Числовые характеристики случайных величин

Первый начальный момент:

$$M[X]=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\end{cases}$$

Второй центральный момент:

$$\mathrm{D}[X]=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mathrm{M}[X])^2 p_i\\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathrm{M}[X])^2 f(x)\,dx\end{cases}$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma[X]=\sqrt{\mathrm{D}[X]}$$

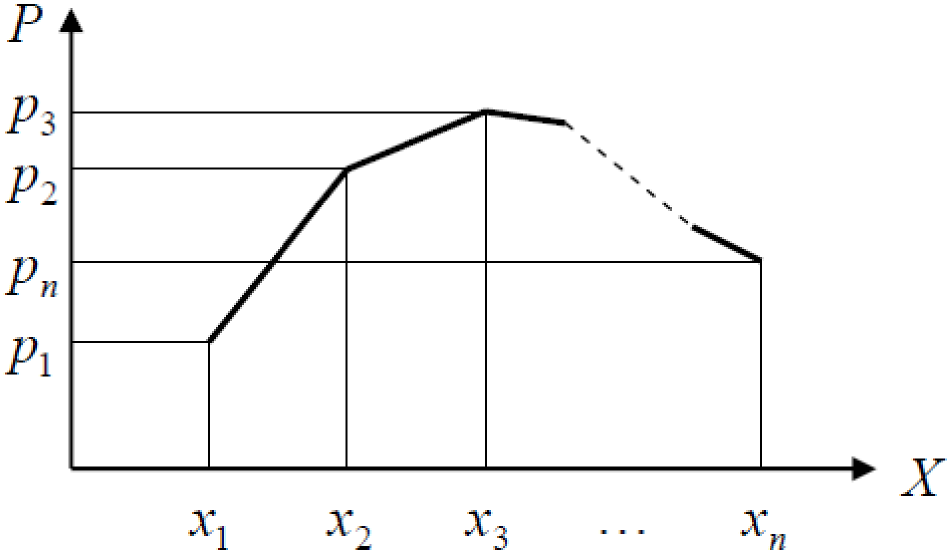
Коэффициент вариации:

$$\nu[X]=\sigma[X]/\mathrm{M}[X]$$

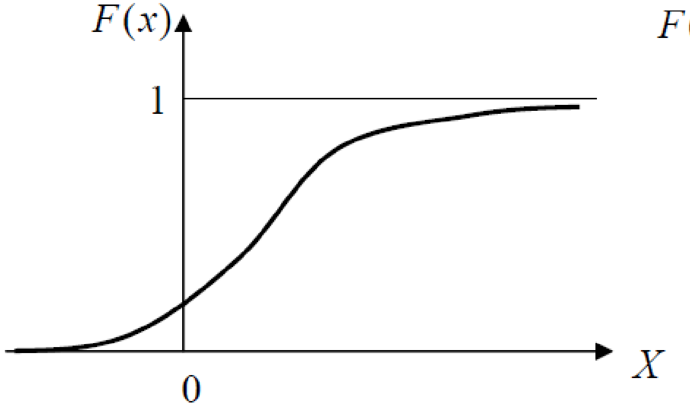
Законы распределения случайных величин

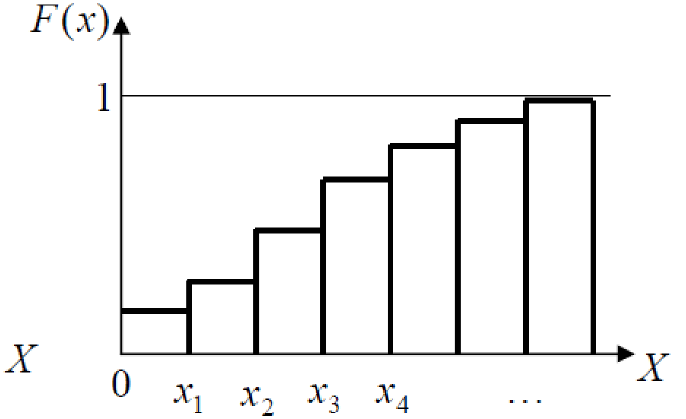
Закон распределения дискретной случайной величины:

