ЛЕКЦИЯ 1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение предела последовательности
Свойства сходящихся последовательностей

1. Числовые последовательности. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое вещественное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто последовательность)

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Кратко последовательность обозначают символом $\{x_n\}$ или (x_n), при этом x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n — номером члена x_n.

Числовая последовательность — это функция, область определения которой есть множество N всех натуральных чисел; множество значений этой функции, т. е. совокупность чисел x_n, $n \in N$, называют *множеством значений последовательности.*

Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным, в то время как множество ее элементов всегда является бесконечным: любые два разных элемента последовательности отличаются своими номерами.

Например, множество значений последовательности $\{(-1)^n\}$ состоит из двух чисел 1 и -1, а множества значений последовательностей $\{n^2\}$ и $\{1/n\}$ бесконечны.

Последовательность может быть задана с помощью формулы, позволяющей вычислить каждый член последовательности по его номеру. Например, если $x_n = ((-1)^n + 1)/2$, то каждый нечетный член последовательности равен 0, а каждый четный член равен 1.

Иногда последовательность задается *рекуррентной формулой*, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим. При таком способе задания последовательности обычно указывают:

а) первый член последовательности x_1 (или несколько членов, например, x_1, x_2);

б) формулу, связывающую n-й член с соседними (например, с $(n-1)$-м и $(n+1)$-м членами).

Так, арифметическая прогрессия с разностью d и геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 0$ задаются соответственно рекуррентными формулами

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad b_{n+1} = b_n q.$$

Зная первые члены этих прогрессий a_1 и b_1, можно получить формулы для $(n+1)$-х членов прогрессий:

$$a_{n+1} = a_1 + nd, \quad b_{n+1} = b_1 q^n, \quad n \in N.$$

Рекуррентной формулой

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \in N, \quad n \geqslant 3,$$

и условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ задается *последовательность Фибоначчи*.

В некоторых случаях последовательность может быть задана описанием ее членов. Например, если x_n — простое число с номером n, то $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$, $x_5 = 11$ и т. д.

Отметим, наконец, что последовательность $\{x_n\}$ можно изобразить:

а) точками с координатами $(n; x_n)$, $n \in N$, на плоскости;

б) точками x_n, $n \in N$, на числовой оси.

2. Определение предела последовательности.

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Если a — предел последовательности, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

С помощью логических символов это определение можно записать в виде

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to |x_n - a| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Последовательность, у которой существует предел, называют *сходящейся*.

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся, если

$$\exists a \in R\colon\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to |x_n - a| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют *расходящейся*; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Заметим, что если $x_n = a$ для всех $n \in N$ (такую последовательность называют *стационарной*), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Из определения (1) следует, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a, тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n - a\}$ имеет предел, равный нулю, т. е.

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\} \Leftrightarrow \{\lim_{n\to\infty} (x_n - a) = 0\}.$$

Обратимся еще раз к определению предела. Согласно определению число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если при всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, которое можно записать в виде

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Другими словами, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε, начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежат интервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Этот интервал называют *ε-окрестностью точки* a (рис. 4.1) и обозначают $U_\varepsilon(a)$, а также $O_\varepsilon(a)$, т. е.

$$U_\varepsilon(a) = \{x\colon\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x\colon\ |x - a| < \varepsilon\}.$$

Итак, число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если для каждой ε-окрестности точки a найдется номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат этой окрестности, так что вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо содержится лишь конечное число членов.

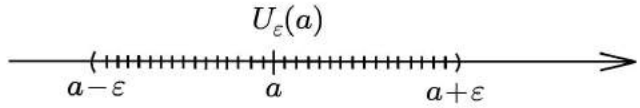

Рис. 4.1

С помощью логических символов определение предела последовательности "на языке окрестностей" можно записать так:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \exists N_\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to x_n \in U_\varepsilon(a).$$

3. Единственность предела последовательности.

