Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических специальностей

Севастополь
2008

УДК 517.54+517.442

Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление. Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических специальностей / Сост.: С.Ф. Ледяев – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008.-35 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам технических специальностей в выполнении модульной работы по одному из наиболее сложных разделов высшей математике – теории функций комплексной переменной и операционному исчислению.

Разработан комплекс заданий для работы студентов по теме модуля, состоящий из шести заданий по ТФКП и четырёх заданий по операционному исчислению. Каждое практическое задание содержит 30 вариантов, задания снабжены ответами. Особенностями комплекса является то, что в примерах решения заданий широко используется математический компьютерный пакет MathCAD.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол №6 от 29 января 2008 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Обжерин Ю.Е., профессор, заведующий кафедрой высшей математики

СОДЕРЖАНИЕ

1. Задания для самостоятельной работы к модулю «Теория функций комплексной переменной»

Задание 1

1. Письменно ответить на вопросы:
   а) какая функция $f(z)$ называется аналитической в области D?
   б) запишите условия Коши Римана, как называются функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$?

2. Проверить с помощью условий Коши-Римана, является ли функция аналитической?

1. $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$.
2. $f(z) = x^2 + y^2 - 2xyi$
3. $w = z^2 \cdot e^{-z}$.
4. $f(z) = e^x \cos y + i \sin y$.
5. $f(z) = y^2 + 2xi$.
6. $w = \bar{z} \cdot \sin z$.
7. $w = z \cdot e^z$.
8. $w = z \cdot |z|$.
9. $w = \bar{z} \cdot |z|$.
10. $w = e^{z^2}$.
11. $f(z) = e^x(\cos y - i \sin y)$.
12. $w = \sin 3z - i$.
13. $w = \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z$.
14. $f(z) = x^2 y + i \cdot x \cdot y^2$.
15. $w = \bar{z} \cdot \operatorname{Im} z$.
16. $w = |z| \cdot \operatorname{Im} z$.
17. $w = z \cdot \sin z$.
18. $w = z \cdot \cos z$.
19. $w = (iz)^3$.
20. $w = i(1 - z^2) - 2z$.
21. $w = z^3 - 2z + i$.
22. $w = e^{1+2z}$.
23. $w = z^2 \cdot \operatorname{Im} z$.
24. $w = e^{2iz}$.
25. $f(z) = y^2 - 3xi$.
26. $w = |z| \cdot \operatorname{Re} z$.
27. $f(z) = \sin x \cdot \cos y + i \cos x \cdot \sin y$.
28. $f(z) = (x^2 + x^2 y^2) + i(xy^2 - y^2)$.
29. $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^2)$.
30. $f(z) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y$.

Задание 2

1. Письменно ответить на вопросы:
   а) запишите комплексную переменную и её дифференциал в алгебраической и показательной формах.
   б) что называется интегралом от функции комплексной переменной по кривой С?
   в) запишите формулу вычисления интеграла от ФКП через сумму криволинейных интегралов.

2. Вычислить интеграл

1. $\int_C z \operatorname{Im} z^2 dz$, где $C: |z| = 1, \quad (-\pi \le \arg z \le 0)$.
2. $\int_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, где С – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0, \quad z_2 = 1 + i$.
3. $\int_C \ln z dz$, где С: $|z| = 1$, обход против часовой стрелки.
4. $\int_C z \operatorname{Re} z dz$, где С: $|z| = 1$, обход против часовой стрелки.
5. $\int_C \bar{z}^2 dz$, где С: луч $\phi = \dfrac{\pi}{3}$, $0 \le \rho \le 2$.
6. $\int_C z \cdot \bar{z} dz$, где С: $|z| = 1$, $\left(0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.
7. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, где С: $z = (2 + i)t, \quad (0 \le t \le 1)$.
8. $\int_C z \operatorname{Im} z dz$, где $C: |z| = 1, \quad (-\pi \le \arg z \le 0)$.
9. $\int_C e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz$, где С – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0, \quad z_2 = -1 - i$.
10. $\int_C \ln z dz$, где С: $|z| = 2$, обход против часовой стрелки.

11. $\int\limits_C z \operatorname{Re} z dz$, где С: $|z| = 2$, $(0 \le \arg z \le \pi)$.

12. $\int\limits_C \bar{z}^3 dz$, где С: луч $\phi = -\dfrac{\pi}{3}$, $0 \le \rho \le 1$.

13. $\int\limits_C \operatorname{Im} z \cdot \sin z dz$, где С: отрезок прямой, соединяющий точки

$z_1 = i, \quad z_2 = \dfrac{\pi}{2} + i$.

14. $\int\limits_C z \cdot \bar{z} dz$, где С: $|z| = 2$, $\left(0 \le \arg z \le \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

15. $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz$, где С: $z = (-1+i)t, \quad (0 \le t \le 1)$.

16. $\int\limits_C z \operatorname{Im} z^2 dz$, где $C : |z| = 1, \quad (0 \le \arg z \le \pi)$.

17. $\int\limits_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, где С – прямая, соединяющая точки

$z_1 = 0, \quad z_2 = 1 - i$.

18. $\int\limits_C \ln z dz$, где С: $|z| = 1$, обход по часовой стрелке.

19. $\int\limits_C \bar{z} \operatorname{Re} z dz$, где С: отрезок от точки $z_1 = 1 + i$ до точки $z_2 = 0$.

20. $\int\limits_C \bar{z}^2 \operatorname{Im} z dz$, где С: отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки

$z_2 = 1 - i$.

21. $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz$, где С: отрезок прямой $z = (1+i)t, \quad (0 \le t \le 1)$.

22. $\int\limits_C z \operatorname{Im} z dz$, где $C : |z| = 1, \quad (0 \le \arg z \le \pi/2)$.

23. $\int\limits_C e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz$, где С – отрезок прямой, соединяющей точки

$z_1 = 0, \quad z_2 = -1 + i$.

24. $\int\limits_C \ln z dz$, где С: $|z| = 2$, обход по часовой стрелке.

25. $\int\limits_C z \operatorname{Re} z dz$, где С: $|z| = 2$, обход по часовой стрелке.

26. $\int\limits_C z \cdot \bar{z} dz$, где С: $|z| = 5$, обход по часовой стрелке.

27. $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz$, где С: $z = (2+i)t, \quad (0 \le t \le 2)$.

28. $\int\limits_C \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z dz$, где С: $C : |z| = 1, \quad (0 \le \arg z \le \pi/2)$.

29. $\int\limits_C \operatorname{Im}(z^2) \cdot \operatorname{Re} z dz$ где С: $|z| = 1$, обход против часовой стрелки.

30. $\int\limits_C z \operatorname{Re} z dz$, где С: $|z| = 1$, обход по часовой стрелке.

Ответы в вариантах задания 2.

1. $-\dfrac{\pi}{2}$. 2. $\dfrac{1}{4}(e^2 - 1)(1+i)$. 3. $2\pi i$. 4. 0. 5. $\dfrac{4}{3} - i\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 6. $-1+i$. 7. $2+i$. 8. $\dfrac{2}{3}i$.

9. $\dfrac{1}{4}(e^2 - 1)(1+i)$. 10. $4\pi i$. 11. $-\dfrac{32}{3}$. 12. $-\dfrac{1}{8} + i\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. 13. $\operatorname{ch}1 + i\operatorname{sh}1$. 14. $-8-8i$. 15. $\dfrac{1}{2}(1-i)$.

16. $-\dfrac{\pi}{2}$. 17. $\dfrac{1}{4}(e^2 - 1)(1-i)$. 18. $-2\pi i$. 19. $-\dfrac{2}{3}$. 20. $\dfrac{-1-i}{2}$. 21. $\dfrac{1+i}{2}$. 22. $-\dfrac{2}{3} - i\dfrac{1}{3}$.

23. $\dfrac{1}{4}(e^2 - 1)(-1+i)$. 24. $-4\pi i$. 25. 0. 26. 0. 27. $8+4i$. 28. $\dfrac{13}{12}(1+i)$. 29. $-\dfrac{\pi}{2}$. 30. 0.

Задание 3

1. Письменно ответить на вопросы:
а) сформулируйте теоремы Коши для односвязной и многосвязной области;
б) напишите интегральную формулу Коши и обобщенную интегральную формулу Коши в той форме, которая применяется для вычисления интегралов.

2. Используя интегральные формулы Коши, вычислить интеграл по двум замкнутым контурам: 1) $|z| = 0{,}5$; 2) $|z| = 2$.

1. $\int\limits_C \frac{\sin iz}{(z-1)(z+3)^3}\,dz$.

2. $\int\limits_C \frac{\mathrm{sh} iz}{(z+1)(z-3)^2}\,dz$.

3. $\int\limits_C \frac{\cos i2z}{(z-i)(z+3)^2}\,dz$.

4. $\int\limits_C \frac{z^2-3z+1}{(z+1)^2(z-3i)}\,dz$.

5. $\int\limits_C \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-3)^2}\,dz$.

6. $\int\limits_C \frac{\mathrm{ch} i2z}{(z+1)(z-3i)^2}\,dz$.

7. $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+3i)^2}\,dz$.

8. $\int\limits_C \frac{z^2+z+2}{(z+i)(z-3)^2}\,dz$.

9. $\int\limits_C \frac{\sin 2z}{(z-i)(z-3)^2}\,dz$.

10. $\int\limits_C \frac{\cos 2z}{(z+i)(z+3)^2}\,dz$.

11. $\int\limits_C \frac{\mathrm{sh} 2z}{(z-1)(z+5i)}\,dz$.

12. $\int\limits_C \frac{\mathrm{ch} 2z}{(z+1)(z-5i)}\,dz$.

13. $\int\limits_C \frac{z+1}{(z-1)(z+3i)^3}\,dz$.

14. $\int\limits_C \frac{\sin iz}{(z-1)^3(z+3)}\,dz$.

