Лекция 3

Непрерывность функции

1. Понятие непрерывности функции.

Определение. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a, называется *непрерывной в точке* a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

Таким образом, функция f непрерывна в точке a, если выполнены следующие условия:

а) функция f определена в некоторой окрестности точки a, т. е. существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $U_{\delta_0}(a) \subset D(f)$;

б) существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$;

в) $A = f(a)$.

Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a, выраженное условием (1), можно сформулировать с помощью неравенств (на языке ε–δ), с помощью окрестностей и в терминах последовательностей соответственно в виде

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x\colon\ |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$
$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(f(a)),$$
$$\forall\{x_n\}\colon\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Подчеркнем, что в определении непрерывности, в отличие от определения предела, рассматривается полная, а не проколотая окрестность точки a, и пределом функции является значение этой функции в точке a.

Назовем разность $x - a$ *приращением аргумента* и обозначим Δx, а разность $f(x) - f(a)$ — *приращением функции*, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначим Δy. Таким образом,

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

При этих обозначениях равенство (1) примет вид

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

По аналогии с понятием предела слева (справа) вводится понятие непрерывности слева (справа). Если функция f определена на полуинтервале $(a - \delta, a]$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$, т. е. $f(a - 0) = f(a)$, то эту функцию называют *непрерывной слева в точке* a.

Аналогично, если функция f определена на полуинтервале $[a, a+\delta)$ и $f(a+0) = f(a)$, то эту функцию называют *непрерывной справа в точке* a.

Например, функция $f(x) = [x]$ непрерывна справа в точке $x = 1$ и не является непрерывной слева в этой точке (§ 9, пример 1), так как $f(1-0) = 0$, $f(1+0) = f(1) = 1$.

Очевидно, функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда она непрерывна как справа, так и слева в этой точке.

2. Точки разрыва. В п. 2 будем предполагать, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Точку a назовем *точкой разрыва функции* f, если эта функция либо не определена в точке a, либо определена, но не является непрерывной в точке a.

Следовательно, a — точка разрыва функции f, если не выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

а) $a \in D(f)$;

б) существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$;

в) $A = f(a)$.

Если a — точка разрыва функции f, причем в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, т. е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, то точку a называют *точкой разрыва первого рода.*

Пусть $x = a$ — точка разрыва функции f, не являющаяся точкой разрыва первого рода. Тогда ее называют *точкой разрыва второго рода функции* f. В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен.

Например, для функции $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ точка $x = 0$ — точка разрыва первого рода. Доопределив эту функцию по непрерывности, получим функцию

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

непрерывную в точке $x = 0$, так как

$$\lim_{x\to 0} x\,\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Для функций $\sin\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ точка $x = 0$ — точка разрыва второго рода

Теорема 1. *Если функция f определена на отрезке $[a, b]$ и монотонна, то она может иметь внутри этого отрезка точки разрыва только первого рода.*

○ Пусть x_0 — произвольная точка интервала (a, b). По теореме о монотонной функции, f имеет в точке x_0 конечные пределы слева и справа. Если, например, f — возрастающая функция, то

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0),$$

где $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ — соответственно пределы функции f слева и справа в точке x_0.

В том случае, когда $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, точка x_0 является точкой разрыва первого рода функции f; если же $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то точка x_0 есть точка непрерывности функции f. Аналогичное утверждение справедливо и для убывающей функции. ●

3. Свойства функций, непрерывных в точке.

а) *Локальные свойства непрерывной функции.*

Свойство 1. *Если функция f непрерывна в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, т. е.*

$$\exists \delta > 0 \quad \exists C > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(a) \to |f(x)| \leqslant C.$$

Свойство 2. *Если функция f непрерывна в точке a, причем $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a знак функции совпадает со знаком числа $f(a)$, т. е.*

$$\exists \delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(a) \to \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(a).$$

○ Эти утверждения следуют из свойств пределов ●

б) *Непрерывность суммы, произведения и частного.*

Если функции f и g непрерывны в точке a, то функции $f + g$, fg и f/g (при условии $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a.

