Лекция 2.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Числовые функции

1. Понятие числовой функции. Пусть дано числовое множество $X \subset R$. Если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие по некоторому правилу число y, то говорят, что на множестве X определена *числовая функция.*

Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторым символом, например, f, и пишут

$$y = f(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

а множество X называют *областью определения функции* и обозначают $D(f)$, т. е. $X = D(f)$.

В записи (1) x часто называют *аргументом* или *независимой переменной*, а y — *зависимой переменной.* Числа x из множества $D(f)$ называют *значениями аргумента.* Число y_0, соответствующее значению $x_0 \in D(f)$, называют *значением функции* при $x = x_0$ (или значением функции в точке x_0) и обозначают $f(x_0)$ или $f(x)|_{x=x_0}$. Совокупность всех значений, которые функция принимает на множестве $D(f)$, называют *множеством значений функции* и обозначают $E(f)$. Заметим, что если $y_0 \in E(f)$, то существует по крайней мере одно число $x_0 \in D(f)$ такое, что $f(x_0) = y_0$.

2. Равенство функций. Операции над функциями. Функции f и g называют *равными* или совпадающими, если они имеют одну и ту же область определения X и для каждого $x \in X$ значения этих функций совпадают. В этом случае пишут $f(x) = g(x)$, $x \in X$ или $f = g$.

Например, если $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in R$, и $g(x) = |x|$, $x \in R$, то $f = g$, так как при всех $x \in R$ справедливо равенство $\sqrt{x^2} = |x|$.

Естественным образом для функций вводятся арифметические операции. Пусть функции f и g определены на одном и том же множестве E. Тогда функции, значения которых в каждой точке $x \in E$ равны $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ ($g(x) \neq 0$ для всех $x \in E$), называют соответственно *суммой, разностью, произведением* и *частным функций* f и g и обозначают $f + g$, $f - g$, fg, f/g.

Введем понятие сложной функции. Пусть функции $y = \varphi(x)$ и $z = f(y)$ определены на множествах X и Y соответственно, причем множество значений функции φ содержится в области определения функции f. Тогда функцию, принимающую при каждом $x \in X$ значение $F(x) = f(\varphi(x))$, называют *сложной функцией* или *суперпозицией* (*композицией*) *функций* φ и f и обозначают $f \circ \varphi$ Например, функция $z = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$, является композицией функций $y = 4 - x^2$, $x \in [-2, 2]$, и $z = \sqrt{y}$, $y \in [0, +\infty)$. Эта функция относится к совокупности *элементарных функций*, т. е. функций, которые можно получить из *основных элементарных функций* с помощью конечного числа арифметических операций и композиций. К основным элементарным функциям относят постоянную, степенную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Например, элементарными являются функции:

а) *линейная* $y = ax + b, \quad a \neq 0$;

б) *квадратичная* $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$;

в) *многочлен степени* n, т. е. функция $y = P_n(x)$, где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \ a_n \neq 0$;

г) *рациональная функция*, т. е. функция вида $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где P_n и Q_m — многочлены степени n и m, $m \neq 0$.

3. Способы задания функции. Числовые функции чаще всего задаются при помощи формул. Такой способ задания называют *аналитическим*. Например, функции $y = x^2$, $y = |x|^{3/2}$, $y = \sin^3 3x$ заданы на множестве R аналитически.

Если числовая функция f задана формулой и не указана область ее определения $D(f)$, то принято считать, что $D(f)$ — множество всех тех значений аргумента, при которых эта формула имеет смысл, и результатом каждой операции, указанной в формуле, является вещественное число. Например, если $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, то $D(f) = [-3, 3]$, а если $f(x) = \sqrt{\lg \sin x}$, то $D(f)$ — множество корней уравнения $\sin x = 1$, т. е. множество чисел $x_k = \pi/2 + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Следует отметить, что функция может быть задана различными формулами на разных промежутках. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если} \quad x < 0, \\ x^2, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - \sqrt{x}, & \text{если} \quad x > 1, \end{cases}$$

задана аналитическим способом на R с помощью трех различных формул.

4. График функции. *Графиком функции* $y = f(x)$, $x \in D(f)$, в прямоугольной системе координат Oxy называют множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Для каждого $x_0 \in D(f)$ прямая $x = x_0$, параллельная оси Oy, пересекает график функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, в одной точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ — значение функции f при $x = x_0$. Значение $x = a$, при котором $f(a) = 0$, называют *нулем функции* $f(x)$. Если $x = a$ — нуль функции f, то график функции $y = f(x)$ пересекает ось Ox при $x = a$, т. е. в точке $M(a, 0)$.

График функции $y = f(x)$ иногда можно получить (см. таблицу) преобразованием известного графика другой функции $y = g(x)$.

