ЛЕКЦИЯ 9

Комплексные числа

Известно, что квадратное уравнение с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом не имеет вещественных корней. В частности, уравнение

$$z^2 + 1 = 0$$

не имеет корней на множестве R. Возникает потребность расширить множество R так, чтобы на более широком множестве было разрешимо квадратное уравнение с любыми вещественными коэффициентами.

1. Определение комплексного числа. *Комплексными числами* называют пары (x, y) вещественных (действительных) чисел x и y, для которых следующим образом определены понятие равенства и операции сложения и умножения.

Обозначим комплексное число (x, y) буквой z, т. е. положим $z = (x, y)$. Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. Два комплексных числа z_1 и z_2 считаются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, т. е.

$$\{(x_1, y_1) = (x_2, y_2)\} \Leftrightarrow \{x_1 = x_2\} \wedge \{y_1 = y_2\}.$$

Сумма и произведение комплексных чисел z_1 и z_2 обозначаются соответственно $z_1 + z_2$ и $z_1 z_2$ и определяются формулами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2), \tag{1}$$

$$z_2 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) следуют соотношения

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0),$$

которые показывают, что операции над комплексными числами вида $(x, 0)$ совпадают с операциями над действительными числами. Поэтому комплексное число вида $(x, 0)$ отождествляют с действительным числом x, т. е. полагают $(x, 0) = x$.

Среди комплексных чисел особую роль играет число $(0, 1)$, которое называют *мнимой единицей* и обозначают i, т. е.

$$i = (0, 1).$$

Вычислив произведение i на i по формуле (2), получим

$$i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

т. е. $i^2 = -1$. Используя формулы (1), (2), находим

$$i \cdot y = (0, 1)(y, 0) = (0, y), \quad (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Следовательно, любое комплексное число $z = (x, y)$ можно записать в виде $x + iy$, т. е.

$$z = x + iy. \tag{3}$$

Запись комплексного числа $z = (x, y)$ в виде (3) называют *алгебраической формой комплексного числа.*

В записи (3) число x называют *действительной частью комплексного числа* и обозначают $\operatorname{Re} z$, а число y — *мнимой частью* и обозначают $\operatorname{Im} z$, т. е.

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Если $x = 0$, т. е. $z = iy$, то такое комплексное число называют *чисто мнимым.*

Здесь и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, в записи $x + iy$ числа x и y считаются действительными (вещественными).

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ обозначают $|z|$ и называют *модулем* комплексного числа z, т. е.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4}$$

Заметим, что $|z| \geqslant 0$ и $\{|z| = 0\} \Leftrightarrow \{z = 0\}$.

Комплексное число $x - iy$ называют *сопряженным комплексному числу $z = x + iy$* и обозначают $\overline{z}$, т. е.

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy. \tag{5}$$

Из равенств (4) и (5) следует, что

$$|z| = |\overline{z}|, \quad z\overline{z} = |z|^2, \tag{6}$$

так как $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

2. Свойства операций. Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами:

а) *коммутативности*, т. е.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

б) *ассоциативности*, т. е.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$

в) *дистрибутивности*, т. е.

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Эти свойства вытекают из определения операций сложения и умножения комплексных чисел и свойств операций для вещественных чисел.

Из этих свойств следует, что сложение и умножение комплексных чисел можно выполнять по правилам действий с многочленами, заменяя i^2 на -1. Например, равенство (2) можно получить так:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$
$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Множество комплексных чисел обозначают буквой C. Числа $0 = 0 + 0 \cdot i$ и $1 = 1 + 0 \cdot i$ на множестве C обладают такими же свойствами, какие они имеют на множестве R, а именно: для любого $z \in C$ справедливы равенства

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z.$$

На множестве C вычитание вводится как операция, обратная сложению. Для любых комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ существует, и притом только одно, число z такое, что

$$z + z_2 = z_1. \tag{7}$$

Это число называют *разностью* чисел z_1 и z_2 и обозначают $z_1 - z_2$. В частности, разность $0 - z$ обозначают $-z$.