Теорема 1. *Числовая последовательность может иметь только один предел.*

○ Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела a и b, причем $a < b$ (рис. 4.2). Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы

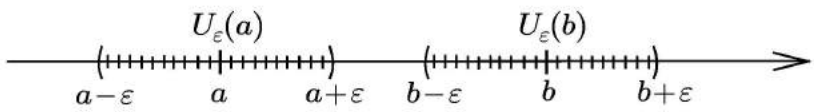

Рис. 4.2

ε-окрестности точек a и b не пересекались (не имели общих точек). Возьмем, например, $\varepsilon = (b - a)/3$. Так как число a — предел последовательности $\{x_n\}$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти номер N такой, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ для всех $n \geqslant N$. Поэтому вне интервала $U_\varepsilon(a)$ может оказаться лишь конечное число членов последовательности. В частности, интервал $U_\varepsilon(b)$ может содержать лишь конечное число членов последовательности. Это противоречит тому, что b — предел последовательности (любая окрестность точки b должна содержать бесконечное число членов последовательности). Полученное противоречие показывает, что последовательность не может иметь два различных предела. Итак, сходящаяся последовательность имеет только один предел. ●

4. Ограниченность сходящейся последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число C_1, что все члены последовательности удовлетворяют условию $x_n \geqslant C_1$, т. е.

$$\exists C_1: \ \forall n \in N \to x_n \geqslant C_1.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists C_2: \ \forall n \in N \to x_n \leqslant C_2.$$

Последовательность, ограниченную как снизу, так и сверху, называют *ограниченной*, т. е. последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists C_1 \ \exists C_2: \ \forall n \in N \to C_1 \leqslant x_n \leqslant C_2. \tag{5}$$

Таким образом, последовательность называют ограниченной, если множество ее значений ограничено.

Замечание 1. Условие (5) равносильно следующему:

$$\exists C > 0: \ \forall n \in N \to |x_n| \leqslant C. \tag{6}$$

В самом деле, из условия (6) следует (5), если взять $C_1 = -C$, $C_2 = C$, а из условия (5) следует (6), если взять $C = \max(|C_1|, |C_2|)$.

Геометрически ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности содержатся в C-окрестности точки нуль.

Теорема 2. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

○ Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдем номер N такой, что при всех $n \geqslant N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < 1$. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a|.$$

Поэтому при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n| < 1 + |a|.$$

Положим $c = \max(1 + |a|, |x_1|, ..., |x_{N-1}|)$, тогда $|x_n| \leqslant C$ при всех $n \in N$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ●

Замечание 2. В силу теоремы 2 всякая сходящаяся последовательность является ограниченной. Обратное неверно: не всякая ограниченная последовательность является сходящейся. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не является сходящейся.

Замечание 3. Если условие (6) не выполняется, т. е.

$$\forall C > 0 \quad \exists n_C \in N: \ |x_{n_C}| > C,$$

то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ не ограничена.

5. Свойства сходящихся последовательностей, связанные с неравенствами.

Теорема 3. *Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N_0, \tag{8}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

то последовательность $\{y_n\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

○ По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такие, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_1$ и $z_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_2$. Отсюда и из условия (8) следует (рис. 4.3), что при

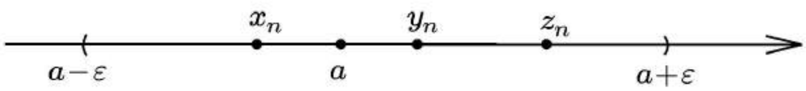

Рис. 4.3

всех $n \geqslant N$, где $N = \max(N_0, N_1, N_2)$, выполняется условие $y_n \in U_\varepsilon(a)$. Это означает, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ●

Замечание 4. Теорему 3 называют теоремой о трех последовательностях или теоремой о пределе "зажатой" последовательности.

Теорема 4. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b, \tag{15}$$

причем

$$a < b, \tag{16}$$

то

$$\exists N_0 \colon\ \forall n \geqslant N_0 \to x_n < y_n. \tag{17}$$

○ Как и в теореме 1, выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы ε-окрестности точек a и b (рис. 4.2) не пересекались (возьмем, например, $\varepsilon = (b-a)/3 > 0$). Согласно определению предела по заданному ε можно найти номера N_1 и N_2 такие, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_1$ и $y_n \in U_\varepsilon(b)$ при всех $n \geqslant N_2$. Пусть $N_0 = \max(N_1, N_2)$. Тогда при всех $n \geqslant N_0$ выполняются неравенства

$$x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_n,$$

откуда следует утверждение (17). ●

Следствие 1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a < b$, *то*

$$\exists N_0 \colon\ \forall n \geqslant N_0 \to x_n < b. \tag{18}$$

○ Для доказательства утверждения (18) достаточно в теореме 2 взять $y_n = b$, $n \in \mathbb{N}$. ●