Функция $y = f(x)$	Преобразование графика функции $y = g(x)$
$y = g(x) + A$	Сдвиг (параллельный перенос) вдоль оси ординат на A
$y = g(x - a)$	Сдвиг вдоль оси абсцисс на a
$y = g(-x)$	Симметрия относительно оси ординат
$y = -g(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс
$y = Bg(x)$	Умножение каждой ординаты на B, где $B \neq 0$
$y = g(kx)$	Деление каждой абсциссы на k, где $k \neq 0$

Приведем примеры применения преобразований, указанных в таблице.

Пример График квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \tag{2}$$

можно получить сдвигом графика функции $y = ax^2$ вдоль оси Ox на $-\dfrac{b}{2a}$ и вдоль оси Oy на $c - \dfrac{b^2}{4a}$.

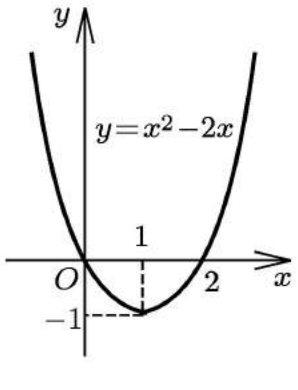

Рис. 9.3

△ Действительно, выделяя полный квадрат, получаем

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Поэтому графиком квадратичной функции (2) является парабола, получаемая сдвигом параболы $y = ax^2$. ▲

Например, график функции $y = x^2 - 2x$, изображенный на рис. 9.3, можно получить сдвигом графика $y = x^2$ вдоль оси Ox на 1 и вдоль оси Oy на -1, так как $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$.

5. Четные и нечетные функции. Функция f, определенная на множестве X, называется:

а) *четной*, если для любого $x \in X$ выполняются условия $-x \in X$ и $f(-x) = f(x)$;

б) *нечетной*, если для любого $x \in X$ выполняются условия $-x \in X$ и $f(-x) = -f(x)$.

Четными являются, например, следующие функции: $y = x^4$, $y = \cos\dfrac{x}{2}$, $y = \lg|x|$, $y = \dfrac{\sin x}{x}$, а нечетными — функции $y = \dfrac{1}{x^3}$, $y = \sin^5 2x$, $y = x^2 \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $y = \arcsin(\sin x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

6. Ограниченные и неограниченные функции. Функцию f называют *ограниченной снизу на множестве* $X \subset D(f)$, если существует число C_1 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant C_1$.

Используя символы $\exists$ и $\forall$, это определение можно записать так:

$$\exists C_1\colon\ \forall x \in X \to f(x) \geqslant C_1.$$

Аналогично функцию f называют *ограниченной сверху на множестве* $X \subset D(f)$, если

$$\exists C_2\colon\ \forall x \in X \to f(x) \leqslant C_2.$$

Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве X, называют *ограниченной на этом множестве.*

Функция f является ограниченной на множестве X тогда и только тогда, когда

$$\exists C > 0\colon\ \forall x \in X \to |f(x)| \leqslant C. \tag{4}$$

Если неравенство $|f(x)| \leqslant C$ выполняется для всех $x \in D(f)$, говорят, что *функция f ограничена.*

Геометрически ограниченность функции f на множестве X означает, что график функции $y = f(x)$, $x \in X$, лежит в полосе $-C \leqslant y \leqslant C$.

Например, функция $y = \sin \dfrac{1}{x}$, определенная при $x \in R$, $x \neq 0$, ограничена, так как

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1.$$

Функция f не ограничена на множестве X, если условие (4) не выполняется, т. е.

$$\forall C > 0 \quad \exists x_C \in X\colon\ |f(x_C)| \geqslant C. \tag{5}$$

Если $X = D(f)$ и выполнено условие (5), то говорят, что *функция f не ограничена.*

Пусть Y — множество значений, которые функция f принимает на множестве $X \subset D(f)$. Тогда точную верхнюю грань множества Y называют *точной верхней гранью функции f на множестве X* и обозначают $\sup\limits_{x\in X} f(x)$, а точную нижнюю грань множества Y — *точной нижней гранью функции f на множестве X* и обозначают $\inf\limits_{x\in X} f(x)$. Если $X = D(f)$, то в этих определениях указание на множество X опускают.

Пусть существует точка $x_0 \in X \subset D(f)$ такая, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Тогда говорят, что функция f принимает в точке x_0 *наибольшее* (*максимальное*) *значение на множестве* X и пишут $f(x_0) = \max\limits_{x\in X} f(x)$. В этом случае $\sup\limits_{x\in X} f(x) = f(x_0)$.

Аналогично, если $\exists x_0 \in X \subset D(f)\colon\ \forall x \in X \to f(x) \geqslant f(x_0)$, то говорят, что функция f принимает в точке x_0 *наименьшее* (*минимальное*) *значение на множестве* X, и пишут $f(x_0) = \min\limits_{x\in X} f(x)$. В этом случае $\inf\limits_{x\in X} f(x) = f(x_0)$.