Из уравнения (7) в силу правила равенства и определения суммы комплексных чисел следует, что

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Деление на множестве C вводится как операция, обратная умножению, а *частным* от деления комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на число $z_2 = x_2 + iy_2$ называют такое число z, которое удовлетворяет уравнению

$$zz_2 = z_1 \tag{8}$$

и обозначается $z_1 : z_2$ или $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Докажем, что уравнение (8) для любых комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2 \neq 0$, имеет единственный корень.

○ Умножая обе части уравнения (8) на $\overline{z}_2$, получим в силу равенства (6) уравнение

$$z|z_2|^2 = z_1\overline{z}_2, \tag{9}$$

которое равносильно уравнению (8), так как $\overline{z}_2 \neq 0$.

Умножая обе части (9) на $\dfrac{1}{|z_2|^2}$, получаем $z = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}$, т. е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2},$$

или

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_2 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad \bullet$$

Эту формулу можно не запоминать — важно знать, что она получается умножением числителя и знаменателя на число, сопряженное со знаменателем.

Пример 1. Найти частное $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 3 + 4i$.

△ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(5 - 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \dfrac{15 - 26i + 8i^2}{25} = \dfrac{7}{25} - \dfrac{26}{25}\,i$. ▲

3. Геометрическая интерпретация комплексного числа. а) *Комплексная плоскость.* Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой плоскости с координатами (x, y), и эта точка обозначается той же буквой z.

Такое соответствие между множеством C и точками плоскости является взаимно однозначным: каждому числу $z \in C$ соответствует одна точка плоскости с координатами (x, y), и наоборот, каждой точке плоскости с координатами (x, y) соответствует одно комплексное число $z = x + iy$. Поэтому слова "комплексное число" и "точка плоскости" часто употребляются как синонимы.

При этом действительные числа, т. е. числа вида $x + 0 \cdot i$, изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые числа, т. е. числа вида $iy = 0 + iy$ — точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называют *действительной* осью, а ось ординат — *мнимой* осью. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью.*

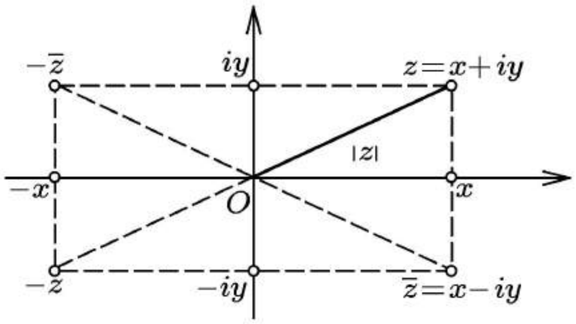

Рис. 31.1

На рис. 31.1 изображены точки z, $-z$, $\overline{z}$, $-\overline{z}$. Отметим, что точки z и $-z$ симметричны относительно точки 0, а точки z и $\overline{z}$ симметричны относительно действительной оси.

4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Пусть r и φ — полярные координаты точки $z = x + iy$ комплексной плоскости (рис. 31.4); тогда

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{11}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, φ — угол между действительной осью и вектором z, отсчитываемый от положительного направления действительной оси. Если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке — отрицательной. Этот угол называют *аргументом комплексного числа* z $(z \neq 0)$ и обозначают $\arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, поэтому в дальнейшем при использовании понятия аргумента предполагается, что $z \neq 0$.

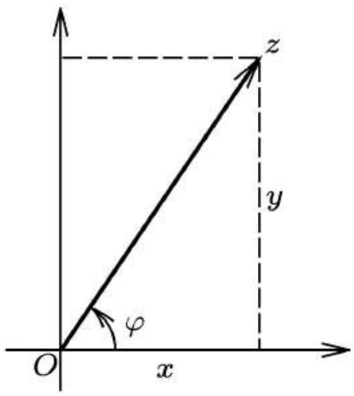

Рис. 31.4

Из равенств (11) следует, что любое комплексное число $z = x + iy$, где $z \neq 0$, представляется в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{12}$$

Запись комплексного числа $z \neq 0$ в виде (12) называют *тригонометрической формой комплексного числа.*

Из формул (11) находим

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{13}$$

Для нахождения аргумента обычно пользуются формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \tag{14}$$

получаемой почленным делением второго из равенств (13) на первое. Следует иметь в виду, что не все значения φ, удовлетворяющие уравнению (14), являются аргументами числа z.