15. $\int\limits_C \frac{\mathrm{sh} iz}{(z+1)^2(z-3)}\,dz$.

16. $\int\limits_C \frac{\cos(i2z)}{(z-i)^2(z+3)}\,dz$.

17. $\int\limits_C \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-3)}\,dz$.

18. $\int\limits_C \frac{\mathrm{ch}(iz)}{(z+1)^2(z-3i)}\,dz$.

19. $\int\limits_C \frac{z^3+2z-1}{(z-i)^2(z+3)}\,dz$.

20. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z-1)^3(z+3i)}\,dz$.

21. $\int\limits_C \frac{\sin z}{(z-i)^3(z-3)}\,dz$.

22. $\int\limits_C \frac{\cos z}{(z+1)(z+7i)^2}\,dz$.

23. $\int\limits_C \frac{\mathrm{sh} z}{(z-1)^2(z+5i)}\,dz$.

24. $\int\limits_C \frac{\mathrm{ch} 2z}{(z+1)^2(z-5i)}\,dz$.

25. $\int\limits_C \frac{z^2+1}{(z+1)^2(z-3i)}\,dz$.

26. $\int\limits_C \frac{\sin z}{(z-i)(z+3)^2}\,dz$.

27. $\int\limits_C \frac{\cos z}{(z-3)(z+i)^2}\,dz$.

28. $\int\limits_C \frac{z^2+3z-1}{(z-5i)(z+i)^2}\,dz$.

29. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+6i)}\,dz$.

30. $\int\limits_C \frac{\mathrm{sh} z}{(z+1)^2(z+3i)}\,dz$.

Ответы в вариантах задания 3 (интеграл по контуру $|z| = 2$).

1. $-\frac{1}{32}\pi\sinh 1$. 2. $\frac{1}{8}\pi\sin 1$. 3. $\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\pi\cos 2$. 4. $\left(\frac{12}{5}+\frac{9}{5}i\right)\pi$. 5. $\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\pi\cdot e$.

6. $\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\pi\cos 2$. 7. $\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\pi\cdot e^2$. 8. $\left(\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i\right)\pi$. 9. $\left(\frac{-4}{25}-\frac{3}{25}i\right)\pi\sinh 2$.

10. $\left(\frac{-3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\pi\cosh 2$. 11. $\left(\frac{5}{13}+\frac{1}{13}i\right)\pi\sinh 2$. 12. $\left(\frac{-5}{13}-\frac{1}{13}i\right)\pi\cosh 2$. 13. $\left(\frac{-9}{125}-\frac{13}{125}i\right)\pi$.

14. $\pi\left(\frac{1}{8}\cosh 1-\frac{9}{32}\sinh 1\right)$. 15. $\pi\left(\frac{1}{2}\cos 1-\frac{1}{8}\sin 1\right)$. 16. $\pi\left(\left(-\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i\right)\sin 2+\left(-\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\cos 2\right)$.

17. $\left(\frac{12}{25}-\frac{9}{25}i\right)\pi\cdot e$. 18. $\pi\left(\left(-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i\right)\sin 1+\left(-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\cos 1\right)$. 19. $\left(\frac{2}{25}-\frac{14}{25}i\right)\pi$.

20. $\left(\frac{18}{125}+\frac{26}{125}i\right)\pi\cdot e$. 21. $\pi\left(\left(-\frac{33}{125}-\frac{6}{125}i\right)\sinh 1+\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\cosh 1\right)$. 22. $\left(\frac{-7}{625}-\frac{24}{625}i\right)\pi\cos 1$.

23. $\pi\left(\left(-\frac{5}{169}-\frac{12}{169}i\right)\sinh 1+\left(\frac{5}{13}-\frac{1}{13}i\right)\cosh 1\right)$. 24. $\pi\left(\left(\frac{10}{13}+\frac{2}{13}i\right)\sinh 2+\left(-\frac{5}{169}+\frac{12}{169}i\right)\cosh 2\right)$.

25. $\left(\frac{24}{25}+\frac{18}{25}i\right)\pi$. 26. $\left(\frac{-4}{25}+\frac{3}{25}i\right)\pi\sinh 1$. 27. $\pi\left(\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i\right)\sinh 1+\left(-\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\cosh 1\right)$.

28. $\left(\frac{-5}{6}+\frac{5}{9}i\right)\pi$. 29. $\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{49}i\right)\pi\cdot e^i$. 30. $\pi\left(\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i\right)\cosh 1+\left(-\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)\sinh 1\right)$.

Примечание – в пакете MathCAD синус и косинус гиперболические обозначаются $\sinh(z)$ *и* $\cosh(z)$.

Задание 4

1. Письменно ответьте на вопросы:
   а) что называется рядом Лорана для ФКП, какая часть ряда Лорана называется правильной, какая главной;
   б) как по ряду Лорана в окрестности особой точки определить её тип.
2. Разложить функцию в ряд Лорана по степеням z. Определить тип особых точек $z=0$ и $z=\infty$.

1. $f(z)=z^3\cdot\sin\frac{1}{z}$.
2. $f(z)=z^2\cdot\cos\frac{1}{z}$.
3. $f(z)=\frac{1}{z^5}\cdot\sin z$.
4. $f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot\cos z$.
5. $f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot e^z$.
6. $f(z)=z^3\cdot\mathrm{sh}\frac{1}{z}$.
7. $f(z)=z^2\cdot\mathrm{ch}\frac{1}{z}$.
8. $f(z)=\frac{1}{z^5}\cdot\mathrm{sh}z$.
9. $f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot\mathrm{ch}z$.
10. $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}$.
11. $f(z)=z^3+\sin\frac{1}{z}$.
12. $f(z)=z^2+z-3\cos\frac{1}{z}$.
13. $f(z)=\frac{1}{z^5}+\frac{2}{z}-\sin z$.
14. $f(z)=z^5\cdot\sin\frac{1}{z^2}$.
15. $f(z)=\frac{1}{z^6}+\frac{3}{z^2}+\cos z$.
16. $f(z)=\frac{1}{z^6}-\frac{5}{z^2}+e^z$.
17. $f(z)=\frac{1}{z^5}\cdot\sin z^2$.
18. $f(z)=z^3-z+\mathrm{sh}\frac{1}{z}$.
19. $f(z)=z^6\cdot\cos\frac{1}{z^2}$.
20. $f(z)=z^2-z+6+\mathrm{ch}\frac{1}{z}$.
21. $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z^2}}$.
22. $f(z)=\frac{1}{z^5}-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{\mathrm{z}}+\mathrm{sh}z$.

23. $f(z)=\frac{1}{z^6}+\frac{3}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\mathrm{ch}z$.
24. $f(z)=z^3+5z^2-z+e^{\frac{1}{z}}$.
25. $f(z)=\frac{1}{z^5}\cdot\mathrm{sh}z^2$.
26. $f(z)=z^4\cdot\sin\frac{1}{z}$.
27. $f(z)=z^3\cdot\cos\frac{1}{z}$.
28. $f(z)=z^5\cdot e^{\frac{1}{z}}$
29. $f(z)=4-z-6z^3+\mathrm{sh}\frac{1}{z^2}$.
30. $f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot\mathrm{ch}z$.

Задание 5

1. Письменно ответить на вопросы:
   а) что называется вычетом ФКП в изолированной особой точке;
   б) записать формулы вычисления вычетов в простых полюсах и в полюсе порядка m.
2. Вычислить вычеты в каждой из особых точек данной функции.

1. $f(z)=\frac{z^2+z+1}{z^2\cdot(z-1)(z+i)}$.
2. $f(z)=\frac{z^2+2z+7}{z\cdot(z+1)^2(z+i)}$.
3. $f(z)=\frac{z^2+z-1}{z\cdot(z-2)(z+i)^2}$.
4. $f(z)=\frac{z+3}{z^3\cdot(z-2)(z+i)}$.
5. $f(z)=\frac{z^2+i}{z^2\cdot(z-2i)(z+3)}$.
6. $f(z)=\frac{z^2+2z+1}{z\cdot(z-3)^2(z+3i)}$.
7. $f(z)=\frac{z^2+1}{z^2\cdot(z-1-i)(z+2)}$.
8. $f(z)=\frac{z+1}{z\cdot(z-1)^3(z+i)}$.
9. $f(z)=\frac{z+2}{z^3\cdot(z-1)(z+i)}$.
10. $f(z)=\frac{z-1}{z\cdot(z+2i)(z-3i)^2}$.
11. $f(z)=\frac{z^2+1}{z^2\cdot(z-2)(z+2i)}$.
12. $f(z)=\frac{z^2+3z+1}{z\cdot(z-2)^2(z+i)}$.

13. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z\cdot(z-2)(z-i)^2}$. 14. $f(z)=\dfrac{z-3}{z^3\cdot(z+2i)(z+1)}$.

15. $f(z)=\dfrac{z^2-8}{z^2\cdot(z+2i)(z+3)}$. 16. $f(z)=\dfrac{2z+1}{z\cdot(z-1)^2(z-3i)}$.

17. $f(z)=\dfrac{z^2+9}{z^2\cdot(z-1-i)(z+1)}$. 18. $f(z)=\dfrac{z+i}{z\cdot(z-1)^3(z+2i)}$.

19. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^3\cdot(z-1)(z+3i)}$. 20. $f(z)=\dfrac{z-5}{z\cdot(z+i)(z-3)^2}$.

21. $f(z)=\dfrac{3z+1}{z^2\cdot(z-1)(z+i)}$. 22. $f(z)=\dfrac{3z-1}{z\cdot(z+2i)^2(z-3i)}$.

12

23. $f(z)=\dfrac{z^2+2i}{z^2\cdot(z-5)(z+2)}$. 24. $f(z)=\dfrac{z^2+z+7}{z\cdot(z-2)^2(z-1+i)}$.

25. $f(z)=\dfrac{z^2+6}{z\cdot(z-2)(z-i)^2}$. 26. $f(z)=\dfrac{z^2+z+7}{z\cdot(z+1)^2(z-i)}$.