○ Это утверждение следует из определения непрерывности и свойств пределов. ●

в) *Непрерывность сложной функции.*

Теорема 2. *Если функция $z = f(y)$ непрерывна в точке y_0, а функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $y_0 = \varphi(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $f(\varphi(x))$, и эта функция непрерывна в точке x_0.*

○ Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f в точке y_0 существует число $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ такое, что $U_\rho(y_0) \subset D(f)$ и

$$\forall y \in U_\rho(y_0) \to f(y) \in U_\varepsilon(z_0), \tag{2}$$

где $z_0 = f(y_0)$.

В силу непрерывности функции φ в точке x_0 для найденного в (2) числа $\rho > 0$ можно указать число $\delta = \delta_\rho = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \to \varphi(x) \in U_\rho(y_0). \tag{2$'$}$$

Из условий (2) и (2′) следует, что на множестве $U_\delta(x_0)$ определена сложная функция $f(\varphi(x))$, причем

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \to f(y) = f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(z_0),$$

где $z_0 = f(\varphi(x_0)) = f(y_0)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(x_0) \to f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(\varphi(x_0)).$$

Это означает, в силу определения непрерывности, что функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0. ●

З а м е ч а н и е 2. Соответствие между окрестностями точек x_0, y_0, z_0

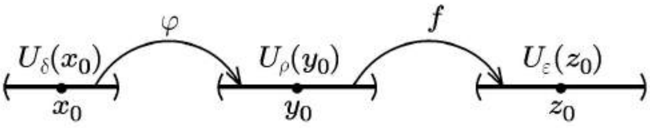

Рис. 11.1

представлено на рис. 11.1. По заданному числу $\varepsilon > 0$ сначала находим $\rho > 0$, а затем для чисел $\rho > 0$ находим $\delta > 0$.

4. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Функцию $f(x)$ называют *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и, кроме того, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

а) *Ограниченность непрерывной на отрезке функции.*

Т е о р е м а 3 (Вейерштрасса). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена, т. е.*

$$\exists C > 0\colon\ \forall x \in [a, b] \to |f(x)| \leqslant C. \tag{3}$$

○ Предположим противное, тогда

$$\forall C > 0 \quad \exists x_C \in [a, b]\colon\ |f(x_C)| > C. \tag{4}$$

Полагая в (4) $C = 1, 2, ..., n, ...$, получим, что

$$\forall n \in N \quad \exists x_n \in [a, b]\colon\ |f(x_n)| > n. \tag{5}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \leqslant x_n \leqslant b$ для всех $n \in N$. По теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, т. е. существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и точка ξ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi, \tag{6}$$

где в силу условия (5) для любого $k \in N$ выполняется неравенство

$$a \leqslant x_{n_k} \leqslant b. \tag{7}$$

Из условий (6) и (7) следует (см. § 4, п. 5, замечание 5), что $\xi \in [a, b]$, а из условия (6) в силу непрерывности функции f в точке ξ получаем

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi). \tag{8}$$

С другой стороны, утверждение (5) выполняется при всех $n \in N$ и, в частности, при $n = n_k$ $(k = 1, 2, ...)$, т. е.

$$|f(x_{n_k})| > n_k,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$, так как $n_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Это противоречит равенству (8), согласно которому последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ имеет конечный предел. Поэтому условие (4) не может выполняться, т. е. справедливо утверждение (3). ●

Замечание 3. Теорема 3 неверна для промежутков, не являющихся отрезками. Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не ограничена на этом интервале. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна на R, но не ограничена на R.

б) *Достижимость точных граней.*

Теорема 4 (Вейерштрасса). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает своей точной верхней и нижней грани, т. е.*

$$\exists\xi \in [a, b]\colon\ f(\xi) = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \qquad (9)$$

$$\exists\widetilde{\xi} \in [a, b]\colon\ f(\widetilde{\xi}) = \inf_{x\in[a,b]} f(x). \qquad (10)$$

Замечание 4. Теорема 4 неверна для интервалов: функция, непрерывная на интервале, может не достигать своих точных граней. Например, функция $f(x) = x^2$ не достигает на интервале $(0, 1)$ своей точной нижней грани, равной нулю, и точной верхней грани, равной единице.