Если $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$, то из формулы (12) получаем $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. для любого $\varphi \in R$ функция $e^{i\varphi}$ определяется *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{15}$$

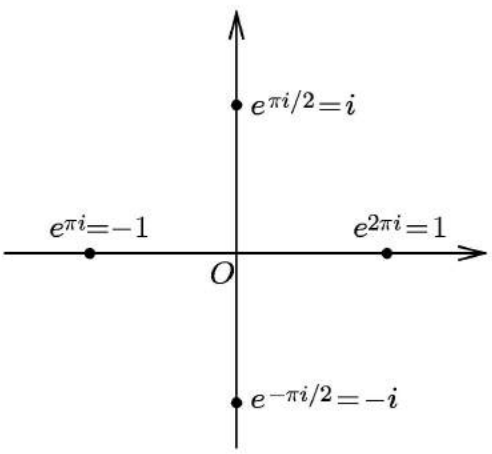

Рис. 31.5

Из формулы (15) следует, что $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\pi i/2} = i$, $e^{-\pi i/2} = -i$ (рис. 31.5) и $|e^{i\varphi}| = 1$ для любого $\varphi \in R$.

Заменяя в равенстве (15) φ на $-\varphi$, получаем

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \tag{16}$$

а из равенств (15) и (16) следует, что

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \tag{17}$$

Отметим, что

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{18}$$

Для доказательства формул (18) следует воспользоваться формулами (15) и (2), а также формулами синуса и косинуса суммы (разности) углов. С помощью индукции из (18) можно получить *формулу Муавра*

$$e^{in\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n \in N.$$

Используя формулы (12) и (15), запишем комплексное число $z \neq 0$ в *показательной форме*

$$z = re^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z. \tag{19}$$

С помощью равенств (18) можно получить формулы для произведения и частного комплексных чисел: если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{20}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0. \tag{21}$$

Из геометрической интерпретации (рис. 31.4) следует правило равенства двух комплексных чисел в показательной форме: если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

5. Извлечение корня. Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \tag{22}$$

где $a \neq 0$ — комплексное число, n — натуральное число.

Если $z = re^{i\varphi}$, $a = \rho e^{i\theta}$, то уравнение (22) примет вид

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta},$$

откуда

$$r^n = \rho, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in Z,$$

и поэтому

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{1}{n}(\theta + 2k\pi), \quad k \in Z, \tag{23}$$

т. е. числа

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\varphi_k} \tag{24}$$

являются корнями уравнения (22) и других корней это уравнение не имеет.

6. Комплекснозначные функции действительного переменного. Если каждому значению $t \in [\alpha, \beta]$ поставлено в соответствие комплексное число $z = z(t)$, то говорят, что на отрезке $[\alpha, \beta]$ задана *комплекснозначная функция действительного переменного.*

Пусть $\operatorname{Re} z(t) = x(t)$, $\operatorname{Im} z(t) = y(t)$, тогда $z(t) = x(t) + iy(t)$. Функцию $z(t)$ можно рассматривать как вектор-функцию $z(t) = (x(t), y(t))$. Определения предела, непрерывности, производной для комплекснозначной функции аналогичны соответствующим определениям для вектор-функции.

Например, производная функции $z(t) = x(t) + iy(t)$ определяется формулой

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t). \tag{25}$$

Следовательно, производная $z'(t)$ существует, если существуют производные $x'(t)$ и $y'(t)$.

По аналогии с производной неопределенный интеграл от комплекснозначной функции $z(t) = x(t) + iy(t)$ определяется формулой

$$\int z(t)\, dt = \int x(t)\, dt + i \int y(t)\, dt.$$

Разложение рациональной функции на простые дроби

1. Разложение многочлена на множители.

а) Корни многочлена. Пусть задан многочлен n-й степени

$$Q_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0, \quad c_n \neq 0. \tag{1}$$

Коэффициенты $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ многочлена могут быть как действительными, так и комплексными числами, переменное x может принимать любые значения из множества R или C.