27. $f(z)=\dfrac{z-3}{z^3\cdot(z+2)(z+i)}$. 28. $f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z\cdot(z-3)^2(z+2i)}$.

29. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2\cdot(z-2+i)(z+1)}$. 30. $f(z)=\dfrac{z-3}{z\cdot(z+1)(z-3i)^2}$.

Ответы в вариантах задания 5 (первым записан вычет в кратном полюсе).

1. $(-1+2i)$, $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right)$, $\left(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$. 2. $(3+6i)$, $(-7i)$, $(-3+i)$.

3. $\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)$, $\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{10}-\frac{2}{5}i\right)$. 4. $\left(\frac{-5}{4}-\frac{7}{8}i\right)$, $(1+i)$, $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}i\right)$.

5. $\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{12}i\right)$, $\left(\frac{5}{26}-\frac{11}{52}i\right)$, $\left(\frac{-29}{117}+\frac{5}{39}i\right)$. 6. $\left(\frac{4}{27}+\frac{4}{27}i\right)$, $\left(\frac{-1}{27}i\right)$, $\left(\frac{-4}{27}-\frac{1}{9}i\right)$.

7. $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}i\right)$, $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)$, $\left(\frac{-3}{8}+\frac{1}{8}i\right)$. 8. $\left(\frac{-3}{2}i\right)$ (i), $\left(\frac{1}{2}i\right)$. 9. $(-3+i)$, $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right)$, $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.

10. $\left(\frac{1}{25}+\frac{8}{225}i\right)$, $\left(\frac{-1}{18}i\right)$, $\left(\frac{-1}{25}+\frac{1}{50}i\right)$. 11. $\left(\frac{-1}{8}+\frac{1}{8}i\right)$, $\left(\frac{5}{16}-\frac{5}{16}i\right)$, $\left(\frac{-3}{16}+\frac{3}{16}i\right)$.

12. $\left(\frac{-9}{25}+\frac{73}{100}i\right)$, $\left(\frac{-1}{4}i\right)$, $\left(\frac{9}{25}-\frac{12}{25}i\right)$. 13. $\left(\frac{8}{25}-\frac{6}{25}i\right)$, $\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{50}+\frac{6}{25}i\right)$.

14. $\left(1+\frac{13}{8}i\right)$, $\left(\frac{-1}{5}-\frac{1}{40}i\right)$, $\left(\frac{-4}{5}-\frac{8}{5}i\right)$. 15. $\left(\frac{-2}{3}-\frac{4}{9}i\right)$, $\left(\frac{9}{13}+\frac{6}{13}i\right)$, $\left(\frac{-1}{39}-\frac{2}{117}i\right)$.

16. $\left(\frac{7}{50}-\frac{12}{25}i\right)$, $\left(\frac{1}{3}i\right)$, $\left(\frac{-7}{50}+\frac{11}{75}i\right)$. 17. $\left(\frac{9}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}-2i\right)$, $(-4+2i)$.

18. $\left(\frac{57}{125}+\frac{1}{125}i\right)$, $\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{11}{250}-\frac{1}{125}i\right)$. 19. $\left(\frac{-2}{9}+\frac{17}{27}i\right)$, $\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i\right)$, $\left(\frac{1}{45}-\frac{4}{135}i\right)$.

20. $\left(\frac{11}{50}-\frac{43}{450}i\right)$, $\left(\frac{5}{9}i\right)$, $\left(\frac{-11}{50}-\frac{23}{50}i\right)$. 21. $(-1+4i)$, $(2-2i)$, $(-1-2i)$.

22. $\left(\frac{3}{25}-\frac{7}{100}i\right)$, $\left(\frac{1}{12}i\right)$, $\left(\frac{-3}{25}-\frac{1}{75}i\right)$. 23. $\left(\frac{3}{50}i\right)$, $\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{175}i\right)$, $\left(\frac{-1}{7}-\frac{1}{14}i\right)$.

24. $\left(\frac{-3}{8}+\frac{29}{8}i\right)$, $\left(\frac{-7}{8}-\frac{7}{8}i\right)$, $\left(\frac{5}{4}-\frac{11}{4}i\right)$. 25. $\left(\frac{-18}{5}-\frac{4}{5}i\right)$, (3), $\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)$.

26. $\left(3-\frac{13}{2}i\right)$, $(7i)$, $\left(-3-\frac{1}{2}i\right)$. 27. $\left(\frac{5}{4}-\frac{7}{8}i\right)$, $(-1+i)$, $\left(\frac{-1}{4}-\frac{1}{8}i\right)$.

28. $\left(\frac{1}{13}+\frac{20}{117}i\right)$, $\left(\frac{-1}{18}i\right)$, $\left(\frac{-1}{13}-\frac{3}{26}i\right)$. 29. $\left(\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i\right)$, $\left(\frac{-3}{5}-\frac{1}{5}i\right)$, $\left(\frac{8}{25}+\frac{4}{25}i\right)$.

30. $\left(\frac{-1}{75}+\frac{6}{25}i\right)$, $\left(\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{-8}{25}-\frac{6}{25}i\right)$.

Задание 6

1. Письменно ответить на вопрос: сформулировать основную теорему Коши о вычетах.
2. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. а) $\displaystyle\int\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1}\frac{\sinh iz}{(z+1)^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}}dz$.

2. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1}\frac{\cos z}{(z-i)^2(z+1)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2\sinh\frac{1}{z}dz$.

3. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-1)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^3\cos\frac{1}{z}dz$.

4. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cosh iz}{(z+1)^2(z-i)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^4\sin\frac{1}{z}dz$.

5. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+2|=1} \frac{z^2+2z-1}{(z-i)(z+2)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\cosh\frac{1}{z}dz$.

6. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z-1)^3(z+2)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} (z-1)^2\sin\frac{1}{z-1}dz$.

7. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{(z-i)^3(z+1)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=1} (z+i)^5\cos\frac{1}{z+i}dz$.

8. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^3(z+1)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} (z+1)^4\sinh\frac{1}{z+1}dz$.

9. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=1} \frac{\sinh z}{(z-1)^2(z+i)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} (z-i)^3\cosh\frac{1}{z-i}dz$.

10. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{\cosh z}{(z+1)^2(z-1)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z+2|=1} (z+2)e^{\frac{1}{z+2}}dz$.

11. а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{z^2+1}{(z+1)(z-3)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{zi}dz$.

12. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-\pi|=1} \frac{\sin z}{(z-1)(z-\pi)^3}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\cos\frac{1}{iz}dz$.

13. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} \frac{\sinh z}{(z+1)(z-2)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^5\cosh\frac{1}{iz}dz$

14. а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz}{(z-2i)\cdot z^3}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^4\sinh\frac{1}{iz}dz$

15. а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{z^2-3z+1}{(z+1)(z-i)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^3e^{\frac{1}{iz}}dz$.

16. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-1)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^4\sin\frac{2}{z}dz$.

17. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} \frac{\cosh z}{(z+1)(z-2)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2\sinh\frac{2}{z}dz$.

18. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z-1)(z+i)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^3\cos\frac{3}{z}dz$.

19. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=5} \frac{z^2+z+2}{(z+i)(z-4)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\cosh\frac{3}{z}dz$.

20. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{(z-i)(z-1)^3}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2e^{\frac{3}{z}}dz$.

21. а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z+i)\cdot z^3}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} (z+1)^2\sin\frac{1}{z+1}dz$.

22. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sinh(\mathrm{i}z)}{(z-1)(z-i)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} (z-i)^5\cos\frac{1}{z-i}dz$.

23. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cosh(\mathrm{i}z)}{(z+1)(z-i)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} (z-2)^4\sinh\frac{1}{z-2}dz$.

24. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+3|=5} \frac{z+1}{(z-1)(z+3)^3}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=1} (z+i)^3\cosh\frac{1}{z+i}dz$.

25. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin iz}{(z-1)^2(z+2)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=1} (z-3)e^{\frac{1}{z-3}}dz$.

26. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{\sinh z}{(z-1)(z+1)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{i}{z}dz$.

27. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=0,5}\frac{\cos(iz)}{(z+i)\cdot z^3}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^4\sinh\frac{i}{z}dz$.

28. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1}\frac{\sin iz}{(z+i)^2(z-i)}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\cos\frac{i}{z}dz$.

29. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=1}\frac{\cosh(\mathrm{iz})}{(z-1)(z+i)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^3 e^{\frac{i}{z}}dz$.

30. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1}\frac{z^2-z+5}{(z-i)(z+1)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^5\cosh\frac{i}{z}dz$.

Ответы в вариантах задания 6.

1. а) $\frac{-8\pi}{(\pi+2)^2}$; б) $\frac{\pi i}{3}$. 2. а) $\pi\cdot\cos 1$; б) $\frac{\pi i}{3}$. 3. а) $-i\cdot\pi\cdot e^1$; б) $\frac{\pi i}{12}$. 4. а) $\pi\cdot\cosh 1$; б) $\frac{\pi i}{60}$.

5. а) $\left(\frac{28}{25}+\frac{46}{25}\cdot i\right)\cdot\pi$; б) πi . 6. а) $\frac{5\cdot i\cdot\pi}{27}\cdot e$; б) $-\frac{\pi i}{3}$. 7. а) $\pi\cdot(\sinh 1-\cosh 1)$; б) $-\frac{\pi i}{360}$.

8. а) $\frac{\pi}{2}\cos 1\cdot(1+i)$; б) $\frac{\pi i}{60}$. 9. а) $-i\cdot\pi\cdot\sin 1$; б) $\frac{\pi i}{12}$. 10. а) $\frac{1}{4}i\pi(e-3e^{-1})$; б) πi .