в) *Промежуточные значения.*

Теорема 5 (теорема Коши о нулях непрерывной функции). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает в его концах значения разных знаков, т. е. $f(a)f(b) < 0$, то на отрезке $[a, b]$ имеется хотя бы один нуль функции f, т. е.*

$$\exists c \in [a, b]\colon\ f(c) = 0. \qquad (18)$$

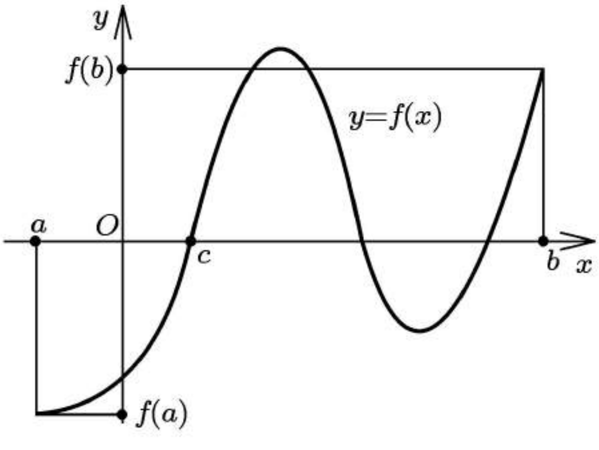

Рис. 11.2

Замечание 5. Теорема 5 утверждает, что график функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ и принимающей в его концах значения разных знаков, пересекает ось Ox (рис. 11.2) хотя бы в одной точке отрезка $[a, b]$.

Теорема 6 (теорема Коши о промежуточных значениях). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то для каждого значения C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) = C$.*

○ Обозначим $f(a) = A$, $f(b) = B$. По условию $A \neq B$. Пусть, например, $A < B$. Нужно доказать, что

$$\forall C \in [A, B] \quad \exists \xi \in [a, b]\colon\ f(\xi) = C. \tag{24}$$

Если $C = A$, то утверждение (24) выполняется при $\xi = a$, а если $C = B$, то (24) имеет место при $\xi = b$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $A < C < B$.

Пусть $\varphi(x) = f(x) - C$, тогда $\varphi(a) = A - C < 0$, $\varphi(b) = B - C > 0$, и по теореме 5 найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\varphi(\xi) = 0$, т. е. $f(\xi) = C$. Утверждение (24) доказано. ●

Следствие. *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, *то множество значений, принимаемых функцией f на отрезке $[a, b]$, есть отрезок $[m, M]$.*

○ Для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, причем согласно теореме 4 функция f принимает на отрезке $[a, b]$ значения, равные m и M. Все значения из отрезка $[m, M]$ функция принимает по теореме 6. Отрезок $[m, M]$ вырождается в точку, если $f(x) = \text{const}$ на отрезке $[a, b]$. ●

г) *Существование и непрерывность функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции.*

Теорема 7. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a, b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$ определена функция $x = g(y)$, обратная к f, непрерывная и строго возрастающая.*

Замечание 6. Если функция f непрерывна и строго убывает на отрезке $[a, b]$, то обратная к ней функция g непрерывна и строго убывает на отрезке $[f(b), f(a)]$.

Замечание 7. Аналогично формулируется и доказывается теорема о функции g, обратной к функции f, для случаев, когда функция f задана на интервале (конечном либо бесконечном) и полуинтервале.