$$p_i = f(x_i) \qquad (i = \overline{1,n})$$

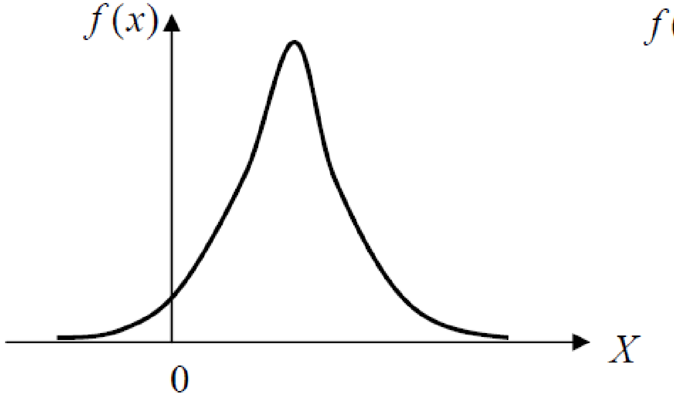


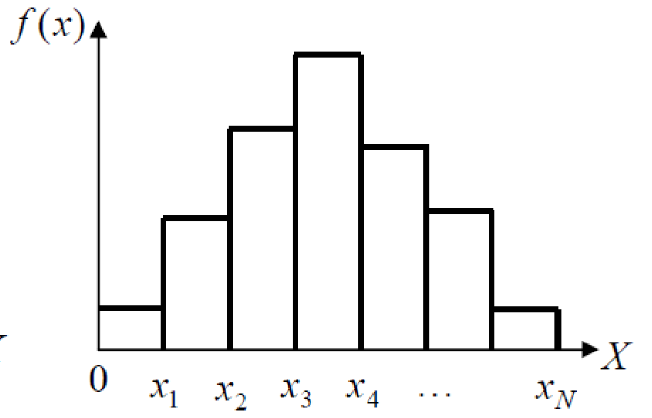
Функция распределения: $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$





Плотность распределения: $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$



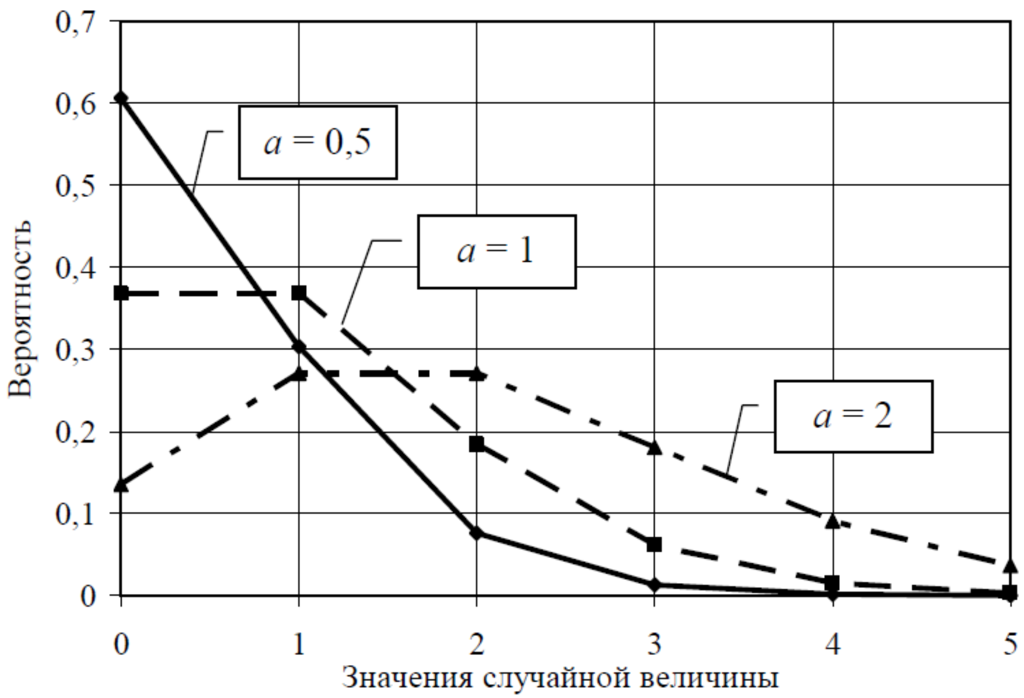


Типовые законы распределения

Закон распределения дискретной случайной величины:

