19}$$

сводится к интегралу от многочлена.

Если $b \neq ap$, то используется подстановка

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}, \tag{20}$$

где числа α и β подбираются такими, чтобы коэффициенты при t в квадратных трехчленах подынтегральной функции обратились в нуль. При этом интеграл (16) примет вид

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\mu t^2 + \nu}}, \tag{21}$$

где $P(t)$ — многочлен степени $2k - 1$, $\lambda > 0$.

Заметим, что если $b = ap$, но $c \neq aq$ (случай $b = ap$, $c = aq$ рассмотрен выше), то вместо подстановки (20) можно применить подстановку $x = t - \dfrac{p}{2}$.

Чтобы вычислить интеграл (21), разложим правильную рациональную дробь на простые дроби и представим интеграл (21) в виде линейной комбинации интегралов вида

$$J' = \int \frac{t\,dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\mu t^2 + \nu}} \quad \text{и} \quad J'' = \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\mu t^2 + \nu}}, \quad \text{где} \quad m \in \mathsf{N}.$$

Интеграл J' вычисляется с помощью подстановки $u^2 = \mu t^2 + \nu$, а интеграл J'' — с помощью подстановки Абеля $v = \dfrac{\mu t}{\sqrt{\mu t^2 + \nu}}$.

в) Интеграл вида

$$\int x^m (ax^n + b)^p\,dx, \tag{22}$$

где a, b — действительные, m, n, p — рациональные числа, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, называют *интегралом от дифференциального бинома.* Интеграл (22) сводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях:

$$1)\ p \in \mathsf{Z}; \qquad 2)\ \frac{m+1}{n} \in \mathsf{Z}; \qquad 3)\ \frac{m+1}{n} + p \in \mathsf{Z}.$$

В первом случае применяется подстановка $x = t^q$, где q — общий знаменатель дробей m и n, во втором и третьем случаях — соответственно подстановки

$$ax^n + b = t^s \quad \text{и} \quad a + bx^{-n} = t^s,$$

где s — знаменатель дроби p.

3. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций.

а) Интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{23}$$

где $R(u,v)$ — рациональная функция от u и v, можно свести к интегралу от рациональной дроби с помощью подстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi), \tag{24}$$

так как

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Пример 8. Найти интегралы $\int \frac{dx}{\sin x}$ и $\int \frac{dx}{\cos x}$.

△ а) Применяя подстановку (24), получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \tag{25}$$

б) Используя формулу (25), находим

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \quad ▲$$

Интеграл вида

$$\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)\, dx, \tag{27}$$

где $R(u,v)$ — рациональная функция от u и v, сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью подстановки

$$t = \operatorname{th}\frac{x}{2},$$

так как $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1-t^2}$.

Иногда более эффективными при вычислении интеграла (27) могут оказаться подстановки $t = \operatorname{sh} x$, $t = \operatorname{ch} x$, $t = \operatorname{th} x$, $t = \operatorname{ch} 2x$ или метод интегрирования по частям.

Пример 11. Найти $J = \int \operatorname{ch}^5 x \operatorname{sh}^4 x\, dx$.

△ Так как $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$, $\operatorname{ch} x\, dx = d(\operatorname{sh} x)$, то, полагая $\operatorname{sh} x = t$, получаем

$$J = \int (1+t^2)^2 t^4\, dt = \frac{t^5}{5} + \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$
$$= \operatorname{sh}^5 x\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{7}\operatorname{sh}^2 x + \frac{1}{9}\operatorname{sh}^4 x\right) + C. \quad ▲$$