ЛЕКЦИЯ 11

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение и условия существования определенного интеграла

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

а) *Площадь криволинейной трапеции.* Пусть функция f непрерывна на отрезке $\Delta = [a, b]$ и неотрицательна, т. е. $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \Delta$. Рассмотрим фигуру G (рис. 34.1), ограниченную отрезками прямых $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком функции $y = f(x)$, т. е.

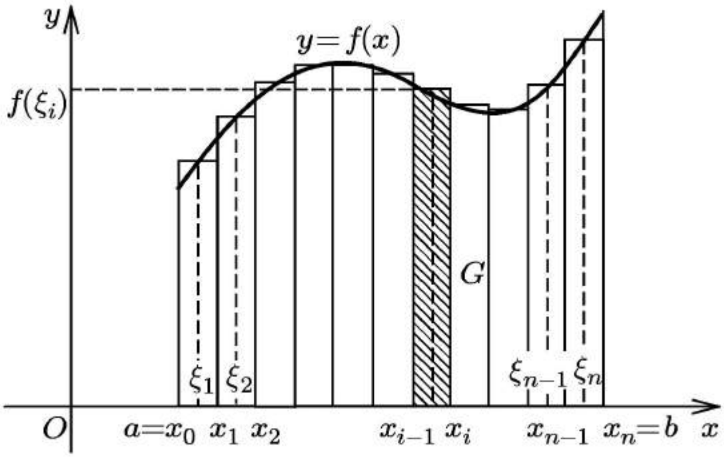

Рис. 34.1

$$G = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*, а отрезок Δ — ее основанием.

Разобьем отрезок Δ на n частей точками x_i $(i = \overline{1, n-1})$, где $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1}$, и проведем через эти точки прямые, параллельные оси Oy. Тогда фигура G разобьется на n частей, каждая из которых является криволинейной трапецией.

Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_0 = a$, $x_n = b$, и пусть $\xi_i \in \Delta_i$, где $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Тогда сумма

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

зависящая от разбиения отрезка Δ и выбора точек ξ_i, равна площади ступенчатой фигуры (рис. 34.1), составленной из n прямоугольников, причем основанием i-го прямоугольника служит отрезок Δ_i, а длина его высоты равна $f(\xi_i)$. Интуитивно ясно, что эта ступенчатая фигура будет мало отличаться от исходной фигуры G при достаточно мелком разбиении.

Будем увеличивать число точек разбиения так, чтобы наибольшая из длин отрезков Δ_i стремилась к нулю. Если при этом сумма σ будет иметь предел S, не зависящий ни от способа дробления отрезка Δ, ни от выбора точек ξ_i, то естественно считать, что площадь фигуры G равна S.

2. Понятие определенного интеграла. Пусть функция одного переменного $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и пусть x_i $(i=\overline{0,n})$ — совокупность точек этого отрезка таких, что

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Назовем эту совокупность точек *разбиением отрезка* $[a,b]$, обозначим разбиение $T=\{x_i,\ i=\overline{0,n}\}$, а отрезки $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$, где $i=\overline{1,n}$, назовем *отрезками разбиения* T.

Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина i-го отрезка разбиения T. Тогда число $l(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$ назовем *мелкостью разбиения* T (или *диаметром этого разбиения*). Если $\xi_i\in\Delta_i$, то совокупность точек ξ_i $(i=\overline{1,n})$ назовем ***выборкой*** и обозначим $\xi=\{\xi_i,\ i=\overline{1,n}\}$.

Сумму

$$\sigma_T(\xi,f)=\sigma_T(\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1}$$

назовем *интегральной суммой для функции f при заданном разбиении T и фиксированной выборке ξ*.

Определение. Число J называется *определенным интегралом от функции f на отрезке* $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого разбиения T, мелкость которого $l(T)<\delta$, и для любой выборки ξ выполняется неравенство

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\Big| < \varepsilon.$$

С помощью символов это определение можно записать так:

$$\Big\{J=\int\limits_a^b f(x)\,dx\Big\}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta(\varepsilon)>0\colon\ \ \forall T\colon\, l(T)<\delta(\varepsilon)\ \ \forall\xi\to$$
$$\to|\sigma_T(\xi,f)-J|<\varepsilon. \tag{2}$$

Часто утверждение (2) кратко записывают в виде $\sigma_T(\xi)\to J$ при $l(T)\to 0$ или $\lim\limits_{l(T)\to 0}\sigma_T(\xi)=J$, имея в виду, что предел не зависит от выборки ξ.