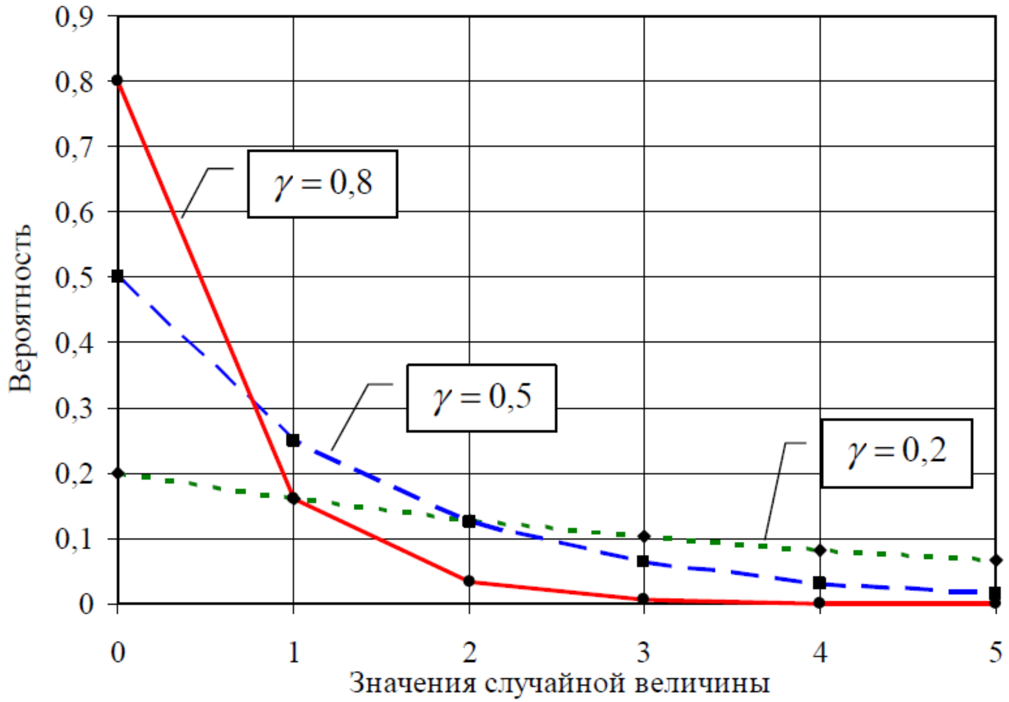
- распределение Пуассона

$$p_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$



- геометрическое распределение

$$p_k = P(X = k) = \rho^k (1 - \rho)$$



Типовые законы распределения

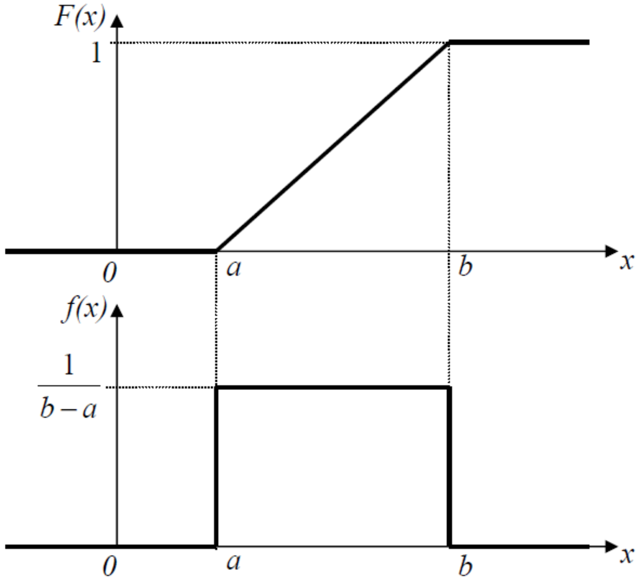
Закон распределения непрерывной случайной величины:

- равномерный;
- экспоненциальный;
- гиперэкспоненциальный;
- Эрланга;
- Эрланга нормированный;
- гиперэрланговский.