Если функция f определена, строго возрастает и непрерывна на интервале (a, b), то обратная функция g определена, строго возрастает и непрерывна на интервале (A, B), где

$$A = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad B = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Вычисление пределов функций

1. Раскрытие неопределенностей. При вычислении пределов часто встречается случай, когда требуется найти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где f и g — бесконечно малые функции при $x\to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. В этом случае вычисление предела называют *раскрытием неопределенности вида* $\dfrac{0}{0}$. Чтобы найти такой предел, обычно преобразуют дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, выделяя в числителе и знаменателе множитель вида $(x-a)^k$. Например, если в некоторой окрестности точки $x=a$ функции f и g представляются в виде $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$, $g(x)=(x-a)^k g_1(x)$, где $k\in N$, а функции f_1, и g_1 непрерывны в точке a, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ при $x\neq a$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f_1(a)}{g_1(a)}$, если $g_1(a)\neq 0$.

Аналогично, если f и g — бесконечно большие функции при $x\to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то говорят, что их частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и разность $f(x)-g(x)$ представляют собой при $x\to a$ неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ и $\infty-\infty$ соответственно. Для раскрытия неопределенностей таких типов обычно преобразуют частное или разность так, чтобы к полученной функции были применимы свойства пределов. Например, если f и g — многочлены степени n, т. е. $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$, где $a_n\neq 0$, $b_n\neq 0$, то, разделив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ на x^n, найдем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n+a_{n-1}\dfrac{1}{x}+\ldots+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_n+b_{n-1}\dfrac{1}{x}+\ldots+\dfrac{b_0}{x^n}}=\frac{a_n}{b_n}.$$

2. Замена переменного при вычислении предела.

Теорема 1. *Если существуют*

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=b,\quad \lim_{y\to b} f(y)=A,$$

причем для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a выполняется условие $\varphi(x)\neq b$, то в точке a существует предел сложной функции $f(\varphi(x))$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=\lim_{y\to b} f(y). \tag{1}$$

○ Согласно определению предела функции φ и f определены соответственно в $\dot{U}_\delta(a)$ и $\dot{U}_\varepsilon(b)$, где $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, причем для $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняется условие $\varphi(x) \in \dot{U}_\varepsilon(b)$. Поэтому на множестве $\dot{U}_\delta(a)$ определена сложная функция $f(\varphi(x))$. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$, $n \in N$. Обозначим $y_n = \varphi(x_n)$, тогда по определению предела функции $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где $y_n \in \dot{U}_\varepsilon(b)$. Так как существует $\lim\limits_{y\to b} f(y) = A$, то

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = A.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = A$, т. е. справедливо равенство (1). ●

Первый замечательный предел.

Если $x \to 0$, *то* $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$, *т. е.* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$ (4)

○ Воспользуемся неравенством. *Если* $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *и* $x \neq 0$, *то*

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{1}$$

Рассмотрим в координатной плоскости круг единичного радиуса с центром в точке O (рис. 12.1). Пусть $\angle AOB = x$, где $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Пусть C — проекция точки B на ось Ox, D — точка пересечения луча OB и прямой, проведенной через точку A перпендикулярно оси Ox. Тогда

$$BC = \sin x, \quad DA = \operatorname{tg} x.$$

Пусть S_1, S_2, S_3 — площади треугольника AOB, сектора AOB и треугольника AOD соответственно. Тогда $S_1 = \dfrac{1}{2}(OA)^2 \sin x = \dfrac{1}{2}\sin x$, $S_2 = \dfrac{1}{2}(OA)^2 x = \dfrac{1}{2}x$, $S_3 = \dfrac{1}{2} OA \cdot DA = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Так как $S_1 < S_2 < S_3$, то

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \tag{2}$$

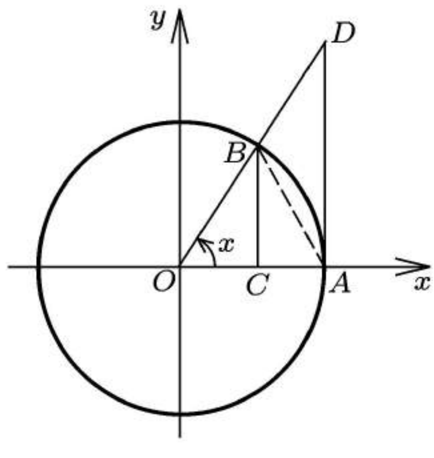

Рис. 12.1

Если $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\sin x > 0$, и поэтому неравенство (2) равносильно неравенству

