L'objectif de ce dossier est de vulgariser de la manière la plus simple possible la simulation de trajectoires d'objets célestes à partir de la physique Newtonienne.
Il s'agit également de s'amuser à calculer des équations accessibles.

Les problématiques :

- Le choix des équations de cinématique.
- Les forces à considérer.
- La méthode de résolution numérique à choisir.
- Comment corriger les erreurs d'orbites dû à la résolution numérique.
- Comment mettre en place la résolution partielle du problème à N corp.

Problématique 1 : -> partiellement résolue. En cours de résolution.

- Le choix est fait sur les équations de cinématique de Newton.
- La deuxième loi de Newton est utilisé pour calculer les différentes accélérations et vitesses.
- En ce qui concerne la vitesse, le théorème de l'énergie mécanique est utilisé lorsqu'un objet ne fournit aucune force.
- Dans le cas où l'objet émet une poussé, les équations de Newton sont utilisées pour calculer la position.
- Une méthode entière détaillant les calculs sera faite.

Problématique 2 : -> Résolue avec les forces actuelles.

- Les forces considérées actuellement sont le poids et l'accélération de la poussé des objets.
- Une section plus approfondi sera faite par la suite pour également introduire les frottement dû à l'air dans l'atmosphère terrestre par exemple.

Problématique 3 : -> partiellement résolue. En cours de résolution.

- Pour l'heure, la méthode d'Euler est utilisée.
- Pour limiter les erreurs dans un premier temps, la méthode de Verlet ou saute-mouton sera utilisé afin de diviser drastiquement la quantité d'erreurs dû au delta.
- Une partie entière sur la méthode utilisé sera faite.

Problématique 4 : -> En cours de résolution.

- Deux cas sont à considérer :
  - 1- Lorsque l'objet effectue une poussé. Dans ce càs là, seule une méthode de résolution numérique performante me semble obligatoire à trouver.
  - 2- Lorsque le corp n'effectue plus de pousser. L'utilisation du théorème de l'énergie mécanique est utile.
- Une problématique se pose sur la manière de récupérer la position exacte après le calcul de la nouvelle norme du vecteur position.
- Tout cela sera expliqué dans une partie indépendante.

Problématique 5 : -> Non résolue. Il s'agit d'un problème secondaire.

- Pour la résolution partielle du problème à N corp de manière numérique, les calculs vont se faire sur l'accélération et par conséquent l'intensité du champ de pesanteur 'g'.
- Une partie entière sera élaboré sur le sujet plus tard.
- L’objet est également d’expliquer de manière fine, l’ensemble des équations de Newton sur la dynamique, et par conséquent d’effectuer quelque pistes de recherche sur le problème à 3 corps.

Hypothèse :

- Possibilité de retomber sur les équations de cinématiques de Newton avec le théorème de l’énergie mécanique. Si cela est possible, les équations de la deuxième de Newton ne seront plus utilisés sous la forme qu’on les connaît, mais sous une forme plus performantes pour avoir une conservation de l’énergie mécanique dans le càs d’une unique force, l’interaction gravitationnelle.

Pour le calcul de l'accélération, nous appliquons la deuxième loi de Newton qui nous dicte la formule suivante :

$$\sum \overrightarrow{Force} = m.\vec{a}$$

On notera que $\vec{P}$ correspond au vecteur poids et $\vec{F}$ qui est la force de poussé de la fusée permise par les propulseurs de cette dernières. En outre, cette équation permettant de déterminer l'accélération sera uniquement employé dans le cas d'une poussé, c'est-à-dire lorsque le théorème de l'énergie mécanique n'est plus nulle.

$$\leftrightarrow \vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\leftrightarrow \vec{a} = \frac{(\vec{P} + \overrightarrow{F})}{m}$$

$\vec{P} = m.\vec{g}$ avec $\vec{g}$, le vecteur correspondant au champ de pesanteur et m correspondant à la masse du corp.

$$\leftrightarrow \vec{a} = \frac{(m.\vec{g} + \overrightarrow{F})}{m}$$

$$\leftrightarrow \vec{a} = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m}$$