Равномерный:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a<x<b;\\ 1 & \text{при} \quad x>b;\end{cases}$$

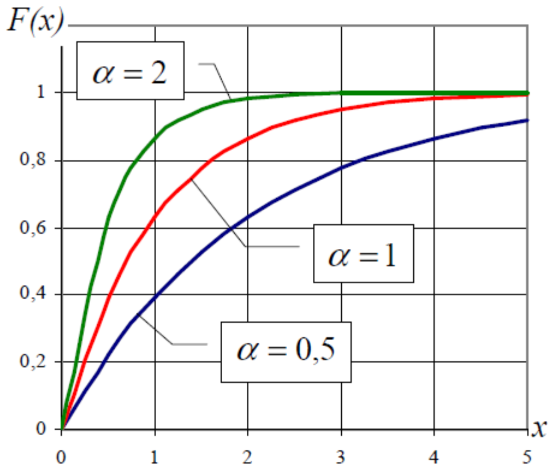
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a<x<b;\\ 0 & \text{при} \quad x>b.\end{cases}$$

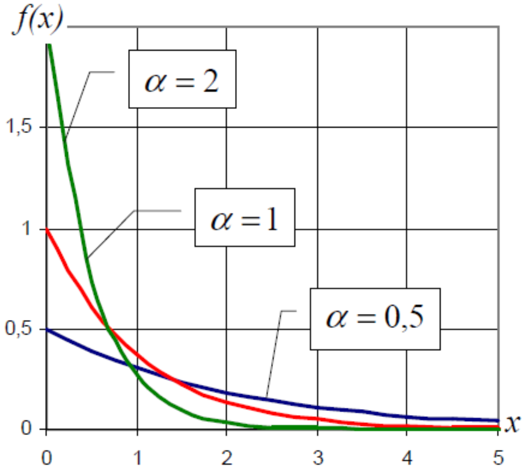


Экспоненциальный:

$$F(x)=1-e^{-\alpha x},$$

$$f(x)=\alpha e^{-\alpha x}$$





Параметры СМО

Структурные:

- количество обслуживающих приборов K
- количество k и ёмкости накопителей E_j
- способ взаимосвязи накопителей с приборами

Нагрузочные:

- количество поступающих в систему классов заявок H
- закон распределения $A_i(\tau)$, интенсивность λ_i и коэффициент вариации ν_{ai} интервалов времени между поступающими в систему заявками класса i
- закон распределения $B_i(\tau)$, интенсивность μ_i и коэффициент вариации ν_{bi} длительности обслуживания заявок класса i

Функциональные:

- дисциплина буферизации
- дисциплина обслуживания

Режимы функционирования СМО

1) Установившийся (стационарный)
2) Неустановившийся:
   - переходный
   - нестационарный
   - режим перегрузки

Условие отсутствия перегрузок в СМО с неограниченной очередью:

$$\lambda < \mu K$$

Характеристики СМО

СМО с однородным потоком заявок

$$y = \lambda / \mu$$

$$\rho = \min\left(\frac{(1-\pi_n)y}{K};1\right) \qquad \eta = 1-\rho$$

$$\pi_o = (1-\pi_n) \qquad \lambda' = \pi_o \lambda$$

$$\pi_n = \lim_{T\to\infty}\frac{N_n(T)}{N(T)} \qquad \lambda'' = \pi_n \lambda$$

$$w = ? \qquad u = w + b \qquad l = \lambda' w \qquad m = \lambda' u$$

Характеристики СМО

СМО с неоднородным потоком заявок

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{H} \lambda_i \qquad Y = \sum_{i=1}^{H} y_i \qquad L = \sum_{i=1}^{H} l_i \qquad M = \sum_{i=1}^{H} m_i$$

$$R = \min(\sum_{i=1}^{H} \rho_i ; 1) \qquad R < 1$$

$$W = \sum_{i=1}^{H} \xi_i w_i \qquad U = \sum_{i=1}^{H} \xi_i u_i \qquad B = \sum_{i=1}^{H} \xi_i b_i \qquad \xi_i = \lambda_i / \Lambda$$

$$U = W + B \qquad L = \Lambda W \qquad M = \Lambda U$$

Параметры СеМО

- число узлов в сети: n
- интенсивность λ_0 источника заявок для РСеМО
- число заявок M для ЗСеМО
- матрица вероятностей передач: $P = [\, p_{ij} \,|\, i, j = 0,1,\ldots,n]$

$$\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1 \quad (i = \overline{0,n})$$