Максимальные и минимальные значения называют *экстремальными.*

Например, если $f(x) = \sin x$, то $\sup\limits_{x\in R} f(x) = \max\limits_{x\in R} f(x) = f(x_k)$, где $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, $\inf\limits_{x\in R} f(x) = \min\limits_{x\in R} f(x) = f(\widetilde{x}_k)$, где $\widetilde{x}_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

7. Монотонные функции. Функцию f называют возрастающей (неубывающей) на множестве $X \subset D(f)$, если для любых точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Если это неравенство является строгим $(f(x_1) < f(x_2))$, то функцию f называют строго возрастающей на множестве X.

Таким образом, функция f называется:

а) *возрастающей (неубывающей) на множестве* X, если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X\colon\ x_1 < x_2 \to f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

б) *строго возрастающей на множестве* X, если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X\colon\ x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогично функция f называется:

а) *убывающей (невозрастающей) на множестве* X, если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X\colon\ x_1 < x_2 \to f(x_1) \geqslant f(x_2);$$

б) *строго убывающей на множестве* X, если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X\colon\ x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2).$$

Убывающие и возрастающие функции объединяют названием *монотонные*, а строго возрастающие и строго убывающие — названием *строго монотонные.*

Если $X = D(f)$, то в этих определениях указание на множество X обычно опускают.

8. Периодические функции. Число $T \neq 0$ называют *периодом функции* f, если для любого $x \in D(f)$ значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат $D(f)$ и выполняется равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Функцию, имеющую период T, называют *периодической с периодом* T.

Отметим, что если T — период функции f, то каждое число вида nT, где $n \in Z$, $n \neq 0$, также является периодом этой функции.

Примерами периодических функций могут служить тригонометрические функции. При этом число 2π — наименьший положительный период функций $\sin x$, $\cos x$, а π — наименьший положительный период функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

9. Обратная функция. Пусть задана числовая функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Тогда каждому числу $x_0 \in D(f)$ соответствует единственное число $y_0 = f(x_0) \in E(f)$. Нередко приходится по заданному значению функции y_0 находить соответствующее значение аргумента, т. е. решать относительно x уравнение

$$f(x) = y_0, \quad y_0 \in E(f). \tag{8}$$

Это уравнение может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много решений. Решениями уравнения (8) являются абсциссы всех точек, в которых прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y = f(x)$.

Например, если $f(x) = x^2$, то уравнение

$$x^2 = y_0, \quad y_0 > 0,$$

имеет два решения: $x_0 = \sqrt{y_0}$ и $\widetilde{x}_0 = -\sqrt{y_0}$.

Однако существуют функции, для которых уравнение (8) при каждом $y_0 \in E(f)$ однозначно разрешимо, т. е. имеет единственное решение $x_0 \in D(f)$. Этим свойством обладают, например, следующие функции:

а) $f(x) = 3x + 4$, $D(f) = R$;
б) $f(x) = x^3$, $D(f) = R$;
в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D(f) = \{x \in R,\ x \neq 0\}$.

Если функция f такова, что каждое значение $y_0 \in E(f)$ она принимает только при одном значении $x_0 \in D(f)$, то эту функцию называют *обратимой*. Для такой функции уравнение

$$f(x) = y$$

можно при любом $y \in E(f)$ однозначно разрешить относительно x, т. е. каждому $y \in E(f)$ соответствует единственное значение $x \in D(f)$. Это соответствие определяет функцию, которую называют *обратной к функции* f и обозначают символом f^{-1}.

Заметим, что прямая $y = y_0$ для каждого $y_0 \in E(f)$ пересекает график обратимой функции $y = f(x)$ в единственной точке (x_0, y_0), где $f(x_0) = y_0$.

Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции буквой x, а ее значения — буквой y, обратную для f функцию записывают в виде

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

Для упрощения записи вместо символа f^{-1} будем употреблять букву g.

Отметим следующие свойства, которые показывают, как связаны данная функция и обратная к ней:

1) если g — функция, обратная к f, то и f — функция, обратная к g; при этом

$$D(g) = E(f), \quad E(g) = D(f),$$

т. е. область определения функции g совпадает с множеством значений функции f и наоборот;

2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство

$$g(f(x)) = x,$$

а для любого $x \in E(f)$ справедливо равенство

$$f(g(x)) = x;$$

3) график функции $y = g(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$;

4) если нечетная функция обратима, то обратная к ней функция также является нечетной;

5) если f — строго возрастающая (строго убывающая) функция, то она обратима, причем обратная к ней функция g также является строго возрастающей (строго убывающей).