En projetant sur l'axe des x on obtient :

$$\overrightarrow{a.x} = \overrightarrow{g.x} + \frac{\overrightarrow{F.x}}{m}$$

En projetant sur l'axe des y on obtient :

$$\overrightarrow{a.y} = \overrightarrow{g.y} + \frac{\overrightarrow{F.y}}{m}$$

Pour le calcul de la norme de l'accélération on effectue :

$$\| \vec{a} \| = \| \vec{g} \| + \frac{\| \vec{F} \|}{m}$$

$$\leftrightarrow \| \vec{a} \| = \sqrt{\overrightarrow{g.x}^2 + \overrightarrow{g.y}^2} + \frac{\sqrt{\overrightarrow{F.x}^2 + \overrightarrow{F.y}^2}}{m}$$

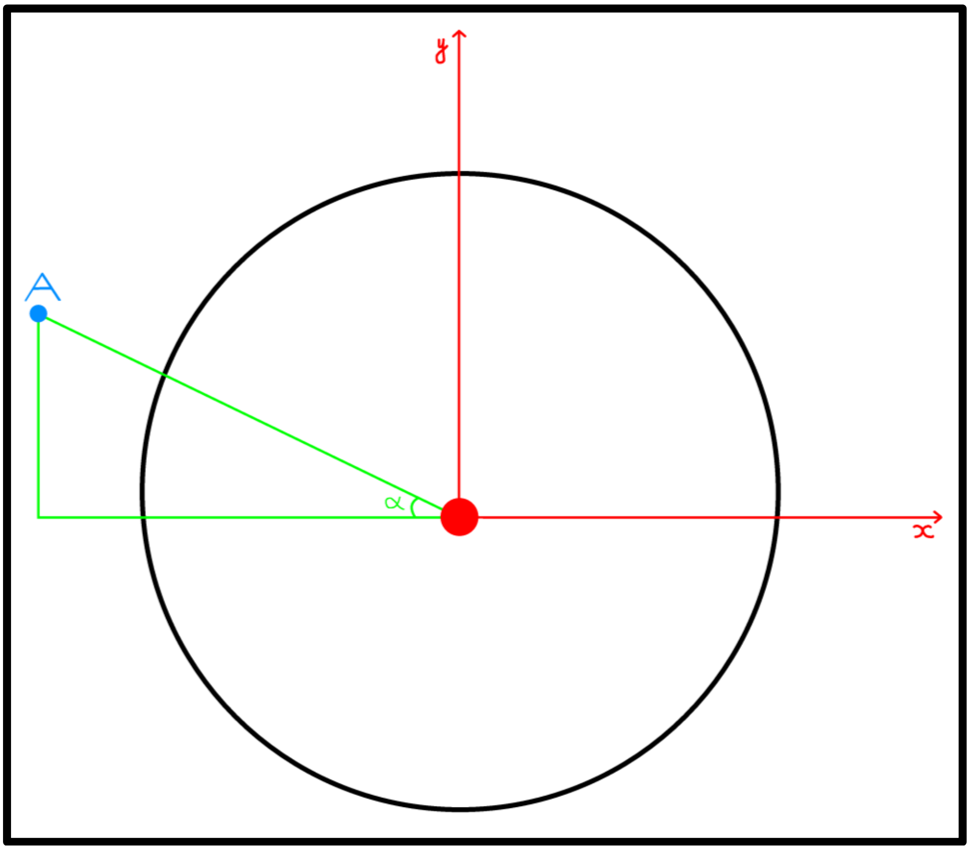
Le calcul du champ de pesanteur a effectué est le suivant :

$$\|\vec{g}\| = G \times \frac{M(attracteur)}{\|\vec{R}\|^2}$$

Avec G qui est la constante de Newton : $G \approx 6{,}67.10^{-11}$, $\vec{R}$ qui correspond à la distance entre le centre l'astre attracteur et le centre de l'astre attiré et $M(attracteur)$ correspond à la masse de l'objet attracteur, $\|\vec{R}\|$ la norme du vecteur position par rapport à l'objet attracteur.
Cependant, actuellement, nous ne connaissons que la norme de ce vecteur et non ses coordonnées. Pour cela, de la trigonométrie ainsi que le théorème de Pythagore s'imposent.