- коэффициент передачи узла α_j

$$\alpha_j = \lambda_j / \lambda_0 \quad (j = \overline{1,n})$$

Условие существования установившегося режима для РСеМО:

$$\rho_j = \frac{\lambda_j b_j}{K_j} = \frac{\alpha_j \lambda_0 b_j}{K_j} < 1 \qquad \lambda_0 < \min\left(\frac{K_1}{\alpha_1 b_1}, \frac{K_2}{\alpha_2 b_2}, \ldots, \frac{K_n}{\alpha_n b_n}\right)$$

Характеристики СеМО

1) Узловые (как в СМО)
2) Сетевые:

$$Y = \sum_{j=1}^{n} y_j \qquad R = \sum_{j=1}^{n} \rho_j \qquad L = \sum_{j=1}^{n} l_j \qquad W = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j \qquad U = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$$

$$M = \sum_{j=1}^{n} m_j$$ - для РСеМО

$$\lambda_0 = \frac{M}{U}$$ - для ЗСеМО

$$U = W + B \qquad L = \Lambda W \qquad M = \Lambda U$$

Одноканальная экспоненциальная СМО

$$w = \frac{\rho b}{1-\rho} \qquad u = \frac{b}{1-\rho} \qquad \rho = \lambda b < 1$$

Многоканальная экспоненциальная СМО

$$w = \frac{Pb}{K(1-\rho)} \qquad \rho = \frac{\lambda b}{K}$$

$$P = \frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} P_0 \qquad P_0 = \left[\frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(K\rho)^i}{i!} \right]^{-1}$$

Одноканальная неэкспоненциальная СМО

С однородным потоком заявок:

$$w = \frac{\lambda b^2 (1 + \nu_b{}^2)}{2(1-\rho)}$$

С неоднородным потоком заявок (ДО БП)

$$w_k^{\text{БП}} = w^{\text{БП}} = \frac{\sum_{i=1}^{H} \lambda_i b_i^2 (1 + \nu_{b_i}^2)}{2(1-R)} \qquad (k = 1, \ldots, H)$$

$$R = \sum_{i=1}^{H} \rho_i = \sum_{i=1}^{H} \lambda_i b_i$$

Одноканальная неэкспоненциальная СМО

С неоднородным потоком заявок (ДО ОП)

$$w_k^{\text{ОП}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{H} \lambda_i b_i^{\,2} (1 + \nu_{bi}^{\,2})}{2(1 - R_{k-1})(1 - R_k)} \qquad R_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i b_i \quad \text{и} \quad R_k = \sum_{i=1}^{k} \rho_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i$$

С неоднородным потоком заявок (ДО АП)

$$w_k^{\text{АП}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i b_i (1 + \nu_{b_i}^2)}{2(1 - R_{k-1})(1 - R_k)} + \frac{R_{k-1} b_k}{1 - R_{k-1}}$$

Линейная однородная эксп. РСеМО

$$\lambda_j = \alpha_j \lambda_0 \qquad \alpha_j = \sum_{i=0}^{n} p_{ij} \alpha_i \quad (j = 0, 1, \ldots, n) \qquad \alpha_0 = 1$$

Линейная однородная эксп. ЗСеМО

$$\left.\begin{aligned} u_i(M) &= b_i[1 + m_i(M-1)]; \\ U(M) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(M); \\ \lambda_0(M) &= \frac{M}{U(M)}; \\ m_i(M) &= \alpha_i \lambda_0(M) u_i(M) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} M &= |1, 2, \ldots, M^* \\ m_i(0) &= 0 \end{aligned}$$