С л е д с т в и е 2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *и*

$$\forall n \in N \to x_n \geqslant y_n, \tag{19}$$

то

$$a \geqslant b. \tag{20}$$

○ Предположим, что неравенство (20) не выполняется. Тогда $a < b$ и по теореме 4 справедливо утверждение (17), которое противоречит условию (19). Поэтому должно выполняться неравенство (20). ●

З а м е ч а н и е 5. В частности, если для сходящейся последовательности $\{x_n\}$ выполняется для всех $n \in N$ (или для всех $n \geqslant N_0$) неравенство $x_n \geqslant \alpha$ ($x_n \leqslant \beta$), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \alpha$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \beta$). Отсюда следует, что если все члены сходящейся последовательности $\{x_n\}$ принадлежат отрезку $[a, b]$, т. е. $a \leqslant x_n \leqslant b$ для всех $n \in N$, то и предел этой последовательности принадлежит отрезку $[a, b]$, т. е. $a \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant b$.

З а м е ч а н и е 6. В следствии 2 утверждается, что если соответствующие члены двух сходящихся последовательностей связаны знаком нестрогого неравенства, то такое же неравенство справедливо и для пределов этих последовательностей. Короче: предельный переход сохраняет знак нестрогого неравенства. Однако знак строгого неравенства, вообще говоря, не сохраняется, т. е. если $x_n > y_n$ при $n \geqslant N_0$ и последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Например, если $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $y_n = 1 - \frac{1}{n}$, то $x_n > y_n$, $n \in N$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

1. Бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N_\varepsilon$ такой, что $|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N_\varepsilon$.

Понятие бесконечно малой последовательности используется для доказательства свойств сходящихся последовательностей. Пусть число a — предел последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $\alpha_n = x_n - a$. По определению предела

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to |x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon,$$

т. е. $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Обратно: если $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Приведем примеры бесконечно малых последовательностей:

а) $\{a/n^r\},\ a \in R,\ r = \dfrac{1}{m},\ m \in N$; б) $\{q^n\},\ |q| < 1$;

в) $\{\sqrt[n]{a} - 1\},\ a > 1$; г) $\{\sqrt[n]{n} - 1\}$; д) $\{n^p/a^n\},\ p \in N,\ a > 1$.

При изучении свойств сходящихся последовательностей нам потребуется ввести арифметические операции над последовательностями. Назовем суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$. При определении частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n \in N$.

Бесконечно малые последовательности обладают следующими свойствами:

а) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

б) произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.

2. Бесконечно большие последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого $\delta > 0$ существует такой номер N_δ, что для всех $n \geqslant N_\delta$ выполняется неравенство $|x_n| > \delta$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$ и говорят, что последовательность *имеет бесконечный предел*.

Используя логические символы, это определение можно записать так:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\} \Leftrightarrow \forall\delta > 0 \quad \exists N_\delta\colon\ \forall n \geqslant N_\delta \to |x_n| > \delta. \qquad (1)$$

Дадим геометрическую интерпретацию определения (1). Назовем δ-окрестностью ∞ (рис. 5.1) множество $E = \{x \in R\colon\ |x| > \delta\}$. Если

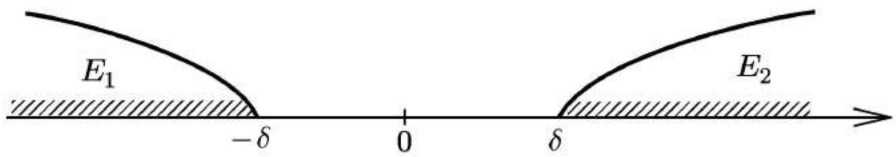

Рис. 5.1

последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечный предел, то в любой δ-окрестности ∞ лежат все члены последовательности, за исключением, быть может, конечного числа членов.