11. а) $2i\pi$; б) $\frac{\pi i}{3}$. 12. а) $\frac{2i\pi}{(\pi-1)^2}$; б) πi . 13. а) $\frac{2}{9}i\cdot\pi(e^2+2e^{-2})$; б) $-\frac{\pi i}{360}$. 14. а) $\frac{-\pi}{4}$;

б) $\frac{\pi}{60}$. 15. а) $2i\pi$; б) $\frac{\pi i}{12}$. 16. а) $\pi\cdot e^i(-2+i)$; б) $\frac{8\pi i}{15}$. 17. а) $\frac{2}{9}i\pi(e^2-2e^{-2})$; б) $\frac{8\pi i}{3}$.

18. а) $\pi\cdot e$; б) $\frac{27\pi i}{4}$. 19. а) $2i\pi$; б) $9\pi i$. 20. а) $\pi\cdot e^{-i}$; б) $9\pi i$. 21. а) -3π ; б) $-\frac{\pi i}{3}$.

22. а) $\pi(\cosh 1-\sinh 1+i\cdot\cosh 1)$; б) $-\frac{\pi i}{360}$. 23. а) $\pi(\sinh 1-\cosh 1-i\cdot\sinh 1)$; б) $\frac{\pi i}{60}$. 24. а) 0;

б) $\frac{\pi i}{12}$. 25. а) $\frac{2}{9}\pi(-e-2e^{-1})$; б) πi . 26. а) $\frac{1}{4}i\pi(-3e^{-1}-e)$; б) $-\frac{\pi i}{3}$. 27. а) $2\pi\cos 1$; б) $-\frac{\pi}{60}$.

28. а) $\frac{1}{2}i\cdot\pi\cdot\sin 1$; б) πi . 29. а) $\pi(\sinh 1-\cosh 1-i\cdot\sinh 1)$; б) $\frac{\pi i}{12}$. 30. а) $\pi(-4+3i)$; б) $-\frac{\pi i}{360}$.

2. Задания для самостоятельной работы к модулю «Операционное исчисление»

Задание 1

Для данного оригинала найти изображение по Лапласу.

1. $f(t)=4\sin 2t-2e^{-t}\cos 3t+5t^2\cdot e^{3t}-6+\Phi(t-3)\cdot\mathrm{sh}2(t-3)$
2. $f(t)=4\mathrm{sh}2t-2e^{3t}\sin 4t+5t^3\cdot e^{-2t}-8+\Phi(t-5)\cdot\sin 3(t-5)$
3. $f(t)=7\cos 2t-3e^{-2t}\mathrm{ch}3t+4t^4\cdot e^t+9t+\Phi(t-2)\cdot\sin 5(t-3)$
4. $f(t)=5\mathrm{ch}2t-4e^{6t}\mathrm{sh}3t+5t\cdot e^{-3t}-10t^2+\Phi(t-1)\cdot\cos 4(t-1)$
5. $f(t)=4+2e^{6t}\cos t+t^5\cdot e^{-t}-7t\cdot\sin 2t+\Phi(t-7)\cdot\mathrm{ch}3(t-7)$
6. $f(t)=2e^{4t}-3e^{-6t}\mathrm{ch}t+t^5\cdot e^{-6t}-7t\cdot\mathrm{sh}2t+\Phi(t-7)\cdot(t-7)^2$
7. $f(t)=3e^{-7t}-7e^{-t}\sin 2t+t^6\cdot e^{-t}-7t\cdot\mathrm{ch}5t+\Phi(t-2)\cdot(t-2)^3$
8. $f(t)=5e^{2t}+2e^{6t}\mathrm{sh}t+t^7\cdot e^{-2t}-7t\cdot\cos 3t+\Phi(t-5)\cdot(t-5)$
9. $f(t)=5\Phi(t-2)e^{(t-2)}+3e^{2t}\mathrm{sh}4t+2\sin^2 t-7t\cdot\cos 3t+2t-5$
10. $f(t)=4\sin 3t-4e^{-t}\cos 4t+6t^2\cdot e^{3t}+7t+\Phi(t-4)\cdot\mathrm{sh}(t-4)$
11. $f(t)=5\mathrm{sh}3t-3e^{3t}\sin 5t+6t^3\cdot e^{-3t}-9+\Phi(t-6)\cdot\sin(t-6)$
12. $f(t)=8\cos 3t-4e^{-3t}\mathrm{ch}4t+4t^5\cdot e^{2t}+t+\Phi(t-4)\cdot\sin(t-4)$
13. $f(t)=6\mathrm{ch}3t-5e^{7t}\mathrm{sh}4t+6t\cdot e^{-5t}-9t^2+\Phi(t-2)\cdot\cos(t-2)$
14. $f(t)=5+2e^{5t}\cos 2t+t^4\cdot e^{-5t}-6t\cdot\sin 3t+\Phi(t-6)\cdot\mathrm{ch}(t-6)$
15. $f(t)=3e^{5t}-4e^{-7t}\mathrm{ch}2t+t^4\cdot e^{6t}-t\cdot\mathrm{sh}t+\Phi(t-5)\cdot(t-5)^4$
16. $f(t)=e^{-7t}-7e^{-t}\sin 3t+t^6e^{-t}-4t\cdot\mathrm{ch}2t+\Phi(t-2)\cdot(t-2)^5$
17. $f(t)=3e^{2t}+5e^{6t}\mathrm{sh}t+t^7\cdot e^{-2t}-7t\cdot\cos 2t+\Phi(t-4)\cdot(t-4)$
18. $f(t)=\Phi(t-3)e^{2(t-3)}+e^{-2t}\mathrm{sh}5t+2\sin^2 t-9t\cdot\cos 2t+6t-8$
19. $f(t)=4\Phi(t-3)e^{(t-3)}+5e^{-2t}\sin 5t+2\cos^2 t-t\cdot\mathrm{ch}3t+3t+7$
20. $f(t)=3\Phi(t-4)e^{(t-4)}+6e^{2t}\cos 6t+4\sin^2 2t+t\cdot\sin 4t+2t^2$
21. $f(t)=2\Phi(t-5)e^{(t-5)}+7e^{2t}\mathrm{ch}7t+6\cos^2 3t-t\cdot\mathrm{sh}2t+4t^3+4$

22. $f(t)=\Phi(t-4)e^{(t-4)}+2e^{t}\mathrm{sh}5t+6\sin^2 5t-4t\cdot\cos 2t+t^3+3$

23. $f(t)=e^{-2t}+e^{6t}\cos t+t^5\cdot e^{-t}-7t\cdot\sin 2t+\Phi(t-7)\cdot\mathrm{ch}3(t-7)$

24. $f(t)=3e^{-4t}+3e^{-6t}\mathrm{ch}t+t^4\cdot e^{-7t}-t\cdot\mathrm{sh}2t+\Phi(t-5)\cdot(t-5)^2$

25. $f(t)=7e^{-7t}-6e^{2t}\sin 3t+t^7\cdot e^{-t}-t\cdot\mathrm{ch}4t+\Phi(t-2)\cdot(t-2)^3$

26. $f(t)=e^{6t}\cos t+t^8\cdot e^{-2t}-7t\cdot\sin 2t+\Phi(t-7)\cdot\mathrm{ch}3(t-7)$

27. $f(t)=3e^{6t}\mathrm{ch}5t+t^5\cdot e^{-6t}-7t^2\cdot\mathrm{sh}2t+\Phi(t-7)\cdot(t-7)^2$

28. $f(t)=3+7e^{-t}\sin 2t+t^6\cdot e^{-t}-7t\cdot\mathrm{ch}5t+\Phi(t-2)\cdot 7(t-2)^3$

29. $f(t)=5e^{2t}+2e^{6t}\mathrm{sh}t+t^7\cdot e^{-2t}-t\cdot\cos 3t+\Phi(t-5)\cdot 6(t-5)$

30. $f(t)=\Phi(t-4)e^{7(t-4)}+e^{-2t}\mathrm{sh}7t+\sin^2 t-t^2\cdot\cos 3t+2t-5$

Задание 2

По данному изображению найти оригинал.

1. $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2\cdot(p+2)}$.

2. $F(p)=\dfrac{p^2-1}{p^2\cdot(p+3)}$.

3. $F(p)=\dfrac{2p+1}{p\cdot(p-2)^2}$.

4. $F(p)=\dfrac{p+9}{p\cdot(p^2+1)}$.

5. $F(p)=\dfrac{p+5}{(p+2)\cdot(p-1)^2}$.

6. $F(p)=\dfrac{p+1}{(p-5)(p^2+9)}$.

7. $F(p)=\dfrac{p-5}{(p+3)\cdot(p^2+2p+10)}$.

8. $F(p)=\dfrac{3p+1}{(p^2+16)\cdot(p-1)}$.

9. $F(p)=\dfrac{3p-1}{(p+2)(p^2+4p+5)}$.

10. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{(p^2-2p+17)\cdot(p-5)}$.

11. $F(p)=\dfrac{p^2+p+1}{(p+1)\cdot(p-2)^2}$.

12. $F(p)=\dfrac{p^2+6}{p(p^2-4p+5)}$.

13. $F(p)=\dfrac{p+1}{(p^2+25)\cdot(p-1)}$.

14. $F(p)=\dfrac{2p+7}{(p+1)(p^2-4)}$.

15. $F(p)=\dfrac{p^2+p-1}{p\cdot(p-2)(p+7)}$.

16. $F(p)=\dfrac{p+5}{(p^2-9)(p+1)}$.

17. $F(p)=\dfrac{p^2+p}{(p^2-6p+10)\cdot(p+3)}$.

18. $F(p)=\dfrac{p^2+2p+1}{p\cdot(p-3)^2}$.

19. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{(p^2-6p+13)(p+5)}$.

20. $F(p)=\dfrac{p+3}{(p+6)\cdot(p^2-1)}$.

21. $F(p)=\dfrac{p+1}{p\cdot(p-1)(p+4)}$.

22. $F(p)=\dfrac{p^2-1}{p\cdot(p+2)(p-3)}$.

