ЛЕКЦИЯ 8

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение и свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования

1. Первообразная. Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на интервале (a,b). Если функция $F(x)$ имеет производную на интервале (a,b) и если для всех $x \in (a,b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

то функция $F(x)$ называется *первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b)*.

Замечание 1. Понятие первообразной можно ввести и для других промежутков (полуинтервала — конечного или бесконечного, отрезка).

Дадим определение первообразной на отрезке. Если функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на отрезке $[a,b]$, причем функция F дифференцируема на интервале (a,b), непрерывна на отрезке $[a,b]$ и для всех $x \in (a,b)$ выполняется равенство (1), то функцию $F(x)$ назовем *первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$*.

Замечание 2. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то функция $F(x)+C$ при любом значении $C = \mathrm{const}$ также является первообразной для $f(x)$.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то для всех $x \in (a,b)$ выполняется равенство*

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \tag{2}$$

где C — постоянная.

○ Обозначим $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$. По определению первообразной в силу условий теоремы для всех $x \in (a,b)$ выполняются равенства

$$F_2'(x) = f(x), \quad F_1'(x) = f(x),$$

откуда следует, что функция $\Phi(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и для всех $x \in (a,b)$ имеет место равенство

$$\Phi'(x) = 0.$$

Согласно следствию 1 из теоремы Лагранжа $\Phi(x) = C = \mathrm{const}$ для всех $x \in (a,b)$ или $F_2(x) - F_1(x) = C$, т. е. справедливо равенство (2). ●

Таким образом, для данной функции $f(x)$ ее первообразная $F(x)$ определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Для того чтобы из совокупности первообразных выделить какую-либо первообразную $F_1(x)$, достаточно указать точку $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащую графику функции $y = F_1(x)$.

2. Понятие неопределенного интеграла. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке Δ называют *неопределенным интегралом от функции f на этом промежутке*, обозначают символом $\int f(x)\,dx$ и пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{3}$$

Здесь $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции f на промежутке Δ, C — произвольная постоянная. Знак $\int$ называют *знаком интеграла*, f — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением.*

Подынтегральное выражение можно записать в виде $F'(x)\,dx$ или $dF(x)$, т. е.

$$f(x)\,dx = dF(x). \tag{4}$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла от данной функции, которая является обратной операции дифференцирования, называют *интегрированием.* Поэтому любую формулу для производной, т. е. формулу вида $F'(x) = f(x)$, можно записать в виде (3). Используя таблицу производных, можно найти интегралы от некоторых элементарных функций. Например, из равенства $(\sin x)' = \cos x$ следует, что $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

3. Свойства неопределенного интеграла.

Свойство 1.

$$d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = f(x)\,dx. \tag{5}$$

○ Из равенства (3) следует, что

$$d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = d(F(x) + C) = dF(x),$$

так как $dC = 0$. ●

Согласно формуле (5) знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, если знак дифференциала стоит перед знаком интеграла.

Свойство 2.

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{6}$$

○ Равенство (6) следует из равенств (3) и (4). ●

Соотношение (6) показывает, что и в случае, когда знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, эти знаки также взаимно уничтожается (если отбросить постоянную C).

Свойство 3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на некотором промежутке первообразные, то для любых $\alpha \in R$, $\beta \in R$ таких, что $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, функция $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ также имеет первообразную на этом промежутке, причем*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx. \tag{7}$$

○ Пусть F и G — первообразные для функций f и g соответственно, тогда $\Phi = \alpha F + \beta G$ — первообразная для функции φ, так как $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Согласно определению интеграла левая часть (7) состоит из функций вида $\Phi(x) + C$, а правая часть — из функций вида $\alpha F(x) + \alpha C_1 + \beta G(x) + \beta C_2 = \Phi(x) + \alpha C_1 + \beta C_2$. Так как $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, то каждая функция вида $\Phi(x) + C$ принадлежит совокупности функций $\Phi(x) + \alpha C_1 + \beta C_2$, и наоборот, т. е. по заданному числу C можно найти C_1 и C_2, а по заданным C_1 и C_2 — число C такое, чтобы выполнялось равенство $C = \alpha C_1 + \beta C_2$. ●

Таким образом, интегрирование обладает свойством линейности: интеграл от линейной комбинации функций равен соответствующей линейной комбинации интегралов от рассматриваемых функций.

4. Метод замены переменного (метод подстановки). Пусть функция $t = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на промежутке Δ и пусть $\Delta_1 = \varphi(\Delta)$ — множество значений функции φ на Δ.

Если функция $U(t)$ определена и дифференцируема на Δ_1, причем

$$U'(t) = u(t), \tag{8}$$

то на промежутке Δ определена и дифференцируема сложная функция $F(x) = U(\varphi(x))$ и

$$F'(x) = [U(\varphi(x))]' = U'(\varphi(x))\, \varphi'(x) = u(\varphi(x))\, \varphi'(x). \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) следует, что если $U(t)$ — первообразная для функции $u(t)$, то $U(\varphi(x))$ — первообразная для функции $u(\varphi(x))\, \varphi'(x)$. Это означает, что если

$$\int u(t)\, dt = U(t) + C, \tag{10}$$

то

$$\int u(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = U(\varphi(x)) + C, \tag{11}$$

или

$$\int u(\varphi(x))\, d\varphi(x) = U(\varphi(x)) + C. \tag{12}$$

Формулу (12) (или формулу (11)) называют *формулой интегрирования заменой переменного.* Она получается из формулы (10), если вместо t подставить дифференцируемую функцию $\varphi(x)$.