Число a называют *корнем многочлена* $Q_n(x)$, если $Q_n(a) = 0$. Например, число $x = 1$ — корень многочлена $x^3 - 3x^2 + 2$, а число $x = i$ — корень многочлена $x^2 + 1$.

Рассмотрим вопрос о делении многочлена $Q_n(x)$ на двучлен $(x - a)$. Разделить многочлен $Q_n(x)$ на двучлен $(x - a)$, где a — заданное число, означает по определению представить его в виде

$$Q_n(x) = (x - a)\widetilde{Q}_{n-1}(x) + r, \tag{2}$$

где $\widetilde{Q}_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n - 1$, r — некоторое число (его называют *остатком от деления многочлена на* $x - a$). Предполагается, что равенство (2) справедливо при всех значениях $x \in R$ (или $x \in C$). Если $r = 0$, то говорят, что *многочлен делится без остатка* (*нацело*) на $x - a$.

Теорема 1 (Безу). *Число a является корнем многочлена $Q_n(x)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен делится без остатка на $x - a$, т. е. справедливо равенство*

$$Q_n(x) = \widetilde{Q}_{n-1}(x)(x - a). \tag{3}$$

○ Пусть $x = a$ — корень многочлена $Q_n(x)$, тогда $Q_n(a) = 0$. С другой стороны, из равенства (2) при $x = a$ получаем $r = Q_n(a)$. Следовательно, $r = 0$, т. е. многочлен $Q_n(x)$ делится без остатка на $x - a$, если a — корень этого многочлена.

Обратно, если многочлен делится без остатка на $x - a$, т. е. справедливо равенство (3), то из этого равенства следует, что $Q_n(a) = 0$. Следовательно, $x = a$ — корень многочлена $Q_n(x)$. ●

Ведем понятие кратности корня. Число $x = a$ называют *корнем многочлена $Q_n(x)$ кратности k*, если существуют число $k \in N$ и многочлен $Q^*_{n-k}(x)$ такие, что для всех $x \in R$ ($x \in C$) выполняется равенство

$$Q_n(x) = (x - a)^k Q^*_{n-k}(x), \tag{4}$$

где

$$Q^*_{n-k}(a) \neq 0. \tag{5}$$

Теорема 2. *Если число $x_0 = \gamma + i\delta$ — невещественный корень ($\delta \neq 0$) многочлена $Q_n(x)$ с действительными коэффициентами, то число $\overline{x} = \gamma - i\delta$ также является корнем этого многочлена.*

○ По условию $Q_n(x_0) = 0$, т. е.

$$c_n x_0^n + c_{n-1} x_0^{n-1} + ... + c_1 x_0 + c_0 = 0,$$

откуда следует, что $\overline{Q_n(x_0)} = 0$, или

$$\overline{c_n x_0^n + c_{n-1} x_0^{n-1} + ... + c_1 x_0 + c_0} = 0. \qquad (6)$$

В силу свойств сопряженных чисел равенство (6) можно записать в виде

$$\overline{c}_n \overline{x_0^n} + \overline{c}_{n-1} \overline{x_0^{n-1}} + ... + \overline{c}_1 \overline{x}_0 + \overline{c}_0 = 0,$$

или

$$c_n (\overline{x}_0)^n + c_{n-1} (\overline{x}_0)^{n-1} + ... + c_1 \overline{x}_0 + c_0 = 0, \qquad (7)$$

так как $\overline{c}_k = c_k$ (по условию все коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ — действительные числа), $k = \overline{0, n}$. Равенство (7) можно записать так:

$$Q_n(\overline{x}_0) = 0.$$

Это означает, что $\overline{x}_0$ — корень многочлена $Q_n(x)$. ●

Теоремы 1 и 2 доказаны в предположении, что многочлен $Q_n(x)$ имеет корень. Ответ на вопрос о существовании корня многочлена дает сформулированная ниже теорема 3.