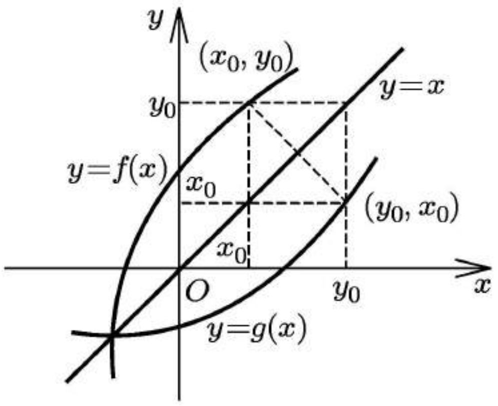

Рис. 9.9

Свойства 1) и 2) следуют непосредственно из определения обратной функции, 4) и 5) — из определений обратной и соответственно нечетной и строго монотонной функции.

Рассмотрим свойство 3). Пусть точка (x_0, y_0) принадлежит графику функции $y = f(x)$, т. е. $y_0 = f(x_0)$. Тогда $x_0 = g(y_0)$, т. е. точка (y_0, x_0) принадлежит графику обратной функции g. Так как точки (x_0, y_0) и (y_0, x_0) симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 9.9), то график функции $y = g(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно этой прямой.

10. Неявные функции. Параметрически заданные функции. Пусть E — множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy. Если каждой точке $M \in E$ поставлено в соответствие по некоторому правилу (закону) число z, то говорят, что на множестве E задана *числовая функция от переменных x и y*, и пишут $z = f(x, y)$, $(x, y) \in E$.

Пусть функция $F(x, y)$ определена на некотором множестве точек плоскости. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \qquad (9)$$

Графиком уравнения (9) в прямоугольной системе координат называют множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Например, графиком уравнения

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad (10)$$

является единичная окружность (рис. 9.12).

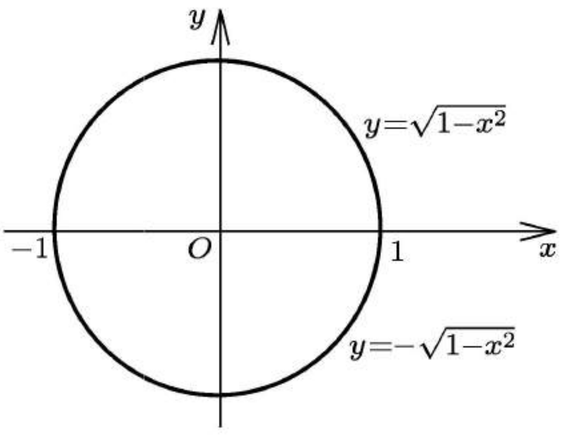

Рис. 9.12

Естественной является постановка вопроса о том, можно ли уравнение (9) однозначно разрешить относительно y, т. е. найти единственную функцию $y = f(x)$ такую, что $F(x, f(x)) = 0$, где x принимает значения из некоторого промежутка.

Обратимся к уравнению (10). Если $|x| > 1$, то не существует значений y таких, что пара чисел (x, y) удовлетворяет уравнению (10). Если $|x| \leqslant 1$, то, решая это уравнение относительно y, получаем

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}. \tag{11}$$

Таким образом, если $|x| < 1$, то из уравнения (10) y выражается через x неоднозначно: каждому значению x соответствуют два различных значения y, а именно $y_1 = -\sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = \sqrt{1 - x^2}$ ($y_1 = y_2$ при $x = -1$ и $x = 1$).

Отсюда следует, что всякая функция $y = f(x)$, которая в точке $x \in [-1, 1]$ принимает либо значение y_1, либо значение y_2, удовлетворяет уравнению (10), т. е.

$$x^2 + f^2(x) - 1 \equiv 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Вернемся к уравнению (9). Пусть прямоугольник $K = \{(x, y)\colon |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$ содержится в области определения функции $F(x, y)$, и пусть $F(x_0, y_0) = 0$. Если на отрезке $\Delta = [x_0 - a,\ x_0 + a]$ существует единственная функция $y = f(x)$ такая, что $f(x) \in \in [y_0 - b, y_0 + b]$ и

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in \Delta,$$

то говорят, что *уравнение* (9) *определяет в прямоугольнике* K *переменную* y *как неявную функцию переменной* x.

Достаточные условия существования неявной функции и другие вопросы, связанные с неявными функциями, рассматриваются в § 28.

Функция одной переменной может быть задана не только в явном виде $y = f(x)$ или неявно уравнением $F(x, y) = 0$, но также параметрически. Этот способ задания состоит в следующем.

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены на некотором множестве E, и пусть E_1 — множество значений функции φ. Предположим, что функция φ обратима на множестве E, и пусть $t = \varphi^{-1}(x)$ — обратная к ней функция. Тогда на множестве E_1 определена сложная функция $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$, которую называют *параметрически заданной* формулами (уравнениями) $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)$.

