# Лекция 4

## Производная и дифференциал

### 1. Определение производной.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$, и пусть существует конечный предел отношения $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Тогда этот предел называется *производной функции $f$ в точке $x_0$* и обозначается $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$ или $y'(x_0)$, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Согласно определению производная функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ есть предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента $\Delta x$ при условии, что $\Delta x \to 0$, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{4}$$

Из равенства (4) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x),$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, откуда получаем

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x\, \varepsilon(\Delta x). \tag{5}$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$, и поэтому из существования $f'(x_0)$ следует непрерывность функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Операция вычисления производной называется *дифференцированием.*

Теорема 1. *Функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки $x_0$ эта функция представима в виде*

$$f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0), \tag{12}$$

*где $f_1(x)$ — функция, непрерывная в точке $x_0$ и такая, что*

$$f_1(x_0) = f'(x_0). \tag{13}$$

○ Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{14}$$

Она определена в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$. Если существует $f'(x)$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x_0) = f'(x_0)$. Полагая $f_1(x_0) = f'(x_0)$, доопределим функцию $f_1(x)$ по непрерывности в точке $x_0$. Функция $f_1(x)$, определяемая формулой (14) и условием (13), непрерывна в точке $x_0$, а из равенства (14) следует формула (12).

Обратно: из (12) следует (14), а из непрерывности функции $f_1(x)$ в точке $x_0$ следует, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$, т. е. существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ и справедливо равенство (13). ●

**2. Геометрический смысл производной.** Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0$, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то существует предельное положение секущей $l$ (см. рис. 14.1), заданной уравнением (1).

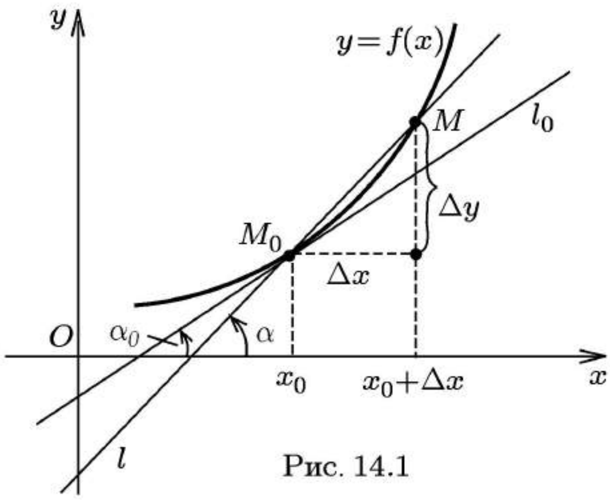


Рис. 14.1

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0), \tag{1}$$

где

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_0, \tag{2}$$

Это означает, что в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ существует касательная $l_0$ (см. рис. 14.1) к графику функции $y = f(x)$, причем согласно формуле (2) $k_0 = f'(x_0)$, где $k_0$ — угловой коэффициент прямой $l_0$. Так как $k_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$, где $\alpha_0$ — угол, образуемый касательной с положительным направлением оси абсцисс, то

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0. \tag{15}$$

Таким образом, геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, получаемое из уравнения (1) заменой $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ на $f'(x_0)$, имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{16}$$

Пусть существует $f'(x_0)$. Проведем через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ прямую $m_0$, перпендикулярную касательной $l_0$ (рис. 14.3). Эту прямую называют *нормалью к графику функции* $y = f(x)$ в точке $M_0$.

Если $A$, $C$, $B$ — точки пересечения с осью $Ox$ соответственно касательной $l_0$, нормали $m_0$ и прямой, проходящей через $M_0$ параллельно оси $Oy$, то отрезок $AB$ называют *подкасательной*, а отрезок $BC$ — *поднормалью*.

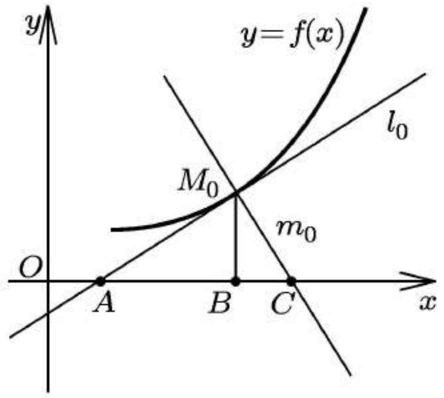


Рис. 14.3

**3. Односторонние и бесконечные производные.** По аналогии с односторонними пределами вводятся понятия левой и правой производных. Если функция $y = f(x)$ непрерывна слева в точке $x_0$ и существует предел

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{где} \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

то этот предел называют *левой производной функции $f$ в точке* $x_0$ и обозначают $f'_-(x_0)$. Аналогично, если функция $y = f(x)$ непрерывна справа в точке $x_0$, то предел $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ называют *правой производной функции $f$ в точке* $x_0$ и обозначают $f'_+(x_0)$.

