ЛЕКЦИЯ 7

Исследование функций с помощью производных

1. Возрастание и убывание функции.

а) *Критерий возрастания (убывания) дифференцируемой функции на интервале.*

Теорема 1. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ была возрастающей на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$f'(x) \geqslant 0 \quad \textit{при всех } x \in (a, b). \tag{1}$$

Аналогично, условие

$$f'(x) \leqslant 0 \quad \textit{при всех } x \in (a, b) \tag{2}$$

является необходимым и достаточным для убывания дифференцируемой функции $f(x)$ на интервале (a, b).

○ Ограничимся доказательством теоремы для случая возрастающей функции.

Необходимость. Пусть x_0 — произвольная точка интервала (a, b). Из определения возрастающей функции следует, что

$$\forall x \in (a, b)\colon\ x > x_0 \to f(x) \geqslant f(x_0),$$

$$\forall x \in (a, b)\colon\ x < x_0 \to f(x) \leqslant f(x_0).$$

Следовательно, если $x \in (a, b)$ и $x \neq x_0$, то выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0. \tag{3}$$

Так как левая часть (3) имеет при $x \to x_0$ предел, равный $f'(x_0)$, то из неравенства (3) по свойству сохранения знака нестрогого неравенства при предельном переходе получаем

$$f'(x_0) \geqslant 0 \quad \text{для любого } x_0 \in (a, b).$$

Достаточность. Пусть выполняется условие (1) и пусть x_1, x_2 — произвольные точки интервала (a, b), причем $x_1 < x_2$. Применяя к функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа, получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

где $f'(\xi) \geqslant 0$, так как $\xi \in (a, b)$. Отсюда следует, что

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b)\colon\ x_2 > x_1 \to f(x_2) \geqslant f(x_1). \tag{4}$$

Это означает, что функция $f(x)$ является возрастающей на интервале (a, b). ●

б) *Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции.*

Теорема 2. *Если для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие*

$$f'(x) > 0, \tag{5}$$

то функция $f(x)$ строго возрастает на интервале (a, b), а если для всех $x \in (a, b)$ справедливо неравенство

$$f'(x) < 0, \tag{6}$$

то функция $f(x)$ строго убывает на интервале (a, b).

○ Ограничимся доказательством теоремы для случая, когда выполняется условие (5). Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки интервала (a, b) такие, что $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \text{где} \quad \xi \in (a, b).$$

Отсюда и из условия (5) следует, что $f(x_2) > f(x_1)$. Это означает, что функция $f(x)$ строго возрастает на интервале (a, b). ●

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и удовлетворяет условию (6), то эта функция строго убывает на отрезке $[a, b]$.*

○ Теорема 3, как и теорема 2, доказывается с помощью формулы конечных приращений Лагранжа. ●

2. Экстремумы функции.

а) *Необходимые условия экстремума.*

Необходимые условия экстремума

легко получить из теоремы Ферма. Согласно этой теореме точки локального экстремума функции $f(x)$ следует искать среди тех точек области ее определения, в которых производная этой функции либо равна нулю, либо не существует.

В дальнейшем будем часто опускать слово “локальный” при формулировке утверждений, связанных с понятием локального экстремума.

Точки, в которых производная данной функции равна нулю, называют *стационарными точками* этой *функции*, а точки, в которых функция непрерывна, а ее производная либо равна нулю либо не существует, — ее *критическими точками*. Поэтому все точки экстремума функции содержатся среди ее критических точек.

Не всякая критическая точка является точкой экстремума функции.

б) *Достаточные условия экстремума.* Введем понятие строгого экстремума. Назовем x_0 *точкой строгого максимума функции* $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \to f(x) < f(x_0). \tag{11}$$

Аналогично, x_0 называют *точкой строгого минимума функции* $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \to f(x) > f(x_0). \tag{12}$$

Отметим, что если функция $f(x)$, определенная в δ-окрестности точки x_0, строго возрастает на промежутке $(x_0 - \delta, x_0]$ и строго убывает на промежутке $[x_0, x_0 + \delta)$, то выполняется условие (11), и поэтому x_0 является точкой строгого максимума функции $f(x)$.