23. $F(p)=\dfrac{p^2+3}{(p^2+4)\cdot(p-2)}$.

24. $F(p)=\dfrac{p^2+3p+7}{p\cdot(p-2)(p+1)}$.

25. $F(p)=\dfrac{p^2-1}{(p+7)(p^2+2p+17)}$.

26. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{(p-1)\cdot(p+5)^2}$.

27. $F(p)=\dfrac{p-2}{(p^2+4)\cdot(p+5)}$.

28. $F(p)=\dfrac{p+8}{(p-2)(p+4)(p+7)}$.

29. $F(p)=\dfrac{p^2-p-1}{(p+1)\cdot(p-3)^2}$.

30. $F(p)=\dfrac{p-3}{(p+3)(p^2+4p+13)}$.

Ответы в вариантах задания 2.

1. $f(t)=\frac{5}{4}-\frac{3}{2}t-\frac{5}{4}e^{-2t}$. 2. $f(t)=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t+\frac{8}{9}e^{-3t}$. 3. $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{5}{2}t\cdot e^{2t}$.

4. $f(t)=9-9\cos t+\sin t$. 5. $f(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{t}+2t\cdot e^{t}$. 6. $f(t)=\frac{3}{17}e^{5t}-\frac{3}{17}\cos 3t+\frac{2}{51}\sin 3t$.

7. $f(t)=e^{-t}\left(\frac{8}{13}\cos 3t-\frac{1}{13}\sin 3t\right)-\frac{8}{13}e^{-3t}$. 8. $f(t)=\frac{4}{17}e^{t}-\frac{4}{17}\cos 4t+\frac{47}{68}\sin 4t$.

9. $f(t)=e^{-2t}(7\cos t+3\sin t)-7e^{-2t}$. 10. $f(t)=e^{t}\left(\frac{1}{4}\cos 4t+\frac{3}{4}\sin 4t\right)+\frac{3}{4}e^{5t}$.

11. $f(t)=\frac{1}{9}e^{-t}+\frac{8}{9}e^{2t}+\frac{7}{3}t\cdot e^{2t}$. 12. $f(t)=\frac{6}{5}-e^{2t}\left(\frac{1}{5}\cos t+\frac{22}{5}\sin t\right)$.

13. $f(t)=\frac{1}{13}e^{t}-\frac{1}{13}\cos 5t+\frac{12}{65}\sin 5t$. 14. $f(t)=\frac{11}{12}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-t}$.

15. $f(t)=\frac{1}{14}+\frac{41}{63}e^{-7t}+\frac{5}{18}e^{2t}$. 16. $f(t)=\frac{1}{6}e^{-3t}+\frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}$.

17. $f(t)=e^{3t}\left(\frac{31}{37}\cos t+\frac{73}{37}\sin t\right)+\frac{6}{37}e^{-3t}$. 18. $f(t)=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}e^{3t}+\frac{16}{3}t\cdot e^{3t}$.

19. $f(t)=e^{3t}\left(\frac{21}{34}\cos 2t+\frac{18}{34}\sin 2t\right)+\frac{13}{34}e^{-5t}$. 20. $f(t)=\frac{2}{7}e^{t}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{3}{35}e^{-6t}$.

21. $f(t)=\frac{2}{5}e^{t}-\frac{3}{20}e^{-4t}-\frac{1}{4}$. 22. $f(t)=\frac{3}{10}e^{-2t}+\frac{8}{15}e^{3t}+\frac{1}{6}$. 23. $f(t)=\frac{7}{8}e^{2t}+\frac{1}{8}(\cos 2t+\sin 2t)$.

24. $f(t)=\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{17}{6}e^{2t}-\frac{7}{2}$. 25. $f(t)=e^{-t}\left(\frac{1}{13}\cos 4t-\frac{8}{13}\sin 4t\right)+\frac{12}{13}e^{-7t}$.

26. $f(t)=\frac{1}{18}e^{t}+\frac{17}{18}e^{-5t}-\frac{13}{3}t\cdot e^{-5t}$. 27. $f(t)=-\frac{7}{29}e^{-5t}+\frac{7}{29}\cos 2t-\frac{3`}{29}\sin 2t$.

28. $f(t)=\frac{5}{27}e^{2t}-\frac{2}{9}e^{-4t}+\frac{1}{27}e^{-7t}$. 29. $f(t)=\frac{1}{16}e^{-t}+\frac{15}{16}e^{3t}+\frac{5}{4}t\cdot e^{3t}$.

30. $f(t)=e^{-2t}\left(\frac{3}{5}\cos 3t+\frac{2}{15}\sin 3t\right)-\frac{3}{5}e^{-3t}$.

Задание 3

Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

1. $x''+2x'-3x=\sin t,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=-1$.
2. $x''+2x'=\cos t,\quad x(0)=-1,\quad x'(0)=0$.
3. $x''+6x'+13x=1,\quad x(0)=2,\quad x'(0)=0$.
4. $x''+2x'+5x=t-2,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=0$.
5. $x''-x'-2x=\sin 2t,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=0$.
6. $x''-2x'+17x=1,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=0$.
7. $x''+4x=1-t,\quad x(0)=2,\quad x'(0)=0$.
8. $x''-3x'+2x=\cos 2t,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=2$.
9. $x''+9x=e^{-2t},\quad x(0)=-2,\quad x'(0)=1$.
10. $x''-4x'+3x=\sin 3t,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=-2$.
11. $x''+5x'+4x=\cos 3t,\quad x(0)=2,\quad x'(0)=0$.

12. $x''+3x'-4x=\sin 4t,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=1$.
13. $x''+16x=e^{-3t},\quad x(0)=0,\quad x'(0)=2$.
14. $x''-6x'+13x=t,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=1$.
15. $x''+2x'+5x=3,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=-2$.
16. $x''-5x'+6x=\cos 2t,\quad x(0)=-1,\quad x'(0)=1$.
17. $x''+5x'+6x=t^2\quad x(0)=0,\quad x'(0)=0$.
18. $x''+25x=t+1,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=0$.
19. $x''+3x'=\cos 2t,\quad x(0)=2,\quad x'(0)=0$.
20. $x''-4x'+5x=2,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=-1$.
21. $x''+2x'+17x=1,\quad x(0)=-1,\quad x'(0)=2$.
22. $x''+x'-6x=\sin 4t\quad x(0)=1,\quad x'(0)=0$.
23. $x''+36x=2-t,\quad x(0)=2,\quad x'(0)=0$.
24. $x''-x'-6x=2\sin t,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=2$.
25. $x''+x=t+1,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=1$.
26. $x''-5x'+4x=\sin t,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=0$.
27. $x''+5x'=t^2\cdot e^t\quad x(0)=0,\quad x'(0)=0$.
28. $x''+x=\cos 2t,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=1$.
29. $x''-2x'+2x=t\cdot e^{-2t}\quad x(0)=-1,\quad x'(0)=1$.
30. $x''+4x'-5x=\sin 3t,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=-1$.

Ответы к заданию 3.

1. $x(t)=\frac{5}{8}e^{t}+\frac{19}{40}e^{-3t}-\frac{1}{5}\sin t-\frac{1}{10}\cos t$. 2. $x(t)=\frac{1}{5}e^{-2t}-1-\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t$.

3. $x(t)=\frac{1}{13}+\frac{75}{26}e^{-3t}\sin 2t+\frac{25}{13}e^{-3t}\cos 2t$. 4. $x(t)=\frac{1}{5}t-\frac{12}{25}+\frac{7}{50}e^{-t}\sin 2t+\frac{12}{25}e^{-t}\cos 2t$.

5. $x(t)=\frac{8}{15}e^{-t}+\frac{5}{12}e^{2t}-\frac{3}{20}\sin 2t+\frac{1}{20}\cos 2t$. 6. $x(t)=\frac{1}{17}-\frac{4}{17}e^{t}\sin 4t+\frac{16}{17}e^{t}\cos 4t$.

7. $x(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t+\frac{7}{4}\cos 2t+\frac{1}{8}\sin 2t$. 8. $x(t)=\frac{9}{4}e^{2t}-\frac{11}{5}e^{t}-\frac{3}{20}\sin 2t-\frac{1}{20}\cos 2t$.

9. $x(t)=\frac{1}{13}e^{-2t}+\frac{5}{13}\sin 3t-\frac{27}{13}\cos 3t$. 10. $x(t)=\frac{47}{20}e^{t}-\frac{17}{12}e^{3t}-\frac{1}{30}\sin 3t+\frac{1}{15}\cos 3t$.

11. $x(t)=\frac{79}{30}e^{-t}-\frac{46}{75}e^{-4t}+\frac{3}{50}\sin 3t-\frac{1}{50}\cos 3t$ .12. $x(t)=\frac{89}{85}e^{t}-\frac{1}{40}e^{-4t}-\frac{5}{136}\sin 4t-\frac{3}{136}\cos 4t$.

13. $x(t)=\frac{1}{25}e^{-3t}+\frac{53}{100}\sin 4t-\frac{1}{25}\cos 4t$. 14. $x(t)=\frac{1}{13}t+\frac{6}{169}+\frac{87}{169}e^{3t}\sin 2t-\frac{6}{169}e^{3t}\cos 2t$.

15. $x(t)=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}e^{-t}\sin 2t+\frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t$. 16. $x(t)=\frac{42}{13}e^{3t}-\frac{17}{4}e^{2t}-\frac{5}{52}\sin 2t+\frac{1}{52}\cos 2t$.

17. $x(t)=\frac{1}{6}t^2-\frac{5}{18}t+\frac{19}{108}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{2}{27}e^{-3t}$. 18. $x(t)=\frac{1}{5}t+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}\sin 5t-\frac{1}{25}\cos 5t$.

19. $x(t)=\frac{1}{13}e^{-3t}+2+\frac{3}{26}\sin 2t-\frac{1}{13}\cos 2t$. 20. $x(t)=\frac{2}{5}-\frac{11}{5}e^{2t}\sin t+\frac{3}{5}e^{2t}\cos t$.