Например, уравнения $x = \cos t,\ y = \sin t$, где $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, определяют параметрически заданную функцию $y = f(x)$. В данном случае $t = = \arccos x,\ \ y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Предел функции

1. Понятие предела. Важную роль в курсе математического анализа играет понятие предела, связанное с поведением функции в окрестности данной точки. Напомним, что δ-окрестностью точки a называется интервал длины 2δ с центром в точке a, т. е. множество

$$U_\delta(a) = \{x\colon\ |x-a| < \delta\} = \{x\colon\ a-\delta < x < a+\delta\}.$$

Если из этого интервала удалить точку a, то получим множество, которое называют *проколотой δ-окрестностью точки a* и обозначают $\dot U_\delta(a)$, т. е.

$$\dot U_\delta(a) = \{x\colon\ |x-a| < \delta,\ x \neq a\} = \{x\colon\ 0 < |x-a| < \delta\}.$$

Предваряя определение предела функции, рассмотрим два примера.

Пример 1. Исследуем функцию $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ в окрестности точки $x=1$.

△ Функция f определена при всех $x \in R$, кроме $x=1$, причем $f(x) = x+1$ при $x \neq 1$. График этой функции изображен на рис. 10.1.

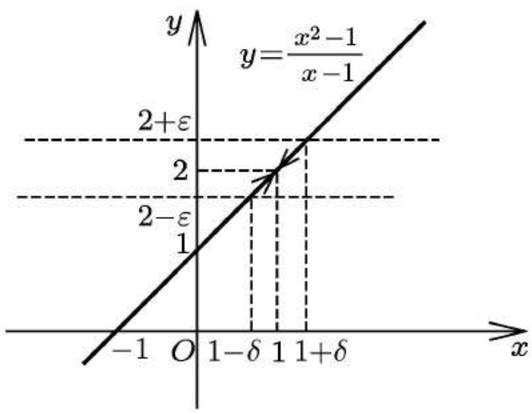

Рис. 10.1

Из этого рисунка видно, что значения функции близки к 2, если значения x близки к 1 ($x \neq 1$). Придадим этому утверждению точный смысл.

Пусть задано любое число $\varepsilon > 0$ и требуется найти число $\delta > 0$ такое, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки $x=1$ значения функции $f(x)$ отличаются от числа 2 по абсолютной величине меньше, чем на ε.

Иначе говоря, нужно найти число $\delta > 0$ такое, чтобы для всех $x \in \dot U_\delta(a)$ соответствующие точки графика функции $y = f(x)$ лежали в горизонтальной полосе, ограниченной прямыми $y = 2-\varepsilon$ и $y = 2+\varepsilon$ (см. рис. 10.1), т. е. чтобы выполнялось условие $f(x) \in U_\varepsilon(2)$. В данном примере можно взять $\delta = \varepsilon$.

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ стремится к двум при x, стремящемся к единице, а число 2 называют пределом функции $f(x)$ при $x \to 1$ и пишут $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ или $f(x) \to 2$ при $x \to 1$. ▲

2. Два определения предела функции и их эквивалентность.

а) *Определение предела по Коши.* Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке a*, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

С помощью логических символов это определение можно записать так:
$\{\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0\colon\ \forall x\colon\ 0<|x-a|<\delta \to |f(x)-A|<\varepsilon,$
или, используя понятие окрестности, в виде
$$\{\lim_{x\to a} f(x)=A\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0\colon\ \forall x\in \dot U_\delta(a) \to f(x)\in U_\varepsilon(A).$$

Таким образом, число A есть предел функции $f(x)$ в точке a, если для любой ε-окрестности числа A можно найти такую проколотую δ-окрестность точки a, что для всех x, принадлежащих этой δ-окрестности, соответствующие значения функции содержатся в ε-окрестности числа A.

Замечание 1. В определении предела функции в точке a предполагается, что $x\neq a$. Это требование связано с тем, что точка a может не принадлежать области определения функции.

Отметим еще, что число δ, фигурирующее в определении предела, зависит, вообще говоря, от ε, т. е. $\delta=\delta(\varepsilon)$.