Pour la calcul de la coordonnée en x, on effectue le calcul suivant :

$$X = \|\vec{g}\|^2 \times \cos \alpha$$



On appelle ici l'angle α, l'angle représenté sur l'image ci-contre.

Donc $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{R(x)}}{\|\vec{R}\|}$

$$\leftrightarrow X = \|\vec{g}\|^2 \times \frac{\overrightarrow{R.x}}{\|\vec{R}\|}$$

Pour la calcul de la coordonnée en y, on effectue le calcul suivant :

$$Y = \|\vec{g}\|^2 \times \sin\alpha$$

Donc $\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{R(y)}}{\|\vec{R}\|}$

$$\leftrightarrow Y = \|\vec{g}\|^2 \times \frac{\overrightarrow{R.y}}{\|\vec{R}\|}$$

Nous sommes dans une configuration où la coordonnée est au carré du faite que la norme du vecteur $\vec{g}$ soit au carré dans les calculs.
En outre, ces coordonnées peuvent-être négative comme positive dû aux équations de trigonométries.
Le calcul pour connaître chacune des coordonnées est le suivant :

$$\leftrightarrow \overline{g.\vec{x}} = \sqrt{|X|} \times \frac{X}{|X|}$$

$$\leftrightarrow \overline{g.\vec{y}} = \sqrt{|Y|} \times \frac{Y}{|Y|}$$

Pour le calcul de la vitesse, nous utilisons une nouvelle fois la deuxième loi de Newton en sachant que la vitesse est décrite par l'équation suivante :

$$V(\Delta t) = \int a$$

On considère Δt comme étant une durée invariante tout au long des calculs et correspondant au temps mis par l'objet pour parcourir une certaine distance dans notre repère.

$$\leftrightarrow V(\Delta t) = a \times t + V(0)$$

En exprimant cette équation sur les x, on obtient :

$$\leftrightarrow V(\Delta t).x = a.x \times t + V(0).x$$

En exprimant cette équation sur les y, on obtient :

$$\leftrightarrow V(\Delta t).y = a.y \times t + V(0).y$$

Pour le calcul de la position, nous utilisons une nouvelle fois la deuxième loi de Newton en sachant que la position est décrite par l'équation suivante :

$$X(\Delta t) = \iint a$$

On considère Δt comme étant une durée invariante tout au long des calculs et correspondant au temps mis par l'objet pour parcourir une certaine distance dans notre repère.

$$\leftrightarrow X(\Delta t) = \frac{a \times t^2}{2} + V(0) \times t + X(0)$$

En exprimant cette équation sur les x, on obtient :

$$\leftrightarrow X(\Delta t).x = \frac{a.x \times t^2}{2} + V(0).x \times t + X(0).x$$

En exprimant cette équation sur les y, on obtient :

$$\leftrightarrow X(\Delta t).y = \frac{a.y \times t^2}{2} + V(0).y \times t + X(0).y$$

L'équation de la position ne sera utilisé que dans le càs où l'objet émette une poussé. Par exemple dans le càs d'une fusée au décollage. A partir du moment où la fusée arrête les moteurs, cette équation ne peut plus être utilisé sous cette forme. Pour cela nous devons utiliser les équations qui seront décrite ci-dessous.

La partie qui suit sur le calcul de la position comporte des erreurs. Ces erreurs sont en cours de résolutions.

Désormais, nous souhaitons obtenir la trajectoire d'un objet dont l'orbite ne diverge pas avec le temps lors d'une conservation totale de l'énergie mécanique du système. Pour le calcul suivant, nous allons effectuer quelque erreurs d'approximation, qui dans notre càs, ne nous dérange que grandement du faite que nous ne nous préoccupons pas de la création d'un simulateur parfait (sinon, les équations de la Relativité d'Einstein s'impose). Également, pour des raisons de puissances de calculs. Nous considérerons que l'intensité de la pesanteur est approximativement la même entre les deux points. Un calcul considérant une gravité différente entre les deux points est prévu beaucoup plus tard dans ce document.