21. $x(t)=\frac{1}{17}+\frac{8}{17}e^{-t}\sin 2t-\frac{18}{17}e^{-t}\cos 2t$. 22. $x(t)=\frac{46}{125}e^{-3t}+\frac{16}{25}e^{2t}-\frac{11}{250}\sin 4t-\frac{1}{125}\cos 4t$.

23. $x(t)=-\frac{1}{36}t+\frac{1}{18}+\frac{1}{216}\sin 6t+\frac{70}{36}\cos 6t$. 24. $x(t)=\frac{11}{25}e^{3t}-\frac{12}{25}e^{-2t}-\frac{7}{25}\sin t+\frac{1}{25}\cos t$.

25. $x(t)=t+1-\cos t$. 26. $x(t)=\frac{7}{6}e^{t}-\frac{16}{51}e^{4t}+\frac{3}{34}\sin t+\frac{5}{34}\cos t$.

27. $x(t)=\frac{1}{6}t^2\cdot e^{t}-\frac{7}{18}t\cdot e^{t}+\frac{43}{108}e^{t}-\frac{2}{5}+\frac{1}{540}e^{-5t}$. 28. $x(t)=-\frac{1}{3}\cos 2t+\sin t+\frac{4}{3}\cos t$.

29. $x(t)=\frac{1}{10}t\cdot e^{-2t}+\frac{3}{50}e^{-2t}+\frac{104}{50}e^{t}\sin t-\frac{53}{50}e^{t}\cos t$.

30. $x(t)=\frac{43}{60}e^{t}+\frac{65}{204}e^{-5t}-\frac{7}{170}\sin 3t-\frac{6}{170}\cos 3t$.

Задание 4

Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям (независимая переменная - t).

1. $\begin{cases} x'=-x+5y, \\ y'=-x+3y, \end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=-1$.

2. $\begin{cases} x'=-2x-4y, \\ y'=5x+6y, \end{cases}$ $x(0)=2,\quad y(0)=1$.

3. $\begin{cases} x'=-x+8y, \\ y'=x+y, \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=1$.

4. $\begin{cases} x'=7x+3y, \\ y'=6x+4y, \end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=0$.

5. $\begin{cases} x'=-x+y, \\ y'=-2x-3y, \end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=1$.

6. $\begin{cases} x'=y, \\ y'=-2x+3y, \end{cases}$ $x(0)=-1,\quad y(0)=1$.

7. $\begin{cases} x'=x+3y, \\ y'=-x+5y, \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=-1$.

8. $\begin{cases} x'=-x+9y, \\ y'=-x-y, \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=2$.

9. $\begin{cases} x'=-3x+y, \\ y'=-20x+6y, \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=2$.

10. $\begin{cases} x'=-x+5y, \\ y'=x+3y, \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=1$.

11. $\begin{cases} x'=-2x-2y, \\ y'=x-4y, \end{cases}$ $x(0)=2,\quad y(0)=0$.

12. $\begin{cases} x'=7x+3y, \\ y'=6x+4y, \end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=2$.

13. $\begin{cases} x'=-x+5y, \\ y'=-x+3y, \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=2$.

14. $\begin{cases} x'=-\dfrac{y}{2}, \\ y'=2x, \end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=-1$.

15. $\begin{cases} x' = -8y, \\ y' = \dfrac{1}{2}x, \end{cases}$ $\quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0$.

16. $\begin{cases} x' = -2x - 4y, \\ y' = 5x + 6y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2$.

17. $\begin{cases} x' = -4y, \\ y' = 16x, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0$.

18. $\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -2x - 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2$.

19. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -2x + 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1$.

20. $\begin{cases} x' = -\dfrac{y}{2}, \\ y' = 2x, \end{cases}$ $\quad x(0) = -2, \quad y(0) = 1$.

21. $\begin{cases} x' = -8y, \\ y' = \dfrac{1}{2}x, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1$

22. $\begin{cases} x' = -2x - 2y, \\ y' = x - 4y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2$.

23. $\begin{cases} x' = -x + 9y, \\ y' = -x - y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1$.

24. $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1$.

25. $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -x + 5y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2$.

26. $\begin{cases} x' = 18y, \\ y' = -2x, \end{cases}$ $\quad x(0) = -1, \quad y(0) = -1$.

27. $\begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = -20x + 6y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1$.

28. $\begin{cases} x' = -x + 5y, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1$.

29. $\begin{cases} x' = 18y, \\ y' = -2x, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1$.

30. $\begin{cases} x' = -4y, \\ y' = 16x, \end{cases}$ $\quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2$.

Ответы к заданию 4.

1. $x(t) = e^t(\cos t - 7\sin t)$, $\quad y(t) = e^t(-\cos t - 3\sin t)$. 2. $x(t) = e^{2t}(2\cos 2t - 6\sin 2t)$, $y(t) = e^{2t}(\cos 2t + 7\sin 2t)$. 3. $x(t) = \frac{8}{3}\operatorname{sh}3t$, $\quad y(t) = \operatorname{ch}3t + \frac{1}{3}\operatorname{sh}3t$. 4. $x(t) = \frac{2}{3}e^{10t} + \frac{1}{3}e^t$, $y(t) = \frac{2}{3}e^{10t} - \frac{2}{3}e^t$. 5. $x(t) = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$, $\quad y(t) = e^{-2t}(\cos t - 3\sin t)$. 6. $x(t) = 2e^{2t} - 3e^t$, $y(t) = 4e^{2t} - 3e^t$. 7. $x(t) = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{4t}$, $\quad y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{4t}$. 8. $x(t) = 6e^{-t}\sin 3t$, $y(t) = 2e^{-t}\cos 3t$. 9. $x(t) = 2e^{2t} - 2e^t$, $\quad y(t) = 10e^{2t} - 8e^t$. 10. $x(t) = \frac{5}{6}e^{4t} - \frac{5}{6}e^{-2t}$, $y(t) = \frac{5}{6}e^{4t} + \frac{1}{6}e^{-2t}$. 11. $x(t) = e^{-3t}(2\cos t + 2\sin t)$, $\quad y(t) = 2e^{-3t}\sin t$. 12. $x(t) = \frac{4}{3}e^{10t} - \frac{1}{3}e^t$, $y(t) = \frac{4}{3}e^{10t} + \frac{2}{3}e^t$ .13. $x(t) = 10e^t\sin t$, $\quad y(t) = e^t(2\cos t + 4\sin t)$. 14. $x(t) = \cos t + \frac{1}{2}\sin t$, $y(t) = 2\sin t - \cos t$. 15. $x(t) = -\cos t$, $\quad y(t) = -\frac{1}{4}\sin 2t$. 16. $x(t) = -4e^{2t}\sin 2t$, $y(t) = e^{2t}(2\cos 2t + 4\sin 2t)$. 17. $x(t) = 2\cos 8t$, $\quad y(t) = 4\sin 8t$. 18. $x(t) = e^{-2t}(-\cos t + \sin t)$, $y(t) = 2e^{-2t}\cos t$. 19. $x(t) = 5e^t - 3e^{2t}$, $\quad y(t) = 5e^t - 6e^{2t}$.

20. $x(t) = -2\cos t - \frac{1}{2}\sin t$, $y(t) = \cos t - 4\sin t$.

21. $x(t) = 2\cos 2t + 4\sin 2t$, $y(t) = -\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$. 22. $x(t) = e^{-3t}(\cos t + 5\sin t)$,

$y(t) = e^{-3t}(-2\cos t + 3\sin t)$. 23. $x(t) = e^{-t}(\cos 3t - 3\sin 3t)$, $y(t) = e^{-t}\left(-\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t\right)$.

24. $x(t) = 2\mathrm{ch}3t - \frac{10}{3}\mathrm{sh}3t$, $y(t) = -\mathrm{ch}3t + \frac{1}{3}\mathrm{sh}3t$. 25. $x(t) = \frac{5}{2}e^{4t} - \frac{3}{2}e^{2t}$, $y(t) = \frac{5}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t}$.

26. $x(t) = -\cos 6t - 3\sin 6t$, $y(t) = -\cos 6t + \frac{1}{3}\sin 6t$. 27. $x(t) = 11e^{t} - 9e^{2t}$, $y(t) = 44e^{t} - 45e^{2t}$.

28. $x(t) = -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{5}{2}e^{-2t}$, $y(t) = -\frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$. 29. $x(t) = 2\cos 6t + 3\sin 6t$,

$y(t) = \cos 6t - \frac{2}{3}\sin 6t$. 30. $x(t) = -\cos 8t - \sin 8t$, $y(t) = 2\cos 8t - 2\sin 8t$.

3. Примеры решения задач

Все задачи можно решать «вручную», однако желательно использовать возможности компьютерного математического пакета MathCAD, как это показано ниже.

Задачи модуля «ТФКП»

Задание 1. Проверить с помощью условий Коши-Римана, является ли функция $w = \bar{z} \cdot \cos z$ аналитической?

Решение. Представим функцию в алгебраической форме, учитывая, что $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

$w = \bar{z} \cdot \cos z = (x - iy) \cdot \cos(x + iy) = (x - iy)(\cos x \cdot \cos iy -$

$- \sin x \cdot \sin iy)$. С учетом зависимостей $\cos iy = \mathrm{ch}y$ и $\sin iy = i\mathrm{sh}y$ получим: $w = u(x, y) + iv(x, v)$, где

$u(x, y) = \mathrm{Re}\, w = x\cos x\mathrm{ch}y - y\sin x\mathrm{sh}y$,

$v(x, y) = \mathrm{Im}\, w = -x\sin x\mathrm{sh}y - y\cos x\mathrm{ch}y$.