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

откуда следует, что при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство (1). Так как $\dfrac{x}{\sin x}$ и $\cos x$ — четные функции, то неравенство (1) справедливо и при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$. В силу непрерывности косинуса $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$. Переходя в соотношении (1) к пределу при $x \to 0$, получаем равенство (4). ●

3. Второй замечательный предел. Число e.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

и покажем, что эта последовательность возрастающая и ограниченная сверху. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$x_n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n^n},$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}, \quad k = \overline{1,n}, \quad C_n^0 = 1.$$

Запишем x_n в следующем виде:

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big); \tag{16}$$

тогда

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n+1}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big). \tag{17}$$

Все слагаемые в суммах (16) и (17) положительны, причем каждое слагаемое суммы (16) меньше соответствующего слагаемого суммы (17), так как $1 - \dfrac{m}{n} < 1 - \dfrac{m}{n+1}$, $m = \overline{1, n-1}$, а число слагаемых в сумме (17) на одно больше, чем в сумме (16). Поэтому $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in N$, т. е. $\{x_n\}$ — строго возрастающая последовательность. Кроме того, учитывая, что $0 < 1 - \dfrac{m}{n} < 1$ $(m = \overline{1, n-1})$, из равенства (16) получаем $x_n < 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$. Так как $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$ при $k \in N$, то, используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем $x_n < 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}} = 1 + \dfrac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Следовательно,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

т. е. $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. По теореме 1 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Этот предел обозначается буквой e. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{18}$$

Число e является иррациональным, оно служит основанием натуральных логарифмов и играет важную роль в математике. Справедливо приближенное равенство

$$e \approx 2{,}718281828459045.$$

Теорема 2. *Функция* $\varphi(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ *имеет при* $x \to \infty$ *предел, равный* e, *т. е.*

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4}$$

Следствие. *Если* $\alpha(x) \neq 0$ *для всех* x *из некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *и* $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, *то*

$$\lim_{x\to x_0} (1 + \alpha(x))^{1/\alpha(x)} = e. \tag{14}$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{15}$$

○ Для доказательства утверждения (14) достаточно воспользоваться соотношением (4) и теоремой 1. ●

5. Сравнение функций.

а) *Эквивалентные функции.* Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 определены функции f, g, h такие, что

$$f(x) = g(x)h(x), \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = 1, \tag{24}$$

то функции f и g называют *эквивалентными* (*асимптотически равными*) при $x \to x_0$ и пишут

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

или, короче, $f \sim g$ при $x \to x_0$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, так как $\sin x = x\,\dfrac{\sin x}{x}$, а $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\dfrac{x^4}{x^2+1} \sim x^2$ при $x \to \infty$, так как $\dfrac{x^4}{x^2+1} = x^2 \dfrac{x^2}{x^2+1}$, а $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$.

Отметим, что функции f и g, не имеющие нулей в проколотой окрестности точки x_0, эквивалентны при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Понятие эквивалентности обычно используют в тех случаях, когда обе функции f и g являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to x_0$.

б) *Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.*

Теорема 3. *Если* $f \sim f_1$ *и* $g \sim g_1$ *при* $x \to x_0$, *то из существования предела функции* $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ *при* $x \to x_0$ *следует существование предела функции* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *при* $x \to x_0$ *и справедливость равенства*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{25}$$

○ По условию $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$ при $x \to x_0$. Это означает, что $f(x) = f_1(x)h(x)$ и $g(x) = g_1(x)h_1(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h_1(x) = 1$.

Так как существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ и $h_1(x) \to 1$ при $x \to x_0$, то найдется такая проколотая окрестность точки x_0, в которой определены функции f_1, g_1, h_1, причем $g_1(x) \neq 0$ и $h_1(x) \neq 0$, откуда следует, что в этой окрестности определена функция $g(x) = g_1(x)h_1(x)$ такая, что $g(x) \neq 0$.