Если существует число J, определяемое условиями (2), то функцию f называют *интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a,b]$ и говорят, что существует интеграл от функции f на отрезке $[a,b]$*.

3. Необходимое условие интегрируемости функции.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

○ Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда существует число J, удовлетворяющее условию (2). Полагая в (2) $\varepsilon = 1$, получаем неравенство

$$J - 1 < \sigma_T(\xi, f) < J + 1, \tag{3}$$

которое должно выполняться для любого разбиения T такого, что $l(T) < \delta_1 = \delta(1)$, и при любой выборке ξ.

Зафиксируем разбиение T, удовлетворяющее условию $l(T) < \delta_1$, и предположим, что функция f не ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда она не ограничена по крайней мере на одном из отрезков Δ_i разбиения T. Без ограничения общности можно считать, что функция f не ограничена на отрезке $\Delta_1 = [x_0, x_1] = [a, x_1]$.

Фиксируем точки $\xi_2, ..., \xi_n$, где $\xi_i \in \Delta_i$, $i = \overline{2, n}$, и обозначим $A = \sum\limits_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Тогда $\sigma_T = A + f(\xi_1)\Delta x_1$ и в силу (3) получаем неравенства

$$J - 1 < f(\xi_1)\Delta x_1 + A < J + 1, \tag{4}$$

которые должны выполняться для любого $\xi_1 \in \Delta_1$.

Так как $\Delta x_1 > 0$, то двойное неравенство (4) равносильно неравенству

$$\frac{1}{\Delta x_1}(J - 1 - A) < f(\xi_1) < \frac{1}{\Delta x_1}(J + 1 - A),$$

из которого следует, что функция f ограничена на Δ_1, что противоречит предположению о неограниченности функции f на отрезке Δ_1.

Итак, предположение о неограниченности f на $[a, b]$ приводит к противоречию. Теорема доказана. ●

4. Суммы Дарбу и их свойства. Пусть функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке и пусть $T = \{x_i,\ i = \overline{0, n}\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = \overline{1, n})$. Обозначим

$$\begin{gathered} M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \\ S_T = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s_T = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i. \end{gathered} \tag{5}$$

Назовем S_T и s_T соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу для функции f при заданном разбиении T отрезка* $[a, b]$. Заметим, что эти суммы не зависят от выборки ξ. Рассмотрим свойства сумм Дарбу.

Свойство 1. *Для любой выборки ξ справедливы неравенства*

$$s_T \leqslant \sigma_T(\xi) \leqslant S_T. \tag{6}$$

○ Так как для любого $\xi_i \in \Delta_i$ выполняются неравенства

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i,$$

то

$$m_i \Delta x_i \leqslant f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M_i \Delta x_i.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{7}$$

Согласно определению сумм Дарбу и интегральной суммы σ утверждения (7) и (6) равносильны. ●

Свойство 2. *Справедливы равенства*

$$S_T = \sup_{\xi} \sigma_T(\xi), \tag{8}$$

$$s_T = \inf_{\xi} \sigma_T(\xi). \tag{9}$$

Следующее свойство сумм Дарбу связано с еще одним понятием для разбиений. Назовем разбиение T_2 *продолжением* (*измельчением*) *разбиения* T_1, если каждая точка разбиения T_1 является точкой разбиения T_2. Иначе говоря, разбиение T_2 либо совпадает с разбиением T_1, либо получено из T_1 добавлением по крайней мере одной новой точки.

Свойство 3. *Если разбиение T_2 — продолжение разбиения T_1, то*

$$s_{T_1} \leqslant s_{T_2} \leqslant S_{T_2} \leqslant S_{T_1}, \tag{10}$$

т. е. при измельчении разбиения нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя не увеличивается.

Свойство 4. *Для любых разбиений T' и T'' справедливо неравенство*

$$s_{T'} \leqslant S_{T''}. \tag{11}$$

Свойство 5. *Существуют числа*

$$\underline{J} = \sup_{T} s_T, \quad \overline{J} = \inf_{T} S_T,$$

удовлетворяющие для любых разбиений T' и T'' отрезка $[a, b]$ условию

$$s_{T'} \leqslant \underline{J} \leqslant \overline{J} \leqslant S_{T''}. \tag{12}$$

Эти числа называют соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу от функции f на отрезке $[a, b]$.

