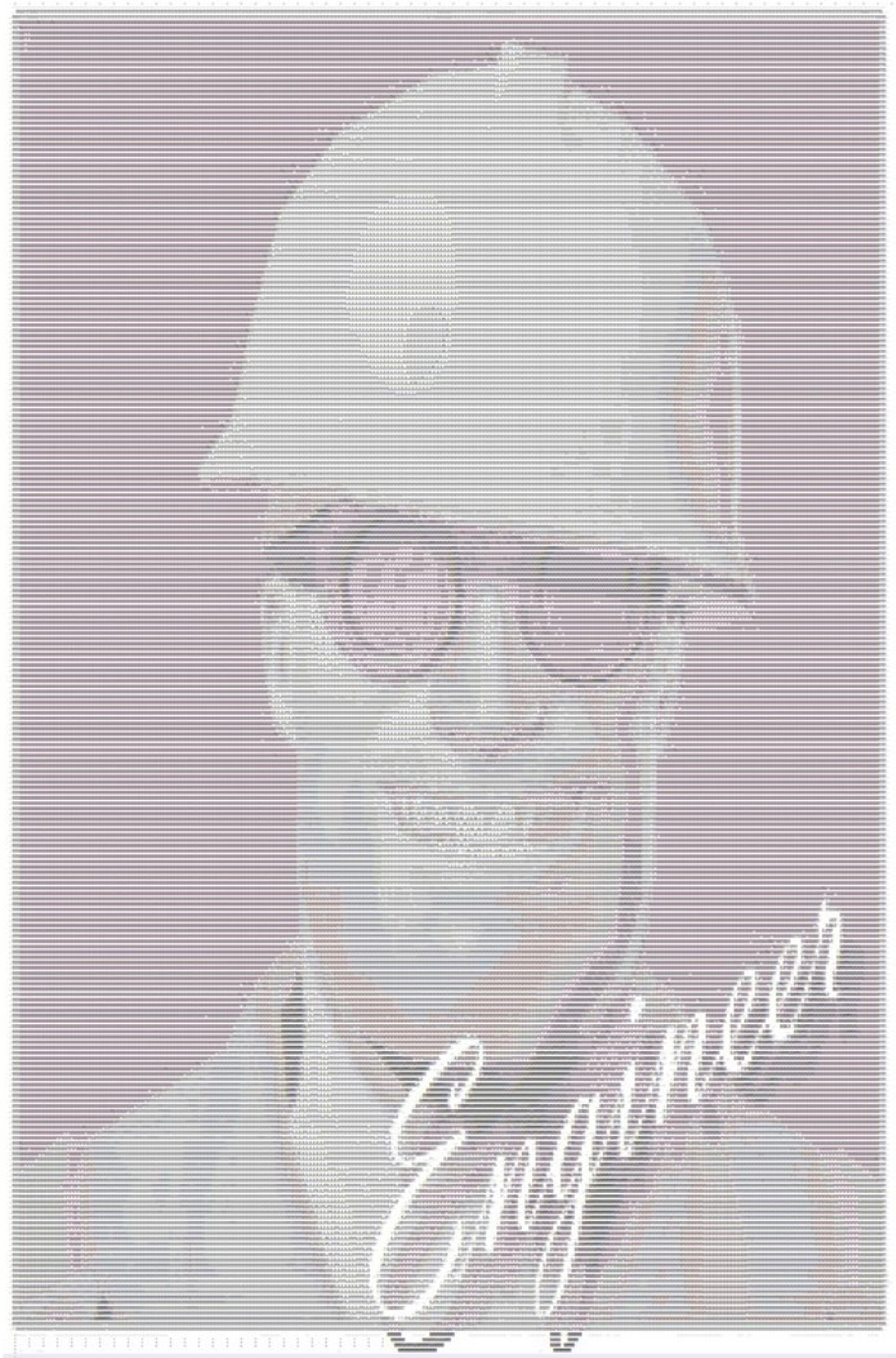
Лекции по матанализу.
LaTeX

Работяга из 206.

2020.


Engineer

Содержание

1 Теория числовых рядов

Определение 1.0.1. *Пусть* $\{u_k\}$ *- числовая последовательность,* $u_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. *Тогда бесконечную сумму*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.0.1}$$

будем называть ***числовым рядом****.* u_k *будем называть* ***общим членом ряда*** (1.0.1)*, а сумму первых* n *членов ряда* (1.0.1) $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ *назовём* ***частичной суммой ряда****.*

1.1 Сходимость числового ряда. Критерий Коши

Определение 1.1.1. *Числовой ряд* (1.0.1) *называется **сходящимся**, если сходится последовательность* S_n *его частичных сумм.*

Сам предел $S = \lim\limits_{x\to\infty} S_n$ *назовём **суммой ряда**.*

Пусть

$$z_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

-n-ый остаток ряда. Тогда $z_n = o(1), \quad n \to +\infty$.

Теорема 1.1.1 (Критерий Коши сходимости числового ряда)**.** *Для того, чтобы ряд* (1.0.1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *существовал номер* N *такой, что для всех* $n \geq N$ *и для всех натуральных* p *было справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности. □

Следствие 1.1.1.1 (Необходимое условие сходимости числового ряда)**.** *Если ряд* (1.0.1) *сходится, то* $u_k = o(1), \quad k \to +\infty$. *Заметим, что это условие не является достаточным.*

Пример 1.1.1 (Гармонический ряд)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{k}$$

Ряд расходится, хотя $\frac{1}{k} = u_k \to 0, \quad k \to +\infty$.

Замечание 1.1.1.1. *Добавление или удаление конечного числа элементов ряда не влияет на его сходимость или расходимость.*

Замечание 1.1.1.2. *Ряды* $\sum u_k$ *и* $\sum c \cdot u_k$, *где* $c = const \neq 0$ *сходятся или расходятся одновременно.*

1.2 Сходимость числовых рядов с неотрицательными членами

Рассмотрим ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \tag{1.2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p'_k, \tag{1.2.2}$$

где $p_k \geq 0$, $p'_k \geq 0$.

Теорема 1.2.1. *Для сходимости ряда* (1.2.1) *необходимо и достаточно, чтобы частичные суммы были ограничены.*

Доказательство.

- **Необходимость**

  Пусть ряд (1.2.1) сходится, тогда последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ сходится, следовательно, частичные суммы ограничены.

- **Достаточность**

  Пусть последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена, $\{S_n\}$ - монотонна, так как $S_n - S_{n-1} = p_n \geq 0$, следовательно, ряд (1.2.1) сходится.

$\square$

Теорема 1.2.2 (1 признак признак сравнения)**.** *Пусть $p_k \leq p'_k$ для всех k, начиная с некоторого k_0. Тогда из сходимости ряда* (1.2.2) *следует сходимость ряда* (1.2.1)*, а из расходимости ряда* (1.2.1) *следует расходимость ряда* (1.2.2)*.*

Доказательство.

- Пусть (1.2.2) - сходится, тогда последовательность частичных сумм $\{S'_n\}$ ограничена. Не ограничивая общности, пусть $p_k \leq p'_k$ для всех k (так как удаление конечного числа элементов не влияет на сходимость). Тогда $S_n \leq S'_n$ для всех n и последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена, следовательно, ряд (1.2.1) - сходится(теорема (1.2.7)).

- Пусть ряд (1.2.1) - расходится, тогда ряд (1.2.2) - расходится(так как иначе из первой части теоремы будет следовать сходимость ряда (1.2.1)).

$\square$

Теорема 1.2.3 (2 признак признак сравнения)**.** *Пусть* $p'_k > 0$*, существует конечный и отличный от нуля предел* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L$*. Тогда ряды* (1.2.1) *и* (1.2.2) *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Распишем предел:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad L - \varepsilon < \frac{p_k}{p'_k} < L + \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon < L$, тогда справедливы неравенства для любого $n \geq N$

$$0 < (L-\varepsilon)p'_k < p_k < (L+\varepsilon)p'_k$$

Если ряд (1.2.2) сходится, то ряд $\sum (L+\varepsilon)p'_k$ сходится, следовательно, ряд (1.2.1) — сходится(из 1 признака сравнения).

Если ряд (1.2.2) расходится, то ряд $\sum (L-\varepsilon)p'_k$ расходится, следовательно, ряд (1.2.1) — расходится(из 1 признака сравнения). □

Теорема 1.2.4 (3 признак признак сравнения)**.** *Пусть для любых* k*, начиная с некоторого* k_0*,*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k}.$$

Тогда из сходимости ряда (1.2.2) *следует сходимость ряда* (1.2.1)*, а из расходимости ряда* (1.2.1) *следует расходимость ряда* (1.2.2)*.*

Доказательство. Не ограничивая общности, пусть

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k}$$

для всех k (так как удаление конечного числа элементов не влияет на сходимость). Тогда

$$\frac{p_2}{p_1} \leq \frac{p'_2}{p'_1}, \frac{p_3}{p_2} \leq \frac{p'_3}{p'_2}, \ldots, \frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{p'_n}{p'_{n-1}}.$$

Перемножаем, получаем

$$\frac{p_n}{p_1} \leq \frac{p'_n}{p'_1}; \quad p_n \leq \frac{p_1}{p'_1} p'_n$$

.

Если ряд (1.2.2) сходится, то ряд $\sum \frac{p_1}{p'_1} p'_k$ сходится, следовательно, ряд (1.2.1) — сходится(из 1 признака сравнения).

Если ряд (1.2.1) расходится, то ряд $\sum \frac{p_1}{p'_1} p'_k$ расходится(из 1 признака сравнения), следовательно, ряд (1.2.2) — расходится. □

Теорема 1.2.5 (Признак Коши). *1. Если для всех k, начиная с некоторого k_0 верно*

$$\sqrt[k]{p_k} \leq q \leq 1 (\sqrt[k]{p_k} \geq 1), \tag{1.2.3}$$

то ряд (1.2.1) *сходится(расходится).*

2. Если существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{p_k} = L \tag{1.2.4}$$

то при $L < 1$ ряд (1.2.1) *сходится, а при $L > 1$ — расходится.*

Доказательство. 1. Возведём в k-тую степень обе части неравенства $\sqrt[k]{p_k} \geq 1$. Получим $p_k \geq 1$ для всех k, начиная с некоторого k_0, то есть p_k не стремится к нулю при $k \to \infty$, следовательно нарушается необходимое условие сходимости ряда.

Возведём в k-тую степень обе части неравенства $\sqrt[k]{p_k} \leq q$. Получим $p_k \leq q^k$ для всех k, начиная с некоторого k_0, но ряд с общим членом $p'_k = q^k$ - сходится, поэтому по 1 признаку сравнения сходится ряд (1.2.1).

2. Распишем предел

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall k \geq N \quad |\sqrt[k]{p}_k - L| < \varepsilon.$$

Тогда $L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$ для всех $k \geq N$.

- Если $L < 1$, то выберем ε так, что $L + \varepsilon < 1$ и обозначим $q = L + \varepsilon$. Получим $\sqrt[k]{p_k} < q < 1$ и тогда, согласно первой части теоремы, ряд (1.2.1) сходится.
- Если $L > 1$, то выберем ε так, что $L - \varepsilon = 1$. Получим $\sqrt[k]{p_k} > 1$, и тогда, согласно первой части теоремы, ряд (1.2.1) расходится.
- Если $L = \infty$, то рассуждения аналогичные.

□

Замечание 1.2.5.1. *Заметим, что неравенство* (1.2.3) *нельзя заменить на неравенство $\sqrt[k]{p_k} < 1$. Достаточно заметить, что последнее неравенство выполняется для каждого из следующих рядов, из которых один сходится, а другой - расходится: $p_k = \frac{1}{k}$, $\sqrt[k]{p_k} < 1$ (ряд расходится), $p_k = \frac{1}{k^2}$, $\sqrt[k]{p_k} < 1$ (ряд сходится)*

Замечание 1.2.5.2. *Если в* (1.2.4) $L = 1$*, то в этом случае критерий "не работает", то есть нельзя судить о поведении ряда. Для каждого из рядов из предыдущего замечания будет верно* $\sqrt[k]{p_k} \to 1, k \to \infty$*, то есть* $L = 1$.

Теорема 1.2.6 (Признак Даламбера)**.** *Рассмотрим ряд* (1.2.1) *все члены которого, начиная с некоторого номера отличны от нуля*

1. *Если для всех* k*, начиная с некоторого* k_0 *верно*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q \le 1 \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \ge 1 \right) \tag{1.2.5}$$

то ряд сходится(расходится).

2. *Если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L \tag{1.2.6}$$

то при $L < 1$ *ряд* (1.2.1) *сходится, а при* $L > 1$ *- расходится.*

Доказательство.

1. Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \ge 1$, то $p_{k+1} \ge p_k > 0$ для всех для всех k, начиная с некоторого k_0, следовательно p_k не стремится к нулю при $k \to \infty$, следовательно нарушается необходимое условие сходимости ряда.

   Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q \le 1$, то пусть $q = \frac{q_{k+1}}{q_k}$, получаем $\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q < \frac{q_{k+1}}{q_k}$ для всех k, начиная с некоторого k_0, но ряд с общим членом $q_k = q^k$ - сходится, поэтому по 3 признаку сравнения сходится и (1.2.1).

2. Эта часть доказательства дословно повторяет 2 часть доказательства критерия Коши, заменив в рассуждениях $\sqrt[k]{p_k}$ на $\frac{p_{k+1}}{p_k}$.

□

Замечание 1.2.6.1. *Замечания из критерия Коши переносятся и на критерий Даламбера.*

Некоторые признаки сходимости можно сравнить между собой.

