ЛЕКЦИЯ №14

Ряд Тейлора

1. Понятие ряда Тейлора. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производные всех порядков, то степенной ряд

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{1}$$

называется *рядом Тейлора функции f в точке x_0*.

Пусть функция f регулярна в точке x_0, т. е. представляется в некоторой окрестности точки x_0 сходящимся к этой функции степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < \rho, \quad \rho > 0. \tag{2}$$

Тогда функция f бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0, причем коэффициенты ряда (2) выражаются формулами

$$a_0 = f(x_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Таким образом, степенной ряд для функции $f(x)$, регулярной в данной точке a, совпадает с рядом Тейлора функции f в точке a.

Если известно, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке a (и даже в некоторой окрестности этой точки), то нельзя утверждать, что составленный для этой функции ряд Тейлора (1) сходится при $x \neq x_0$ к функции $f(x)$.

2. Остаточный член формулы Тейлора. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0. Тогда ей можно поставить в соответствие ряд (1). Обозначим

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{5}$$

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) \tag{6}$$

и назовем $r_n(x)$ *остаточным членом формулы Тейлора для функции f в точке x_0*. Если существует

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \tag{7}$$

то согласно определению сходимости ряда ряд (1) сходится к функции $f(x)$ в точке x, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{8}$$

Теорема 1. *Если функции $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n+1)}(x)$ непрерывны на интервале $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, то для любого $x \in \Delta$ остаточный член формулы Тейлора для функции f в точке x_0 можно представить:*

а) *в интегральной форме*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt; \tag{9}$$

б) *в форме Лагранжа*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \tag{10}$$

где ξ принадлежит интервалу с концами x_0 и x.

○ Формула (10) была доказана ранее. Докажем формулу (9) методом индукции. В силу равенств (5) и (6) нужно показать, что

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{11}$$

Воспользуемся равенством $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = f(x) - f(x_0)$ и преобразуем его левую часть с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)\, d(x-t) = [-f'(x)(x-t)]\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt =$$

$$= f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt.$$

Таким образом,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt,$$

т. е. формула (11) верна при $n = 1$. Предположим, что формула (11) является верной для номера $n - 1$, т. е.

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt. \tag{12}$$

Преобразуем интеграл в правой части формулы (12), применив формулу интегрирования по частям:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt = -\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n)}(t)\,d((x-t)^n) =$$

$$= \Big(-\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(t)(x-t)^n\Big)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Отсюда следует, что равенство (12) можно записать в виде (11). Формула (9) доказана. ●

Теорема 2. *Если функция f и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $\Delta = (x_0-\delta, x_0+\delta)$, т. е.*

$$\exists\, M>0\colon\ \forall x\in\Delta \to |f^{(n)}(x)| \leqslant M, \quad n=0,1,2,..., \tag{13}$$

то функция f представляется сходящимся к ней в каждой точке интервала Δ рядом Тейлора (8).

○ Пусть $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Тогда, используя формулу (10) и условие (13), получаем

$$|r_n(x)| \leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{14}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$, так как $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a}{n+1}\to 0$ при $n\to\infty$, для любого $a>0$. Поэтому из (14) следует, что выполняется условие (7), т. е. в точке x справедливо равенство (8). ●

3. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора. Найдем разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=0$, т. е. в ряд вида

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \tag{15}$$

который называют *рядом Маклорена.* Заметим, что коэффициенты $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ разложения (15) для основных элементарных функций (показательной, гиперболических, тригонометрических и других) были найдены в лекции № 6.

а) *Показательная и гиперболические функции.* Пусть $f(x)=e^x$. Тогда для любого $x\in(-\rho,\rho)$, где $\rho>0$, выполняются неравенства

$$0<f(x)<e^{\rho}, \quad 0<f^{(n)}(x)<e^{\rho}, \quad n\in \mathsf{N}.$$

По теореме 2 ряд (15) для функции $f(x) = e^x$ сходится к этой функции на интервале $(-\rho, \rho)$ при любом $\rho > 0$.
Так как для функции $f(x) = e^x$ выполняются равенства $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = 1$ для любого n, то по формуле (15) получаем разложение в ряд Маклорена показательной функции

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{16}$$

Используя разложение (16) и формулы

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

находим разложения в ряд Маклорена гиперболического косинуса и гиперболического синуса:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{17}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{18}$$

б) *Тригонометрические функции.* Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда $|f(x)| \leqslant 1$ и $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ для всех $n \in N$ и для всех $x \in R$. По теореме 2 ряд (15) для функции $f(x) = \sin x$ сходится для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Если $f(x) = \sin x$, то $f(0) = 0$, $f^{(2n)}(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ для любого n, и по формуле (15) получаем разложение синуса в ряд Маклорена:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{19}$$

Пусть $f(x) = \cos x$. Тогда $|f(x)| \leqslant 1$, $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ для всех n и для всех $x \in R$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$ для всех n. По формуле (15) получаем

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \tag{20}$$

в) *Логарифмическая функция.* Пусть $f(x) = \ln(1+x)$. Тогда

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \tag{21}$$

откуда находим

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \tag{22}$$

○ Оценим остаточный член $r_n(x)$, пользуясь формулой (9) при $x_0 = 0$. Преобразуем эту формулу, полагая $t = \tau x$. Тогда $dt = x\,d\tau$, $1 - x = x(1-\tau)$ и формула (9) примет вид

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-\tau) f^{(n+1)}(\tau x)\,d\tau. \tag{23}$$

Если $f(x) = \ln(1+x)$, то по формуле (23), используя равенство (21), получаем

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^n}{(1+\tau x)^{n+1}}\,d\tau. \tag{24}$$

Пусть $|x| < 1$. Тогда справедливы неравенства

$$|1+\tau x| \geqslant 1 - \tau|x| \geqslant 1 - \tau, \tag{25}$$

$$|1+\tau x| \geqslant 1 - |x|, \tag{26}$$

так как $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Отсюда следует, что при любом $n \in N$ выполняется неравенство

$$|1+\tau x|^{n+1} \geqslant (1-\tau)^n (1-|x|). \tag{27}$$

Используя неравенство (27), из формулы (24) получаем следующую оценку остаточного члена:

$$|r_n(x)| \leqslant |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{d\tau}{1-|x|} = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

откуда следует, что $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, если $|x| < 1$.

Пусть $x = 1$. Тогда $1 + \tau x = 1 + \tau$, $(1+\tau)^{n+1} \geqslant 1$, $1 - \tau \geqslant 0$, так как $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Поэтому из формулы (24) следует, что $|r_n(1)| \leqslant \leqslant \int_0^1 (1-\tau)^n\,d\tau = \frac{1}{n+1}$, откуда получаем: $r_n(1) \to 0$ при $n \to \infty$.

Итак, если $x \in (-1, 1]$, то остаточный член $r_n(x)$ для функции $f(x) = \ln(1+x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. ряд Маклорена сходится к $f(x)$. ●

Из формул (15) и (22) получаем разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n, \tag{28}$$

Заменяя в формуле (28) x на $-x$, получаем

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{29}$$

г) *Степенная функция.* Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Если $\alpha = 0$, то $f(x) = 1$, а если $\alpha = n$, где $n \in N$, то $f(x)$ — многочлен степени n, который можно записать по формуле бинома Ньютона в виде конечной суммы:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Покажем, что если $\alpha \notin N$ и $\alpha \neq 0$, то функция $f(x) = (1+x)^\alpha$ представляется при каждом $x \in (-1, 1)$ сходящимся к ней рядом Маклорена

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \tag{30}$$

где

$$C_\alpha^0 = 1, \quad C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}. \tag{31}$$

○ Так как

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)}, \tag{32}$$

то по формуле (23) получаем

$$r_n(x) = A_n x^{n+1} \int\limits_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1+\tau x}\right)^n (1+\tau x)^{\alpha-1} d\tau, \tag{33}$$

где

$$A_n = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}.$$

Выберем число $m \in N$ таким, чтобы выполнялось условие $|\alpha| \leqslant m$. Тогда при всех $n \geqslant m$ справедливы неравенства

$$|A_n| \leqslant \frac{m(m+1)...(m+n)}{n!} \leqslant \frac{(m+n)!}{n!} = (n+1)...(n+m) \leqslant (2n)^m. \tag{34}$$

Используя неравенства (25) и (26), а также неравенство $|1+\tau x| \leqslant 1 + |x|$, получаем

$$0 \leqslant \frac{1-\tau}{1+x\tau} \leqslant 1, \tag{35}$$

$$|1+\tau x|^{\alpha-1} \leqslant \beta(x) = \begin{cases} (1+|x|)^{\alpha-1}, & \text{если} \quad \alpha \geqslant 1, \\ (1-|x|)^{\alpha-1}, & \text{если} \quad \alpha < 1, \end{cases} \tag{36}$$

Из формулы (33) и оценок (34)–(36) следует неравенство

$$|r_n(x)| \leqslant \beta(x) 2^m n^m |x|^{n+1}, \tag{37}$$

которое справедливо при всех $n \geqslant m$ и для каждого $x \in (-1, 1)$.

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^m}{a^t} = 0$ при $a > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^m}{(1/|x|)^{n+1}} = 0$. Поэтому из соотношения (37) следует, что $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $x \in (-1, 1)$, т. е. справедливо равенство (30). ●

Отметим важные частные случаи формулы (30):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \tag{38}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{39}$$

В заключение заметим, что при разложении функций в ряд Тейлора обычно используют формулы (16)–(20), (28)–(30) и применяют такие приемы, как: представление данной функции в виде линейной комбинации функций, ряды Тейлора для которых известны; замена переменного; почленное дифференцирование и интегрирование ряда.