Следовательно, в некоторой проколотой окрестности точки x_0 определена функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(x)}{h_1(x)}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Так как существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, а $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} h_1(x) = 1$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство (25). ●

в) *Понятие бесконечно малой функции по сравнению с другой.* Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 определены функции f, g, α такие, что

$$f(x) = g(x)\alpha(x), \quad \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0, \tag{26}$$

то функцию f называют *бесконечно малой по сравнению с функцией g при $x \to x_0$* и пишут

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0, \tag{27}$$

или, короче, $f = o(g)$, $x \to x_0$.

Эта запись читается так: "f есть o малое от g при x, стремящемся к x_0". В частности, запись $f(x) = o(1)$, $x \to x_0$, означает, что $f(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$. Если $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то соотношение (27) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

или в виде

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(g)}{g} = 0.$$

Следует иметь в виду, что функции f и g, о которых идет речь в записи (27), не обязательно являются бесконечно малыми при $x \to x_0$. Например, если $x \to \infty$, то $x^2 = o(x^4)$, а функции x^2 и x^4 являются бесконечно большими при $x \to \infty$.

Из сказанного следует, что равенство вида (27) не является равенством в обычном смысле. Такое равенство в соответствии с определением записи (27) следует читать только слева направо, поскольку правая часть обозначает класс функций, бесконечно малых по сравнению с $g(x)$ при $x \to x_0$, а $f(x)$ — какая-либо функция этого класса.

Отметим некоторые важные для дальнейшего изложения свойства символа $o(g)$, считая, что $x \to x_0$, а равенства, содержащие этот символ, читаются слева направо (здесь C — постоянная):

$$\begin{array}{r|l}
o(Cg) = o(g) & o(g^n)o(g^m) = o(g^{n+m}), \quad n \in N, \quad m \in N \\
Co(g) = o(g) & g^{n-1}o(g) = o(g^n), \quad n \in N \\
o(g) + o(g) = o(g) & (o(g))^n = o(g^n), \quad n \in N \\
o(o(g)) = o(g) & \dfrac{o(g^n)}{g} = o(g^{n-1}), \quad n \in N,\ g \neq 0 \text{ в } \dot{U}_\delta(x_0) \\
o(g + o(g)) = o(g) &
\end{array}$$

Наряду с символом $o(g)$ в математике употребляют символ $O(g)$. Запись

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0, \tag{28}$$

означает, что в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_\delta(x_0)$ точки x_0 определены функции f, g, φ такие, что

$$f(x) = g(x)\varphi(x), \tag{29}$$

где $\varphi(x)$ — функция, ограниченная на $\dot{U}_\delta(x_0)$, т. е.

$$\exists C > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \to |\varphi(x)| \leqslant C.$$

Соотношение (28) читается так: “$f(x)$ есть O большое от $g(x)$ при x, стремящемся к x_0”.

Например,

$$x^2 + 2x^3 = O(x^2), \quad x \to 0;$$
$$x^2 + 2x^3 = O(x^3), \quad x \to \infty.$$

г) *Критерий эквивалентности функций.*

Теорема 4. *Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to x_0. \tag{30}$$

○ Пусть $f \sim g$ при $x \to x_0$; тогда выполняются условия (24), и поэтому $f(x) - g(x) = g(x)(h(x) - 1) = g(x)\alpha(x)$, где $\alpha(x) = h(x) - 1 \to 0$ при $x \to x_0$. Отсюда по определению символа $o(g)$ следует, что $f - g = o(g)$, $x \to x_0$, т. е. справедливо равенство (30)

Обратно: из равенства (30) следует, что $f \sim g$ при $x \to x_0$. Действительно, если выполняется равенство (30), то $f(x) = g(x) + g(x)\alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, откуда $f(x) = g(x)h(x)$, где $h(x) = 1 + \alpha(x) \to$ $\to 1$ при $x \to x_0$, т. е. $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. ●

В заключение отметим, что в дальнейшем будут рассмотрены более эффективные методы вычисления пределов, основанные на использовании понятия производной.