Аналогично формулируется достаточное условие строгого минимума.

Теорема 5 (первое достаточное условие строгого экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0.*

Тогда:

а) *если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, т. е. существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\begin{aligned} &\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \to f'(x) > 0, \end{aligned} \tag{13}$$

то x_0 — точка строгого минимума функции f (рис. 20.2);

б) *если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0, то x_0 — точка строгого максимума функции f* (рис. 20.3).

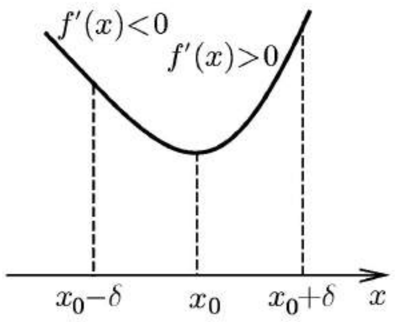

Рис. 20.2

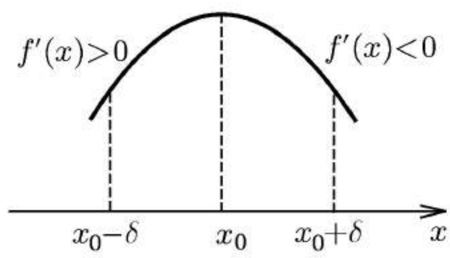

Рис. 20.3

○ Пусть функция $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, тогда выполняется условие (13).

Если x — произвольная точка интервала $(x_0 - \delta, x_0)$, то функция f дифференцируема на интервале (x, x_0) и непрерывна на отрезке $[x, x_0]$. По теореме Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где $f'(\xi) < 0$, так как $x_0 - \delta < x < \xi < x_0$ и $x - x_0 < 0$. Отсюда следует, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to f(x) > f(x_0). \tag{14}$$

Аналогично, применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$, где $x_0 < x < x_0 + \delta$, получаем, что

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \to f(x) > f(x_0). \tag{15}$$

Из условий (14) и (15) следует утверждение (12). Это означает, что x_0 — точка строгого минимума функции $f(x)$.

Аналогично рассматривается случай строгого максимума. ●

Замечание 3. Если x_0 — точка строгого экстремума функции $f(x)$, то из этого не следует, что функция $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0

Теорема 6 (второе достаточное условие строгого экстремума). *Пусть x_0 — стационарная точка функции $f(x)$, т. е.*

$$f'(x_0) = 0, \tag{16}$$

и пусть существует $f''(x_0)$.

Тогда:

а) *если $f''(x) > 0$, то x_0 — точка строгого минимума функции $f(x)$;*

б) *если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого максимума функции $f(x)$.*

○ Если $f''(x_0) > 0$, то по теореме 4 функция $f'(x)$ является возрастающей в точке x_0, т. е. существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to f'(x) < f'(x_0) = 0,$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \to f'(x) > f'(x_0) = 0,$$

откуда следует, что $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0. Согласно теореме 5 точка x_0 — точка строгого минимума функции $f(x)$. Аналогично рассматривается случай $f''(x_0) < 0$. ●

Например, если $f(x) = x^2$, то $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, и поэтому $x_0 = 0$ — точка строгого минимума функции $f(x) = x^2$.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Для функции, непрерывной на отрезке, существует согласно теореме Вейерштрасса точка, в которой эта функция принимает наибольшее значение, и точка, в которой функция принимает наименьшее значение.

В случае когда непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет локальные максимумы в точках $x_1, ..., x_k$ и локальные минимумы в точках $\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_m$ и не имеет других точек локального экстремума, наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно наибольшему из чисел $f(a)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_k)$, $f(b)$, а наименьшее значение этой функции на отрезке $[a, b]$ равно наименьшему из чисел $f(a)$, $f(\widetilde{x}_1)$, ..., $f(\widetilde{x}_m)$, $f(b)$.