б) *Определение предела по Гейне.* Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a, т. е. $\exists\delta_0>0\colon\ \dot U_{\delta_0}(a)\subset D(f)$, и для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что $x_n\in \dot U_{\delta_0}(a)$ для всех $n\in N$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

в) *Эквивалентность двух определений предела.*

Теорема 1. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

а) Пусть число A есть предел функции f в точке a по Коши; тогда $\exists\delta_0>0\colon\ \dot U_{\delta_0}\subset D(f)$ и
$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta\in(0,\delta_0]\colon \quad \forall x\in\dot U_\delta(a)\to f(x)\in U_\varepsilon(A). \tag{1}$$
Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к числу a и такую, что $x_n\in\dot U_{\delta_0}(a)$ для всех $n\in N$. Согласно определению предела последовательности для найденного в (1) числа $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ можно указать номер n_δ такой, что $\forall n\geqslant n_\delta\to x_n\in\dot U_\delta(a)$, откуда в силу условия (1) следует, что $f(x_n)\in U_\varepsilon(A)$. Таким образом,
$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N_\varepsilon\colon\ \forall n\geqslant N_\varepsilon\to f(x_n)\in U_\varepsilon(A), \tag{2}$$
где $N_\varepsilon=n_{\delta(\varepsilon)}$, причем условие (2) выполняется для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=a$ и $x_n\in\dot U_{\delta_0}(a)\subset D(f)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, т. е. число A — предел функции $f(x)$ в точке a по Гейне.

б) Докажем, что если число A есть предел функции $f(x)$ в точке a по Гейне, то это же число является пределом функции f по Коши, т. е. выполняется условие (1). Допустим, что это неверно. Тогда

$$\exists\varepsilon_0 > 0\colon\ \forall\delta\in(0,\delta_0]\quad \exists x(\delta)\in\dot U_\delta(a)\colon\ |f(x(\delta))-A|\geqslant\varepsilon_0. \tag{3}$$

Согласно (3) в качестве δ можно взять любое число из полуинтервала $(0,\delta_0]$. Возьмем $\delta=\delta_0/n$, где $n\in N$, и обозначим $x_n=x(\delta_0/n)$. Тогда в силу (3) для любого $n\in N$ выполняются неравенства

$$0<|x_n-a|<\delta_0/n, \tag{4}$$

$$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0. \tag{5}$$

Из (4) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $x_n\in\dot U_{\delta_0}(a)$ при всех $n\in N$, а из (5) заключаем, что число A не может быть пределом последовательности $\{f(x_n)\}$. Следовательно, число A не является пределом функции f в точке a по Гейне. Полученное противоречие доказывает, что должно выполняться утверждение (1). ●

3. Различные типы пределов.

а) *Односторонние конечные пределы.* Число A называют *пределом слева функции* $f(x)$ в точке a и обозначают $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ или $f(a-0)$, если

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\colon\ \forall x\in(a-\delta,a)\to|f(x)-A_1|<\varepsilon.$$

Аналогично число A_2 называют *пределом справа функции* $f(x)$ в точке a и обозначают $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ или $f(a+0)$, если

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\colon\ \forall x\in(a,a+\delta)\to|f(x)-A_2|<\varepsilon.$$

Числа A_1 и A_2 характеризуют поведение функции f соответственно в левой и правой полуокрестности точки a, поэтому пределы слева и справа называют *односторонними пределами.* Если $a=0$, то предел слева функции $f(x)$ обозначают $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$ или $f(-0)$, а предел справа обозначают $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$ или $f(+0)$.

Например, для функции $f(x)=\operatorname{sign}x$, где

$$\operatorname{sign}x=\begin{cases}-1, & \text{если}\quad x<0,\\ \ \ 0, & \text{если}\quad x=0,\\ \ \ 1, & \text{если}\quad x>0,\end{cases}$$

график которой изображен на рис. 10.4, $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=f(-0)=-1$, $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=f(+0)=1$.

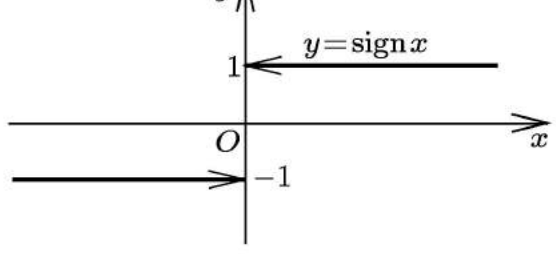

Рис. 10.4

б) *Бесконечные пределы в конечной точке.* Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окрестности точки a, имеет в этой точке *бесконечный предел*, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \to |f(x)| > \varepsilon. \tag{6}$$

В этом случае функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой при* $x \to a$.

Согласно условию (6) график функции $y = f(x)$ для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ лежит вне горизонтальной полосы $|y| < \varepsilon$. Обозначим

$$U_\varepsilon(\infty) = \{y\colon\ |y| > \varepsilon\} = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$$

и назовем это множество *ε-окрестностью бесконечности.* Тогда запись $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ означает, что для любой ε-окрестности бесконечности $U_\varepsilon(\infty)$ найдется такая проколотая δ-окрестность точки a, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(\infty)$.

Например, если $f(x) = 1/x$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, так как условие (6) выполняется при $\delta = 1/\varepsilon$ (рис. 10.6).

