ЛЕКЦИЯ 12

Вычисление определенных интегралов

1. Интеграл с переменным верхним пределом. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то для любого $x \in [a,b]$ существует интеграл

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

который называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

а) *Непрерывность интеграла.*

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)$ непрерывна на этом отрезке.*

○ Пусть $x \in [a,b]$ и $x + \Delta x \in [a,b]$. Докажем, что

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) \to 0 \quad \text{при } \Delta x \to 0.$$

В силу свойств интеграла (§ 35, п. 2)

$$\Delta F = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \tag{2}$$

Так как функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена, т. е.

$$\exists\, M > 0\colon\ \forall x \in [a,b] \to |f(x)| \leqslant M. \tag{3}$$

Согласно правилу оценки интеграла из (2) и (3) следует, что

$$|\Delta F| \leqslant \left| \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \right| \leqslant M|\Delta x|,$$

откуда получаем: $\Delta F \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т. е. функция F непрерывна в точке x. Поскольку x — произвольная точка отрезка $[a,b]$, то функция F непрерывна на отрезке $[a,b]$. ●

б) *Дифференцируемость интеграла.*

Теорема 2. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в точке x_0, причем*

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{4}$$

в) *Существование первообразной у непрерывной функции.*

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она имеет первообразную на этом отрезке, причем первообразной для функции f является интеграл с переменным верхним пределом* (1), *и поэтому*

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C, \tag{8}$$

где C — произвольная постоянная.

○ Пусть x — произвольная точка отрезка $[a,b]$. По теореме 2 функция $F(x)$, определяемая формулой (1), имеет в точке x производную, равную $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\Big(\int\limits_a^x f(t)\,dt\Big) = f(x). \tag{9}$$

Согласно определению первообразной функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, и поэтому справедливо равенство (8). ●

Замечание 2. Согласно теореме 3 (формула (9)) операция интегрирования непрерывной функции с переменным верхним пределом является обратной к операции дифференцирования. Утверждение о том, что производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции равна значению подынтегральной функции при значении аргумента, равном верхнему пределу интеграла, является важнейшим фактом курса математического анализа.

Следствие. *Из теоремы 3 следует, что всякая первообразная $\Phi(x)$ для функции f, непрерывной на отрезке $[a,b]$, имеет вид*

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{10}$$

где C — постоянная.

2. Вычисление определенных интегралов.

а) *Формула Ньютона–Лейбница.*

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и если $\Phi(x)$ — какая-нибудь первообразная для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона–Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{11}$$

○ Согласно следствию из теоремы 3 существует число C такое, что справедливо равенство (10). Подставляя в формулу (10) $x = a$ и учитывая, что $\int\limits_a^a f(t)\,dt = 0$, получаем $C = \Phi(a)$. Поэтому равенство (10) можно записать в виде

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + \Phi(a). \tag{12}$$

Равенство (12) выполняется при любых значениях $x \in [a,b]$ и, в частности, при $x = b$, т. е.

$$\Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt + \Phi(a),$$

откуда следует формула (11), так как величина определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначается независимое переменное в интеграле. ●

б) *Замена переменного.*

Теорема 5. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a_0, b_0), а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на интервале (α_0, β_0), причем $\varphi(t) \in (a_0, b_0)$ при всех $t \in (\alpha_0, \beta_0)$.*

Тогда если $\alpha \in (\alpha_0, \beta_0)$, $\beta \in (\alpha_0, \beta_0)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, то справедлива формула замены переменного в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{16}$$

○ Так как $a \in (a_0, b_0)$, $b \in (a_0, b_0)$, а функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a_0, b_0), то по формуле Ньютона–Лейбница находим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{17}$$

где $\Phi'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a_0, b_0)$.