Определение 1.2.1. *Пусть рассматриваются 2 признака сходимости, назовём их первый и второй. Тогда первый признак является более* ***сильным****, чем второй, если всякий раз, когда применим второй признак, применим и первый, но существуют ряды, на которых работает первый, но не работает второй признак.*

Утверждение 1.2.1. *Если существует предел* (1.2.6), *то существует предел* (1.2.4), *причём они равны.*

Для доказательства утверждения докажем леммы:

Лемма 1.2.7. *Если последовательность чисел $\{a_n\}$ сходится к пределу a, то к тому же пределу будет сходится и последовательность средних арифметических чисел*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

(допустимо $a = +\infty, a = -\infty$).

Доказательство. 1. Пусть $a = 0$. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена, поэтому существует такой $c > 0$, что для любого n будет справедливо $|a_n| \leq c$. С другой стороны для любого $\varepsilon > 0$ существует N такой, что для любого $n \geq N$ будет справедливо $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Найдём такой номер N_1, что для всех $n \geq N_1$ будет справедливо $\frac{cN}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любого $n > \max(N, N_1)$ будет справедливо

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| = \left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + a_2 + ... + a_n}{n}\right| <$$
$$< \frac{cN}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n-N}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то есть

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \to 0, n \to \infty.$$

2. Пусть $a \neq 0$, но а - конечное число. Тогда последовательность $\{a_n - a\} \to 0$ и рассматриваемый случай сводится к предыдущему случаю.

3. Пусть $a = +\infty$(случай $a = -\infty$ рассматривается аналогично). Так как $a = +\infty$, то существует c — такое положительное число, что $a_n > -c$ для любого n. С другой стороны существует такой $\varepsilon > 0$ и N, что для любого $n \geq N$ справедливо неравенство $a_n > \varepsilon$.

   Для $n > 2N$ справедливо $\frac{N}{n} < \frac{1}{2}, -\frac{N}{n} > -\frac{1}{2}$

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_N}{n} + \frac{a_{n+1} + a_2 + ... + a_n}{n} >$$
$$> -\frac{cN}{n} + \varepsilon\frac{n-N}{n} > -\frac{c}{2} + \varepsilon\frac{1}{2} = \frac{\varepsilon - c}{2}.$$

Так как ε сколь угодно большое число, то и $\frac{\varepsilon-c}{2}$ - сколь угодно большое число, поэтому

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\to+\infty,\quad n\to\infty.$$

$\square$

Лемма 1.2.8. *Если последовательность чисел $\{a_n\}$ сходится к пределу a, то к тому же пределу будет сходится и последовательность средних геометрических чисел*

$$\tau_n=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

Доказательство. 1. Пусть $a>0$. Тогда справедливо $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$. Но тогда в силу леммы 1.2.7.

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n}{n}=\ln a$$

Но

$$\ln\tau_n=\ln\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}=\frac{\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n}{n}$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\tau_n=\ln a$, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=a$

2. Пусть $a=0$. Тогда существует $c>0$ такое, что $a_n<c$ для всех n и существуют $\varepsilon>0$ и N такое, что для всех $n\geq N$ такое, что $a_n<\varepsilon$.

   Пусть $n>N$, тогда

$$\tau_n=\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_N}\sqrt[n]{a_{N+1}\dots a_n}<\sqrt[n]{c^N}\sqrt[n]{\varepsilon^{n-N}}=\varepsilon\sqrt[n]{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^N}<2\varepsilon.$$

$\square$

Доказательство. Теперь докажем утверждение 1.2.1.

Пусть $a_1=p_1,a_2=\frac{p_2}{p_1},\dots,a_k=\frac{p_k}{p_{k-1}}$, очевидно, что $a_k\to L,\quad k\to\infty$. Но тогда

$$\sqrt[k]{p_k}=\sqrt[k]{\frac{p_k}{p_{k-1}}\cdot\frac{p_{k-1}}{p_{k-2}}\cdot\dots\cdot\frac{p_2}{p_1}\cdot p_1}=\sqrt[k]{a_ka_{k-1}\dots a_2a_1}.$$

применим лемму 1.2.8

$$\sqrt[k]{a_ka_{k-1}...a_2a_1}\to L,\quad k\to\infty.$$

$\square$

Обратное неверно. Покажем это

Пример 1.2.1. *Пусть*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^k}{2^k}.$$

Заметим, что $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+(-1)^{k+1}}{3+(-1)^k}$ имеет 2 предельные точки 1 и $\frac{1}{4}$ и не имеет предела, то есть признак Даламбера неприменим. Вместе с тем существует предел
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{2} = L < 1.$$

Теорема 1.2.9 (Теорема Коши-Маклорена)**.** *Пусть $f(x)$ неотрицательна и не возрастает при $x \geq 1$. Тогда Числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + f(2) + \ldots \qquad (1.2.7)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится числовая последовательность $\{a_n\}$
$$a_n = \int\limits_1^n f(x)dx \qquad (1.2.8)$$

Доказательство. Зафиксируем $k \geq 2$, тогда так как функция $f(x)$ не возрастает на отрезке $[k-1, k]$, то справедливы неравенства

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$$

для всех $x \in [k-1, k]$ Из ограниченности и монотонности $f(x)$ на данном отрезке следует, что она интегрируема на указанном отрезке

$$\int\limits_{k-1}^{k} f(k)dx \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(k-1)dx$$
$$f(k) \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \leq f(k-1).$$

Так как эти неравенства справедливы для любого $k \geq 2$, то получим

$$f(2) \leq \int\limits_1^2 f(x)dx \leq f(1),$$

$$f(3) \leq \int\limits_2^3 f(x)dx \leq f(2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(n) \leq \int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n-1).$$

Просуммируем их, получим

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int\limits_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Или если S_n - частичная сумма ряда (1.2.7), то

$$S_n - f(1) \leq a_n \leq S_{n-1}.$$

Так как $f(x) \geq 0$ для всех $x \geq 1$, то последовательность $\{a_n\}$ - неубывающая. Поэтому для сходимости этой последовательности необходимо и достаточно её ограниченность.

Из правого неравенства следует, что для ограниченности последовательности $\{a_n\}$ достаточно ограниченность $\{S_n\}$. Из левого неравенства следует, что из неограниченности последовательности $\{S_n\}$ следует неограниченность последовательности $\{a_n\}$. А ограниченность последовательности $\{S_n\}$ равносильно её сходимости (теорема 1.2.1). □

Замечание 1.2.9.1. *Зафиксируем* m. *Функцию* $f(x)$ *можно рассматривать не от* $[1, +\infty)$, *а от* $[m, +\infty)$.

Утверждение этой теоремы остаётся в силе, если заменить

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ на } \sum_{k=m}^{\infty} f(k) \text{ и}$$

$$a_n = \int\limits_1^n f(x)dx \text{ на } a_n = \int\limits_m^n f(x)dx$$

Доказательство теоремы меняется незначительно

1.3 Абсолютно и условно сходящийся ряд

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{1.3.1}$$

где $u_k \in \mathbb{R}$.

Определение 1.3.1. *Ряд* (1.3.1) *называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \tag{1.3.2}$$

Утверждение 1.3.1. *Из абсолютной сходимости ряда* (1.3.1) *вытекает его сходимость.*

Доказательство. Возьмём произвольные натуральные n и p. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|.$$

Возьмём произвольный $\varepsilon > 0$. Так как ряд (1.3.2) сходится, то по критерию Коши сходимости числовых рядов существует такой N, что для каждого $n > N$ и каждого натурального p справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon,$$

следовательно, по критерию Коши ряд (1.3.1) сходится. □

Пример 1.3.1. *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

Ряд модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

расходится.

Докажем, что исходный ряд сходится и его сумма равна $\ln 2$*. Для каждого* $x \in [0,1]$ *справедлива формула Маклорена для функции* $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

и для остаточного члена справедлива оценка $|R_{n+1}(x)| \le \frac{1}{n+1}$ *для всех* $x \in [0,1]$*. Полагая в формулах* $x = 1$ *получим*

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + R_{n+1}(1).$$

Пусть S_n *- сумма первых* n *слагаемых исходного ряда. Тогда*

$$|S_n - \ln 2| = |R_{n+1}(1)| \le \frac{1}{n+1}.$$

Так как $\frac{1}{n+1} \to 0$ *при* $n \to \infty$*, то из последнего неравенства следует, что существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \ln 2.$$

Поскольку последовательность $\{S_n\}$ *является последовательностью частичных сумм ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

то этот ряд сходится, но ряд его модулей расходится. Данный пример показывает, что утверждение (1.3.1) работает только в одну сторону.

Определение 1.3.2. *Ряд* (1.3.1) *называется* ***условно сходящимся****, если он сходится, а ряд* (1.3.2) *- расходится.*

1.4 О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов

Теорема 1.4.1 (Теорема Римана). *Если ряд 1.3.1 сходится условно, то каково бы ни было наперёд взятое вещественное число L, можно так переставить члены ряда, чтобы сумма ряда была равна L.*

Доказательство. Пусть ряд (1.3.1) — произвольный условно сходящийся. Из необходимости условия сходимости следует, что $\{u_n\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — неотрицательные члены ряда (1.3.1), выписанные в том же порядке, в каком они стоят в ряду.

Пусть $q_1, q_2, q_3, \ldots$ - модули отрицательных членов ряда (1.3.1), выписанные в том же порядке, в каком они стоят в ряду.

Ряд (1.3.1) содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных чисел, ибо если бы членов одного знака было бы конечное число, то, отбросив их, мы бы получили сходящийся ряд из членов одного знака, что означала бы абсолютную сходимость.

Так как $\{u_n\} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\{p_n\} \to 0$ и $\{q_n\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Докажем, что ряды $\sum p_n$ и $\sum q_n$ расходятся. Обозначим первый ряд символом P, а второй - Q. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n$, P_n - сумма всех положительных членов, входящих в S_n, Q_n - сумма модулей всех отрицательных членов, входящих в S_n. Тогда, очевидно, $S_n = P_n - Q_n$, и так как ряд сходится условно, то

$$\lim_{n\to\infty}(P_n - Q_n) = S,$$
$$\lim_{n\to\infty}(P_n + Q_n) = +\infty.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} Q_n = +\infty,$$

то есть оба ряда расходятся.

Из расходимости P и Q следует, что даже после удаления конечного числа первых членов мы можем взять из оставшихся членов как ряда P, так и ряда Q столько чисел, чтобы их сумма превзошла любое число.

Возьмём из ряда P ровно столько членов $p_1, p_2, \ldots, p_{k_1}$, чтобы общая сумма

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} > L$$

(при этом $p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1 - 1} \leq L$).

Затем возьмём из ряда Q ровно столько членов $-q_1, -q_2, \ldots, -q_{k_2}$, чтобы общая сумма

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{k_2} < L.$$

Затем возьмём из ряда P ровно столько членов $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \ldots, p_{k_3}$, чтобы общая сумма

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{k_2} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \ldots + p_{k_3} > L$$

и так далее. Получим бесконечный ряд, включающий в себя все члены ряда (1.3.1).

Докажем, что он сходится к L. Заметим, что в этом ряде чередуются группы неотрицательных и отрицательных членов. Если частичная сумма этого ряда заканчивается полностью завершённой группой, то отклонение этой частичной суммы от L не превосходит модуля последнего элемента(так как мы добавляем в данную группу члены ровно до тех пор, пока общая сумма "не перейдёт"через число L). Если же частичная сумма заканчивается не полностью завершённой группой, отклонение этой частичной суммы от числа L не превосходит модуля последнего числа предпоследней из групп. Так как выполняется необходимое условие сходимости ряда, то последовательность модулей последних членов групп образуют бесконечно малую последовательность, а значит, этот ряд сходится к L.

□

Теорема 1.4.2 (теорема Коши)**.** *Если данный ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного ряда посредством некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и иметь ту же сумму, что и данный ряд.*

Доказательство. Пусть ряд (1.3.1) - произвольный абсолютно сходящийся и сумма этого ряда равна S.

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k \tag{1.4.1}$$

—ряд, полученный из исходного ряда перестановкой членов, S'_n - частичная сумма этого ряда.

1. Докажем, что (1.4.1) сходится и имеет сумму, равную S.

   Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

Так как ряд (1.3.1) сходится абсолютно, то существует такое число N_0, что

$$\sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем N такое, что все частичные суммы S'_n при $n \geq N$ содержат первые N_0 членов ряда (1.3.1). Тогда разность S'_n и первых N_0 членов ряда (1.3.1) содержит только слагаемые ряда (1.3.1) с номерами большими, чем N_0.

Тогда для всех $n \geq N$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - S\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right)\right| \leq \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right| \leq \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ряд сходится и имеет сумму S.

2. Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k$ сходится абсолютно

   Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ сходится абсолютно, поэтому, из первой части доказательства следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u'_k|$ сходится, а это обозначает абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k$.

$\square$

1.5 Сложение и умножение сходящихся числовых рядов

Рассмотрим ряды

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \\ &\sum_{k=1}^{\infty} v_k, \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

где $u_k, v_k \in \mathbb{R}$. Их n-е частичные суммы равны U_n, V_n соответственно.

Теорема 1.5.1. *Если ряды* (1.5.1) *сходятся и имеют суммы, равные соответственно U, V, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$$

сходится и имеет сумму $U \pm V$.

Доказательство. Для доказательства теоремы запишем следующую цепочку соотношений

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k) = U_n \pm V_n \to U \pm V,$$

при $n \to \infty$. □

Теорема 1.5.2. *Если оба ряда* (1.5.1) *сходятся абсолютно и имеют суммы, соответственно равные U, V, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_k v_l$, где $k, l \in \mathbb{R}$, занумерованных в каком угодно порядке, сходится абсолютно и его сумма равна UV.*

Доказательство. Обозначим через $w_1, w_2, w_3, \ldots$ произведения вида $u_k v_l$, где $k, l \in \mathbb{R}$, занумерованные в каком угодно порядке. Докажем, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|$$

сходится. Обозначим n-тую частичную сумму ряда через S_n.

Среди индексов k и l таких слагаемых, которые входят в S_n найдём наибольший и обозначим через p. Тогда

$$S_n \leq (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_p|)(|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_p|).$$

В правой части неравенства стоят произведения p-х частичных сумм сходящихся рядов с неотрицательными суммами $\sum |u_k|, \sum |v_k|$. Согласно теореме 1.2.1 частичные суммы этих рядов ограничены, следовательно ограничена и последовательность $\{S_n\}$, что доказывает сходимость ряда $\sum |w_i|$, то есть абсолютную сходимость ряда $\sum w_i$. Обозначим сумму последнего ряда через S.

Докажем, что $S = UV$. Так как ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка, в котором мы его суммируем. Любая последовательность и подпоследовательность частичных сумм этого ряда сходятся к числу S, но $S = UV$, так как именно к этому числу сходится подпоследовательность

$$W_n = (u_1 + u_2 + ... + u_n)(v_1 + v_2 + ... + v_n).$$

□

Замечание 1.5.2.1. *В теореме* (1.5.2) *наложено весьма жесткое ограничение абсолютной сходимости каждого из рядов. Ослабить это условие можно, если перемножать ряды по специальному* ***правилу Коши****:*

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right) = \\ &= u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + ... + (u_1v_k + u_2v_{k-1} + ... + u_kv_1) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k, \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

где $w_k = (u_1v_k + u_2v_{k-1} + ... + u_kv_1)$.

Теорема 1.5.3 (теорема Мертенса)**.** *Пусть ряды* (1.5.1) *сходятся и хотя бы один из них сходится абсолютно. Тогда ряд, полученный перемножением этих рядов по правилу Коши* (1.5.2) *сходится к произведению сумм перемноженных рядов.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum v_k$ - хотя бы условно. Обозначим их частичные суммы через U_n, V_n, а их суммы соответственно через U, V. Положим $W_n = w_1 + w_2 + ... + w_n$. Достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = UV$.

Так как ряд $\sum v_k$ - сходится, то его остаток $\alpha_n = V - V_n$ является бесконечно малой, а следовательно, и ограниченной последовательностью, то есть найдётся $M > 0$, что $|\alpha_n| \leq M$, где n.

$$
\begin{aligned}
W_n &= u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + ... + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + ... + u_nv_1) = \\
&= u_1V_n + u_2V_{n-1} + ... + u_nV_1 = \\
&= u_1(V - \alpha_n) + u_2(V - \alpha_{n-1}) + ... + u_n(V - \alpha_1) = U_nV - \beta_n,
\end{aligned}
$$

где $\beta_n = u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + ... + u_n\alpha_1$.

Поскольку $U_n \to U$, где $n \to \infty$, то достаточно показать, что последовательность $\{\beta_n\}$ является бесконечно малой.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum |u_k|$ сходится, то существуют $M_1 > 0$ и m такие, что для всех n справедливы неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k| \leq M_1, \tag{1.5.3}$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{1.5.4}$$

Из того, что $\alpha_n \to 0$, при $n \to \infty$ заключаем, что существует n_1 такой, что для всех $n > n_1$ справедливо неравенство

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1}. \tag{1.5.5}$$

Представим β_n в следующем виде:

$$\beta_n = (u_1\alpha_n + ... + u_m\alpha_{n-m+1}) + (u_{m+1}\alpha_{n-m} + ... + u_n\alpha_1).$$

Будем рассматривать номера n, удовлетворяющие условию $n - m > n_1$, то есть $n > m + n_1$. Применим для слагаемых в первой скобке оценку (1.5.5), затем оценку (1.5.3), а для слагаемых во второй скобке - оценку $|\alpha_k| \leq M$, а затем оценку (1.5.4), получим

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1} \sum_{k=1}^{m} |u_k| + M \sum_{k=m+1}^{n} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1} M_1 + \frac{\varepsilon}{2M} M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $n > N = m + n_1$, то есть $|\beta_n| \to 0$, при $n \to \infty$. □

Замечание 1.5.3.1. *Мы показали, что перемножение по правилу Коши позволяет освободится от требования абсолютной сходимости одного из перемножаемых рядов. Освободится от условия абсолютной сходимости и второго из перемножаемых рядов в общем случае нельзя. Если оба ряда* (1.5.1) *сходятся условно, то почленное перемножение их даже по правилу Коши приводит к расходящемуся ряду.*

1.6 Признаки сходимости произвольных числовых рядов

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{1.6.1}$$

где $u_k \in \mathbb{R}$.

Определение 1.6.1. *Последовательность $\{v_k\}$ назовём* ***последовательностью с ограниченным измерением****, если сходится числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|. \tag{1.6.2}$$

Сумму ряда (1.6.2) *обозначим через V. Число V называется полным измерением последовательности $\{v_n\}$.*

Утверждение 1.6.1. *Всякая последовательность с ограниченным измерением сходится.*

Доказательство. Заметим, что из сходимости ряда (1.6.2) следует сходимость ряда без модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{k+1} - v_k).$$

Обозначим сумму ряда через S, а его n-тую частичную сумму - через S_n. Поскольку

$$S_n = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + ... + (v_{n+1} - v_n) = v_{n+1} - v_1$$

, то $v_{n+1} = S_n + v_1 \to S + v_1$, при $n \to \infty$. Это означает, что последовательность $\{v_n\}$ сходится к пределу $S + v_1$.

□

Покажем, что обратно неверно.

Пример 1.6.1. *Рассмотрим следующий пример:*

$$v_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

.

Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k| = \left|-\frac{1}{2} - 1\right| + \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right| + \ldots + \left|(-1)^k \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right| =$$
$$= 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{n+1} \to \infty$$

при $n \to \infty$. Ряд (1.6.2) расходится, хотя последовательность $\{u_k\}$ сходится.

Утверждение 1.6.2. *Всякая монотонная ограниченная последовательность является* <u>*последовательностью с ограниченным измерением*</u>*.*

Доказательство. Так как последовательность $\{u_k\}$ монотонна и ограничена, то она сходится. Обозначим её через предел v. Обозначим n-тую частичную сумму через S_n. Так как последовательность $\{v_k\}$ является монотонной, то разности $v_{k+1} - v_k$ имеют один знак, но тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k| = \left|\sum_{k=1}^{n} v_{k+1} - v_k\right| = |v_{k+1} - v_1| \to |v - v_1|$$

при $n \to \infty$. Это означает, что ряд (1.6.2) сходится, а последовательность $\{v_n\}$ имеет ограниченное измерение. □

Утверждение 1.6.3. *Пусть* $\{u_k\}$ *и* $\{v_k\}$ *- две произвольные последовательности,* $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, $S_0 = u_0 = 0$, n *и* p *- два произвольных номера. Тогда справедливо тождество*

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n, \qquad (1.6.3)$$

называемое ***тождеством Абеля или преобразованием Абеля****.*

Если переписать тождество (1.6.3) *в виде*

$$\sum_{k=n}^{n+p} v_k \triangle S_k = S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k \triangle v,$$

где $\triangle S_k = S_k - S_{k-1} = u_k, \triangle v_k = v_{k+1} - v_k$, *то достаточно наглядно продемонстрировать связь этого тождества и формулы интегрирования по частям для определённых интегралов.*

Доказательство. Подставим в левую часть формулы (1.6.3) вместо u_k разность $u_k = S_k - S_{k-1}$, и во второй из получаемой при этом сумм заменим индекс суммирования k на $k+1$. Тогда

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} =$$
$$= S_{n+p} v_{n+p} + \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} - S_{n-1} v_n =$$
$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n,$$

откуда следует формула (1.6.3). □

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k. \tag{1.6.4}$$

Обозначим $\{S_n\}$ - последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.6.5}$$

Теорема 1.6.1 (первый признака Абеля)**.** *Пусть выполняются следующие условия:*

1. *Последовательность* $\{S_n\}$ *— ограничена.*
2. $\{v_k\}$ *— бесконечно малая последовательность с ограниченным изменением.*

Тогда ряд (1.6.4) *сходится.*

Доказательство. Выпишем оценки, вытекающие из условий первого признака.

Так как последовательность $\{S_n\}$ - ограничена, то существует $M > 0$ такой, что для всех n справедливо неравенство $|S_n| \le M$.

Поскольку последовательность $\{v_k\}$ сходится к нулю и имеет ограниченное измерение, то зафиксировав $\varepsilon > 0$, найдём такой N, что для всех

$n > N$ и для всех натуральных p справедливы неравенства

$$|v_n| < \frac{\varepsilon}{3M},$$
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Вторая оценка следует из критерия Коши.

Для доказательства сходимости ряда (1.6.4) применим тождество Абеля, воспользуемся критерием Коши и выписанными оценками. При $n \geq N$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1})\right| + |S_{n+p}v_{n+p}| + |S_n v_{n+1}| \leq$$
$$\leq M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_k - v_{k+1}| + |v_{n+p}| + |v_{n+1}|\right) <$$
$$< M\left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon.$$

Таким образом, ряд (1.6.4) сходится. □

Теорема 1.6.2 (второй признак Абеля)**.** *Пусть выполняются следующие условия:*

1. *Ряд* (1.6.5) *- сходится.*

2. $\{v_k\}$ *- последовательность с ограниченным изменением.*

Тогда ряд (1.6.4) *сходится.*

Доказательство. Выпишем оценки, вытекающие из условия второго признака.

Так как ряд (1.6.5) сходится, то существует $M > 0$ такой, что для всех n справедливо неравенство $|S_n| \leq M$.

Так как последовательность $\{v_k\}$ имеет ограниченное измерение, то фиксировав произвольное число $\varepsilon > 0$, найдём число N такое, что для все $n \geq N$ и для всех натуральных p справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Обозначим через S сумму ряда (1.6.5), а предел последовательности $\{v_k\}$ через v(согласно утверждению 1.6.1 последовательность сходится).

Но тогда $S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n \to Sv - Sv = 0$ при $n \to \infty$, и для всех $n > N$ и для всех натуральных p справедливо неравенство

$$|S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Для доказательства сходимости ряда (1.6.4) применим тождество Абеля, воспользуемся критерием Коши и выписанными оценками. При $n \geq N$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1})\right| + |S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}| \leq$$
$$\leq M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_k - v_{k+1}|\right) + |S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}| < M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, ряд (1.6.4) сходится.

□

Теорема 1.6.3 (признак Дирихле-Абеля)**.** *Рассмотрим ряд* (1.6.4)*. Пусть выполняются следующие условия*

1. *Ряд* (1.6.5) *обладает ограниченной последовательностью частичных сумм.*

2. *Последовательность* $\{v_k\}$ *является невозрастающей бесконечно малой последовательностью.*

Тогда ряд (1.6.4) *сходится.*

Доказательство. Первое условие первого признака Абеля выполнена. По утверждению 1.6.2 последовательность $\{v_k\}$ имеет ограниченное изменение, то есть и второе условие первого признака Абеля выполнено. Следовательно, по первому признаку Абеля ряд (1.6.4) сходится. □

Теорема 1.6.4 (признак Лейбница)**.** *Рассмотрим знакочередующийся ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k, \tag{1.6.6}$$

где $p_k > 0$*.*

Если модули членов ряда (1.6.6) *образуют невозрастающую бесконечно малую последовательность, то этот ряд сходится.*

Доказательство. Поставим в соответствие ряду (1.6.6) ряд (1.6.4), где положим $u_k = (-1)^{k-1}$, $v_k = p_k$. Тогда соответствующий ряд (1.6.5) имеет ограниченную последовательность частичных сумм и выполняются все условия признака Дирихле-Абеля, что доказывает сходимость ряда (1.6.6). □

1.7 Бесконечные произведения

Пусть дана бесконечная числовая последовательность $\{v_k\}$. перемножим все её элементы. Получим произведение

$$v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k \cdot \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{1.7.1}$$

Данное выражение называется **бесконечным произведением**, элементы v_k называются **членами данного бесконечного произведения**. Произведение первых n членов данного бесконечного произведения обозначим через P_n и назовём n**-ым частичным произведением**

$$P_n = v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n = \prod_{k=1}^{n} v_k.$$

Определение 1.7.1. *Бесконечное произведение* (1.7.1) *называют* ***сходящимся****, если последовательность его частных произведений* $\{P_n\}$ *имеет конечный предел* P*, отличный от нуля.*

В случае сходимости бесконечного произведения (1.7.1) число P называют **значением бесконечного произведения** и записывают

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Как и для числовых последовательностей, на сходимость бесконечного произведения не влияет удаление конечного числа членов этого произведения(если среди этих членов нет равных нулю). Поскольку бесконечное произведение, у которого хотя бы один член равен нулю, согласно принятому выше определению считаются расходящимся, то мы в дальнейшем исключим из рассмотрения бесконечные произведения, у которых хотя бы один член равен нулю.