в) *Основная теорема алгебры.*

Теорема 3. *Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ с действительными или комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень.*

Эта теорема, доказательство которой обычно приводится в курсе теории функций комплексного переменного называется *основной теоремой алгебры.*

Пусть x_1 — корень многочлена $Q_n(x)$, степень которого равна n. Тогда по теореме 1 этот многочлен представляется в виде

$$Q_n(x) = (x - x_1)\widetilde{Q}_{n-1}(x),$$

где $\widetilde{Q}_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n - 1$.

Применяя к многочлену $\widetilde{Q}_{n-1}(x)$ теоремы 1 и 3, находим $Q_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\widetilde{Q}_{n-2}(x)$.

С помощью индукции получим следующий результат:

$$Q_n(x) = c_n (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n). \qquad (8)$$

Здесь c_n — коэффициент при x^n многочлена $Q_n(x)$; $x_1, ..., x_n$ — его корни, среди этих корней могут быть равные.

2. Теорема о разложении правильной рациональной дроби. Рассмотрим рациональную функцию (рациональную дробь), т. е. функцию вида $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно. В случае когда $m < n$, эту дробь называют *правильной.* Будем предполагать, что коэффициенты многочленов P_m и Q_n являются действительными числами.

Лемма 1. *Если $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ — правильная рациональная дробь и $x = a$ — действительный корень многочлена $Q_n(x)$ кратности $k \geqslant 1$, то существуют действительное число A и многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами такие, что*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x)}{(x-a)^{k-1}Q^*_{n-k}(x)}, \tag{12}$$

где $Q^*_{n-k}(x)$ — частное от деления $Q_n(x)$ на $(x-a)^k$.

Второе слагаемое в правой части равенства (12) — правильная дробь, число A и многочлен $P(x)$ определяются однозначно.

○ Найдем такое число A, чтобы многочлен

$$\varphi(x) = P_m(x) - AQ^*_{n-k}(x) \tag{13}$$

делился без остатка на $x - a$. В формулах (12) и (13) Q^*_{n-k} — частное от деления $Q_n(x)$ на $(x-a)^k$, т. е. многочлен, определяемый равенством (4) и условием (5).

Согласно теореме 1 многочлен $\varphi(x)$ будет делиться без остатка на $x - a$ в том и только том случае, когда $\varphi(a) = 0$, т. е.

$$P_m(a) - AQ^*_{n-k}(a) = 0,$$

откуда в силу условия (5) находим

$$A = \frac{P_m(a)}{Q^*_{n-k}(a)}. \tag{14}$$

Таким образом, число A является действительным и определяется однозначно формулой (14).

Так как многочлен $\varphi(x)$, где число A определяется формулой (14), делится без остатка на $x - a$, то существует единственный многочлен с действительными коэффициентами $P(x)$ такой, что

$$\varphi(x) = (x-a)P(x). \tag{15}$$

Из равенств (13) и (15) следует, что

$$P_m(x) - AQ^*_{n-k}(x) = (x-a)P(x). \tag{16}$$

Разделив обе части равенства (16) на $Q_n(x) = (x-a)^k Q^*_{n-k}(x)$, получим соотношение (12). ●

Следствие. *Применив эту лемму k раз, получим равенство*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + ... + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P^*(x)}{Q^*_{n-k}(x)}, \qquad (17)$$

где числа $A_1, ..., A_k$ являются действительными, $P^*(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, дробь $\dfrac{P^*(x)}{Q^*_{n-k}(x)}$ является правильной, а число $x = a$ не является корнем многочлена $Q^*_{n-k}(x)$.

Например, если $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+3)^2(x^2+1)(x^2-3x+5)^2}$, то разложение функции $f(x)$ на простые дроби имеет вид

$$f(x) = \frac{A_1^{(1)}}{x-1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-1)^2} + \frac{A_2^{(1)}}{x+3} + \frac{A_2^{(2)}}{(x+3)^2} + \frac{A_2^{(3)}}{(x+3)^3} + \\ + \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2+1} + \frac{B_2^{(1)}x + D_2^{(1)}}{x^2-3x+5} + \frac{B_2^{(2)}x + D_2^{(2)}}{(x^2-3x+5)^2}.$$