Comme il n'y a pas de variation de l'énergie mécanique,

$\Delta Em = 0$

On note $Em(A)$, l'énergie mécanique au point « A » $Em(B)$, l'énergie mécanique au point « B ». Le point « A » est le point initiale pour le calcul des énergies et le point « B » est le point d'arrivé de l'objet pour les calculs. Le temps mis pour passer du point « A » au point « B » est décrit par la variable Δt qui reste constant durant toute la phase des calculs.

$$\leftrightarrow Em(B) - Em(A) = 0$$
$$\leftrightarrow (Ec(B) + Epp(B)) - (Ec(A) + Epp(A)) = 0$$

On rappelle la formule de l'énergie cinétique noté $Ec = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{\|\mathrm{V}\|}^2 \times m$, avec « m » la masse de l'objet concerné et « $\overrightarrow{\|\mathrm{V}\|}^2$ » la vitesse relative de l'objet concerné au carré par rapport à l'objet qui l'attire.

On rappelle la formule de l'énergie potentielle de pesanteur noté $Epp = m \times z \times \|\vec{g}\|$ avec « m » la masse de l'objet concerné, « z », l'altitude de l'objet concerné par rapport à l'objet qui l'attire et « $\overrightarrow{\|\mathrm{V}\|}^2$ » l'intensité gravitationnelle de l'objet attracteur.

$$\leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \times V(B)^2 \times m + m \times \vec{g} \times Z(B)\right) - \left(\frac{1}{2} \times V(A)^2 \times m + m \times \vec{g} \times Z(A)\right) = 0$$

Nous retrouvons dans cette écriture, le Poids. Nous pouvons par conséquent réécrire l'équation sous cette forme :

$$\leftrightarrow \frac{1}{2} \times V(B)^2 \times m + \vec{P} \times Z(B) - \frac{1}{2} \times V(A)^2 \times m - \vec{P} \times Z(A) = 0$$

Les équations, présenté ci-contre, permette de présenter une certaine démonstration de la deuxième loi de Newton, dans la mesure où nous verrons par la suite que l'énergie cinétique est issue de la deuxième loi de Newton.

Après une factorisation, nous obtenons une forme assez proche de la forme de Newton dans le càs de l'intervention unique du Poids :

$$\leftrightarrow P \times \big(Z(B) - Z(A)\big) + \frac{1}{2} \times m \times (V(B)^2 - V(A)^2) = 0$$

On écrit pour plus de simplicité : $\Delta Z = Z(B) - Z(A)$ et $\Delta V = V(B)^2 - V(A)^2$

$$\leftrightarrow P \times \Delta Z + \frac{1}{2} \times m \times \Delta V = 0$$

Pour rappel, la formule de Newton est la suivante si nous ne considérons que le Poids : $\vec{P} - m \times \vec{a} = 0$.

$$\leftrightarrow P \times \Delta Z = -\frac{1}{2} \times m \times \Delta V$$

$$\leftrightarrow P = -\frac{1}{2} \times m \times \frac{\Delta V}{\Delta Z}$$

$$\leftrightarrow P + \frac{1}{2} \times m \times \frac{\Delta V}{\Delta Z} = 0$$

ΔV est exprimé avec les unités $\frac{m^2}{s^2}$. ΔZ est exprimé est en mètre.

$\frac{\Delta V}{\Delta Z}$ est exprimé en $\frac{\frac{m^2}{s^2}}{m} = \frac{m}{s^2}$.

Etant donnée qu'une accélération est exprimé en $\frac{m}{s^2}$, $\frac{\Delta V}{\Delta Z}$ peut être considéré comme une accélération. On peut par conséquent noter $a = \frac{\Delta V}{\Delta Z}$.

Donc :

$$\leftrightarrow P - \frac{1}{2} \times m \times \frac{\Delta V}{\Delta Z} = 0$$

$$\leftrightarrow P - \frac{1}{2} \times m \times a = 0$$

Nous obtenons la même formule que pour la deuxième loi de Newton, à l'exception d'un coefficient.