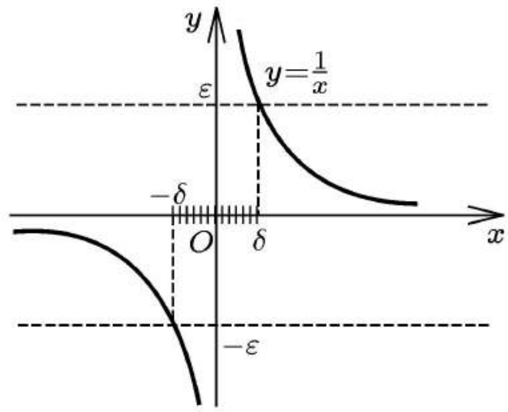

Рис. 10.6

Аналогично говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окрестности точки a, имеет в этой точке *предел, равный* $+\infty$, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \to f(x) > \varepsilon,$$

т. е. $f(x) \in U_\varepsilon(+\infty)$, где множество $U_\varepsilon(+\infty)$ называют *ε-окрестностью символа* $+\infty$.

Если
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \to f(x) < -\varepsilon,$$

т. е. $f(x) \in U_\varepsilon(-\infty)$, где $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\varepsilon)$, то говорят, что функция f имеет в точке *a предел, равный* $-\infty$, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, а множество $U_\varepsilon(-\infty)$ называют *ε-окрестностью символа* $-\infty$.

Например, если $f(x) = \lg x^2$ (рис. 10.7), то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, а если $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (рис. 10.8), то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

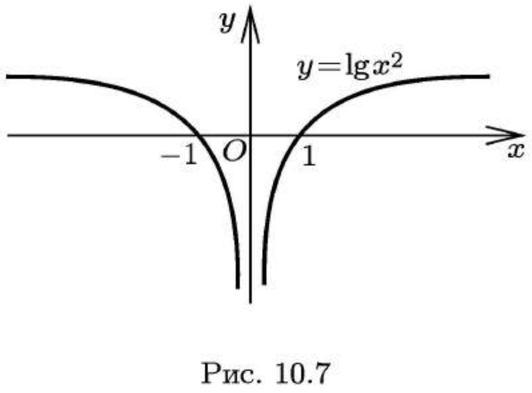

Рис. 10.7

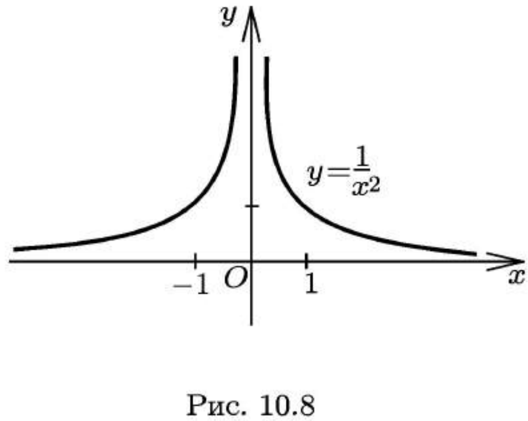

Рис. 10.8

в) *Предел в бесконечности.* Если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(+\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то говорят, что число A есть *предел функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к плюс бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Например, если $f(x) = \dfrac{3-2x}{x+1}$ (см. рис. 9.4), то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$. В самом деле, $f(x) = -2 + \dfrac{5}{x+1}$, и если $x > 0$, то $x + 1 > x > 0$. Поэтому $\dfrac{5}{x+1} < \dfrac{5}{x}$, откуда следует, что неравенство $|f(x) + 2| < \dfrac{5}{x} < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ выполняется при любом $x > \delta$, где $\delta = \dfrac{5}{\varepsilon}$, т. е. при любом $x \in U_\delta(+\infty)$.

Если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(-\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(A)$, т. е. неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется для всех $x \in (-\infty, -\delta)$, то говорят, что число A есть *предел функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к минус бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$. Например, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-2x}{x+1} = -2$ (см. рис. 9.4).

Аналогично, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то говорят, что число A есть *предел функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Например, если $f(x) = \dfrac{3-2x}{x+1}$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$.

Точно так же вводится понятие бесконечного предела в бесконечности. Например, запись $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(+\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(-\infty)$. Аналогично определяются бесконечные пределы при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$.

4. Свойства пределов функций. В рассматриваемых ниже свойствах речь идет о конечном пределе функции в заданной точке. Под точкой понимается либо число a, либо один из символов $a - 0$, $a + 0$, $-\infty$, $+\infty$, ∞. Предполагается, что функция определена в некоторой окрестности или полуокрестности точки a, не содержащей саму точку a. Для определенности будем формулировать и доказывать свойства пределов, предполагая, что a — число, а функция определена в проколотой окрестности точки a.

а) *Локальные свойства функции, имеющей предел.* Покажем, что функция, имеющая конечный предел в заданной точке, обладает некоторыми *локальными* свойствами, т. е. свойствами, которые справедливы в окрестности этой точки.

Свойство 1. *Если функция* $f(x)$ *имеет предел в точке* a, *то существует такая проколотая окрестность точки* a, *в которой эта функция ограничена.*

С в о й с т в о 2. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, *причем* $A \neq 0$, *то найдется такая проколотая окрестность точки* a, *в которой значения функции* f *имеют тот же знак, что и число* A.

С в о й с т в о 3. *Если* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *причем* $B \neq 0$, *то существует число* $\delta > 0$ *такое, что функция* $\dfrac{1}{g(x)}$ *ограничена на множестве* $\dot{U}_\delta(a)$.

б) *Свойства пределов, связанные с неравенствами.*

С в о й с т в о 1. *Если существует число* $\delta > 0$ *такое, что для всех* $x \in \dot{U}_\delta(a)$ *выполняются неравенства*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \tag{9}$$

и если

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A, \tag{10}$$

то существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

С в о й с т в о 2. *Если существует число* $\delta > 0$ *такое, что для всех* $x \in \dot{U}_\delta(a)$ *справедливо неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *и если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *то* $A \leqslant B$.

в) *Бесконечно малые функции.* Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой при* $x \to a$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to a$;

2) произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

г) *Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями.*

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то:

$$\begin{aligned}
&1)\ \lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B;\\
&2)\ \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB;\\
&3)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ при условии, что } B \neq 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

5. Пределы монотонных функций.

Т е о р е м а 2. *Если функция* f *определена и является монотонной на отрезке* $[a, b]$, *то в каждой точке* $x_0 \in (a, b)$ *эта функция имеет конечные пределы слева и справа, а в точках* a *и* b *— соответственно правый и левый пределы.*

○ Пусть, например, функция f является возрастающей на отрезке $[a, b]$. Зафиксируем точку $x_0 \in (a, b]$. Тогда

$$\forall x \in [a, x_0) \to f(x) \leqslant f(x_0). \qquad (12)$$

В силу условия (12) множество значений, которые функция f принимает на промежутке $[a, x_0)$, ограничено сверху, и по теореме о точной верхней грани существует

$$\sup_{a \leqslant x < x_0} f(x) = M, \quad \text{где} \quad M \leqslant f(x_0).$$

Согласно определению точной верхней грани (§ 2) выполняются условия:

а) $\forall x \in [a, x_0) \to f(x) \leqslant M;$ (13)

б) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in [a, x_0)\colon \ M - \varepsilon < f(x_\varepsilon).$ (14)

Обозначим $\delta = x_0 - x_\varepsilon$, тогда $\delta > 0$, так как $x_\varepsilon < x_0$. Если $x \in \in (x_\varepsilon, x_0)$, т. е. $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то

$$f(x_\varepsilon) \leqslant f(x), \qquad (15)$$

так как f — возрастающая функция. Из условий (13)–(15) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to f(x) \in (M - \varepsilon, M].$$

Согласно определению предела слева это означает, что существует

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = M.$$

Итак,

$$f(x_0 - 0) = \sup_{a \leqslant x < x_0} f(x).$$

Аналогично можно доказать, что функция f имеет в точке $x_0 \in \in [a, b)$ предел справа, причем

$$f(x_0 + 0) = \inf_{x_0 < x \leqslant b} f(x). \quad \bullet$$

Следствие. *Если функция f определена и возрастает на отрезке $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, то*

$$f(x_0 - 0) < f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0). \qquad (16)$$

6. Критерий Коши существования предела функции. Будем говорить, что *функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $x = a$ условию Коши*, если она определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \ \forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(a) \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \qquad (17)$$

Теорема 3. *Для того чтобы существовал конечный предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла в точке a условию Коши* (17).

○ Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$; тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \to |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Если x', x'' — любые точки из множества $\dot{U}_\delta(a)$, то из (18) следует, что

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) - (f(x'') - A)| \leqslant \\ \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие Коши (17).

Достаточность. Докажем, что если $\exists\delta_0\colon\ \dot{U}_\delta(a) \subset D(f)$ и выполняется условие (17), то существует предел функции f в точке a. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность такая, что $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$. Докажем, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ имеет конечный предел, не зависящий от выбора последовательности $\{x_n\}$.

Если выполняется условие (17), то для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(a) \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{19}$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, то, задав число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, указанное в условии (19), найдем в силу определения предела последовательности номер $n_\delta = N_\varepsilon$ такой, что

$$\forall n > N_\varepsilon \to 0 < |x_n - a| < \delta.$$

Это означает, что для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ и для любого $m \geqslant N_\varepsilon$ выполняются условия $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$, $x_m \in \dot{U}_\delta(a)$ и в силу (19) $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной и согласно критерию Коши для последовательности (§ 8) имеет конечный предел. В силу леммы этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке a. Следовательно, функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке a. ●