Аналогично вводятся для последовательности $\{x_n\}$ понятия бесконечного предела, равного $-\infty$ и $+\infty$. Эти пределы обозначаются соответственно символами $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и определяются так:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\} \Leftrightarrow \forall\delta > 0\ \exists N_\delta:\ \forall n \geqslant N_\delta \to x_n < -\delta, \tag{2}$$

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\} \Leftrightarrow \forall\delta > 0\ \exists N_\delta:\ \forall n \geqslant N_\delta \to x_n > \delta. \tag{3}$$

Множества $E_1 = \{x \in R\colon\ x < -\delta\}$ и $E_2 = \{x \in R\colon\ x > \delta\}$, где $\delta > 0$, назовем δ-окрестностями $-\infty$ и $+\infty$ соответственно (см. рис. 5.1). Тогда $E = E_1 \cup E_2$.

Согласно определению (3) последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный $+\infty$, если в δ-окрестности символа $+\infty$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, конечного числа их. Аналогичный смысл имеет определение (2).

В дальнейшем под пределом последовательности будем понимать конечный предел, если не оговорено противное.

Приведем примеры последовательностей, имеющих бесконечный предел.

Если $x_n = -\sqrt{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; если $x_n = n^2/(n+2)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; если $x_n = (-1)^n 2^n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.

Т е о р е м а. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то*:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ *при условии, что* $y_n \neq 0$ $(n \in N)$ *и* $b \neq 0$.

○ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности.

а) Из равенства $x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$, где $\{\alpha_n + \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность, следует, что $x_n + y_n \to a + b$ при $n \to \infty$.

б) Воспользуемся равенством

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Так как $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то последовательности $\{a\beta_n\}$, $\{b\alpha_n\}$ и $\{\alpha_n\beta_n\}$ также являются бесконечно малыми, откуда следует, что $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Поэтому $x_n y_n \to ab$ при $n \to \infty$.

в) Докажем, что $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая последовательность. Имеем $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{(a+\alpha_n)b - (b+\beta_n)a}{by_n} = \left(\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right)\dfrac{1}{y_n}$. Так как $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то и последовательность $\left\{\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right\}$ также является бесконечно малой.

По условию $y \to b$ при $n \to \infty$, где $b \neq 0$ и $y_n \neq 0$ для всех $n \in \mathsf{N}$. Поэтому последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ является ограниченной.

Отсюда следует, что $\left\{\left(\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right)\dfrac{1}{y_n}\right\}$ — бесконечно малая последовательность как произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность.

Таким образом, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая последовательность, и поэтому $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ при $n \to \infty$. ●

Предел монотонной последовательности

1. Монотонная последовательность. Точные грани последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называют *возрастающей* (*неубывающей*), если для любого $n \in N$ выполняется неравенство

$$x_{n+1} \geqslant x_n. \tag{1}$$

Аналогично последовательность $\{x_n\}$ называют *убывающей* (*невозрастающей*), если для любого $n \in N$ справедливо неравенство

$$x_{n+1} \leqslant x_n. \tag{2}$$

Если неравенство (1) можно записать в виде $x_{n+1} > x_n$, а неравенство (2) — в виде $x_{n+1} < x_n$, то последовательность $\{x_n\}$ называют соответственно *строго возрастающей* и *строго убывающей*.

Возрастающую или убывающую последовательность называют *монотонной*, а строго возрастающую или строго убывающую — *строго монотонной*.

Если неравенство (1) выполняется при $n \geqslant n_0$, то последовательность $\{x_n\}$ называют *возрастающей, начиная с номера* n_0 (*при* $n \geqslant n_0$). Аналогично вводятся понятия убывающей, строго убывающей и строго возрастающей последовательности, начиная с номера n_0 (при $n \geqslant n_0$).

Точную верхнюю (нижнюю) грань множества значений последовательности $\{x_n\}$ называют *точной верхней* (*нижней*) *гранью последовательности* и обозначают соответственно $\sup\{x_n\}$ и $\inf\{x_n\}$.