Ecrit autrement, l'accélération est :

$$\leftrightarrow P = \frac{1}{2} \times m \times a$$

$$\leftrightarrow a = \frac{P \times 2}{m}$$

$$\leftrightarrow a = \frac{m \times g \times 2}{m}$$

$$\leftrightarrow a = 2 \times g$$

Nous aurions par conséquent, une accélération deux fois plus élevée avec le théorème de l'énergie mécanique par rapport à la deuxième loi de Newton. Nous allons voir dans les lignes suivante, l'origine du coefficient.

Cependant, d'où vient l'énergie cinétique ?

Cette question bien qu'anodine, permet de comprendre l'existence du résultat précédent. Pour cela nous sommes obligé de repartir de la deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{Force} = m.\vec{a}$

On va s'occuper de faire l'intégrale du membre de droite : $m.\vec{a}$. Dit de manière plus simple, la somme de l'ensemble des valeurs de la formule $m.\vec{a}$. Donc écrire de manière mathématique, $\int m.\vec{a}$. Voici l'ensemble des étapes :

$$\int m.\vec{a}$$
$$= m * \int \vec{a} - \vec{a} * m'$$
$$= m * \frac{1}{2} * V^2 - \vec{a} * 0$$
$$= m * \frac{1}{2} * V^2$$
$$Ec = \frac{1}{2} * V^2 * m$$

Ce calcul nous permet de mieux comprendre le caractère de l'énergie cinétique. Cela nous permet simplement de transformer les équations de newton en outils mathématiques très puissants qui relie de manière forte, la vitesse et la masse. Cette formule permet également de comprendre l'apparition de la constante lorsque nous souhaitons revenir à l'équation de Newton. Et c'est donc pour cela qu'apparait le coefficient 2 dans la formule $a = 2 \times g$ si nous commençons les calculs par le théorème de l'énergie mécanique.

Nous pouvons également souhaitez retrouver la deuxième loi de Newton à partir du théorème de l'énergie mécanique, dans le cas d'une non-conservation de l'énergie mécanique du système. Voici une piste de démonstration de la deuxième loi de Newton par le théorème de l'énergie mécanique.

Formule de la deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{Force} = m.\vec{a}$

Formule du théorème de l'énergie mécanique : $\Delta Em = \sum W_{AB}(\overrightarrow{F_{non-conservative}})$. Une force non-conservative est une force venant modifier l'énergie mécanique du système. Le Poids est une force conservative à l'opposé des forces de frottements étant non-conservatives.

Pour l'heure, nous porterons notre démonstration dans le càs d'une conservation totale de l'énergie du système. Par conséquent, la seule force présente dans le système serait le Poids.

Donc :

$$\sum \overrightarrow{Force} = m \times \vec{a}$$
$$\leftrightarrow \vec{P} = m \times \vec{a}$$
$$\leftrightarrow \vec{P} - m \times \vec{a} = 0$$

Pour le théorème de l'énergie mécanique nous obtenons :

Désormais, si nous considérons une force de poussé. Une démonstration possible serait la suivante.

$$\Delta Em = \sum W_{AB}(\overrightarrow{F_{non-conservatives}})$$

Comme nous n'avons qu'une force à considérer, l'équation est la suivante :

$$\Delta Em = W_{AB}(\vec{F})$$

$\vec{F}$ correspond au vecteur de la poussé de l'objet étudié. AB correspond à la distance entre le point de départ et le point d'arrivé.

$$\leftrightarrow Em(B) - Em(A) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

$$\leftrightarrow (Ec(B) + Epp(B)) - (Ec(A) + Epp(A)) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(0)$$

$$\leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \times V(B)^2 \times m + m \times \vec{g} \times Z(B)\right) - \left(\frac{1}{2} \times V(A)^2 \times m + m \times \vec{g} \times Z(A)\right) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times 1$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2} \times V(B)^2 \times m + \vec{P} \times Z(B) - \frac{1}{2} \times V(A)^2 \times m - \vec{P} \times Z(A) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\leftrightarrow P \times \big(Z(B) - Z(A)\big) + \frac{1}{2} \times m \times (V(B)^2 - V(A)^2) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|$$