Прямые, проходящие через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ с угловыми коэффициентами $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, называют соответственно *левой* и *правой касательными к графику функции* $y = f(x)$ в точке $M_0$.

Из существования производной $f'(x_0)$ следует существование $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ и равенство

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0). \tag{17}$$

В этом случае левая и правая касательные к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0$ совпадают с касательной в точке $M_0$.

Обратно: если существуют левая и правая производные функции $f$ в точке $x_0$ и выполняется условие $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, то существует $f'(x_0)$ и справедливо равенство (17).

Обратимся теперь к понятию бесконечной производной. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, и пусть

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty. \tag{18}$$

Тогда прямую $x = x_0$ называют *касательной к графику функции* $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Эту прямую можно рассматривать как предельное положение (при $\Delta x \to 0$) секущей $l$, если уравнение (1) записать в виде

$$x - x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta y}(y - y_0)$$

и воспользоваться тем, что $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу условия (18).

Если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$, то говорят, что *функция имеет в точке* $x_0$ *производную, равную* $+\infty$, и пишут $f'(x_0)=+\infty$. В этом случае односторонние пределы $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ называют соответственно *левой* и *правой производной* функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ и обозначают $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$. Таким образом, если $f'(x_0)=+\infty$, то $f'_-(x_0)=+\infty$ и $f'_+(x_0)=+\infty$.

Аналогично, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$, то говорят, что *функция* $y=f(x)$ *имеет в точке* $x_0$ *производную, равную* $-\infty$, и пишут $f'(x_0)=-\infty$.

В случае когда $f'(x_0)=+\infty$ или $f'(x_0)=-\infty$, говорят, что *функция* $y=f(x)$ *имеет в точке* $x_0$ *бесконечную производную* (иногда добавляют: *определенного знака*).

Обратимся теперь к случаю, когда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, но не выполняется ни одно из условий $f'(x_0)=+\infty$ или $f'(x_0)=-\infty$. В этом случае говорят, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не является бесконечностью определенного знака. Например, эта ситуация имеет место, если $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$ $=+\infty$, а $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$. Этим свойством обладает функция $y=\sqrt{|x|}$ (рис 14.6) в точке $x_0=0$, так как $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=+\infty$, а $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=-\infty$.

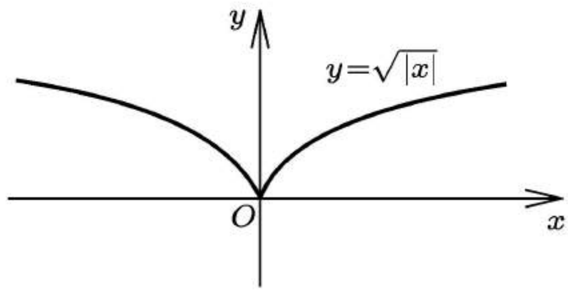


Рис. 14.6

### 4. Дифференциал функции.

Определение 2. Если функция $y=f(x)$ определена в $\delta$-окрестности точки $x_0$, а приращение $\Delta y$ функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ представимо в виде

$$\Delta y = A\,\Delta x + \Delta x\,\varepsilon(\Delta x), \tag{19}$$

где $A=A(x_0)$ не зависит от $\Delta x$, а $\varepsilon(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, то функция $f$ называется *дифференцируемой в точке* $x_0$, а произведение $A\,\Delta x$ называется ее *дифференциалом в точке* $x_0$ и обозначается $df(x_0)$ или $dy$.

Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x\to 0, \tag{20}$$

где

$$dy = A\,\Delta x. \tag{21}$$

Отметим, что приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ можно рассматривать только для таких $\Delta x$, при которых точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции $f$, в то время как дифференциал $dy$ определен при любых $\Delta x$.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке $x_0$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела производную в точке $x_0$. При этом дифференциал и производная связаны равенством*

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{22}$$

○ Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, то выполняется условие (19), и поэтому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ $(\Delta x \neq 0)$, откуда следует, что существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A$, т. е. существует $f'(x_0) = A$.

Обратно: если существует $f'(x_0)$, то справедливо равенство (5), и поэтому выполняется условие (19). Это означает, что функция $f$ дифференцируема в точке $x = x_0$, причем коэффициент $A$ в формулах (19) и (21) равен $f'(x_0)$, и поэтому дифференциал записывается в виде (22). ●

Таким образом, существование производной функции в данной точке равносильно дифференцируемости функции в этой точке. Функцию, имеющую производную в каждой точке интервала $(a, b)$, называют *дифференцируемой на интервале* $(a, b)$.

Если функция $f$ дифференцируема на интервале $(a, b)$ и, кроме того, существуют $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$, то функцию $f$ называют *дифференцируемой на отрезке* $[a, b]$.

**5. Геометрический смысл дифференциала.**

Выясним геометрический смысл дифференциала.
Если функция $y = f(x)$ диффе руема при $x = x_0$, то существует касательная $l_0$ (рис 14.7) к графику этой функции в $M_0(x_0, f(x_0))$, задаваемая уравнением (16).
$M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ — точка графика функции $f$ с абсциссой $x_0 + \Delta x$, $E$ и $F$ — точки пересечения прямой $x = x_0 + \Delta x$ с касательной $l_0$ и прямой $y = y_0 = f(x_0)$ соответственно. Тогда $F(x_0 + \Delta x, y_0)$, $E(x_0 + \Delta x, y_0 + f'(x_0)\Delta x)$, так как ордината точки $E$ равна значению $y$ в уравнении (16) при $x = x_0 + \Delta x$. Разность ординат точек $E$ и $F$ равна $f'(x_0)\Delta x$, т. е. равна дифференциалу $dy$ функции $f$ при $x = x_0$.

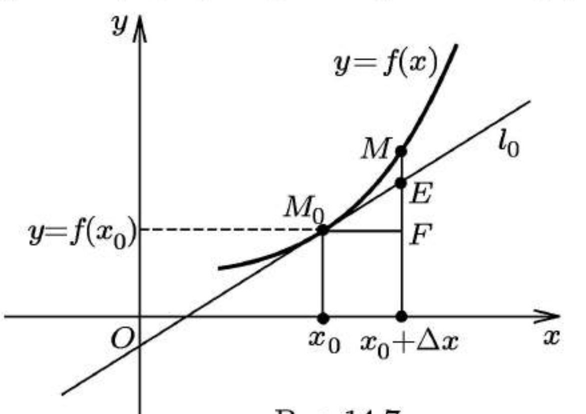


Рис. 14.7

## Правила дифференцирования

### 1. Дифференцирование суммы, произведения, частного и обратной функции.

Теорема 1. *Если функции $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x$, то в этой точке дифференцируемы функции $f+g$, $fg$, $\frac{f}{g}$ (при условии, что $g(x) \neq 0$), и при этом*

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), \tag{1}$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x), \tag{2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0. \tag{3}$$

○ Обозначим $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ и $\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$. Тогда $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x)$, $\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x)$ при $\Delta x \to 0$, так как существуют $f'(x)$ и $g'(x)$. Кроме того, $f(x+\Delta x) = f(x)+\Delta f$, $g(x+\Delta x) = g(x)+\Delta g$, где $\Delta f \to 0$, $\Delta g \to 0$, так как функции $f$ и $g$ непрерывны в точке $x$.

а) Если $y = f(x)+g(x)$, то

$$\Delta y = f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x) = \Delta f + \Delta g,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Правая часть этой формулы имеет при $\Delta x \to 0$ предел, равный $f'(x)+g'(x)$. Поэтому существует предел левой части, который по определению равен $(f(x)+g(x))'$. Формула (1) доказана.

б) Если $y = f(x)g(x)$, то

$$\Delta y = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) =$$
$$= (f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g) - f(x)g(x) = f(x)\Delta g + g(x)\Delta f + \Delta f \Delta g,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g.$$

Отсюда следует формула (2), так как $\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x)$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x)$, $\Delta g \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

в) Если $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, то $\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)}$, или $\Delta y = \frac{\Delta f\, g(x) - \Delta g\, f(x)}{g(x)g(x+\Delta x)}$, откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\, g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x}\, f(x)\right)\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}.$$

Переходя к пределу в этом равенстве и учитывая, что $g(x+\Delta x) \to$ $\to g(x)$ при $\Delta x \to 0$, где $g(x) \neq 0$, получаем формулу (3). ●

С л е д с т в и е 1. *Если функция $f$ дифференцируема в точке $x$ и $C$ — постоянная, то*

$$(Cf(x))' = Cf'(x),$$

*т. е. постоянный множитель можно выносить из-под знака дифференцирования.*

С л е д с т в и е 2. *Если функции $f_k$ $(k = \overline{1,n})$ дифференцируемы в точке $x$ и $C_k$ $(k = \overline{1,n})$ — постоянные, то*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} C_k f_k'(x),$$

*т. е. производная линейной комбинации дифференцируемых функций равна такой же линейной комбинации производных данных функций.*

Например, если $y = 2e^x - 3x^2 + 4\cos x$, то $y' = 2e^x - 6x - 4\sin x$.

Т е о р е м а 2. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает (убывает) на отрезке $\Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, и если существует $f'(x_0) \neq 0$, то функция $x = \varphi(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (6)$$

○ Пусть функция $f$ строго возрастает на отрезке $\Delta$. Обозначим $\alpha = f(x_0 - \delta)$, $\beta = f(x_0 + \delta)$. По теореме об обратной функции на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена функция $x = \varphi(y)$, обратная к $f$, непрерывная и строго возрастающая, причем $y_0 = f(x_0) \in (\alpha, \beta)$, так как $\alpha = f(x_0 - \delta) < f(x_0) < f(x_0 + \delta) = \beta$.

Пусть $\Delta y$ — приращение независимой переменной $y$ такое, что $y_0 + \Delta y \in (\alpha, \beta)$. Обозначим $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$. Нужно доказать, что существует предел отношения $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ при $\Delta y \to 0$, равный $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Заметим, что если $\Delta y \neq 0$, то $\Delta x \neq 0$, так как в противном случае $\varphi(y_0 + \Delta y) = \varphi(y_0)$ при $\Delta y \neq 0$, т. е. функция $\varphi$ принимает одинаковые значения в двух различных точках, что противоречит свойству строгого возрастания функции $\varphi$. Поэтому при $\Delta y \neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}. \qquad (7)$$

Пусть $\Delta y \to 0$, тогда $\Delta x \to 0$, так как функция $x = \varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0$. Но если $\Delta x \to 0$, то существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Итак, правая часть (7) имеет предел, равный $\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Поэтому и в левой части этого равенства существует предел, который согласно определению равен $\varphi'(y_0)$. Формула (6) доказана. ●

Замечание 2. Заменив в формуле (6) $x_0$ на $y$, а $y_0$ на $x$, запишем эту формулу в виде

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))}. \tag{8}$$

Замечание 3. Теорема 2 допускает наглядную геометрическую и очевидную физическую интерпретацию. Если существует $f'(x_0)$, то в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ существует касательная $l_0$ к графику функции $y = f(x)$, угловой коэффициент которой равен $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, где $\alpha$ — угол, образуемый касательной с положительным направлением оси $Ox$. Касательная не параллельна координатным осям, так как производная $f'(x_0)$ конечна и отлична от нуля. Пусть для определенности $f'(x_0) > 0$, тогда $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис 15.1).

Если рассматривать $y$ как независимое переменное, а $x$ как функцию, то кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, будет графиком функции $x = \varphi(y)$. Пусть $\beta$ — угол, образованный касательной $l_0$ с положительным направлением оси $Oy$ (рис 15.1), тогда $\operatorname{tg}\beta = \varphi'(y_0)$. Так как $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, т. е. $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

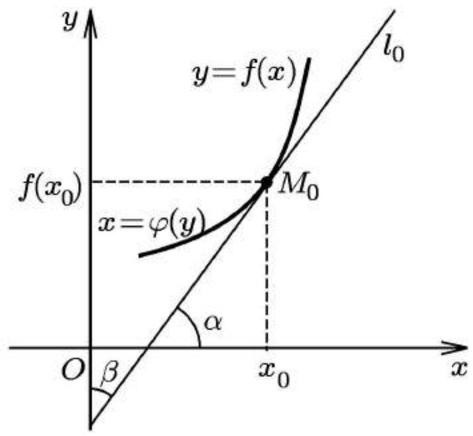

Рис. 15.1

**2. Дифференцирование сложной функции.**

Теорема 3. *Если функции $y = \varphi(x)$ и $z = f(y)$ дифференцируемы соответственно в точках $x_0$ и $y_0$, где $y_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $z = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке $x_0$, причем*

$$z'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \tag{13}$$

○ Сложная функция $z(x)$ непрерывна в точке $x_0$, так как из дифференцируемости функций $f$ и $\varphi$ следует непрерывность этих функций соответственно в точках $y_0$ и $x_0$. Поэтому функция $z(x)$ определена в $U_\delta(x_0)$ при некотором $\delta > 0$.

Из дифференцируемости функции $f$ в точке $y_0$ по теореме 1 следует, что существует $\delta > 0$ такое, что для всех $y \in U_\delta(y_0)$

$$f(y) = f(y_0) + f_1(y)(y - y_0), \tag{14}$$

где $f_1(y)$ — непрерывная в точке $y_0$ функция такая, что

$$f_1(y_0) = f'(y_0). \tag{15}$$

Так как функция $\varphi$ непрерывна в точке $x_0$, то

$$\exists \delta_1 = \delta_1(\delta) > 0\colon \quad \forall\, x \in U_{\delta_1}(x_0) \to \varphi(x) \in U_\delta(y_0).$$

Поэтому, подставляя в равенство (14) $\varphi(x)$ вместо $y$, получим равенство

$$z = f(\varphi(x)) = f(y_0) + f_1(\varphi(x))(\varphi(x) - \varphi(x_0)), \qquad (16)$$

справедливое для всех $x \in U_{\delta_1}(x_0)$. Но

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi_1(x)(x - x_0), \qquad (17)$$

где $\varphi_1$ — непрерывная в точке $x_0$ функция такая, что

$$\varphi_1(x_0) = \varphi'(x_0). \qquad (18)$$

Из (16) и (17) следует, что

$$z(x) = z(x_0) + f_1(\varphi(x))\varphi_1(x)(x - x_0), \qquad (19)$$

где $z_1 = f_1(\varphi(x))\varphi_1(x)$ — непрерывная в точке $x_0$ и такая, что

$$z_1(x_0) = f_1(\varphi(x_0))\varphi_1(x_0) = f_1(y_0)\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0) \qquad (20)$$

в силу (15) и (18).

По теореме 1 из (19) и (20) следует, что существует $z'(x_0)$ и справедливо равенство (13). ●

Следствие. *Дифференциал функции $y = f(x)$ имеет один и тот же вид*

$$dy = f'(x)dx \qquad (21)$$

*как в случае, когда $x$ — независимое переменное, так и в случае, когда $x$ — дифференцируемая функция какого-либо другого переменного.*

○ Пусть $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция переменного $t$, тогда $y = f(\varphi(t)) = z(t)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$z'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t),$$

откуда по определению дифференциала

$$dy = z'(t)dt = f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Так как $\varphi'(t)dt = dx$, то $dy = f'(\varphi(t))d\varphi(t) = f'(x)dx$, т. е. формула (21) остается справедливой при замене $x$ на $\varphi(t)$. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала.* ●

Замечание 4. Правило дифференцирования сложной функции $f(\varphi(x))$ обычно записывается в виде

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Опуская аргумент и используя обозначение производной, указанное в § 14, правило дифференцирования сложной функции $z = f(y) = f(\varphi(x))$ можно записать так:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad z'_x = z'_y y'_x.$$

Правило вычисления производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций. Например, если функции $x(t)$, $y(x)$, $z(y)$ дифференцируемы соответственно в точках $t_0$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(x_0)$, то в точке $t_0$ сложная функция $z = z(y) = z(y(x)) = z(y(x(t)))$ дифференцируема и имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

**3. Дифференцирование параметрически заданных и неявных функций.**

а) *Функции, заданные параметрически.* Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ определены на отрезке $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, причем функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна (например, строго возрастает). Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $\alpha = x(t_0-\delta)$, $\beta = x(t_0+\delta)$, определена функция $t=t(x)$, обратная к функции $x=x(t)$, непрерывная и строго возрастающая.

Предположим дополнительно, что существуют $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$, причем $x'(t_0)\neq 0$ (для сокращения записи вместо $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$ будем писать соответственно $x'_t$, $y'_t$).

Тогда сложная функция $y=y(t)=y(t(x))$ дифференцируема по $x$ в точке $x_0=x(t_0)$, причем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{29}$$

○ Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции $y=y(t(x))$ получаем

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = y'_t t'_x,$$

где $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$ согласно правилу дифференцирования обратной функции.

Итак, справедлива формула (29). ●

б) *Функции, заданные неявно.* Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$ (§ 9), то, дифференцируя тождество $F(x, f(x))\equiv 0$ как сложную функцию, можно найти $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

П р и м е р 11. Написать уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{30}$$

в некоторой его точке $M_0(x_0, y_0)$, где $|x_0| < a$.

△ Точка $M_0$ однозначно определяет на интервале $(-a, a)$ одну из двух неявных дифференцируемых функций, которые задаются уравнением (30). Обозначим эту функцию $f(x)$. Ее можно записать в явном виде, разрешив уравнение (30) относительно $y$.

Дифференцируя тождество (30), в котором $y=f(x)$, получаем

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0. \tag{31}$$

Подставляя в уравнение (31) вместо $x$ и $y$ соответственно $x_0$ и $y_0$, находим угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке $M_0$:

$$k = y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = k(x-x_0), \quad \text{или} \quad y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0).$$