5. Критерий интегрируемости функции.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была ограничена и удовлетворяла условию*

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon>0\colon\ \forall T\colon\ l(T)<\delta_\varepsilon\to 0\leqslant S_T-s_T<\varepsilon. \tag{13}$$

○ Необходимость. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда она ограничена (теорема 1) и в силу определения интеграла

$$\exists\,J\colon\ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon>0\colon\ \forall T\colon\ l(T)<\delta_\varepsilon\ \ \forall\xi\to J-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma_T(\xi)<J+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, при каждом разбиении T отрезка $[a,b]$, мелкость которого удовлетворяет условию $l(T)<\delta_\varepsilon$, неравенство

$$J-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma_T(\xi)<J+\frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

выполняется при любой выборке ξ. Поэтому из левого неравенства (14) и равенства (9) следует, что

$$J-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\inf_\xi\sigma_T(\xi)=s_T. \tag{15}$$

Аналогично из правого неравенства (14) и равенства (8) следует, что

$$S_T=\sup_\xi\sigma_T(\xi)\leqslant J+\frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Из неравенств (15), (6) и (16) получаем цепочку неравенств

$$J-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant s_T\leqslant S_T\leqslant J+\frac{\varepsilon}{3},$$

откуда следует, что

$$0\leqslant S_T-s_T\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

Итак, интегрируемая на отрезке функция f удовлетворяет условию (13).

Достаточность. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяет условию (13). Докажем, что функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, т. е.

$$\exists\,J\colon\ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon>0\colon\ \forall T\colon\ l(T)<\delta_\varepsilon\ \ \forall\xi\to|\sigma_T(\xi)-J|<\varepsilon. \tag{17}$$

Воспользуемся свойством 5. Из неравенств (12) следует, что

$$0\leqslant\overline{J}-\underline{J}\leqslant S_T-s_T,$$

откуда в силу (13) получаем неравенство

$$0\leqslant\overline{J}-\underline{J}\leqslant S_T-s_T<\varepsilon,$$

справедливое для любого разбиения T такого, что $l(T)<\delta_\varepsilon$. Так как числа $\overline{J}$ и $\underline{J}$ не зависят от T, то отсюда следует, что

$$\overline{J}=\underline{J}.$$

Обозначим
$$J = \overline{J} = \underline{J} \tag{18}$$
и докажем, что число J есть интеграл от функции f на отрезке $[a,b]$.

Из (12) и (18) следует, что
$$s_T \leqslant J \leqslant S_T, \tag{19}$$
а из (19) и (6) в силу (13) получаем
$$|\sigma_T(\xi) - J| \leqslant S_T - s_T < \varepsilon.$$
Это означает, что функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, а число J есть интеграл от $f(x)$ на $[a,b]$. ●

Следствие. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, а число J — ее интеграл на этом отрезке, то*
$$J = \sup s_T = \inf S_T.$$

6. Классы интегрируемых функций.

Теорема 3. *Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.*

○ Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда по теореме Кантора она равномерно непрерывна на этом отрезке, т. е.
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0\colon \; \forall x', x'' \in [a,b]\colon \; |x' - x''| < \delta \to$$
$$\to |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{24}$$

Докажем, что для функции f выполняется условие (13). Пусть $T = \{x_i,\ i = \overline{0,n}\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ такое, что его мелкость $l(T) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i < \delta$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. По теореме Вейерштрасса существуют точки $\xi_i', \xi_i'' \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ такие, что $f(\xi_i') = m_i$, $f(\xi_i'') = M_i$, где $m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $i = \overline{1,n}$. Поэтому из условия (24) следует, что $\omega_i = M_i - m_i = f(\xi_i'') - f(\xi_i') < \frac{\varepsilon}{b-a}$, так как $|\xi_i'' - \xi_i'| \leqslant \Delta x_i \leqslant l(T) < \delta$. Отсюда получаем
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) = \varepsilon.$$

Итак,
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0\colon \; \forall T\colon \; l(T) < \delta \to S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \Delta x_i < \varepsilon,$$
и по теореме 2 функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. ●

Пример Доказать, пользуясь определением интеграла и теоремой 3, что:
$$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Пусть $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$, тогда $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ для $i = \overline{1,n}$, и, следовательно, $\sigma_T(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \, \Delta x_i = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) =$ $= \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \dfrac{1}{2}\,(b^2 - a^2)$, откуда $\lim\limits_{l(T) \to 0} \sigma_T(\xi) = \dfrac{1}{2}\,(b^2 - a^2)$.

Так как функция $f(x) = x$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то из определения интеграла следует, что предел интегральной суммы не зависит от выбора точек ξ_i на отрезках Δ_i. Поэтому

$$\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2). \quad \blacktriangle$$

Теорема 4. *Если функция определена на отрезке и монотонна, то она интегрируема на этом отрезке.*

○ Пусть, например, функция f является возрастающей на отрезке $[a, b]$; тогда для всех $x \in [a, b]$ выполняется условие

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b),$$

и поэтому функция f ограничена на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{x_i, \ i = \overline{0,n}\}$ отрезка $[a, b]$. Тогда $f(x_{i-1}) = m_i$, $f(x_i) = M_i$, где $m_i = \inf\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$, $M_i =$ $= \sup\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$. Следовательно, получаем $S_T - s_T =$ $= \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i$, откуда $S_T - s_T \leqslant$ $\leqslant l(T) \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = l(T)(f(b) - f(a))$, так как

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \geqslant 0, \quad \Delta x_i \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i = l(T).$$

Отсюда имеем, что $S_T - s_T \to 0$ при $l(T) \to 0$. По теореме 2 функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. ●

Свойства определенного интеграла

Заметим сначала, что если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то интеграл от этой функции является числом, не зависящим от того, какой буквой обозначен аргумент подынтегральной функции, т. е.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(z) dz.$$

Перейдем к рассмотрению свойств определенного интеграла. Все отмеченные ниже свойства доказываются в предположении, что подынтегральная функция ограничена на отрезке, по которому она интегрируется.

1. Свойства, связанные с операциями над функциями.

Свойство 1. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то для любых чисел α и β ($\alpha \in R$, $\beta \in R$) функция $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и справедливо равенство*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

Свойство 2. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то функция $\varphi(x) = f(x)g(x)$ также интегрируема на этом отрезке.*

2. Свойства, связанные с отрезками интегрирования.

Свойство 1. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $\Delta = [a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $\Delta_1 \subset \Delta$.*

Свойство 2. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $a < c < b$, то справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Свойство 3. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и если c_1, c_2, c_3 — любые точки этого отрезка, то*

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx. \tag{10}$$

3. Оценки интегралов.

Утверждение 1. *Если $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$ и если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{11}$$

○ Так как для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ и при любой выборке $\xi = \{\xi_i,\ i = \overline{1, n}\}$ выполняется неравенство

$$\sigma_T(\xi; f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0,$$

то, переходя в этом неравенстве к пределу при $l(T) \to 0$, получаем неравенство (11). ●

Следствие. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и если для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

4. Интегральная теорема о среднем.

Теорема. *Пусть функции f и g удовлетворяют следующим условиям:*

1) *$f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$;*

2) $$\exists\, m, M\colon\ \forall x \in [a,b] \to m \leqslant f(x) \leqslant M; \tag{20}$$

3) *функция g не меняет знака на отрезке $[a,b]$, т. е. либо*

$$g(x) \geqslant 0 \quad \text{при } x \in [a,b], \tag{21}$$

либо

$$g(x) \leqslant 0 \quad \text{при } x \in [a,b].$$

Тогда

$$\exists\, \mu \in [m,M]\colon\ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{22}$$

○ Пусть, например, выполняется условие (21). Тогда из неравенства (20) следует, что

$$\forall x \in [a,b] \to mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x). \tag{23}$$

Так как функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то функция fg также интегрируема на этом отрезке и согласно правилу оценки интегралов

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{24}$$

Заметим, что если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то из неравенств (24) следует, что $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, и поэтому равенство (22) в этом случае выполняется при любом μ.

Пусть $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, тогда $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ в силу (21). Поэтому неравенство (24) равносильно следующему неравенству:

$$m \leqslant \mu \leqslant M, \tag{25}$$

где

$$\mu = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \Big/ \int_a^b g(x)\,dx \tag{26}$$

Из (26) следует равенство (22), где $\mu \in [m,M]$ в силу неравенства (25). Теорема доказана для случая, когда $g(x) \geqslant 0$. Эта теорема справедлива и в случае $g(x) \leqslant 0$, так как при замене $g(x)$ на $-g(x)$ равенство (22) сохраняется. ●

Следствие. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $\Delta = [a,b]$ и не меняет знака*, то

$$\exists\, c \in [a,b]\colon\ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{27}$$