Теорема 1.7.1 (необходимое условие сходимости бесконечного произведения)**.** *Если бесконечное произведение* (1.7.1) *сходится, то* $v_k \to 1$ *при* $k \to \infty$*.*

Доказательство. Пусть бесконечное произведение (1.7.1) сходится и имеет значение $P \neq 0$. тогда

$$\lim_{k\to\infty} P_{k-1} = \lim_{k\to\infty} P_k = P \neq 0.$$

Поскольку $v_k = P_k/P_{k-1}$, то существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = P/P = 1$. $\square$

Теорема 1.7.2. *Для того, чтобы бесконечное произведение* (1.7.1) *с положительными членами сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k. \tag{1.7.2}$$

В случае сходимости значение P произведения (1.7.1) *и сумма S ряда* (1.7.2) *связаны формулой $P = e^S$.*

Доказательство. Обозначим через S_n n-ю частичную сумму ряда (1.7.2). Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln v_k = \ln \prod_{k=1}^{n} v_k = \ln P_n.$$

В силу непрерывности показательной функции для всех значений аргумента и непрерывности логарифмической функции для всех положительных значений аргумента, последовательность P_n сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность S_n, причем, если

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \text{ то } \lim_{k\to\infty} P_n = e^S$$

□

При исследовании на сходимость бесконечного произведения оказывается удобным представить это произведение в виде

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k) = (1+u_1)\cdot(1+u_2)\cdot\ldots\cdot(1+u_k)\cdot\ldots. \tag{1.7.3}$$

В соответствии с принятым выше предположением, мы считаем, что $1 + u_k > 0$ для всех k. При этом условии согласно теореме 1.7.2 сходимость бесконечного произведении (1.7.3) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k). \tag{1.7.4}$$

Установим ещё один критерий сходимости бесконечного произведения (1.7.3), но без логарифмов.

Теорема 1.7.3. *Если все u_k, начиная с некоторого k_0 сохраняют один и тот же знак, то для сходимости необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.7.5}$$

Доказательство. Условие $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ является необходимым как для сходимости ряда (1.7.5), так и для сходимости произведения (1.7.3). Считаем это условие выполненным и при доказательстве необходимости и при доказательстве достаточности.

Но из этого условия и из асимптотической формулы $\ln(1+y) = y+o(y)$ при $y \to 0$ вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{u_k + o(u_k)}{u_k} = \lim_{k\to\infty} (1 + o(1)) = 1 \tag{1.7.6}$$

Поскольку по условию теоремы все члены рядов (1.7.4), (1.7.5), начиная с некоторого номера k_0, сохраняет один и тот же знак, то для их сходимости мы можем воспользоваться признаками сравнения.

По второму признаку сравнения из соотношения (1.7.6) следует, что ряд (1.7.4) сходится тогда и только тогда, когда ряд (1.7.5) сходится. □

1.8 Элементарная теория двойных и повторных рядов

Рассмотрим счётное множество числовых последовательностей $(a_{kl})_{k,l=1}^{\infty}$, где k - номер последовательности, а l - номер элемента в последовательности. Или, по другому, рассмотрим матрицу, содержащую бесконечное число строк и бесконечное число столбцов

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \vdots & a_{kl} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{1.8.1}$$

Произведя формальное суммирование элементов матрицы (1.8.1), можно составить из неё различные ряды. Если сначала просуммировать каждую строку матрицы (1.8.1), то получим бесконечную последовательность рядов вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, k = 1, 2, \dots . \tag{1.8.2}$$

Просуммировать эту последовательность, получим формальную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \right). \tag{1.8.3}$$

Эту сумму называют **повторным рядом**.

Определение 1.8.1. *Ряд* (1.8.3) *называют* ***сходящимся****, если сходится каждый из рядов* (1.8.2) *и если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

в котором A_k обозначает сумму k-го ряда.

Другой повторный ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \right) \tag{1.8.4}$$

получается, если просуммировать отдельно каждый столбец матрицы (1.8.1), а затем взять сумму элементов, полученные при этом. Сходимость ряда (1.8.4) определяется аналогично сходимости ряда (1.8.3).

С матрицей (1.8.1) связывают ещё так называем **двойной ряд**

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}. \tag{1.8.5}$$

Определение 1.8.2. *Двойной ряд* (1.8.5) *называется* ***сходящимся****, если при независимом стремлении двух индексов m и n к бесконечности существует конечный предел*

$$S = \lim_{m,n\to\infty} S_{mn}$$

так называемых ***прямоугольных частичных сумм***

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}.$$

При этом предел S называется ***суммой двойного ряда*** (1.8.5)*.*

Из определения получаем, что если двойной ряд получен посредством перемножения двух сходящихся "одинарных" рядов $\sum b_k$ и $\sum c_l$, то есть если члены двойного ряда (1.8.5) равны $a_{kl} = b_k c_l$, то этот двойной ряд сходится, так как

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_k c_l = \left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} c_l\right) \to \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l\right) = S$$

при $n, m \to \infty$.

Утверждение 1.8.1. *Необходимым условием сходимости двойного ряда* (1.8.5) *является <u>стремление к нулю его общего члена</u>, то есть*

$$\lim_{n,m\to\infty} a_{mn} = 0$$

Доказательство. Представим a_{mn} через прямоугольные частичные суммы

$$a_{mn} = S_{mn} - S_{m(n-1)} - S_{(m-1)n} + S_{(n-1)(m-1)} \to S - S - S + S = 0$$

при $n, m \to \infty$ □

Теорема 1.8.1. *Если сходится двойной ряд* (1.8.5) *и если сходятся все ряды по строкам* (1.8.2)*, то сходится и повторный ряд* (1.8.3)*, причём к той же сумме, что и* (1.8.5)*.*

Аналогичное утверждение справедливо для ряда (1.8.4)*.*

Доказательство. Определим сходимость повторного ряда (1.8.3) в терминах последовательности $\{S_{mn}\}$. Так как суммы рядов (1.8.2) равны A_k для каждого k, то устремляя в S_{mn} индекс n к бесконечности, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Обозначим этот предел через φ_m.

Сумма повторного ряда (1.8.3) определяется как предел последовательности $\{\varphi_m\}$ при $m \to \infty$, то есть

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} S_{mn} \right)$$

По условию двойной ряд (1.8.5) сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие m_0 и n_0, что для всех $n \geq n_0$ и всех $m \geq m_0$ справедливо неравенство

$$|S_{mn} - S| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то есть для указанных значений m и n справедливы неравенства

$$S - \frac{\varepsilon}{2} < S_{mn} < S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Устремив n к бесконечности, получим, что для указанного m справедливы неравенства

$$S - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi_m \leq S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой m_0, что для всех $m \geq m_0$ справедливо неравенство

$$|\varphi_m - S| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

А это означает, что существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} S_{mn} \right) = S.$$

□

Замечание 1.8.1.1. *Приведём пример, показывающий, что от условия сходимости всех рядов по строкам* (1.8.2) *в теореме 1.8.1* *отказаться нельзя*(*то есть это условие не вытекает из условия сходимости двойного ряда* (1.8.5)).

Пример 1.8.1. *Рассмотрим следующую бесконечную матрицу*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Двойной ряд для этой матрицы сходится, его сумма равна 0, так как прямоугольные частичные суммы S_{mn} в этом случае равны либо нулю, либо a_{mn} - элементу в правом нижнем углу соответствующего прямоугольника.

А из структуры матрицы следует, что $a_{mn} \to 0$ при $n, m \to \infty$, следовательно, двойной ряд (1.8.5) сходится, а повторный ряд (1.8.3) — расходится, так как все ряды по строкам этой матрицы расходятся.

Так же заметим, что все ряды по столбцам этой матрицы сходятся, следовательно, сходится повторный ряд (1.8.4) и он равен нулю.

Замечание 1.8.1.2. *Покажем, что повторные ряды* (1.8.3) *и* (1.8.4) *могут сходится, если двойной ряд* (1.8.5) *- расходится.*

Пример 1.8.2. *Рассмотрим следующую бесконечную матрицу*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Прямоугольные частичные суммы S_{mn} принимают всего два значения - 0 и 1, причём каждое значение принимается бесконечно много раз, следовательно, двойного предела не существует, двойной ряд (1.8.5) расходится.

Все ряды по строкам сходятся к 0, следовательно, повторный ряд(1.8.3) сходится к 0.

Все ряды по столбцам, кроме первого, сходятся к 0, а первый ряд по столбцам — к 1, следовательно, повторный ряд (1.8.4) сходится к 1.

Теорема 1.8.2. *Если все элементы матрицы* (1.8.1) *неотрицательны, то для сходимости составленного из этой матрицы двойного ряда* (1.8.5) *необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы* $\{S_{mn}\}$ *были ограничены.*

Доказательство.

- **Необходимость**

  Так как S - сумма ряда (1.8.5), то $S_{mn} \le S$ для всех n и m, что означает ограниченность частичных сумм.

- **Достаточность**

  Из ограниченности $\{S_{mn}\}$ вытекает существование точной верхней грани. Обозначим её через $S = \sup\limits_{1 \le m,n < \infty} S_{mn}$. Из определению точной верхней грани следует, что

  1. Для всех m и n справедливо неравенство $S_{mn} \le S$.
  2. Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие m_0 и n_0, что справедливы неравенства
  $$S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \le S.$$

  Тогда, для любых $n \ge n_0$ и $m \ge m_0$ в силу неотрицательности элементов справедливо неравенство $S_{mn} \ge S_{n_0 m_0}$.

  Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие m_0 и n_0, что для всех $m \ge m_0$ и $n \ge n_0$ справедливы неравенства

  $$S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \le S_{mn} \le S < S + \varepsilon,$$

  что означает существование предела

  $$\lim_{m,n \to \infty} S_{mn} = S.$$

□

Определение 1.8.3. *Двойной ряд называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится двойной ряд*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}| \tag{1.8.6}$$

составленный из модулей элементов матрицы (1.8.1)

Теорема 1.8.3. *Если сходится ряд* (1.8.6), *то сходится и ряд* (1.8.5)

Доказательство. Из сходимости ряда (1.8.6) следует ограниченность частичных сумм этого ряда(из теоремы 1.8.2).

Положим
$$p_{kl} = \frac{|a_{kl}| + a_{kl}}{2}, q_{kl} = \frac{|a_{kl}| - a_{kl}}{2}$$

Тогда из очевидных неравенств $0 \leq p_{kl} \leq |a_{kl}|$ и $0 \leq q_{kl} \leq |a_{kl}|$ следует ограниченность и неотрицательность частичных сумм каждого из рядов $\sum p_{kl}$, $\sum q_{kl}$. В силу теоремы 1.8.2 эти ряды сходятся. Обозначим их суммы соотвественно через P и Q. но тогда из соотношения $a_{kl} = p_{kl} - q_{kl}$ для все k и l следует, что двойной ряд (1.8.5) сходится к $P - Q$. □

Далее будем рассматривать и обычный ряд
$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r,$$
членами которого являются занумерованные в произвольном порядке элементы матрицы (1.8.1).

Докажем теорему о взаимосвязи между сходимостью восьми рядов, связанных с матрицей (1.8.1) - двух повторных, двойного и одинарного, а так же соответствующих им рядам из модулей.

Для простоты выпишем исследуемые ряды:

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, k = 1, 2, \dots, \qquad (1.8.7a) \qquad \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|, k = 1, 2, \dots, \qquad (1.8.8a)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, \qquad (1.8.7b) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|, \qquad (1.8.8b)$$
$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}, \qquad (1.8.7c) \qquad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kl}|, \qquad (1.8.8c)$$
$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}, \qquad (1.8.7d) \qquad \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|, \qquad (1.8.8d)$$
$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \qquad (1.8.7e) \qquad \sum_{r=1}^{\infty} |a_r|. \qquad (1.8.8e)$$

Теорема 1.8.4. *Рассмотрим 4 ряда* (1.8.7b) - (1.8.7e). *Если сходится хотя бы один из рядов с модулями* (1.8.8b) - (1.8.8e), *то сходятся все ряды* (1.8.7b) - (1.8.7e) *и суммы их равны между собой.*

Доказательство. Докажем сходимость по цепочке
$$(1.8.8b) \to (1.8.8e), (1.8.7e) \to (1.8.8d), (1.8.7d) \to (1.8.8b), (1.8.7b).$$

1. Докажем, что из сходимости (1.8.8b) следует сходимость (1.8.8e), (1.8.7e).

   Пусть S' — сумма ряда (1.8.8b), S'_{mn} — сумма первых m строк и первых n столбцов матрицы (1.8.1), а частичная сумма ряда (1.8.8e) — S'_r. Для всех номеров m и n справедливо неравенство $S'_{mn} \leq S'$.

   Зафиксируем r. Найдутся такие большие номера m и n, что все члены ряда (1.8.7e), входящие в r-тую частичную сумму ряда, будут содержатся в первых m строках и первых n столбцах матрицы (1.8.1).

   Но тогда справедливы неравенства $S'_r \leq S'_{mn} \leq S'$, то есть для всех r справедливо неравенство $S'_r \leq S'$, следовательно все частичные суммы ряда (1.8.8e) ограничены, следовательно, по теореме 1.2.1 ряд (1.8.8e) сходится.

   Из абсолютной сходимости ряда (1.8.7e) следует его сходимость.

2. Докажем, что из сходимости (1.8.8e) следует сходимость (1.8.8d), (1.8.7d).

   Пусть S'_r — частичная сумма ряда (1.8.8e), S'_{mn} — прямоугольная частичная сумма двойного ряда (1.8.8d). Из сходимости ряда (1.8.8e) следует ограниченность его частичных сумм, то есть существует такой M, что для всех r справедливо неравенство $|S'_r| \leq M$.

   Зафиксируем n и m. Найдётся такой большой номер r, что все члены ряда (1.8.7d), входящие в частичную сумму S'_{mn}, будут содержатся в r-той частичной сумме ряда (1.8.7e).

   Но тогда справедливы неравенства $S'_{mn} \leq S'_r \leq M$, то есть для всех m и n справедливо неравенство $S'_{mn} \leq M$, следовательно все частичные суммы ряда (1.8.7d) ограничены, следовательно, по теореме 1.8.1 ряд (1.8.8d) сходится.

   Из теоремы 1.8.2 вытекает сходимость ряда (1.8.7d).

3. Докажем, что из сходимости (1.8.8d) следует сходимость (1.8.8b), (1.8.7b). Из теоремы 1.8.2 вытекает сходимость ряда (1.8.7d). Для доказательства сходимости рядов (1.8.8b) и (1.8.7b) достаточно доказать сходимость рядов (1.8.8a) и (1.8.7a).

   Зафиксируем k. Пусть S'_n — n-тая частичная сумма k-того ряда (1.8.8a), S'_{mn} — прямоугольная частичная сумма двойного ряда (1.8.8d), S' — сумма этого ряда.

Зафиксируем $m \geq k$. Тогда все члены k-того ряда (1.8.8a), входящие в частичную сумму S'_n, будут содержатся в частичной сумме S'_{mn} ряда (1.8.8d).

Но тогда справедливы неравенства $S'_n \leq S'_{mn} \leq S'$, то есть для всех n справедливо неравенство $S'_n \leq S$, следовательно, все частичные суммы k-того ряда (1.8.8a) ограничены, следовательно, по теореме 1.2.1 все ряды (1.8.8a) сходятся.

Так как двойной ряд (1.8.8d) сходится и все ряды (1.8.8a) сходятся, то по теореме (1.8.1) ряд (1.8.8b) сходится.

Из теоремы 1.8.2 вытекает сходимость ряда (1.8.7d), а из сходимости ряда (1.8.8a) вытекает сходимость ряда (1.8.7a). По теореме (1.8.1) ряд (1.8.7b) сходится.

Теперь докажем, что суммы рядов (1.8.7d) и (1.8.7e) равны. Пусть S - сумма двойного ряда (1.8.7d). Ряд (1.8.7e) получен перестановкой членов ряда (1.8.7d), но так как сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при перестановке членов(теорема Коши), поэтому ряд (1.8.7e) тоже имеет сумму S. $\square$

Замечание 1.8.4.1. *Из доказательства теоремы 1.8.3 следует, что при условии теоремы сходятся все ряды* (1.8.8b) - (1.8.8e) *и имеют равные между собой суммы.*

1.9 Обобщённые методы суммирования расходящихся числовых рядов

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.9.1}$$

Метод суммирования назовём **регулярным**, если сходящийся числовой ряд (1.9.1) имеет и обобщённую сумму, причём эта сумма совпадает с обычной суммой ряда.

Пусть ряд (1.9.1) имеет обобщённую сумму U, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{1.9.2}$$

имеет обобщённую сумму V. Метод суммирования назовём **линейным**, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k). \tag{1.9.3}$$

имеет обобщённую сумму $\alpha U + \beta V$.

Метод 1.9.1 (Метод Чезаро или метод средних арифметических)**.** *Говорят, что ряд* (1.9.1) ***суммируем методом Чезаро****, если существует предел средних арифметических частичных сумм этого ряда*

$$\alpha_n = \frac{S_1 + S_2 + ... + S_n}{n}.$$

Этот предел

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = S. \tag{1.9.4}$$

называется ***обобщённой в смысле Чезаро суммой ряда*** (1.9.1).

Метод Чезаро - линейный и регулярный.

Доказательство. Обозначим частичные суммы, обобщённую сумму и последовательность средних арифметических частичных сумм ряда (1.9.1) через U_k, U, α'_n соотвественно, те же величины ряда (1.9.2) через V_k, V, α''_n соотвественно.

- **Регулярность метода**

  Так как $U_n \to U$ при $n \to \infty$, то по лемме 1.2.7 $\alpha'_n \to U$ при $n \to \infty$.

- **Линейность метода**

  Так как $\alpha'_n \to U$, $\alpha''_n \to V$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha\alpha'_n + \beta\alpha''_n) = \alpha U + \beta V.$$

$\square$

Так же из леммы (1.2.7) следует, что если последовательность $\{S_n\}$ является положительной бесконечно большой, то такой же последовательностью является и $\{\alpha_n\}$. Это означает, что метод Чезаро неприменим к расходящимся рядам с неотрицательными членами.

Метод 1.9.2 (Метод суммирования Пуассона-Абеля)**.** *Рассмотрим вместо ряда* (1.9.1) *ряд для каждого значения* $x \in (0, 1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \dots . \qquad (1.9.5)$$

Если этот ряд сходится для каждого $x \in (0, 1)$ *и если сумма* $S(x)$ *этого ряда имеет левое предельное значение в точке* $x = 1$*, то есть существует предел* $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = S$*, то говорят, что ряд* (1.9.1) ***суммируем методом Пуассона-Абеля****. При этом число* S *называется* ***суммой ряда*** (1.9.1) ***в смысле Пуассона-Абеля****.*

Метод Пуассона-Абеля - линейный и регулярный.

Доказательство. Обозначим сумму ряда (1.9.5) и обобщённую в смысле Пуассона-Абеля сумму ряда (1.9.1) через $U(x)$, U соответственно, те же величины для ряда (1.9.2) через $V(x)$, V соответственно. Если ряд (1.9.1) сходится, то его сумму обозначим через S, а его n-тую частичную сумму через S_n.

- **Линейность метода**

  Для любых чисел α, β справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha u_k + \beta v_k)x^{k-1} = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} + \beta\sum_{k=1}^{\infty} v_k x^{k-1} =$$
$$= \alpha U(x) + \beta V(x) \to \alpha U + \beta V.$$

  при $x \to 1 - 0$.

- **Регулярность метода**

  Так как ряд (1.9.1) сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой и ограниченной, то есть существует такой M что для каждого k справедливо неравенство $|u_k| \le M$. Используя это неравенство, получим

$$|u_k x^{k-1}| \le M x^{k-1}, \quad \forall x \in (0,1).$$

Так как ряд с общим членом x^{k-1} при $x \in (0,1)$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится и ряд (1.9.5). Применим на ряд (1.9.5) тождество Абеля, считая $v_k = x^{k-1}$, $n = 1$, $S_0 = 0$, получим

$$\sum_{k=1}^{p+1} u_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{p} S_k (x^{k-1} - x^k) + S_{p+1} v_{p+1} - S_0 v_1.$$

При $p \to \infty$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}.$$

Вычтем это тождество из следующего очевидного тождества

$$S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1}.$$

Пусть $r_n = S - S_n$. Тогда

$$S - \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1} - (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}$$

или

$$S - S(x) = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}. \qquad (1.9.6)$$

Так как остаток r_k ряда (1.9.1) стремится к нулю при $k \to \infty$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое k_0, что для каждого $k \ge k_0$ справедливо неравенство

$$|r_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксируем ε. Оценим остаток ряда (1.9.6):

$$\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1-x}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Оценим оставшуюся часть ряда (1.9.6). Обозначим через $c = \sum\limits_{k=1}^{k_0-1} |r_k|$ и рассмотрим при $1-\frac{\varepsilon}{2c} < x < 1$. Тогда

$$\left|(1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1}\right| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1} |r_k| = c(1-x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Итого, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$, где $c = \sum\limits_{k=1}^{k_0-1} |r_k|$, что для каждого $x \in (1-\delta, 1)$ справедливо

$$|S - S(x)| = \left|(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| \leq \left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{k_0-1} r_k x^{k-1}\right| + \left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что эквивалентно существовании предела

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) = S.$$

$\square$

2 Функциональные ряды

Определение 2.0.1. *Зафиксируем множество X в m-мерном пространстве E^m, $m \geq 1$, элементами этого множества являются точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$.*

Пусть каждому натуральному числу n ставится в соответствие по определённому закону некоторая функция $f_n(x)$, заданная на множестве X, тогда множество занумерованных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ будем называть ***функциональной последовательностью*** *и обозначать $\{f_n(x)\}$*

Отдельные функции $f_n(x)$ будем называть ***членами или элементами рассматриваемой последовательности****, а множество X, на котором определены функции будем называть* ***областью определения*** *этой последовательности.*

Определение 2.0.2. *Рассмотрим функциональную последовательность $\{u_n(x)\}$, областью определения которой является некоторое множество X. Написанную сумму бесконечного числа элементов функциональной последовательности*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.0.1}$$

будем называть ***функциональным рядом****. $u_n(x)$ будем называть* ***членом функционального ряда****, а множество X -* ***областью определения функционального ряда****.*

Как и в случае числового ряда, сумму первых n членов $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ назовём ***n-той частичной суммой ряда*** (2.0.1)

2.1 Сходимость функциональных последовательностей и рядов

Определение 2.1.1. *Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и рассмотрим числовую последовательность $f_n(x_0)$ (Числовой ряд $\sum f_n(x_0)$). Если эта числовая последовательность (числовой ряд) сходится, то говорят, что функциональная последовательность $f_n(x)$ (функциональный ряд $\sum f_n(x)$)* ***сходится в точке*** *x_0.*

Так же это определение можно записать в виде

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

Множество точек, в которых функциональная последовательность (функциональный ряд) сходится, называется ***областью сходимости этой последовательности (этого ряда)****.*

Определение 2.1.2. *Предположим, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет в качестве области сходимости множество X. Тогда функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ определена $\forall x \in X$ и называется* ***предельной функцией****.*

Аналогично, если функциональный ряд имеет в качестве области сходимости множество X, то функция $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_n(x)$ определена $\forall x \in X$ и называется ***суммой ряда****.*

Пример 2.1.1. *Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, каждая из которых определена на отрезке $[0,1]$ и имеет вид*

$$f_n(x) = x^n. \tag{2.1.2}$$

Областью определения последовательности (2.1.2) является отрезок $[0,1]$.

Отметим, что последовательность (2.1.2) является непрерывной на отрезке $[0,1]$. Этот же отрезок является и областью сходимости функциональной последовательности (2.1.2), так как $f_n(1) = 1$ для всех номеров n, то есть, в точке $x = 1$ последовательность сходится к единице.

Если зафиксировать любое число x_0 из полуинтервала $[0,1)$, то $x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, в любой точке $x \in [0,1)$ последовательность (2.1.2) сходится к нулю.

Итак, функциональная последовательность (2.1.2) на отрезке $[0,1]$ сходится к предельной функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

2.2 Равномерная сходимость. Критерий Коши

Определение 2.2.1. *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ ***сходится к функции*** $f(x)$ ***равномерно на множестве*** X, *если*

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{2.2.1}$$

Замечание 2.2.0.1. *В этом определении весьма существенно то, что* N *зависит только от* ε.

Замечание 2.2.0.2 (Критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей)**.** *Для того, чтобы последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходилась к функции* $f(x)$ *равномерно на множестве* X, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0. \tag{2.2.2}$$

Замечание 2.2.0.3. *Из определения следует, что если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится на всём множестве* X, *то* $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится на любом подмножестве множества* X.

Замечание 2.2.0.4. *Из сходимости последовательности* $\{f_n(x)\}$ *на множестве* X *не вытекает равномерная сходимость* $\{f_n(x)\}$ *на множестве* X.

Пример 2.2.1. *Рассмотрим последовательность* (2.1.2)

$$f_n(x) = x^n.$$

Было доказано, что отрезок $[0, 1]$ является областью сходимости последовательности (2.1.2), то есть на отрезке $[0, 1]$ последовательность (2.1.2) сходится.

Докажем, что эта последовательность не сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Воспользуемся критерием равномерной сходимости. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)| \right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[0,1)} |x^n| \right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Таким образом, последовательность $\{x^n\}$ не сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Отметим, что рассматриваемая последовательность сходится равномерно на отрезке $[0, 1-\delta]$, где $\quad 0 < \delta < 1$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1-\delta]}|x^n|\right) = \\ = \lim_{n\to\infty}(1-\delta)^n = 0.$$

Определение 2.2.2. *Функциональный ряд* (2.0.1) *называется* ***равномерно сходящимся на множестве*** X ***к сумме*** $S(x)$*, если последовательность* $\{S_n(x)\}$ *его частичных сумм сходится равномерно на множестве* X *к предельной функции* $S(x)$.

Теорема 2.2.1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности)**.** *Для того, чтобы функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходилась на множестве* X *к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *нашёлся такой номер* N*, что для всех* $n \geq N$*, всех натуральных чисел* p *и всех точек* $x \in X$ *выполнялось неравенство*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{2.2.3}$$

Доказательство. • **Необходимость**

Пусть $f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X к предельной функции $f(x)$. Тогда, зафиксировав $\varepsilon > 0$, мы найдём такой номер $N = N(\varepsilon)$, что неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

будет справедливо для всех номеров $n \geq N$ и для всех точек x множества X.

Если p - натуральное число, то при $n \geq N$ номер $n+p$ будет удовлетворять условию $n+p \geq N$, а поэтому для всех номеров $n \geq N$, всех натуральных p и всех точек x множества X будет справедливо неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, для всех номеров $n \geq N$, всех натуральных p и всех точек x множества X будет справедливо

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+p}(x) - f(x) - (f_n(x) - f(x))| \leq \\ \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- **Достаточность**

  Пусть для $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что неравенство (2.2.3) будет справедливо для всех номеров $n \geq N$, всех натуральных чисел p и для всех точек x множества X.

  Из неравенства (2.2.3) и критерия Коши для числовых последовательностей следует сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ в каждой точке x множества X и существование в каждой точке x множества X предельной функции $f(x)$.

  Зафиксировав произвольный номер n такой, что $n \geq N$ и произвольную точку x множества X перейдём в неравенстве (2.2.3) к пределу при $p \in \infty$.

  Получим, что для номера $n \geq N$ и произвольной точки x множества X справедливо неравенство

  $$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon.$$

  Это доказывает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на множестве X.

  $\square$

Сформулируем похожий критерий для функциональных рядов

Теорема 2.2.2 (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)**.** *Для того, чтобы функциональный ряд* (2.0.1) *равномерно сходился на множестве X к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ нашёлся такой номер N, что для всех номеров $n \geq N$, всех натуральных чисел p и всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon. \tag{2.2.4}$$

Эта теорема является следствием предыдущей теоремы.

Следствие 2.2.2.1. *Если функциональный ряд* (2.0.1) *сходится равномерно на множестве X, то функциональная последовательность $\{u_k(x)\}$ сходится равномерно к нулю на этом множестве.*

Для доказательства этого утверждения достаточно положить в соотношении (2.2.4) $p = 1$.

2.3 Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов

2.3.1 Признак Вейерштрасса

Теорема 2.3.1 (признак Вейерштрасса)**.** *Пусть функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.3.1}$$

определён на множестве X пространства E^m. Если существует сходящийся числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{2.3.2}$$

такой, что для всех точек x и для всех номеров k справедливо неравенство

$$|u_k(x)| \leq c_k, \tag{2.3.3}$$

то функциональный ряд (2.3.1) *сходится равномерно на множестве X.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как числовой ряд (2.3.2) сходится, то в силу критерия Коши сходимости числового ряда найдётся номер N такой, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \tag{2.3.4}$$

для всех номеров $n \geq N$ и всех натуральных p.

Из неравенств (2.3.3) и (2.3.4) следует, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

для всех номеров $n \geq N$, всех натуральных p и всех точек x множества X. В силу критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности ряд (2.3.1) равномерно сходится. □

Замечание 2.3.1.1. *Признак Вейерштрасса кратко можно сформулировать так: функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом.*

Замечание 2.3.1.2. *Признак Вейерштрасса является достаточным, но не необходимым признаком равномерной сходимости функционального ряда.*

Пример 2.3.1. *Рассмотрим функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.$$

Он сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$ к сумме $\ln(1 + x)$, поскольку разность между $\ln(x + 1)$ и n-ой частичной суммой этого ряда есть остаточный член $R_{n+1}(x)$ в форме Маклорена для функции $ln(1+x)$ для всех x из отрезка $[0, 1]$, который удовлетворяет неравенству

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Однако, для данного функционального ряда не существует на отрезке $[0, 1]$ мажорирующего его сходящегося числового ряда, так как для каждого номера k

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| = \frac{1}{k},$$

а числовой ряд $\sum \frac{1}{k}$ расходится.

2.3.2 Признак Дирихле-Абеля

Определение 2.3.1. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется* ***равномерно ограниченной на множестве*** *X, если существует такое вещественное число $M > 0$, что для всех номеров n и всех точек x множества X справедливо неравенство*

$$|f_n(x)| \leq M$$

.

Определение 2.3.2. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется* ***монотонной на множестве*** *X, если для каждой точки x_0 из множества X числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ является невозрастающей или для каждой точки x_0 из множества X последовательность $\{f_n(x_0)\}$ является неубывающей.*

Определение 2.3.3. *Функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ называется последовательностью,* ***обладающей на множестве X равномерно ограниченным изменением****, если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \tag{2.3.5}$$

сходится равномерно на множестве X.

Утверждение 2.3.1 (необходимое условие для функциональной последовательности, обладающей на некотором множестве равномерно ограниченный изменением)**.** *Если последовательность $\{v_n(x)\}$ имеет на множестве X равномерно ограниченное изменение, то она равномерно сходится на этом множестве.*

Доказательство. Из равномерной сходимости ряда (2.3.5) и критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда следует равномерная сходимость на множестве X ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{k+1}(x) - v_k(x)).$$

Последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$, тем самым, сходится равномерно на множестве X. А так как общий член последовательности $\{v_n(x)\}$ можно представить в виде $v_n(x) = S_{n-1}(x) + v_1(x)$, то последовательность $\{v_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве X. □

Утверждение 2.3.2 (достаточное условие для функциональной последовательности, обладающей на некотором множестве равномерно ограниченный изменением)**.** *Всякая монотонная равномерно сходящаяся на множестве X функциональная последовательность явлется последовательностью с равномерно ограниченным на этом множестве изменением.*

Доказательство. По условию теоремы последовательность $\{v_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве X к некоторой функции $v(x)$. Из монотонности последовательности $\{v_n(x)\}$ на множестве X следует, что для каждого номера n разность $v_{n+1}(x) - v_n(x)$ неотрицательна во всех точках x множества X(или для каждого номера n эта разность неположительна во всех точках x множества X). Но тогда для частичных сумм ряда (2.3.5) получим следующее представление

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1}(x) - v_k(x)) \right| = |v_{n+1}(x) - v_1(x)|.$$

Получаем, что последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве X к функции $|v(x) - v_1(x)|$. Следовательно, ряд (2.3.5) сходится равномерно на множестве X и последовательность $\{v_n(x)\}$ имеет равномерно ограниченное на этом множестве изменение. □

Рассмотрим на некотором множестве X функциональный ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x). \tag{2.3.6}$$

Обозначим через $\{S_n\}$ последовательность частичных сумм ряда (2.3.1).

Теорема 2.3.2 (первый признак Абеля)**.** *Пусть*

1. *Последовательность* $\{S_n(x)\}$ *равномерно ограниченна на множестве* X*.*

2. *Функциональная последовательность* $\{v_n(x)\}$ *является бесконечно малой последовательностью с равномерно ограниченным на множестве* X *изменением.*

Тогда ряд (2.3.6) *сходится равномерно на множестве* X*.*

Доказательство. Так как последовательность $\{S_n\}$ равномерно ограничена на X, то существует такое число $M > 0$, что для каждого номера n и всех точек x множества X верно $|S_n(x)| \le M$.

Так как последовательность $\{v_n(x)\}$ равномерно стремится к нулю и имеет на множестве X равномерно ограниченное изменение, то применим критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такой номер N, что для всех $n \ge N$, всех натуральных p и всех точек x множества X справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \\ &\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Применим тождества Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}, \qquad p \ne 1. \tag{2.3.8}$$

Получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x)(v_k(x)-v_{k+1}(x))\right| + \\ + |S_{n+p}(x)||v_{n+p}(x)| + |S_n(x)||v_{n+1}(x)|.$$

Учитывая, что для всех номеров n и всех точек x множества X справедливо неравенство $|S_n(x)| \le M$, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} M|(v_k(x)-v_{k+1}(x))| + \\ + M|v_{n+p}(x)| + M|v_{n+1}(x)|.$$

Полагая $n \ge N$, из последнего неравенства и применив оценки (2.3.7), получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \le M\left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon,$$

справедливое для всех номеров $n \ge N$, всех натуральных p и всех точек x множества X, а это значит, что в силу критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда ряд (2.3.6) сходится. □

Теорема 2.3.3 (второй признак Абеля)**.** *Пусть*

1. *Функциональный ряд* (2.3.1) *сходится равномерно на множестве X.*

2. *Функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ имеет равномерно ограничение изменение на множестве X и равномерно ограничена на этом множестве.*

Тогда ряд (2.3.6) *сходится равномерно на множестве X.*

Доказательство. Так как функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ является равномерно ограниченной на множестве X, то существует число $M > 0$ такое, что для всех номеров n и всех точек x множества X верно $|v_n(x)| \le M$.

По условию второго признака Абеля последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ ряда (2.3.1) может не быть равномерно ограниченной на множестве X. Поэтому рассмотрим модифицированные суммы

$$\hat{S}_n(x) = \sum_{k=N}^{n} u_k(x), \qquad n \ge N,$$

где номер N выбираем следующим образом.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Ряд (2.3.1) по условию теоремы сходится равномерно на множестве X, поэтому, согласно критерию Коши равномерной сходимости для функционального ряда, найдётся такой номер N, что для всех номеров $n \geq N$ и всех точек x множества X справедливо

$$|\hat{S}_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{2.3.9}$$

Зафиксируем номер N. В силу критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда (2.3.5) на множестве X для числа $M > 0$ найдётся номер $N_1 > N$ такой, что для всех $n \geq N_1$, для любого натурального p и для любой точки x множества X справедливо

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < M. \tag{2.3.10}$$

Поскольку для всех номеров $n > N$ справедливо $u_n(x) = \hat{S}_n(x) - \hat{S}_{n-1}(x)$, то тождество Абеля (2.3.8) после замены S_n на $\hat{S}_n$ не изменится. Получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \hat{S}_k(v_k - v_{k+1}) + \hat{S}_{n+p} v_{n+p} - \hat{S}_n v_{n+1}.$$

Тогда для всех номеров n и p и всех x из множества X справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x)\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \hat{S}_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x))\right| + \\ + |\hat{S}_{n+p}(x)||v_{n+p}(x)| + |\hat{S}_n(x)||v_{n+1}(x)|.$$

Полагая $n \geq N_1$, из последнего неравенства, оценок (2.3.9), (2.3.10) и неравенства $|v_n(x)| \leq M$ получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{k=n+1}^{n+p} |(v_k(x) - v_{k+1}(x))| + \\ + \frac{\varepsilon}{3M}|v_{n+p}(x)| + \frac{\varepsilon}{3M}|v_{n+1}(x)| = \frac{\varepsilon}{3M}M + \frac{\varepsilon}{3M}M + \frac{\varepsilon}{3M}M = \varepsilon.$$

Отсюда, в силу критерия Коши доказываем равномерную на множестве X сходимость функционального ряда (2.3.6). □

Из первого признака Абеля можно вывести следующее следствие

Теорема 2.3.4 (признак Дирихле-Абеля)**.** *Пусть*

1. *Функциональный ряд* (2.3.1) *обладает равномерно ограниченной на множестве* X *последовательностью частичных сумм.*

2. *Функциональная последовательность* $\{v_n(x)\}$ *монотонна на множестве* X *и равномерно стремится к нулю на этом множестве.*

Тогда функциональный ряд (2.3.6) *сходится равномерно на множестве* X.

Доказательство. Достаточно заметить, что так как последовательность $\{v_n(x)\}$ - монотонна, то согласно достаточному условию равномерно ограниченного изменения получаем, что последовательность $\{v_n(x)\}$ обладает равномерно ограниченным изменением на множестве X, следовательно согласно первому признаку Абеля ряд (2.3.6) сходится равномерно на множестве X. □

2.3.3 Признак Дини

Теорема 2.3.5 (признак Дини)**.** *Пусть последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к предельной функции* $f(x)$ *на некотором множестве* X *пространства* E^m *и пусть выполняются следующие 4 условия:*

1. *множество* X *- компакт(ограниченное замкнутое множество),*

2. *последовательность* $\{f_n(x)\}$ *является монотонной на множестве* X*,*

3. *для каждого номера* n *функция* $f_n(x)$ *является непрерывной на множестве* X*,*

4. *функция* $f(x)$ *является непрерывной на множестве* X.

Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно на* X.

Доказательство. Не ограничивая общности предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает на замкнутом ограниченном множестве X(в случае, если $\{f_n(x)\}$ не возрастает, то домножим каждый элемент последовательности на число -1). Положим $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Последовательность $\{r_n(x)\}$ обладает следующими свойствами:

1. все $r_n(x)$ неотрицательны и непрерывны на множестве X,

2. $\{r_n(x)\}$ не возрастает на множестве X,

3. в каждой точке x множества X существует предел

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся хотя бы один номер n такой, что $r_n(x) < \varepsilon$ для всех x из множества X(Так как $r_n(x)$ неотрицателен и $\{r_n(x)\}$ не возрастает, то неравенство $r_n(x) < \varepsilon$ будет верно для последующих n).

Допустим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ не найдётся ни единого номера n такого, что $r_n(x) < \varepsilon$ для любого x из множества X.

Тогда для любого номера n найдётся хотя бы одна точка x_n множества X такая, что

$$r_n(x_n) \geq \varepsilon. \tag{2.3.11}$$

В силу ограниченности множества X и теоремы Больцано-Вейерштрасса из последовательности точек $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность точек $\{x_{n_k}\}$, которая сходится к x_0, принадлежащая в силу замкнутости множества X этому множеству. Так как каждая функция $r_m(x)$ является непрерывной в точке x_0, то для любого номера m справедливо

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0). \tag{2.3.12}$$

С другой стороны, выбрав для каждого номера m превосходящий его номер n_k получим(в силу невозрастания $\{r_n(x)\}$)

$$r_m(x_{n_k}) \geq r_{n_k}(x_{n_k}).$$

Сопоставив это неравенство с оценкой (2.3.11), получим

$$r_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon.$$

Отсюда, а так же из (2.3.12) следует, что $r_m(x_0) \geq \varepsilon$, но $r_m(x_0) \to 0, m \to \infty$. Из полученного противоречие следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся хотя бы один номер n такой, что $r_n(x) < \varepsilon$ для всех x из множества X. □

Замечание 2.3.5.1. *Признак Дини является достаточным. Здесь все 4 условия являются существенными.*

Пример 2.3.2. *Рассмотрим невозрастающую функциональную последовательность $f_n(x) = x^n$ на некотором множестве $[0, 1)$.*

Предельная функция $f(x) = 0, x \in [0, 1)$, сходимость неравномерная, так как $\sup\limits_{x \in [0,1)} |f_n(x) - f(x)| = 1$.

Пример 2.3.3. *Рассмотрим последовательность*

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin \pi n x, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Предельная функция $f(x) = 0, x \in [0, 1]$, сходимость неравномерная, так как $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$.

Пример 2.3.4. *Рассмотрим последовательность*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & x \in [0, 1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Предельная функция $f(x) = 0$, сходимость неравномерная, так как $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$.

Пример 2.3.5. *Рассмотрим последовательность* $f_n(x) = x^n$ *на отрезке* $[0, 1]$.

Предельная функция равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

сходимость неравномерная, так как $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$.

Приведём эквивалентную формулировку теоремы Дины для функциональных рядов.

Теорема 2.3.6 (признак Дини для функциональных рядов)**.** *Пусть функциональный ряд* (2.3.1) *сходится к сумме* $S(x)$ *на некотором множестве* X *пространства* E^m *и пусть выполняются следующие 4 условия:*

1. *множество* X *- компакт(ограниченное замкнутое множество),*
2. *члены ряда* $u_k(x)$ *неотрицательны на множестве* X*,*
3. *для каждого номера* k *функция* $u_k(x)$ *является непрерывной на множестве* X*,*
4. *функция* $S(x)$ *является непрерывной на множестве* X*.*

Тогда ряд (2.3.1) *сходится равномерно на* X*.*

2.4 Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

2.4.1 Почленный переход к пределу

Рассмотрим произвольную точку a пространства E^m и произвольное множество X пространства E^m, для которого эта точка является предельной(при этом точка a может сама не принадлежать множеству X).

Теорема 2.4.1. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.4.1}$$

сходится равномерно на множестве X к сумме $S(x)$ и у всех членов этого ряда существует в точке a предел $\lim\limits_{x\to a} u_k(x) = b_k$, то и сумма ряда $S(x)$ имеет в точке a предел, причём

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to a} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{2.4.2}$$

то есть, символ $\lim$ *предела и символ* $\sum$ *можно поменять местами(или, как говорят, к пределу можно* ***переходить почленно****).*

Замечание 2.4.1.1. *Соотношение* (2.4.2) *можно записать в виде*

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} S_n(x)\right),$$

где $\{S_n(x)\}$ последовательность частичных сумм ряда (2.4.1).

Замечание 2.4.1.2. *Утверждения, аналогичные этой теореме, справедливы и для односторонних пределов $x \to a-0$, $x \to a+0$. Схема доказательства не изменяется.*

Доказательство. Сначала докажем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. В силу критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда, применённого на ряд (2.4.1), получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.4.3}$$

для всех номеров $n \ge N$, всех натуральных p и всех точек x множества X.

Считая в неравенстве (2.4.3) фиксированными номера n и p и переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to a$, получим

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

В силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Оценим разность $S(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ для всех точек x множества X для достаточно малой окрестности точки a. Так как $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ для всех точек x множества X, то для любого номера n справедливо тождество

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Из которого получаем неравенство

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|. \quad (2.4.4)$$

справедливое для всех точек x множества X.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum b_k$ сходится, а ряд (2.4.1) сходится равномерно на множестве X, то для зафиксированного $\varepsilon > 0$ найдётся номер n такой, что для всех точек x множества X

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.4.5)$$

Так как предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то для зафиксированного $\varepsilon > 0$ и выбранного n можно указать $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.4.6)$$

для всех точек x множества X, удовлетворяющих условию $0 < \rho(x,a) < \delta$.

Из оценок (2.4.4), (2.4.5), (2.4.6) следует, что для всех таких x справедливо

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| < \varepsilon$$

Это доказывает существование предела $S(x)$ в точке a, а следовательно, и справедливость равенства (2.4.2). □

В терминах функциональных последовательностей эта теорема звучит так

Теорема 2.4.2. *Если функциональный последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве X к предельной функции $f(x)$ и все элементы этой последовательности имеют предел в точке a, то и предельная функция $f(x)$ имеет в точке a предел, причём*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} u_k(x)\right). \qquad (2.4.7)$$

то есть, символ $\lim\limits_{n\to\infty}$ предела последовательности и символ $\lim\limits_{x\to a}$ предела функции можно поменять местами(или, как говорят, к пределу можно ***переходить почленно****).*

Замечание 2.4.2.1. *Условие равномерной сходимости в теоремах 2.4.1 и 2.4.2 существенно. Пусть $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. Тогда $f(x) = 0$ при $x \in [0,1)$, $f(1) = 1$, сходимость неравномерная и*

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty}(1) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1-0} f_n(x)\right).$$

Следствие 2.4.2.1. *Если в условиях теоремы 2.4.1 дополнительно потребовать, чтобы точка a принадлежала множеству X и чтобы все члены $u_k(x)$ функционального ряда* (2.4.1) *были непрерывны в точке a, то и сумма $S(x)$ этого ряда будут непрерывны в точке a.*

В самом деле, в этом случае $b_k = u_k(a)$ и равенство (2.4.2) принимает вид

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = S(a)$$

а это и означает непрерывность суммы $S(x)$ в точке a.

Применяя это следствие в каждой точке некоторого плотного в себе множества X(каждая точка этого множества является предельной этого множества), приходим к следующему утверждению:

Теорема 2.4.3. *Если все члены функционального ряда(функциональной последовательности) непрерывны на плотном в себе множестве X и если этот функциональный ряд(эта функциональная последовательность) сходится равномерно на множестве X, то и сумма указанного ряда (предельная функция указанной последовательности) непрерывна на множестве X.*

Замечание 2.4.3.1. *Условие равномерной сходимости существенно. Пример, приведённый в замечании 2.4.2.1 показывает, что если функциональная последовательность, состоящая из непрерывных на отрезке функций, сходится неравномерно на отрезке, то предельная функция этой последовательности может оказаться разрывной на этом множестве.*

2.4.2 Интегрируемость

Теорема 2.4.4. *Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к предельной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и каждая функция $f_n(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда и предельная функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке, причём указанную последовательность можно интегрировать на отрезке $[a, b]$* ***почленно****, то есть существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.4.8}$$

Доказательство. Сначала докажем, что предельная функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Отметим, что функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, так как каждая функция $f_n(x)$ ограничена на $[a, b]$ и в силу равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших n справедливы неравенства $f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Достаточно доказать, что для предельной функции $f(x)$ найдётся хотя бы одно разбиение отрезка $[a, b]$ для верхней суммы S и нижней суммы s которых справедливо $S - s < \varepsilon$.

Для этого достаточно показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер n, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ верхняя сумма S и нижняя сумма s функции $f(x)$ и верхняя сумма S_n и нижняя сумма s_n функции $f_n(x)$ связаны неравенством

$$S - s \le (S_n - s_n) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4.9}$$

В самом деле, если для любого разбиения будет доказана справедливость для некоторого номера n равенства (2.4.9), то в силу интегрируемости на $[a, b]$ функции $f_n(x)$ разбиение можно выбрать так, что будет справедливо неравенство $S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{2}$, из которого, в силу (2.4.9) следует $S - s < \varepsilon$, что и завершает доказательство интегрируемости функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Рассмотрим произвольное разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$ и обозначим символом $\omega_k(f_n)$ колебание на k-ом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функции $f_n(x)$(разность между точной верхней и точной нижней гранью данной функции на данном отрезке), а символом $\omega_k(f)$ колебание на том же отрезке предельной функции $f(x)$.

Неравенство (2.4.9) будет доказано, если мы установим, что для достаточно большого числа n справедливо

$$\omega_k(f) \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.4.10}$$

В самом деле, умножая (2.4.10) на длину $\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$ частичного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ и суммируя это неравенство по всем k получим неравенство (2.4.9). Установим для любого частичного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ и для любого достаточно большого номера n справедливость неравенства (2.4.10).

Для любого номера n и любых двух точек x' и x'' отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо тождество

$$f(x') - f(x'') \equiv (f(x') - f_n(x')) + (f_n(x') - f_n(x'')) + (f_n(x'') - f(x'')),$$

из которого вытекает неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')|. \tag{2.4.11}$$

В силу равномерной на отрезке $[a, b]$ сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся номер n такой, что для всех точек x отрезка $[a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Используя в правой части (2.4.11) это неравенство, взятое для точки $x = x'$ и $x = x''$, получим из (2.4.11)

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f_n(x') - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Так как при любом расположении точек x' и x'' на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо неравенство $|f_n(x') - f_n(x'')| \leq \omega_k(f_n)$, то

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.4.12}$$

Заметим, что неравенство (2.4.12) справедливо для любых $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$. Обозначая точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(x)$ на указанном отрезке соотвественно через M_k и m_k, в силу определения определения точных граней найдём две последовательности точек $\{x'_p\}$ и $\{x''_p\}$ отрезка такие, что $\lim\limits_{p\to\infty} f(x'_p) = M_k$, $\lim\limits_{p\to\infty} f(x''_p) = m_k$. В силу (2.4.12) получим для любого p

$$|f(x'_p) - f(x''_p)| \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $p \to \infty$ и замечая, что предел левой части равен $M_k - m_k = \omega_k(f)$, получим нужное неравенство (2.4.10).

Остаётся доказать второе утверждение о том, что интегрирование последовательности $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ можно производить почленно. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что для всех $n \geq N$ справедливо

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Но это вытекает из того, что в силу равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует номер N такой, что для всех x из отрезка $[a, b]$ и для всех номеров $n \geq N$ справедливо

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Используя эту оценку, получаем

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \right| = \left| \int\limits_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq$$
$$\leq \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int\limits_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Приведём формулировку этой теоремы в терминах функциональных рядов.

Теорема 2.4.5. *Пусть функциональный ряд* (2.4.1) *сходится равномерно к своей сумме $S(x)$ на отрезке $[a, b]$ и каждый член этого ряда $u_n(x)$ представляет собой функцию, интегрируемую на отрезке $[a, b]$. Тогда и сумма $S(x)$ интегрируема на этом отрезке, причём указанный ряд можно интегрировать на отрезке $[a, b]$ почленно, то есть можно утверждать, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Под словами "функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$" будем подразумевать, что функция $f(x)$ имеет обычную производную в каждой точке внутренней точке отрезка $[a, b]$, правую производную $f'(a+0)$ в точке a и левую производную $f'(b-0)$ в точке b.

2.4.3 Дифференцируемость

Теорема 2.4.6. *Пусть каждая функция $f_n(x)$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ имеет производную на отрезке $[a, b]$, причём последовательность производных $\{f_n'(x)\}$ сходитя равномерно на отрезке $[a, b]$, а сама последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке x_0 отрезка $[a, b]$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к некоторой предельной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, эта функция имеет производную $f'(x)$ всюду на этом отрезке, причём последовательность можно дифференцировать на этом отрезке* ***почленно***

$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x). \tag{2.4.13}$$

Доказательство. Докажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Из сходимости числовой последовательности $\{f_n(x_0)\}$ и из равномерной на отрезке $[a, b]$ сходимости $\{f_n'(x)\}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f_{n+p}'(x_0) - f_n'(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.4.14}$$

для всех $n \geq N$ всех натуральных p и для всех x из отрезка $[a, b]$(критерий Коши).

Пусть x - отличная от x_0 точка на отрезке $[a, b]$. Так как функция $(f_{n+p}(t) - f_n(t))$ при любых n и p непрерывна и дифференцируема на отрезке, ограниченном точками x и x_0, то по теореме Лагранжа найдётся точка ξ между x и x_0 такая, что

$$(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)) = (f_{n+p}(\xi) - f_n(\xi))(x - x_0).$$

Учитывая оценки (2.4.14) и $|x - x_0| \le b - a$, получим

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le |(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))| + |(f_{n+p}(\xi) - f_n(\xi))(x - x_0)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b - a) = \varepsilon.$$

для любого x из $[a, b]$, для любого p и любого натурального p.

Из критерия Коши следует, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к некоторой предельной функции $f(x)$.

Остаётся доказать, что эта предельная функция в любой фиксированной точке x отрезка $[a, b]$ имеет производную(в граничных точках одностороннюю производную) и эта производная является предельной функцией последовательности $\{f'_n(x)\}$.

Зафиксируем произвольную точку x отрезка $[a, b]$ и по ней число $\delta > 0$ такое, что δ-окрестность точки x целиком содержалась в $[a, b]$(если x - граничная точка, то под δ-окрестностью будем подразумевать $[a, a + \delta]$ для точки a и $[b - \delta, b]$ для точки b).

Обозначим $\triangle X$ множество всех чисел $\triangle x$, удовлетворяющих условию $0 < |\triangle x| < \delta$ при $a < x < b$, условию $0 < \triangle x < \delta$ при $x = a$ и условию $-\delta < |\triangle x| < 0$ при $x = b$ и докажем, что последовательность функций аргумента $\triangle x$

$$\varphi_n(\triangle x) = \frac{f_n(x + \triangle x) - f_n(x)}{\triangle x} \tag{2.4.15}$$

сходится равномерно на указанном множестве $\triangle X$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу критерия Коши равномерной сходимости последовательности $\{f'_n(x)\}$ найдётся номер N такой, что

$$|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \tag{2.4.16}$$

для любого $n \ge N$, для любого натурального p и для всех x из $[a, b]$.

Зафиксируем произвольное $\triangle x$ из множества $\triangle X$. Так как при любых фиксированных n и p функция $(f_{n+p}(x) - f_n(x))$ непрерывна и дифференцируема на отрезке, ограниченной точками x и $x + \triangle x$, то применим теорему Лагранжа. Согласно этой теореме найдётся такоя точка ξ между x и $x + \triangle x$ такая, что

$$(f_{n+p}(x + \triangle x) - f_n(x + \triangle x)) - (f_{n+p}(x) - f_n(x)) = (f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi))(\triangle x).$$

Пусть $\xi = x + \theta\triangle x$, где $|\theta| < 1$. Тогда

$$\frac{(f_{n+p}(x+\triangle x) - f_n(x+\triangle x))}{\triangle x} - \frac{(f_{n+p}(x) - f_n(x))}{\triangle x} =$$
$$= f'_{n+p}(x+\theta\triangle x) - f'_n(x+\theta\triangle x).$$

Используя обозначение (2.4.15), получим

$$\varphi_{n+p}(\triangle x) - \varphi_n(\triangle x) = f'_{n+p}(x+\theta\triangle x) - f'_n(x+\theta\triangle x).$$

Из этого равенства и из (2.4.16) получаем, что

$$|\varphi_{n+p}(\triangle x) - \varphi_n(\triangle x)| < \varepsilon$$

для любого $\triangle x$ из $\triangle X$, любого $n \geq N$ и любого натурального p. В силу критерия Коши последовательность $\{\varphi_n(\triangle x)\}$ сходится равномерно на множестве $\triangle X$. Но тогда так как

$$\lim_{\triangle x \to 0} \varphi_n(\triangle x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f_n(x+\triangle x) - f_n(x)}{\triangle x} = f'_n(x),$$

то применив теорему 2.4.2, получим, что

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \Big(\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\triangle x)\Big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{\triangle x \to 0} \varphi_n(\triangle x)\right) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

это доказывает, что производная предельной функции $f(x)$ в точке x существует и справедливо равенство (2.4.13). $\square$

В терминах функциональных рядов эта теорема формулируется так

Теорема 2.4.7. *Пусть каждый член $u_k(x)$ ряда (2.4.1) имеет производную на отрезке $[a, b]$, причём ряд из производных $\sum u'_k(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, а сам ряд (2.4.1) сходится хотя бы в одной точке x_0 отрезка $[a, b]$. Тогда ряд (2.4.1) сходится равномерно к некоторой сумме $S(x)$ на отрезке $[a, b]$, эта сумма имеет производную $S'(x)$ всюду на этом отрезке, а сам ряд (2.4.1) можно дифференцировать на этом отрезке* ***почленно***

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

Замечание 2.4.7.1. *В этих теоремах предполагается только существование на отрезке $[a, b]$ производной у каждого члена $f_n(x)$ функциональной последовательности. Ни ограниченность, ни непрерывность указанной производной не предполагается.*

Замечание 2.4.7.2. *Если дополнительно предположить непрерывность производной у каждого члена последовательности на отрезке $[a, b]$, то в силу теоремы 2.4.3 и предельная функция $f(x)$ будет иметь производную, непрерывную на отрезке $[a, b]$.*

Из этой теоремы легко вытекает утверждение о существовании первообразной у предельной функции.

Теорема 2.4.8. *Пусть каждая функция $f_n(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a, b]$, а последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на этом отрезке к предельной функции $f(x)$. Тогда и предельная функция имеет первообразную на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Обозначим через $\psi_n(x)$ некоторую первообразную функции $f_n(x)$ на отрезке $[a, b]$. Фиксируем произвольную точку x_0 на этом отрезке и рассмотрим функцию $\varphi_n(x) = \psi_n(x) - \psi_n(x_0)$, которая также является первообразной функции $f_n(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Так как $\varphi_n(x_0) = 0$, производная $\varphi'_n(x) = f_n(x)$, а по условию последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к предельной функции $f(x)$, то последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится в точке $x_0 \in [a, b]$ и последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к предельной функции $f(x)$. Поэтому для последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ выполняются все условия теоремы 2.4.6.

В силу теоремы (2.4.6) получим, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к некоторой предельной функции $\varphi(x)$, эта функция дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\varphi'(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi'_n(x) = f(x)$$

для всех x на отрезке $[a, b]$

то есть функция $f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a, b]$. □

Сформулируем эту теорему в терминах функциональных рядов

Теорема 2.4.9. *Пусть каждый член ряда* (2.4.1) $u_k(x)$ *имеет первообразную на отрезке $[a, b]$, а ряд* (2.4.1) *сходится равномерно на этом отрезке к сумме $S(x)$. Тогда и сумма имеет первообразную на отрезке $[a, b]$.*

2.5 Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей

Пусть каждая функция $f_n(x)$ из функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ и предельная функция $f(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда и функция $(f_n(x)-f(x))^2$ также является интегрируемой на отрезке $[a,b]$.

Определение 2.5.1. *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ ***сходится в среднем на отрезке*** $[a,b]$ ***к функции*** $f(x)$, *если существует равный нулю предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2dx = 0. \tag{2.5.1}$$

Определение 2.5.2. *Будем говорить, что функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.5.2}$$

сходится в среднем на отрезке $[a,b]$ ***к сумме*** $S(x)$, *если последовательность частичных сумм этого ряда сходится в среднем на отрезке* $[a,b]$ *к предельной функции* $S(x)$.

Замечание 2.5.0.1. *Из этих определений следует, что если функциональная последовательность сходится в среднем на отрезке* $[a,b]$ *к предельной функции* $f(x)$, *то эта последовательность сходится в среднем на любом отрезке* $[c,d]$ *к предельной функции* $f(x)$, *где* $[c,d]\subset[a,b]$.

Утверждение 2.5.1. *Если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно к функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$, *то эта последовательность сходится в среднем к* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу равномерной сходимости на отрезке $[a,b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ для положительного числа $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ найдётся такое число N, что для всех $n\geq N$ и для всех точек x отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство

$$|f_n(x)-f(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}.$$

Но тогда для всех $n \geq N$ справедливо

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. □

Заметим, что обратное неверно:

Пример 2.5.1. *Рассмотрим пример*

$$f_n(x) = \begin{cases} sin\pi nx, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на отрезке $[0, 1]$ к функции $f(x) \equiv 0$, но сходимость неравномерная. Исследуем последовательность на сходимость в среднем на $[0, 1]$.

$$\int_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} sin^2 \pi nx dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Это означает сходимость в среднем на отрезке $[0, 1]$ последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$.

Утверждение 2.5.2. *Из того, что последовательность сходится в среднем на некотором отрезке не следует, что последовательность сходится на этом отрезке(хотя бы в одной точке).*

Пример 2.5.2. *Рассмотрим последовательность отрезков* $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots,$*:*

$$\begin{array}{llll} I_1 = [0, 1], & & & \\ I_2 = [0, \frac{1}{2}], & I_3 = [\frac{1}{2}, 1], & & \\ I_4 = [0, \frac{1}{4}], & I_5 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], & I_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], & I_7 = [\frac{3}{4}, 1], \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{2^n} = [0, \frac{1}{2^n}], & I_{2^n+1} = [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}], & \ldots, & I_{2^{n+1}-1} = [\frac{2^n-1}{2^n}, 1], \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \quad . \end{array}$$

Заметим, что они все принадлежат отрезку $[0, 1]$
Определим n-ый член последовательности как

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_n, \\ 0, & x \notin I_n. \end{cases}$$

Убедимся, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к предельной функции $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[0,1]$. В самом деле

$$\int\limits_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \int\limits_{I_n} dx,$$

который, в свою очередь, равен длине отрезка I_n, которая стремится к нулю при $n \to \infty$.

Возьмём произвольную точку x_0 отрезка $[0,1]$. Тогда найдутся сколь угодно большие номера n, что $x_0 \in I_n$, следовательно, для таких номеров n справедливо $f_n(x_0) = 1$.

Но также найдутся сколь угодно больших n, что $x_0 \notin I_n$, следовательно, для таких n справедливо $f_n(x_0) = 0$.

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}$ расходится в каждой точке на отрезке $[0,1]$.

Утверждение 2.5.3. *Из того, что последовательность сходится на некотором отрезке не следует, что последовательность сходится в среднем на этом отрезке.*

Пример 2.5.3. *Рассмотрим функциональную последовательность*

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-nx}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на отрезке $[0,1]$ к предельной функции $f(x) \equiv 0$.

Так как для любого x справедливо равенство

$$\int\limits_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = n^2 \int\limits_0^1 e^{-2nx} dx = \frac{n}{2}(1 - e^{-2n}),$$

которое стремится к ∞ при $n \to \infty$, то функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится в среднем на отрезке $[0,1]$.

Лемма 2.5.1. *Для любых интегрируемых на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо неравенство*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \right| \le \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)dx}, \tag{2.5.3}$$

*именуемое **неравенством Коши - Буняковского**.*

Доказательство. При выполнении условия $\int\limits_a^b g^2(x)dx \neq 0$ рассмотрим следующий квадратный трёхчлен относительно λ

$$\int\limits_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2 dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx + \lambda^2 \int\limits_a^b g(x)^2 dx - 2\lambda \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \geq 0$$

Так как этот многочлен неотрицателен, то он не имеет вещественных корней.

Но тогда его дискриминант неположителен, то есть

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int\limits_a^b f^2(x)dx - \int\limits_a^b g^2(x)dx \leq 0,$$

откуда следует неравенство (2.5.3).

Случай $\int\limits_a^b f^2(x)dx \neq 0$, рассматривается аналогично.

Если $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$ и $\int\limits_a^b g^2(x)dx = 0$, то справедливы неравенства

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))^2 dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx + \int\limits_a^b g^2(x)dx + 2\int\limits_a^b f(x)g(x)dx =$$

$$= 2\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \geq 0,$$

$$\int\limits_a^b (f(x) - g(x))^2 dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx + \int\limits_a^b g^2(x)dx - 2\int\limits_a^b f(x)g(x)dx =$$

$$= -2\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \geq 0.$$

Получаем, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$, то есть неравенство (2.5.3) справедливо и в этом случае. □

Теорема 2.5.2. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то эту последовательность можно почленно* *интегрировать на отрезке $[a,b]$, то есть*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int\limits_a^b f(x). \tag{2.5.4}$$

Доказательство. Используя неравенство Коши - Буняковского при $g(x)\equiv 1$, получим

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right| \le$$
$$\le \sqrt{\int\limits_a^b (f_n(x)-f(x))^2dx}\cdot\sqrt{\int\limits_a^b dx} = \sqrt{(b-a)}\cdot\sqrt{\int\limits_a^b (f_n(x)-f(x))^2dx}$$

Так как $\int\limits_a^b (f_n(x)-f(x))^2dx \to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \to 0$$

при $n\to\infty$. □

Сформулируем эту теорему в терминах функциональных рядов

Теорема 2.5.3. *Если функциональный ряд* (2.5.2) *сходится в среднем к сумме $S(x)$ на отрезке $[a,b]$, то его можно почленно интегрировать, то есть*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx = \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_n(x) = \int\limits_a^b S(x).$$

Утверждение 2.5.4. *Из того, что последовательность можно почленно интегрировать на некотором отрезке не следует, что последовательность сходится равномерно на этом отрезке.*

Доказательство. Так как последовательность, не сходящаяся равномерно на отрезке, может сходится в среднем на отрезке, то рассмотрим такую последовательность. По теореме 2.5.2 эту последовательность можно проинтегрировать почленно, но она не сходится равномерно на отрезке. □

Утверждение 2.5.5. *Из того, что последовательность можно почленно интегрировать на некотором отрезке не следует, что последовательность сходится на этом отрезке(хотя бы в одной точке).*

Доказательство. Так как последовательность, не сходящаяся на отрезке, может сходится в среднем на отрезке, то рассмотрим такую последовательность. По теореме 2.5.2 эту последовательность можно проинтегрировать почленно, но она не сходится в каждой точке на этом отрезке. □

Утверждение 2.5.6. *Из того, что последовательность можно почленно интегрировать на некотором отрезке не следует, что последовательность сходится в среднем на этом отрезке.*

Пример 2.5.4. *Рассмотрим функциональную последовательность*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{4}} e^{-nx}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта последовательность сходится к нулю в каждой точке отрезке $[0,1]$, то есть предельная функция $f(x) \equiv 0$.

Сходимость в среднем нет, так как

$$\int\limits_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = n^{\frac{6}{4}} \int\limits_0^1 e^{-2nx} dx = \frac{\sqrt{n}}{2}(1 - e^{-2n}) \to \infty$$

при $n \to \infty$.

Вместе с тем

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 n^{\frac{3}{4}} e^{-nx} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}(1 - e^{-n}) = 0.$$

То есть последовательность $\{f_n(x)\}$ можно интегрировать почленно.

Утверждение 2.5.7. *Из того, что последовательность сходится в каждой точке некоторого отрезке не следует, что последовательность можно почленно интегрировать на этом отрезке.*

Пример 2.5.5. *Рассмотрим функциональную последовательность*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 e^{-nx}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта последовательность сходится к нулю в каждой точке отрезке $[0,1]$, то есть предельная функция $f(x) \equiv 0$.

При этом

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 n^2 e^{-nx} dx = \lim_{n\to\infty} n(1 - e^{-n}) = \infty.$$

То есть последовательность $\{f_n(x)\}$ не допускает почленного интегрирования.