Функция $\Phi(\varphi(t))$ является первообразной для функции, стоящей под знаком интеграла в правой части формулы (16), так как

$$\frac{d}{dt}(\Phi(\varphi(t)) = \Phi'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Применяя к функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ формулу Ньютона–Лейбница и учитывая, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, получаем

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{18}$$

Из равенств (17) и (18) следует формула (16). ●

в) *Интегрирование по частям.*

Теорема 6. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные, то справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b uv'\,dx = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx. \tag{23}$$

○ Интегрируя на отрезке $[a, b]$ тождество

$$uv' = (uv)' - u'v,$$

где uv', $(uv)'$, $u'v$ — непрерывные функции, получаем

$$\int_a^b uv'\,dx = \int_a^b (uv)'\,dx - \int_a^b vu'\,dx. \tag{24}$$

По формуле Ньютона–Лейбница находим

$$\int_a^b (uv)'\,dx = (uv)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Поэтому равенство (24) можно записать в виде (23). ●

3. Простейшие дифференциальные уравнения.

а) *Дифференциальные уравнения первого порядка.* Задачу о нахождении первообразной для непрерывной на интервале (a, b) функции $f(x)$ можно сформулировать так: найти функцию $y(x)$, которая на интервале (a, b) является решением уравнения

$$y'(x) = f(x). \tag{25}$$

Уравнение такого вида является *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка.* Все решения уравнения (25) можно записать в виде

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C, \tag{26}$$

где $x_0 \in (a, b)$, C — произвольная постоянная.

Чтобы выделить единственное решение уравнения (25), достаточно задать значение функции $y(x)$ в какой-либо точке, например в точке x_0. Если $y(x_0) = y_0$, то из формулы (26) получаем

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

В приложениях часто встречаются дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие вид

$$y'(x) = ky(x), \tag{27}$$

где k — постоянная.

Решениями уравнения (27) являются функции $y = Ce^{kx}$, где C — произвольная постоянная. Можно показать, что других решений уравнение (27) не имеет. Если известно, что $y(x_0) = y_0$, то $C = y_0$, и поэтому

$$y = y_0 e^{k(x-x_0)}.$$

б) *Дифференциальные уравнения второго порядка.* Рассмотрим уравнение

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0, \tag{28}$$

где ω — некоторое положительное число. Уравнение (28) называют *уравнением гармонических колебаний.*

Легко проверить, что функции $\cos\omega x$ и $\sin\omega x$ являются решениями уравнения (28). Отсюда следует, что функции вида

$$y = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x, \tag{29}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяют уравнению (28). Если известно значение функции $y(x)$ и значение ее производной при $x = x_0$ (начальные условия), т. е. заданы числа $y_0 = y(x_0)$ и $\widetilde{y}_0 = y'(x_0)$, то этими условиями определяется единственное решение уравнения (28).

Приложения определенного интеграла

1. Вычисление площади плоской фигуры.

а) *Плоская фигура и ее площадь.* Произвольное ограниченное множество точек плоскости будем называть *плоской фигурой*. Если плоскую фигуру можно представить как объединение конечного числа непересекающихся прямоугольников, то такую фигуру назовем *клеточной*. Под *прямоугольником* будем понимать множество точек вида $K = \{(x, y)\colon\ a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$ или множество, получаемое из K удалением части границы (или всей границы) множества K.

Площадью прямоугольника K назовем число $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ независимо от того, принадлежат или не принадлежат множеству K его граничные точки, а *площадью клеточной фигуры* назовем сумму площадей прямоугольников, из которых составлена эта фигура.

Плоскую фигуру G назовем *квадрируемой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные фигуры q и Q такие, что

$$q \subset G \subset Q, \tag{1}$$

$$0 \leqslant S(Q) - S(q) < \varepsilon, \tag{2}$$

где $S(Q)$, $S(q)$ — площади фигур Q и q соответственно.

Пусть плоская фигура G квадрируема. Тогда *площадью* этой *фигуры* назовем число $S(G)$ такое, что

$$S(q) \leqslant S(G) \leqslant S(Q) \tag{3}$$

для любых клеточных фигур q и Q, удовлетворяющих условию (1).

Теорема 1. *Для любой квадрируемой фигуры G число $S(G)$ существует и единственно, причем*

$$S(G) = \sup S(q) = \inf S(Q). \tag{4}$$

б) *Площадь криволинейной трапеции.* Одной из основных задач, приводящих к понятию определенного интеграла, является задача о площади криволинейной трапеции, т. е. фигуры G, задаваемой на плоскости Oxy условиями

$$G = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}, \tag{12}$$

где $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Утверждение 1. *Криволинейная трапеция G — квадрируемая фигура, площадь которой $S = S(G)$ выражается формулой*

$$S = \int\limits_a^b f(x)\, dx. \tag{13}$$

○ Пусть $T = \{x_i,\ i = \overline{0, n}\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, M_i и m_i — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$

Рассмотрим клеточную фигуру q, составленную из прямоугольников q_i $(i = \overline{1, n})$, таких, что длина основания i-го прямоугольника равна Δx_i, а высота равна m_i.

Аналогично определяется клеточная фигура Q, составленная из фигур Q_i, где Q_i — прямоугольник, длина основания которого Δx_i, а высота M_i, $i = \overline{1, n}$.

Очевидно, $q \subset G \subset Q$, площади фигур q и Q соответственно равны

$$S(q) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad S(Q) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Заметим, что

$$S(q) = s_T, \quad S(Q) = S_T, \tag{14}$$

где s_T и S_T — соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции f при разбиении T отрезка $[a, b]$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в силу критерия интегрируемости для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение T этого отрезка, что

$$0 \leqslant S_T - s_T < \varepsilon.$$

Иными словами (см. равенства (14)), существуют клеточные фигуры q и Q такие, что

$$q \subset G \subset Q, \quad 0 \leqslant S(Q) - S(q) < \varepsilon,$$

т. е. выполняются условия (1), (2). Это означает, что G — квадрируемая фигура и согласно теореме 1 справедливо равенство (4), которое в силу равенств (14) можно записать в виде

$$S(G) = \sup s_T = \inf S_T. \tag{15}$$

или

$$\sup s_T = \inf S_T = \int\limits_q^b f(x)\, dx. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что площадь $S = S(G)$ криволинейной трапеции G выражается формулой (13). ●

Рассмотрим теперь фигуру D (рис. 37.1), ограниченную отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a, b]$

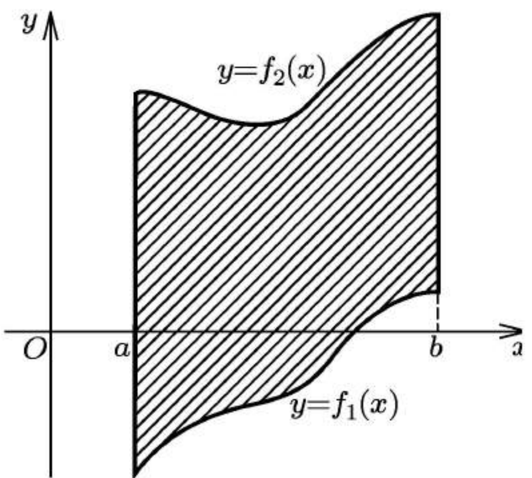

Рис. 37.1

функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при $x \in [a, b]$. Если $f_1(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$, то площадь фигуры D равна разности площадей криволинейных трапеций D_2 и D_1, где $D_i = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f_i(x)\}$, $i = 1, 2$. Поэтому площадь S_D фигуры D выражается формулой

$$S_D = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx. \tag{17}$$

Формула (17) остается в силе и в случае, когда не выполняется условие $f_1(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$.

в) *Площадь криволинейного сектора.*
Пусть кривая Γ задана в полярной системе координат уравнением

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,$$

где $\rho(\varphi)$ — неотрицательная и непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция. Тогда плоскую фигуру G, ограниченную кривой Γ и, быть может, отрезками двух лучей, составляющих с полярной осью углы α и β (рис. 37.4), назовем *криволинейным сектором.*

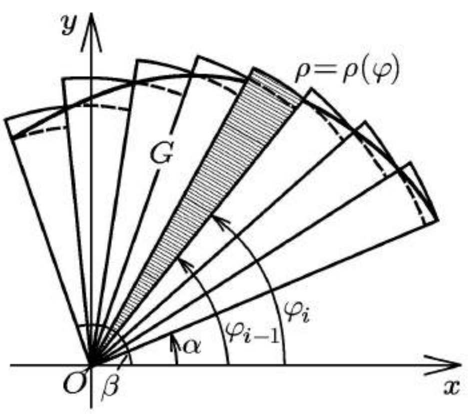

Рис. 37.4

Утверждение 2. *Криволинейный сектор G — квадрируемая фигура, площадь которой S выражается формулой*

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{18}$$

○ Пусть $T = \{\varphi_i,\ i = \overline{0, n}\}$ — разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$, m_i и M_i — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $\rho(\varphi)$ на отрезке $\Delta_i = [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим через q_i и Q_i круговые секторы, ограниченные лучами $\varphi = \varphi_{i-1}$, $\varphi = \varphi_i$ и дугами окружностей радиусов m_i и M_i соответственно (рис. 37.4). Если q — объединение фигур $q_1, \ldots, q_n$, а Q — объединение фигур $Q_1, \ldots, Q_n$, то $q \subset G \subset Q$.

Так как q_i и Q_i — квадрируемые фигуры, то q и Q также являются квадрируемыми фигурами, а их площади соответственно равны

$$S(q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2\, \Delta\varphi_i \quad \text{и} \quad S(Q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2\, \Delta\varphi_i.$$

Отсюда следует, что $S(q)$ и $S(Q)$ совпадают соответственно с нижней и верхней суммами Дарбу для функции $\dfrac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Поэтому

$$\sup S(q) = \inf S(Q) = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Это означает, что G — квадрируемая фигура, а ее площадь S выражается формулой (18). ●

2. Вычисление объема тела.

а) *Тело и его объем.* Произвольное ограниченное множество точек пространства будем называть *телом.*

По аналогии с понятием клеточной фигуры назовем тело *клеточным*, если его можно представить как объединение конечного числа непересекающихся *параллелепипедов*, т. е. тел вида

$$M = \{(x, y, z)\colon\ a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2,\ a_3 \leqslant z \leqslant b_3\},$$

а также тел, получаемых из M удалением части границы (или всей границы) тела M. *Объемом параллелепипеда* M назовем число $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$, а *объемом клеточного тела* — сумму объемов составляющих его параллелепипедов.

Тело Ω будем называть *кубируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные тела p и P такие, что

$$p \subset \Omega \subset P, \quad 0 \leqslant V(P) - V(p) < \varepsilon,$$

где $V(P)$ и $V(p)$ — объемы тел P и p соответственно. Как и в п. 1, легко показать, что если тело Ω кубируемо, то существует единственное число $V(\Omega)$ такое, что неравенство

$$V(p) \leqslant V(\Omega) \leqslant V(P)$$

выполняется для любых клеточных тел p, P, удовлетворяющих условию $p \subset \Omega \subset P$; при этом

$$V(\Omega) = \sup V(p) = \inf V(P).$$

Это число $V(\Omega)$ называют *объемом тела* V. Рассмотрим некоторые классы кубируемых (имеющих объем) тел.

б) *Цилиндрическое тело и его объем.*

Утверждение 3. *Если основанием цилиндрического тела Ω служит плоская квадрируемая фигура G, то тело Ω кубируемо, а его объем $V(\Omega)$ равен $S(G)h$, где $S(G)$ — площадь основания, h — высота тела Ω. В частности, объем прямого кругового цилиндра равен $V = \pi R^2 h$, где R — радиус основания, h — высота цилиндра.*

○ По определению плоской квадрируемой фигуры для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие клеточные фигуры q и Q, что

$$q \subset G \subset Q, \quad 0 \leqslant S(Q) - S(q) < \frac{\varepsilon}{h}.$$

Рассмотрим цилиндрические тела Ω_1 и Ω_2, основаниями которых служат соответственно фигуры q и Q, а высота каждого из этих тел равна h. Тела Ω_1 и Ω_2 являются клеточными, а их объемы соответственно равны

$$V(\Omega_1) = S(q)h \quad \text{и} \quad V(\Omega_2) = S(Q)h.$$

Так как $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$, $0 \leqslant V(\Omega_2) - V(\Omega_1) < \varepsilon$, то Ω — кубируемое тело, а его объем равен $S(G)h$. ●

в) *Объем тела вращения.*

Утверждение 4. *Тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции G (условие (12)), где $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, кубируемо, а его объем V выражается формулой*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{19}$$

○ Пусть T, m_i, M_i, Δx_i, q, Q — те же, что и в п. 1,б). При вращении вокруг оси Ox фигур q, G, Q получаются тела вращения p, Ω, P такие, что

$$p \subset \Omega \subset P,$$

причем объемы ступенчатых тел p и P соответственно равны

$$V(p) = \pi \sum_{i=1}^{n} m_i^2\, \Delta x_i, \quad V(P) = \pi \sum_{i=1}^{n} M_i^2\, \Delta x_i.$$

Так как $V(p)$ и $V(P)$ равны соответственно нижней и верхней суммам Дарбу для функции $\pi f^2(x)$ при разбиении T отрезка $[a, b]$, то согласно следствию из теоремы

$$\sup V(p) = \inf V(P) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Следовательно, Ω — кубируемое тело (по теореме, аналогичной теореме 2), а его объем выражается формулой (19). ●

г) *Объем тела с заданными площадями поперечных сечений.* Пусть тело Ω заключено между плоскостями, перпендикулярными оси Ox и пересекающими эту ось в точках $x = a$ и $x = b$, где $a < b$ (рис. 37.7).

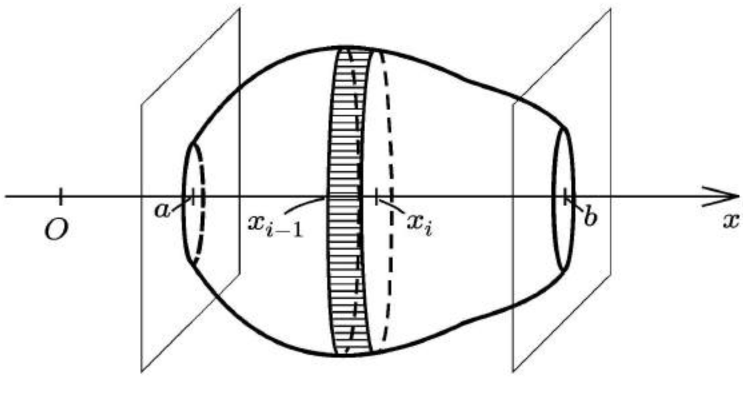

Рис. 37.7

Обозначим через G_x фигуру, получаемую в сечении тела Ω плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $x \in [a, b]$ этой оси. Будем считать, что при любом $x \in [a, b]$ фигура G_x квадрируема, а ее площадь $\sigma(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Кроме того, предположим, что при проектировании на плоскость, перпендикулярную оси Ox, фигур G_α и G_β, где α, β — любые точки отрезка $[a, b]$, получаются фигуры, одна из которых содержится в другой.

Утверждение 5. *При указанных выше условиях тело Ω кубируемо, а его объем V выражается формулой*

$$V = \int_a^b \sigma(x)\, dx. \tag{20}$$

3. Вычисление длины дуги кривой.

Утверждение 6. *Если кривая* Γ, *заданная уравнением*

$$\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \tag{22}$$

непрерывно дифференцируема, то ее длина S *выражается формулой*

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)|\, dt. \tag{23}$$

○ Ранее нами было доказано, что непрерывно дифференцируемая кривая Γ спрямляема (имеет длину), а производная переменной длины дуги $s(t)$ этой кривой выражается формулой

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|. \tag{24}$$

Пусть S — длина всей кривой Γ; тогда, используя равенство (24) и формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} s'(t)\, dt = s(\beta) - s(\alpha) = S,$$

так как $s(\beta) = S$, а $s(\alpha) = 0$. ●

Если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то формула (23) принимает вид

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt, \tag{25}$$

а если Γ — плоская кривая, заданная уравнением

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

то ее длина выражается формулой

$$S = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{26}$$

4. Вычисление площади поверхности вращения. Пусть $f(x)$ — неотрицательная и непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, $T = \{x_i,\ i = \overline{0, n}\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, L_T — ломаная с вершинами $A_i(x_i, f(x_i))$, $i = \overline{0, n}$, соединяющая последовательно точки $A_0, A_1, ..., A_n$ (рис. 37.8), l_i — длина отрезка $\mathscr{L}_i = [A_{i-1}, A_i]$ — i-го звена ломаной L_T. Тогда

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \tag{27}$$

При вращении вокруг оси Ox звена $\mathscr{L}_i$ образуется боковая поверхность усеченного конуса (цилиндра в случае, когда $f(x_i) = f(x_{i-1})$). Площадь этой поверхности, как известно из курса элементарной геометрии, равна

$$p_i = \pi(y_{i-1} + y_i) l_i, \quad y_k = f(x_k), \quad k = \overline{1, n},$$

откуда следует, что площадь $\mathscr{P}_T$ поверхности, получаемой при вращении ломаной L_T вокруг оси Ox, равна

$$\mathscr{P}_T = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) l_i. \tag{28}$$

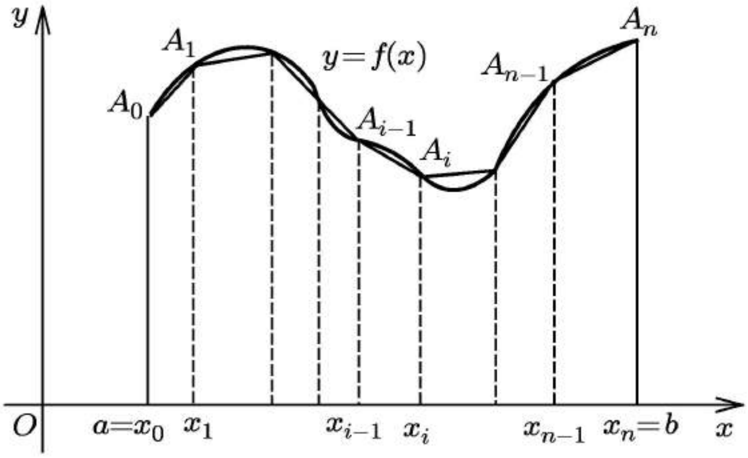

Рис. 37.8

Если существует

$$\lim_{l(T)\to 0} \mathscr{P}_T = \mathscr{P}, \qquad (29)$$

где $l(T)$ — мелкость разбиения T, а $\mathscr{P}_T$ определяется формулой (28), то число $\mathscr{P}$ называют *площадью поверхности вращения*, т. е. площадью поверхности, образующейся при вращении вокруг оси Ox графика функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Утверждение 7. *Если функция f имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$, то предел (29) существует, а площадь $\mathscr{P}$ поверхности вращения выражается формулой*

$$\mathscr{P} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (30)$$