Определение точной верхней грани $\sup X$ числового множества X можно записать так:

$$\{M = \sup X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \leqslant M\} \tag{3}$$

Аналогично определение точной нижней грани $\inf X$ числового множества X можно записать в виде

$$\{m = \inf X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \geqslant m\} \tag{4}$$

Поэтому определения точной верхней и точной нижней граней последовательности можно записать в виде

$$[a = \sup\{x_n\}] \Leftrightarrow \{\forall n \in N \to x_n \leqslant a\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon\colon a - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} < a\} \tag{5}$$

$$[b = \inf\{x_n\}] \Leftrightarrow \{\forall n \in N \to x_n \geqslant b\} \wedge \{\forall \varepsilon < 0 \ \ \exists N_\varepsilon\colon b + \varepsilon > x_{N_\varepsilon} > b\} \tag{6}$$

Рис. 6.1

2. Признак сходимости монотонной последовательности.

Теорема 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей и ограниченной сверху, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ является убывающей и ограниченной снизу, то существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}.$$

○ Ограничимся доказательством теоремы для случая ограниченной сверху и возрастающей последовательности. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, т. е. множество чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ограничено сверху, то существует точная верхняя грань этой последовательности. Так как $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность, то

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon \to x_{N_\varepsilon} \leqslant x_n. \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to a - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leqslant x_n \leqslant a, \quad \text{т. е. } x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Это означает, согласно определению предела, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup\{x_n\}. \quad \bullet$$

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой для последовательности, ограниченной сверху (снизу) и возрастающей (убывающей), начиная с некоторого номера.

Введем теперь понятие частичного предела. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, и пусть существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Тогда a называют *частичным пределом последовательности* $\{x_n\}$. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ имеет два частичных предела, а именно -1 и 1. Последовательность $\{1 + (-1)^n n\}$ имеет два частичных предела, а именно 0 и $+\infty$.

Если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, а L — множество всех ее частичных пределов, то числа $\sup L$ и $\inf L$ называют соответственно *верхним* и *нижним пределом* этой последовательности и обозначают соответственно символами $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Например, для последовательности 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... имеем $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 3$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Теорема (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Критерий Коши сходимости последовательности

1. Фундаментальная последовательность. Последовательность $\{x_n\}$ называют *фундаментальной*, если она удовлетворяет *условию Коши*: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n_ε, что для любого $n \geqslant n_\varepsilon$ и любого $m \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Кратко это условие можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon\colon \ \forall n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall m \geqslant n_\varepsilon \to |x_n - x_m| < \varepsilon, \tag{1}$$

или в другом виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon\colon \ \forall n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall p \in N \to |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Докажем, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

○ Пусть $\varepsilon = 1$, тогда согласно условию Коши (1) найдется номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ и для всех $m \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < 1$, и, в частности, $|x_n - x_{n_0}| < 1$.

Так как $|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leqslant |x_{n_0}| + |x_n - x_{n_0}| < |x_{n_0}| + 1$ для всех $n \geqslant n_0$, то при всех $n \in N$ справедливо неравенство $|x_n| < C$, где $C = \max(|x_1|, ..., |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1)$. Это означает, что $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. ●

2. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

○ Необходимость. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, равный a. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon\colon \ \forall p \geqslant N_\varepsilon \to |x_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Полагая в (2) сначала $p = n$, а затем $p = m$ и используя неравенство для модуля суммы (разности), получаем

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ и для любого $m \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$, т. е. выполняется условие (1) при $n_\varepsilon = N_\varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет конечный предел. По определению фундаментальной последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon\colon \ \forall n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall m \geqslant n_\varepsilon \to |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Так как фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, то по теореме Больцано–Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть ее предел равен a, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a. \tag{4}$$

Покажем, что число a является пределом исходной последовательности $\{x_n\}$. По определению предела (4)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon\colon \ \forall k \geqslant k_\varepsilon \to |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Пусть $N_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, k_\varepsilon)$. Фиксируем в (5) номер $n_k \geqslant N_\varepsilon$ (такой номер найдется, так как $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$). Тогда при $m = n_k$ и при всех $n \geqslant N_\varepsilon$ в силу (3) выполняется неравенство

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что при всех $n \geqslant N_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ●