Лекция 6

Формула Тейлора

1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную n-го порядка, то существует многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что*

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Этот многочлен представляется в виде

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{2}$$

○ Пусть $\varphi(x) = (x-x_0)^m$, где $m \in N$. Тогда $\varphi(x_0) = 0$,

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq m, \\ k!, & \text{если} \quad k = m. \end{cases} \tag{3}$$

Из (3) следует, что многочлен $P_n(x)$, заданный формулой (2), удовлетворяет условиям (1). Этот многочлен называют *многочленом Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в точке x_0*. ●

Лемма 2. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены в δ-окрестности точки x_0 и удовлетворяют следующим условиям:*

1) *для каждого $x \in U_\delta(x_0)$ существуют $\varphi^{(n+1)}(x)$ и $\psi^{(n+1)}(x)$;*

$$\begin{aligned} &2)\ \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0, \\ &\quad\ \psi(x_0) = \psi'(x_0) = \ldots = \psi^{(n)}(x_0) = 0; \end{aligned} \tag{4}$$

3) $\psi(x) \neq 0$, $\psi^{(k)}(x) \neq 0$ *для $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ и для $k = \overline{1, n+1}$.*

Тогда для каждого $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ существует точка ξ, принадлежащая интервалу с концами x_0 и x такая, что

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}. \tag{5}$$

○ Пусть, например, $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Тогда, применяя к функциям φ и ψ на отрезке $[x_0, x]$ теорему Коши (§ 17) и учитывая, что $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0$ в силу условий (4), получаем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}, \quad x_0 < \xi_1 < x. \tag{6}$$

Аналогично, применяя к функциям φ' и ψ' на отрезке $[x_0, \xi_1]$ теорему Коши, находим

$$\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(\xi_1) - \psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}, \quad x_0 < \xi_2 < \xi_1. \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует, что

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}, \quad x_0 < \xi_2 < \xi_1 < x < x_0 + \delta.$$

Применяя теорему Коши последовательно к функциям φ'' и ψ'', $\varphi^{(3)}$ и $\psi^{(3)}$, ..., $\varphi^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$ на соответствующих отрезках, получаем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = ... = \frac{\varphi^{(n)}(\xi_n)}{\psi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)},$$

где $x_0 < \xi < \xi_n < ... < \xi_1 < x < x_0 + \delta$.

Равенство (5) доказано для случая, когда $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Аналогично рассматривается случай, когда $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. ●

Теорема 1. *Пусть существует $\delta > 0$ такое, что функция $f(x)$ имеет в δ-окрестности точки x_0 производные до $(n+1)$-го порядка включительно.*

Тогда для любого $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ найдется точка ξ, принадлежащая интервалу Δ с концами x_0 и x, такая, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \quad (8)$$

○ Пусть $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$, $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ — многочлен Тейлора для функции $f(x)$. Обозначим

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x). \quad (9)$$

Так как многочлен $P_n(x)$ удовлетворяет в силу леммы 1 условиям (1), то из равенства (9) следует, что

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = ... = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим функции $\varphi(x) = r_n(x)$, $\psi(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Эти функции удовлетворяют условиям леммы 2, и поэтому для них выполняется равенство (5), т. е.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in \Delta, \quad (11)$$

так как $P_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$, $\psi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. Из равенств (11) и (9) следует формула (8). ●

Замечание 2. Функцию $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ называют *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа.* Формула (8) справедлива и при $x = x_0$.

2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема 2. *Если существует $f^{(n)}(x_0)$, то*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0. \qquad (13)$$

○ Из существования $f^{(n)}(x_0)$ следует, что функция $f(x)$ определена и имеет производные до $(n-1)$-го порядка включительно в δ-окрестности точки x_0. Обозначим $\varphi(x)=r_n(x)$, $\psi(x)=(x-x_0)^n$, где функция $r_n(x)$ определяется формулой (9). Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 2, если заменить номер $n+1$ на номер $n-1$ (см. равенства (10)). Используя лемму 2 и учитывая, что $r_n^{(n-1)}(x_0)=0$, получаем

$$\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{r_n^{(n-1)}(\xi)-r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi-x_0)}, \qquad (14)$$

где $\xi=\xi(x)$ и

$$x_0<\xi<x<x_0+\delta \quad \text{или} \quad x_0-\delta<x<\xi<x_0. \qquad (15)$$

Пусть $x\to x_0$, тогда из неравенств (15) следует, что $\xi\to x_0$, и в силу существования $f^{(n)}(x_0)$ существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{r_n^{(n-1)}(x)-r_n^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{r_n^{(n-1)}(\xi)-r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi-x_0}=r_n^{(n)}(x_0)=0$, так как выполняются равенства (10). Таким образом, правая часть формулы (14) имеет при $x\to x_0$ предел, равный нулю, а поэтому существует предел левой части этой формулы, также равный нулю. Это означает, что $r_n(x)=$ $=o((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$, или $f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)$, откуда следует равенство (13). ●

Замечание 3. Формулу (13) часто называют *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано* или локальной формулой Тейлора.

Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^n)$ — значит представить ее в виде (13).

Теорема 3. *Если существует $f^{(n)}(x_0)$ и если при $x\to x_0$*

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \qquad (16)$$

то

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k=\overline{0,n}. \qquad (17)$$

○ По теореме 2 справедлива формула (13), и так как по условию выполняется равенство (16), то

$$a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+o((x-x_0)^n). \qquad (18)$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$ в равенстве (18), получаем $a_0 = f(x_0)$. Отбросив в левой и правой частях этого равенства одинаковые слагаемые a_0 и $f(x_0)$ и разделив обе части полученного равенства на $x - x_0$, имеем

$$a_1 + a_2(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}) =$$
$$= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, находим $f'(x_0) = a_1$. Продолжая эти рассуждения, получаем равенства (17). ●

Замечание 4. Теорема 3 означает, что представление в виде (16) функции, имеющей в точке x_0 производную n-го порядка, единственно: коэффициенты разложения (16) выражаются по формулам (17).

3. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Если $x_0 = 0$ и существует $f^{(n)}(0)$, то равенство (13) принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{20}$$

Формулу (20) называют *формулой Маклорена.*

Замечание 5. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(-l, l)$. Если эта функция является четной, то ее производная — нечетная функция, и, наоборот, производная нечетной функции — четная функция. Отсюда следует, что для нечетной функции f выполняются условия $f^{(2k)}(0) = 0$, $k \in N$, а для четной функции f — условия $f^{(2k-1)}(0) = 0$, $k \in N$, так как любая непрерывная нечетная функция принимает при $x = 0$ значение нуль.

Поэтому формулу (20) для бесконечно дифференцируемой четной функции можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0, \tag{21}$$

а для нечетной функции — в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0. \tag{22}$$

В формуле (21) остаточный член записан в виде $o(x^{(2n+1)})$, а не в виде $o(x^{2n})$, так как для четной функции f выполняется условие $f^{(2n+1)}(0) = 0$, и поэтому член многочлена Тейлора, который следует за слагаемым $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}$, равен нулю. Аналогично рассматривается вопрос о записи остаточного члена формулы (22).

а) *Показательная функция.* Если $f(x)=e^x$, то $f(0)=1$ и $f^{(n)}(0)=1$ при любом n. Поэтому формула (20) для функции e^x записывается в виде

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0, \tag{23}$$

или

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

б) *Гиперболические функции.* Так как $f(x) = \operatorname{sh} x$ — нечетная функция, $f^{(2k+1)}(x) = \operatorname{ch} x$, $f^{(2k+1)}(0) = 1$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$, то по формуле (22) получаем

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0, \tag{24}$$

или

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

Аналогично по формуле (21) находим

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0, \tag{25}$$

или

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

в) *Тригонометрические функции.* Функция $f(x) = \sin x$ является нечетной,

$$f^{(2n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(2n+1)\right),$$

откуда

$$f^{(2n+1)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \cos \pi n = (-1)^n.$$

Поэтому по формуле (22) находим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0, \tag{26}$$

или

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

Аналогично, $f(x) = \cos x$ — четная функция, $f^{(2n)}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} 2n\right) = (-1)^n$, и по формуле (21) получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0, \tag{27}$$

или

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

г) *Степенная функция.* Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \in R$. Тогда $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}$, откуда получаем $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(k-1))$. Обозначим

$$C_\alpha^0 = 1, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad k \in N. \tag{28}$$

Тогда по формуле (20) получим

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{29}$$

Отметим важные частные случаи формулы (29).

1) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n), \quad x \to 0, \tag{30}$$

или

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

2) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n), \quad x \to 0, \tag{31}$$

или

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

д) *Логарифмическая функция.* Если $f(x) = \ln(1+x)$, то $f(0) = 0$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

и по формуле (20) находим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n), \quad x \to 0, \tag{32}$$

или

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Заменяя в формуле (32) x на $-x$, получаем

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0, \tag{33}$$

или

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. Рассмотрим предел при $x \to 0$ отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(0) = g(0) = 0$, т. е. предел типа $\dfrac{0}{0}$.