В пакете MathCAD задаем функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ и определяем их частные производные:

$$u(x,y) := x\cdot\cos(x)\cdot\cosh(y) - y\cdot\sin(x)\cdot\sinh(y)$$

$$v(x,y) := -x\cdot\sin(x)\cdot\sinh(y) - y\cdot\cos(x)\cdot\cosh(y)$$

$$\frac{d}{dx}u(x,y) \to \cos(x)\cdot\cosh(y) - x\cdot\sin(x)\cdot\cosh(y) - y\cdot\cos(x)\cdot\sinh(y)$$

$$\frac{d}{dy}v(x,y) \to -x\cdot\sin(x)\cdot\cosh(y) - \cos(x)\cdot\cosh(y) - y\cdot\cos(x)\cdot\sinh(y)$$

$$\frac{d}{dy}u(x,y) \to x\cdot\cos(x)\cdot\sinh(y) - \sin(x)\cdot\sinh(y) - y\cdot\sin(x)\cdot\cosh(y)$$

$$\frac{d}{dx}v(x,y) \to -\sin(x)\cdot\sinh(y) - x\cdot\cos(x)\cdot\sinh(y) + y\cdot\sin(x)\cdot\cosh(y)$$

Ответ: условия Коши-Римана не выполняются. Функция $w = \bar{z} \cdot \cos z$ не аналитическая.

Задание 2. Вычислить интеграл $\int\limits_C z^2\,\mathrm{Re}\,z dz$,

а) если С: $z = (-1 + 2i)t$, $(0 \le t \le 2)$;

б) если $C : |z| = 1$, $(0 \le \arg z \le \pi/3)$.

Решение а) Уравнение пути интегрирования задано через параметр t: $x = -t$, $y = 2t$. Избавляясь от параметра, получим $y = -2x$, откуда $dy = -2dx$. Представим подынтегральную функцию в алгебраической форме: $z^2\,\mathrm{Re}\,z = (x + iy)^2 x = x^3 - xy^2 + i2x^2 y$. Дифференциал $dz = dx + idy = (1 - 2i)dx$.

$$\int\limits_C z^2\,\mathrm{Re}\,z dz = \int\limits_C \left(x^3 - xy^2 + i2x^2 y\right)(1 - 2i)dx = |y = -2x| =$$

$$= (1 - 2i)\int\limits_0^{-2}\left(x^3 - 4x^3 - i4x^3\right)dx$$. В пакете MathCAD:

$$i := \sqrt{-1} \qquad (1 - 2\cdot i)\cdot\int\limits_0^{-2}\left(-3\cdot x^3 - i\cdot 4\cdot x^3\right)dx \to -44 + 8\cdot i$$

б) Так как $C : |z| = 1$, $(0 \le \arg z \le \pi/2)$ - часть дуги окружности с центром в начале координат, то вычисления удобно производить в полярной системе координат, при этом переменную интегрирования представим в показательной форме, с учетом, что $\rho = |z| = 1$, $\arg z = \varphi$. $z = \rho \cdot e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$; $z^2 = e^{i2\varphi}$; $\operatorname{Re} z = \rho\cos\varphi = \cos\varphi$. В свою очередь, по формуле Эйлера $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$. Тогда

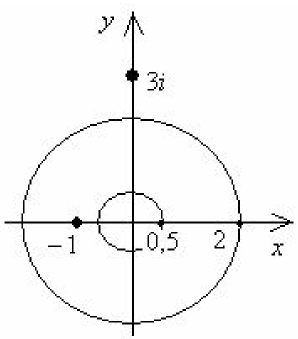
$$\int\limits_C z^2 \operatorname{Re} z dz = \int\limits_0^{\pi/2} e^{i2\varphi}\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)ie^{i\varphi}d\varphi = \frac{i}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(e^{i4\varphi} + e^{i2\varphi}\right)d\varphi .$$

Интеграл вычисляем в MathCAD:

$$\frac{i}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\cdot 4\cdot t} + e^{i\cdot 2\cdot t}\right)dt \to \frac{-1}{2}$$

Ответ: а) $-44 + 8i$; б) -1/2.

Задание 3. Используя интегральные формулы Коши, вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{\operatorname{sh}4z}{(z+1)^2(z-3i)}dz$ по двум замкнутым контурам:



1) $|z| = 0{,}5$; 2) $|z| = 2$.

Решение. Рисуем на комплексной плоскости заданные контуры интегрирования и отмечаем особые точки подынтегральной функции: $z_1 = -1$, $z_2 = 3i$.

1) $\int\limits_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{sh}4z}{(z+1)^2(z-3i)}dz = 0$ согласно теореме Коши для односвязной области (подынтегральная функция аналитическая во всех точках замкнутой области).

2) Внутри контура $|z| = 2$ имеется одна особая точка $z = -1$.

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh}4z}{(z+1)^2(z-3i)}dz = 2\pi i\cdot\left(\frac{sh4z}{z-3i}\right)'_{z=-1}.$$ Далее в MathCAD:

$i := \sqrt{-1}$ $f(z) := \frac{\sinh(4\cdot z)}{z - 3\cdot i}$ $f1(z) := \frac{d}{dz}f(z)$

$$(2\cdot\pi\cdot i\cdot f1(-1)) \to 2\cdot i\cdot\pi\cdot\left(\left(\frac{-2}{5} + \frac{6}{5}\cdot i\right)\cdot\cosh(4) + \left(\frac{-2}{25} - \frac{3}{50}\cdot i\right)\cdot\sinh(4)\right)$$

$$(2\cdot\pi\cdot i\cdot f1(-1)) = -195.611 - 82.35i$$

Ответ: $-195{,}611 - 82{,}35i$.

Задание 4. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z^8}\cdot\operatorname{ch}2z$ в ряд Лорана по степеням z . Определить тип особых точек $z = 0$ и $z = \infty$.

Решение. Воспользуемся определением гиперболического косинуса [1, §2.5]: $\operatorname{ch}z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ Подставим в ряд вместо z выражение $2z$ и умножим ряд почленно на $\frac{1}{z^8}$:

$$f(z) = \frac{1}{z^8}\cdot\operatorname{ch}2z = \frac{1}{z^8}\left(1 + \frac{2^2z^2}{2!} + \frac{2^4z^4}{4!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^8} + \frac{2}{z^6} + \frac{2^4}{z^4\cdot 4!} + \frac{2^6}{z^2\cdot 6!} + \frac{2^8}{8!} + \frac{2^{10}z^2}{10!} + \frac{2^{12}z^4}{12!} + \ldots$$

На комплексной плоскости заданная функция имеет только одну особую точку $z = 0$. Область $0 < |z| < \infty$ - окрестность точки $z = 0$ и бесконечно удаленной изолированной особой точки $z = \infty$. Поэтому ряд Лорана по степеням z позволяет судить о типе этих точек.

Ответ: $z = 0$ - полюс 8-го порядка (ряд содержит конечное число членов главной части со старшим членом z^{-8}); $z = \infty$ - существенно особая бесконечно удаленная точка (ряд содержит бесконечное число членов с положительными степенями z).

Задание 5. Вычислить вычеты в каждой из особых точек данной функции $f(z) = \frac{z^2 + z + 9}{z^3\cdot(z - 2 + i)^2(z+1)}$.

Решение. Значения z, превращающие в ноль знаменатель функции, являются полюсами. Функция имеет три полюса: простой полюс $a=-1$, полюс второго порядка $a=2-i$, полюс третьего порядка $a=0$. Используя формулы для простого и кратного полюса, вычисления проводим в MathCAD:

$$\mathrm{i} := \sqrt{-1} \qquad \mathrm{f(z)} := \frac{z^2+z+9}{z^3\cdot(z-2+i)^2\cdot(z+1)}$$

$$a:=-1 \quad \lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z) \to \frac{-18}{25}-\frac{27}{50}\cdot i$$

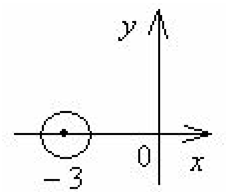
$$a:=2-i \quad m:=2 \quad \frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m\cdot f(z)\to\frac{124}{625}-\frac{661}{1250}\cdot i$$

$$a:=0 \quad m:=3 \quad \frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m\cdot f(z)\to\frac{326}{625}+\frac{668}{625}\cdot i$$

Задание 6. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

а) $\displaystyle\int\limits_{|z+3|=1}\frac{z^2-2z+7}{(z-i)(z+3)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^5\cosh\frac{2i}{z}dz$.

Решение. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+3|=1}\frac{z^2-2z+7}{(z-i)(z+3)^2}dz$. Рисуем на комплексной плоскости



контур интегрирования – окружность радиуса 1 с центром в точке $z=-3$. Внутри окружности расположен один полюс второго порядка. Вычисляем вычет в этом полюсе.

$$\mathrm{i} := \sqrt{-1} \qquad \mathrm{f(z)} := \frac{z^2-2z+7}{(z-i)\cdot(z+3)^2}$$

$$a:=-3 \quad m:=2 \quad \frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m\cdot f(z)\to\frac{16}{25}+\frac{13}{25}\cdot i$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{|z+3|=1}\frac{z^2-2z+7}{(z-i)(z+3)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{16}{25}+\frac{13}{25}i\right)=\pi\left(-\frac{26}{25}+\frac{32}{25}i\right).$$

Ответ: $\pi\left(-\frac{26}{25}+\frac{32}{25}i\right)$.

Задачи модуля «Операционное исчисление»

Задание 1. Для данного оригинала найти изображение по Лапласу.

$f(t)=7e^{3t}+2e^{-5t}\mathrm{sh}3t+t^7\cdot e^{-5t}-t\cdot\cos 3t+\Phi(t-5)\cdot 6(t-5)$.