В прикладных задачах при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке $[a, b]$ или на интервале (a, b) часто встречается случай, когда функция f дифференцируема на интервале (a, b) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, а уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственный корень $x_0 \in (a, b)$ такой, что $f'(x) > 0$ при $x \in (a, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, b)$ или $f'(x) < 0$ при $x \in (a, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, b)$.

В этом случае число $f(x_0)$ является не только локальным экстремумом функции $f(x)$, но и наибольшим (наименьшим) значением этой функции на отрезке $[a, b]$ или на интервале (a, b).

4. Выпуклость функции.

а) *Понятие выпуклости.* Непрерывная функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх на отрезке* $[a, b]$, если для любых точек x_1 и x_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \qquad (23)$$

Дадим геометрическую интерпретацию понятия выпуклости (рис. 20.4). Пусть M_1, M_2, M_0 — точки графика функции $y = f(x)$, абсциссы которых соответственно равны x_1, x_2, $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Тогда $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ есть ордината точки K — середины отрезка M_1M_2, а $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(x_0)$ — ордината точки M_0 графика с абсциссой, равной абсциссе точки K.

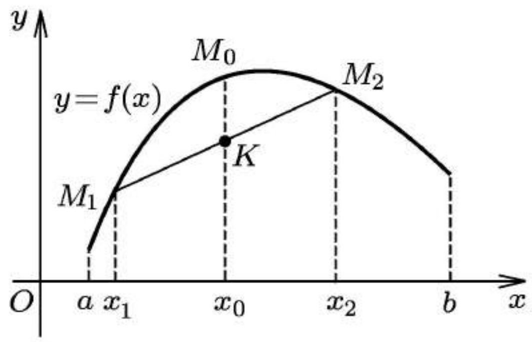

Рис. 20.4

Условие (23) означает, что для любых точек M_1 и M_2 графика функции $y = f(x)$ середина K хорды M_1M_2 или лежит ниже соответствующей точки M_0 графика, или совпадает с точкой M_0.

Если неравенство (23) является строгим при любых x_1, $x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 \neq x_2$, то непрерывную функцию $y = f(x)$ называют *строго выпуклой вверх на отрезке* $[a, b]$.

Аналогично, непрерывная функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз на отрезке* $[a, b]$, если для любых точек x_1 и x_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \qquad (24)$$

Если неравенство (24) является строгим при любых x_1, $x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 \neq x_2$, то непрерывную функцию $y = f(x)$ называют *строго выпуклой вниз на отрезке* $[a, b]$.

б) *Достаточные условия выпуклости.*

Теорема 8. *Пусть $f'(x)$ существует на отрезке $[a, b]$, а $f''(x)$ — на интервале (a, b).*

Тогда:

а) *если*

$$f''(x) \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad x \in (a, b), \qquad (25)$$

то функция $y = f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a, b]$;

б) если

$$f''(x) > 0 \quad \text{при всех} \quad x \in (a, b), \qquad (26)$$

то функция $y = f(x)$ строго выпукла вниз на отрезке $[a, b]$.

Аналогично, при выполнении на интервале (a, b) условия $f''(x) \leqslant 0$ ($f''(x) < 0$) функция $y = f(x)$ выпукла вверх (строго выпукла вверх) на отрезке $[a, b]$.

○ Ограничимся доказательством для случая, когда выполняется условие (25). Нужно доказать, что для любых точек x_1, x_2 отрезка $[a, b]$ выполняется условие (24). Пусть, например, $x_1 < x_2$ (при $x_1 = x_2$ условие (24) выполняется).

Обозначим $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $x_2 - x_1 = 2h$, тогда $x_2 - x_0 = x_0 - x_1 = h$, откуда $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$. Применяя к функции $f(x)$ на отрезках $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$ формулу Тейлора, получаем

$$f(x_1) = f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2, \quad x_0 - h < \xi_1 < x_0,$$

$$f(x_2) = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2, \quad x_0 < \xi_2 < x_0 + h.$$

Складывая эти равенства, находим

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) \tag{27}$$

Так как $x_0 \in (a, b)$, то в силу условия (25) $f''(x_0) \geqslant 0$ и из равенства (27) следует неравенство $f(x_1) + f(x_2) \geqslant 2f(x_0)$, равносильное неравенству (24). ●

5. Точки перегиба.

а) *Понятие точки перегиба.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке либо конечную, либо бесконечную производную ($f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$). Тогда если эта функция при переходе через точку x_0 меняет направление выпуклости, т. е. существует $\delta > 0$ такое, что на одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ она выпукла вверх, а на другом выпукла вниз, то x_0 называют *точкой перегиба функции* $f(x)$, а точку $(x_0, f(x_0))$ — *точкой перегиба графика функции* $y = f(x)$.

Например, для функций $y = x^3$ и $y = x^{1/3}$, $x = 0$ — точка перегиба.

б) *Необходимое условие наличия точки перегиба.*

Теорема 9. *Если x_0 — точка перегиба функции $f(x)$ и если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную, непрерывную в точке x_0, то*

$$f''(x_0) = 0. \tag{28}$$

○ Пусть $f''(x_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f''(x)$ в точке x_0

$$\exists \delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(x_0) \to \operatorname{sign} f''(x) = \operatorname{sign} f''(x_0),$$

т. е. $f''(x) > 0$ или $f''(x) < 0$ для любого $x \in U_\delta(x_0)$.

По теореме 8 функция $f(x)$ либо строго выпукла вниз на интервале $U_\delta(x_0)$ (если $f''(x) > 0$), либо строго выпукла вверх на интервале $U_\delta(x_0)$. Но тогда x_0 не является точкой перегиба. Следовательно, должно выполняться условие (28). ●

в) *Достаточные условия наличия точки перегиба.*

Теорема 10 (первое достаточное условие). *Если функция f непрерывна в точке x_0, имеет в этой точке конечную или бесконечную производную и если функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.*

○ Пусть, например, функция $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0 (в точке x_0 вторая производная может и не существовать). Это означает, что существует $\delta > 0$ такое, что на интервале $\Delta_1 = (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется неравенство $f''(x) < 0$, а на интервале $\Delta_2 = (x_0, x_0 + \delta)$ — неравенство $f''(x) > 0$.

Тогда по теореме 8 функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале Δ_1 и выпукла вниз на интервале Δ_2. Следовательно, точка x_0 удовлетворяет всем условиям, указанным в определении точки перегиба. ●

Теорема 11 (второе достаточное условие). *Если $f^{(2)}(x_0) = 0$, $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.*

○ Так как $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, то по теореме 4 функция $f^{(2)}(x)$ либо строго возрастает, либо строго убывает в точке x_0. По условию $f^{(2)}(x_0) = 0$, и поэтому $f^{(2)}(x)$ имеет разные знаки на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ при некотором $\delta > 0$, откуда, используя теорему 10, заключаем, что x_0 — точка перегиба функции $f(x)$. ●

6. Асимптоты.

а) *Вертикальная асимптота.* Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty,$$

то прямую $x = x_0$ называют *вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.*

б) *Асимптота (невертикальная асимптота).* Прямую

$$y = kx + b$$

называют *асимптотой (невертикальной асимптотой) графика функции $y = f(x)$* при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0. \tag{29}$$

Если $k \neq 0$, то асимптоту называют *наклонной*, а если $k = 0$, то асимптоту $y = b$ называют *горизонтальной.*

Аналогично вводится понятие асимптоты при $x \to -\infty$.

Теорема 12. *Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \tag{31}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{32}$$

○ Необходимость. Если прямая $y = kx + b$ — асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, то выполняется условие (29) или равносильное ему условие

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{33}$$

Разделив обе части равенства (33) на x, получим

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x},$$

откуда следует, что существует предел (31).

Из равенства (33) получаем

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \quad \text{где} \quad \alpha(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

откуда следует, что существует предел (32).

Достаточность. Если существуют конечные пределы (31) и (32), то $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, т. е. выполняется условие (29). Это означает, что прямая $y = kx + b$ — асимптота графика функции $y = f(x)$. ●

Замечание 6. Для случая горизонтальной асимптоты теорема 12 формулируется в следующем виде: для того чтобы прямая $y = b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

7. Построение графиков функций. При построении графика функции $y = f(x)$ можно придерживаться следующего плана.

1) Найти область определения функции. Выяснить, является ли функция четной (нечетной), периодической.

2) Найти точки пересечения графика с осями координат и промежутки, на которых $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

3) Найти асимптоты графика.

4) Сделать эскиз графика.

5) Вычислить $f'(x)$, найти экстремумы и промежутки возрастания (убывания) функции.

6) Вычислить $f''(x)$, найти точки перегиба и промежутки выпуклости вверх (вниз) функции.

7) Нарисовать график функции.

Пример Построить график функции $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

△ Функция определена при $x \neq -1$, принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные при $x < 0$, $y(0) = 0$. Прямые $x = -1$ и $y = x - 2$ — асимптоты графика этой функции. Из равенства (30) следует, что при $x > -\dfrac{2}{3}$ график лежит выше прямой $y = x - 2$, а при $x < -\dfrac{2}{3}$ — ниже этой прямой.

Вычисляем производные:

$$y' = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \tag{34}$$

$$y'' = \frac{6x}{(x+1)^4}. \tag{35}$$

Согласно формуле (34) функция $y(x)$ имеет две стационарные точки $x = 0$ и $x = -3$. Точка $x = 0$ не является точкой экстремума этой функции, так как y' не меняет знак при переходе через точку $x = 0$. Точка $x = -3$ является точкой максимума функции $y(x)$, так как y' меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $x = -3$. Находим $y(-3) = -\frac{27}{4}$.

Из формулы (35) следует, что $y'' < 0$ при $x < 0$ $(x \neq -1)$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. Поэтому функция $y(x)$ является выпуклой вверх на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ и выпуклой вниз на интервале $(0, +\infty)$. Точка $x = 0$, в которой функция $y(x)$ меняет направление выпуклости, есть точка перегиба этой функции. График функции изображен на рис. 20.5. ▲

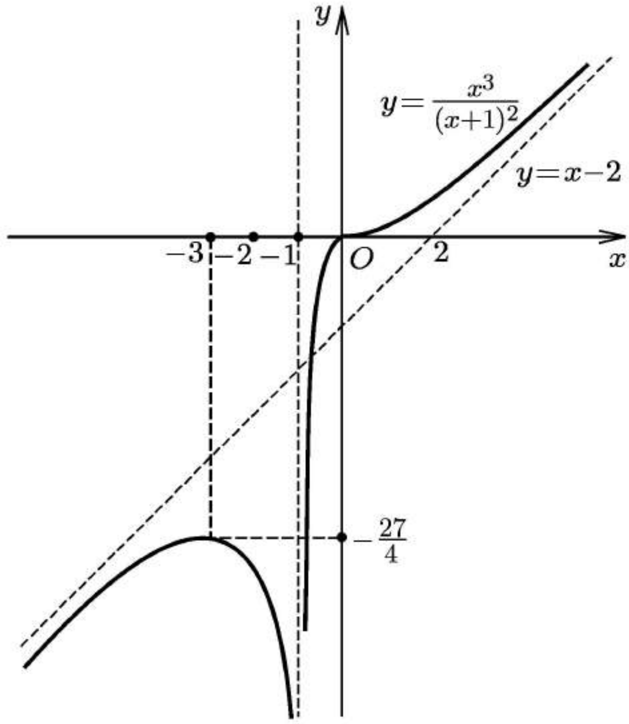

Рис. 20.5