Будем предполагать, что

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) \neq 0.$$

Тогда разложение функции f по формуле Маклорена (20) имеет вид

$$f(x) = ax^n + o(x^n), \quad x \to 0, \quad \text{где} \quad a \neq 0. \tag{44}$$

Аналогично, предполагая, что

$$g(0) = g'(0) = ... = g^{(m-1)}(0) = 0, \quad g^{(m)}(0) \neq 0,$$

по формуле (20) находим

$$g(x) = bx^m + o(x^m), \quad x \to 0, \quad \text{где} \quad b \neq 0.$$

Из равенств (44) и (45) следует, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^n + o(x^n)}{bx^m + o(x^m)}, \quad x \to 0.$$

Если $m = n$, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$. Если $n > m$, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$; если же $n < m$, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Локальная формула Тейлора часто используется при вычислении предела при $x \to x_0$ функции $(1 + f(x))^{g(x)}$, где $f(x) \to 0$ и $g(x) \to \to \infty$ при $x \to x_0$. Если $x_0 = 0$ и разложение функции f по формуле Маклорена имеет вид (44), а функция $g(x)$ представляется при $x \to 0$ в виде

$$g(x) = \frac{1}{bx^n + o(x^n)}, \quad \text{где} \quad b \neq 0, \quad n \in N,$$

то, используя формулу (16),

З а м е ч а н и е 1. Если $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lambda$, то

$$\lim_{x\to x_0} (1 + \alpha(x))^{1/\beta(x)} = e^{\lambda}. \tag{16}$$

получаем

$$\lim_{x\to 0} (1 + f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to 0} \Big(1 + ax^n + o(x^n)\Big)^{1/(bx^n + o(x^n))} = e^{a/b}. \tag{46}$$

При вычислении предела с помощью формулы Тейлора в конечной точке $x_0 \neq 0$ можем положить $t = x - x_0$ и свести задачу к вычислению предела при $t = 0$.

Правило Лопиталя

При вычислении предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ в случае, когда функции f и g одновременно являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими, иногда удобно применить так называемое *правило Лопиталя*, позволяющее заменять предел отношения функций пределом отношения их производных.

1. Неопределенность вида $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a, $f(a) = g(a) = 0$, но $g'(a) \neq 0$, то, применяя к функциям f и g локальную формулу Тейлора при $n = 1$ (формула (13)), получаем

$$f(x) = f'(a)(x-a) + o((x-a)),$$
$$g(x) = g'(a)(x-a) + o((x-a)),$$

откуда следует, что

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{1}$$

Аналогично, если существуют $f^{(n)}(a)$ и $g^{(n)}(a)$ и выполняются условия

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0,$$

но $g^{(n)}(a) \neq 0$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)}{\dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b),*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a+0} g(x) = 0, \tag{2}$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in (a, b), \tag{3}$$

существует (конечный или бесконечный)

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \tag{4}$$

Тогда $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также существует и равен A, т. е.

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5}$$

○ Пусть $x \in (a, b)$. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, полагая

$$f(a) = g(a) = 0. \tag{6}$$

Тогда из условий (2) и (6) следует, что функции f и g непрерывны на отрезке $[a, x]$. По теореме Коши существует точка $\xi \in (a, x)$ такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{7}$$

Если $x \to a + 0$, то $\xi \to a + 0$, и в силу условия (4) существует $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$. Поэтому из равенства (7) следует, что справедливо утверждение (5). ●

Замечание 1. Доказанная теорема (с соответствующими изменениями ее условий) остается справедливой при $x \to a - 0$ и $x \to a$, где a — конечная точка.

2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы при $x > \alpha$, причем $g'(x) \neq 0$ при $x > \alpha$,*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty \tag{8}$$

и существует конечный

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \tag{9}$$

Тогда существует $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, равный A, т. е.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{10}$$

Замечание 2. Теорема 2 остается в силе и в случае, когда $A = +\infty$ или $A = -\infty$. Теорема справедлива и для случая $x \to a$ ($x \to a - 0$, $x \to a + 0$), где a — конечная точка.

Замечание 3. Согласно теоремам 1 и 2 правило Лопиталя служит для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Неопределенности видов $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ часто удается свести и к неопределенностям типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью различных преобразований.