Решение. Используем линейные свойства изображения:

$$L\{f(t)\} = 7L\{e^{3t}\}+2L\{e^{-5t}sh3t\}+L\{t^7\cdot e^{-5t}\}-L\{t\cdot\cos 3t\}+$$
$$+L\{\Phi(t-5)6(t-5)\}.$$

Для последнего слагаемого используем теорему запаздывания:

Если $f(t)\doteqdot F(p)$, *то для любого положительного* τ

$$\Phi(t-\tau)\cdot f(t-\tau)\doteqdot e^{-p\tau}F(p).$$

В нашем случае $f(t)=6t$, $\tau=5$. $L\{6t\}=\dfrac{6}{p^2}$, следовательно,

$L\{\Phi(t-5)6(t-5)\}=\dfrac{6}{p^2}\cdot e^{-5p}$. Изображения остальных слагаемых определяем по таблице преобразований Лапласа.

$$F(p)=\frac{7}{p-3}+\frac{6}{(p+5)^2-9}+\frac{7!}{(p+5)^8}-\frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}+\frac{6}{p^2}e^{-5p}.$$

Задание 2. По данному изображению найти оригинал:

а) $F(p)=\dfrac{p^2-p-10}{p(p+5)^2\cdot(p-3)^3}$; б) $F(p)=\dfrac{p^2-3p+1}{(p^2+4)(p^2+4p+13)}$.

Решение. а) Если полюсы изображения расположены в действительных точках, то удобно применять метод обратного преобразования, использующий вычеты изображения: $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{N}\mathrm{res}[F(p_k)\cdot e^{p_k t}]$, где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$. MathCAD:

$$F(p):=\frac{p^2-p-10}{p\cdot(p+5)^2\cdot(p-3)^3} \qquad a:=0 \qquad \lim_{p\to a}(p-a)\cdot F(p)\cdot e^{p\cdot t}\to\frac{2}{135}$$

$$\mathrm{a} := -5 \qquad \mathrm{m} := 2$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{p\to a}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}(p-a)^m\cdot F(p)\cdot e^{p\cdot t}\to\left(\frac{1}{5120}+\frac{1}{128}\cdot t\right)\cdot\exp(-5\cdot t)$$

a := 3   m := 3

$$\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{p\to a}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}(p-a)^m\cdot F(p)\cdot e^{p\cdot t}\to\frac{-415}{27648}\cdot\exp(3\cdot t)+\frac{11}{288}\cdot t\cdot\exp(3\cdot t)-\frac{1}{96}\cdot t^2\cdot\exp(3\cdot t)$$

Таким образом, оригинал имеет вид:

$$f(t)=\frac{2}{135}+\left(\frac{1}{5120}+\frac{t}{128}\right)\cdot e^{-5t}+\left(-\frac{t^2}{96}+\frac{11t}{288}-\frac{415}{27648}\right)\cdot e^{3t}.$$

б) Если полюсы изображения расположены в комплексных точках, т.е. знаменатель изображения разложен на квадратные трехчлены, имеющие комплексные корни, можно применять тот же метод, использующий вычеты.

Однако оригинал в этом случае будет представлять собой комплексную функцию, которую ещё нужно преобразовывать в действительную форму. Поэтому удобнее раскладывать изображение на сумму простейших дробей с последующим табличным переводом их в оригинал. Разложение на простейшие дроби выполняем в MathCAD.

Набираем изображение, не забывая вводить знак умножения (*), затем выделяем переменную p и щелкаем по строке **Convert to Partial Fraction** в пункте **Variable** меню **Symbolics.** Получим:

$$\frac{p^2-3\cdot p+1}{\left(p^2+4\right)\cdot\left(p^2+4\cdot p+13\right)}\qquad\frac{-3}{29}\cdot\frac{(p+5)}{\left(p^2+4\right)}+\frac{1}{29}\cdot\frac{(56+3\cdot p)}{\left(p^2+4\cdot p+13\right)}$$

Преобразовываем каждое слагаемое.

$$-\frac{3}{29}\cdot\frac{(p+5)}{(p^2+2^2)}=-\frac{3}{29}\cdot\frac{p}{(p^2+2^2)}-\frac{15}{2\cdot 29}\cdot\frac{2}{(p^2+2^2)}\doteqdot$$

$$\doteqdot-\frac{3}{29}\cos 2t-\frac{15}{58}\sin 2t.$$

$$\frac{1}{29}\cdot\frac{(56+3p)}{(p^2+4p+13)}=\frac{1}{29}\cdot\frac{3(p+2)+50}{(p+2)^2+3^2}=\frac{3}{29}\cdot\frac{(p+2)}{(p+2)^2+3^2}+$$

$$+\frac{50}{29\cdot 3}\cdot\frac{3}{(p+2)^2+3^2}\doteqdot\frac{3}{29}e^{-2t}\cos 3t+\frac{50}{87}e^{-2t}\sin 3t.$$

Итак, оригинал имеет вид:

$$f(t)=-\frac{3}{29}\cos 2t-\frac{15}{58}\sin 2t+e^{-2t}\left(\frac{3}{29}\cos 3t+\frac{50}{87}\sin 3t\right).$$

Задание 3. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$x''-2x'-8x=e^{-t}\cos 2t,\quad x(0)=1,\quad x'(0)=-2.$$

Решение. Обозначим $L\{x(t)\}=X(p)$ и преобразуем по Лапласу обе части уравнения.

$$p^2X(p)-p+2-2(pX(p)-1)-8X(p)=\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2},$$

$$X(p)(p^2-2p-8)=\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+p-4,$$

$$X(p)=\frac{p^3-2p^2-2p-19}{(p-4)(p+2)(p^2+2p+5)}.$$

Далее, как указано в решении задания 2, раскладываем дробь на простейшие дроби, используя MathCAD.

$$\frac{p^3-2\cdot p^2-2\cdot p-19}{(p-4)\cdot(p+2)\cdot\left(p^2+2\cdot p+5\right)}$$

$$\frac{5}{[174\cdot(p-4)]}+\frac{31}{[30\cdot(p+2)]}-\frac{1}{145}\cdot\frac{(25+9\cdot p)}{\left(p^2+2\cdot p+5\right)}$$

Преобразуем последнее слагаемое к табличному виду. Начинаем с выделения квадрата суммы в знаменателе.

$$-\frac{1}{145}\cdot\frac{9(p+1)+8\cdot 2}{(p+1)^2+2^2}=-\frac{9}{145}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}-\frac{8}{145}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\doteqdot$$

$$\doteqdot-\frac{9}{145}e^{-t}\cos 2t-\frac{8}{145}e^{-t}\sin 2t.$$

Ответ: $x(t)=\frac{5}{174}e^{4t}+\frac{31}{30}e^{-2t}-e^{-t}\left(\frac{9}{145}\cos 2t+\frac{8}{145}\sin 2t\right).$

Задание 4. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям (независимая переменная - t).

$$\begin{cases} x' = -x + 9y, \\ y' = -x + 5y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2.$$

Решение. Обозначим $L\{x(t)\} = X(p)$, $L\{y(t)\} = Y(p)$ и преобразуем по Лапласу оба уравнения.

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -X(p) + 9Y(p), \\ pY(p) + 2 = -X(p) + 5Y(p), \end{cases} \quad \begin{cases} X(p)(p+1) - 9Y(p) = 1, \\ X(p) + Y(p)(p-5) = -2. \end{cases}$$

Решаем систему по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -9 \\ 1 & p-5 \end{vmatrix} = p^2 - 4p - 5 + 9 = (p-2)^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ -2 & p-5 \end{vmatrix} = p - 23; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2p - 3.$$

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p-23}{(p-2)^2} = \frac{1}{p-2} - \frac{21}{(p-2)^2} \div e^{2t} - 21 \cdot t \cdot e^{2t};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2p-3}{(p-2)^2} = \frac{-2}{p-2} - \frac{7}{(p-2)^2} \div -2e^{2t} - 7 \cdot t \cdot e^{2t}.$$

Ответ. $x(t) = e^{2t} - 21 \cdot t \cdot e^{2t}$, $y(t) = -2e^{2t} - 7 \cdot t \cdot e^{2t}$.

Приложение А - таблица преобразований Лапласа

$F(p)$	$f(t)(t>0)$
1	2
1 $\quad \frac{1}{p}$	1
2 $\quad \frac{1}{p^2}$	t
3 $\quad \frac{2}{p^3}$	t^2
4 $\quad \frac{(n-1)!}{p^n}(n=1,2,...)$	t^{n-1}
5 $\quad \frac{1}{p-a}$	e^{at}
6 $\quad \frac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
7 $\quad \frac{(n-1)!}{(p-a)^n}(n=1,2,3,...)$	$t^{n-1} \cdot e^{at}$
8 $\quad \frac{a-b}{(p-a)(p-b)}$	$e^{at} - e^{bt}$
9 $\quad \frac{p(a-b)}{(p-a)(p-b)}$	$ae^{at} - be^{bt}$
10 $\quad \frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
11 $\quad \frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
12 $\quad \frac{a}{p^2-a^2}$	$\mathrm{sh}\, at$

продолжение таблицы преобразований Лапласа

13	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
14	$\dfrac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\sin at - at\cos at$
15	$\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
16	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
17	$\dfrac{a}{(p-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\sin at$
18	$\dfrac{p-b}{(p-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos at$
19	$\dfrac{a}{(p-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\operatorname{sh} at$
20	$\dfrac{p-b}{(p-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\operatorname{ch} at$

Библиографический список

1. Ледяев С.Ф., Рудов Ю.М. Основы высшей математики: Учеб. пособие. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – 278 с.: ил.
2. Ледяев С.Ф. Лекции по высшей математике в третьем семестре. Севастополь. 2007 г. – 100 с.: ил.
3. Лунц Г.Л., Эльсгольц П.Э. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления. М.: Физматгиз, 1958 г.- 296 с.
4. Специальный курс высшей математики «Операционное исчисление». Методические указания/ Разраб. Л.Н. Моисеенко – Севастополь: СевГТУ, 2002 –66 с.

Заказ № __________ от «____» ____________2008 г. Тираж _______ экз.

Изд-во СевНТУ