Замечание 4. Формула (12) дает возможность найти интеграл $\int f(x)\, dx$, если функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = u(\varphi(x))\, \varphi'(x)$ и если известна первообразная функции $u(t)$, т. е. известен интеграл (10).

Отметим важные частные случаи формулы (12).

а) Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, т. е.
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$
Тогда
$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0. \tag{13}$$
Здесь $\varphi(x) = ax + b,\quad f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}\,f(ax+b)\,d(ax+b)$.

б) Используя равенство
$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C,$$
получаем
$$\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C, \quad \text{если } \varphi(x) \neq 0. \tag{14}$$
в) Так как
$$\int t^\alpha\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad t > 0,$$
то
$$\int (\varphi(x))^\alpha \varphi'(x)\,dx = \int (\varphi(x))^\alpha d\varphi(x) = \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \tag{15}$$
где $\varphi(x) > 0$, $\alpha \neq -1$.

Приведем таблицу интегралов, полученную из соответствующей таблицы производных.

1) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$

3) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \qquad \int e^x\,dx = e^x + C.$

4) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

9) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0.$

Иногда бывает целесообразно при вычислении интеграла

$$J = \int f(x)\,dx \tag{16}$$

перейти к новой переменной.

Пусть $x = \varphi(t)$ — строго монотонная и дифференцируемая функция. Тогда она имеет обратную функцию

$$t = \omega(x). \tag{17}$$

Преобразуя подынтегральное выражение в интеграле (16) с помощью подстановки $x = \varphi(t)$, получаем $f(x)\,dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Обозначим $u(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, тогда

$$f(x)\,dx = u(t)\,dt. \tag{18}$$

Пусть $U(t)$ — первообразная для функции $u(t)$, тогда

$$\int u(t)\,dt = U(t) + C. \tag{19}$$

Из равенств (16)–(19) находим

$$J = \int f(x)\,dx = \int u(t)\,dt = U(t) + C = U(\omega(x)) + C. \tag{20}$$

Формулу (20) называют *формулой интегрирования подстановкой.* Согласно этой формуле для вычисления интеграла (16) достаточно подобрать такую обратимую дифференцируемую функцию $x = \varphi(t)$, с помощью которой подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ представляется в виде $u(t)\,dt$, причем первообразная для функции $u(t)$ известна.

5. Метод интегрирования по частям. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на промежутке Δ. Тогда функция uv также имеет непрерывную производную на Δ и согласно правилу дифференцирования произведения выполняется равенство

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Интегрируя это равенство и учитывая, что

$$\int (uv)'\,dx = uv + C,$$

получаем

$$\int uv'\,dx = uv + C - \int vu'\,dx.$$

Относя произвольную постоянную C к интегралу $\int vu'\,dx$, находим

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx, \tag{21}$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{22}$$

Формула (21) (или (22)) называется *формулой интегрирования по частям.* Она сводит вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$J = \int \sqrt{x^2+a}\,dx.$$

$\triangle$ Полагая $u = \sqrt{x^2+a}$, $v = x$, по формуле (21) находим

$$J = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx,$$

где $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = J - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. Отсюда получаем уравнение относительно J:

$$J = x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Пусть $x + \sqrt{x^2+\alpha} = t = t(x)$; тогда

$$dt = t'(x)\,dx = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right)dx = \frac{t(x)}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx,$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{dt(x)}{t(x)}.$$

Поэтому

$$J = \int \frac{dt(x)}{t(x)} = \ln|t(x)| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C,$$

т. е.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C.$$

Используя полученный результат, находим

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Пусть

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0.$$

Выведем рекуррентную формулу для вычисления интеграла J_n. $\triangle$ Пусть $u = (x^2+a^2)^{-n}$, $v = x$. Тогда $u' = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1}$, $v' = 1$ и по формуле (21) получаем

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx,$$

где

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = J_n - a^2 J_{n+1}.$$

Следовательно,

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

откуда

$$J_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n. \quad \blacktriangle \tag{23}$$

З а м е ч а н и е 7. Повторное применение формулы (21) позволяет получить *обобщенную формулу интегрирования по частям*

$$\int uv^{(n+1)}\,dx = \\ = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} + ... + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx \tag{24}$$

в предположении, что существуют непрерывные производные $u^{(n+1)}$, $v^{(n+1)}$ на рассматриваемом промежутке. При $n=1$ формула (24) принимает вид

$$\int uv''\,dx = uv' - u'v + \int u''v\,dx. \tag{25}$$

П р и м е р 3. Вычислить интеграл

$$J = \int x^2 e^x\,dx.$$

$\triangle$ Полагая $u = x^2$, $v = e^x$ и учитывая, что $u' = 2x$, $u'' = 2$, $v' = v'' = e^x$, получаем по формуле (25)

$$J = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx,$$

откуда

$$\int x^2 e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C. \quad \blacktriangle$$

П р и м е р 4. Вычислить интеграл

$$J = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx, \quad \alpha\beta \neq 0.$$

$\triangle$ Положим $u = \cos\beta x$, $v = \dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}$. Тогда $u' = -\beta\sin\beta x$, $u'' = -\beta^2\cos\beta x$, $v' = \dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$, $v'' = e^{\alpha x}$. По формуле (25) находим

$$J = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos\beta x + \frac{\beta}{\alpha^2}\,e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\,J + C,$$

откуда

$$J = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha x} + C_1. \quad \blacktriangle$$