On écrit pour plus de simplicité : $\Delta Z = Z(B) - Z(A)$ et $\Delta V = V(B)^2 - V(A)^2$

$$\leftrightarrow P \times \Delta Z + \frac{1}{2} \times m \times \Delta V = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\leftrightarrow P \times \Delta Z = -\frac{1}{2} \times m \times \Delta V + \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\leftrightarrow P = -\frac{m \times \Delta V}{2 \times \Delta Z} + \frac{\|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|}{\Delta Z}$$

$$\leftrightarrow P - \frac{\|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|}{\Delta Z} = -\frac{m \times \Delta V}{2 \times \Delta Z}$$

$$\leftrightarrow P + \frac{\|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|}{\Delta Z} = -\frac{m \times \Delta V}{2 \times \Delta Z}$$

$$\leftrightarrow P + \frac{\|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|}{\Delta Z} = -m \times \frac{\Delta V}{2 \times \Delta Z}$$

Dans un càs général, nous pourrons écrire l'égalité suivante :

$$\leftrightarrow P + \frac{\sum W_{AB}(\overrightarrow{F_{non-conservatives}})}{\Delta Z} = m \times \frac{\Delta V}{2 \times \Delta Z}$$

Notre objectif est de retrouver l'expression $\vec{P} + \vec{F} = m \times \vec{a}$
Les calculs présenté ci-dessus, peuvent nous permettent de retrouver la formule de Newton. Il s'agit d'un problème qui sera finalisé ultérieurement.

Désormais, si nous souhaitons calculer l'altitude de l'objet dans le cas d'une conservation de l'énergie mécanique, nous pouvons repartir des calculs effectué précédemment.

Nous avions $P \times \Delta Z = -\frac{1}{2} \times m \times \Delta V$. Si nous souhaitons connaître l'altitude de l'objet au point B, nous devons simplement effectuer les calculs suivants :

$$P \times \Delta Z = -\frac{1}{2} \times m \times \Delta V$$

$$\leftrightarrow \Delta Z = -\frac{m \times \Delta V}{2 \times P}$$

On rappelle que $\Delta Z = Z(B) - Z(A)$

$$\leftrightarrow Z(B) - Z(A) = -\frac{m \times \Delta V}{2 \times m \times g}$$

$$\leftrightarrow Z(B) = -\frac{\Delta V}{2 \times g} + Z(A)$$

$$\leftrightarrow Z(B) = -\frac{\Delta V}{2 \times g} + Z(A)$$

$Z(B)$ est bien une distance. En $\frac{\Delta V}{g \times 2}$ est exprimée avec les unités $\frac{\frac{m^2}{s^2}}{\frac{m}{s^2}}$ car g est exprimé en $\frac{m}{s^2}$. Donc $\frac{\frac{m^2}{s^2}}{\frac{m}{s^2}} = \frac{m^2 \times s^2}{s^2 \times m} = m$

Donc la formule pour calculer l'altitude de l'objet est $Z(B) = \frac{\Delta V}{2 \times g} + Z(A)$, si nous considérons une conservation de l'énergie mécanique du système de l'objet étudié.

Nous pouvons effectuer le même résonnement pour dans le cas d'une non-conservation de l'énergie mécanique.
Pour trouver l'altitude de l'objet, il nous suffit de modifier l'équation vue précédemment :

$$P + \frac{\|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|}{\Delta Z} = -\frac{m \times \Delta V}{2 \times \Delta Z}$$
$$\leftrightarrow P * \Delta Z + \frac{\|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| * \Delta Z}{Z(A) - Z(B)} = -\frac{m \times \Delta V}{2}$$
$$\leftrightarrow P * \Delta Z + \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| = -\frac{m \times \Delta V}{2}$$
$$\leftrightarrow P * \Delta Z = -\frac{m \times \Delta V}{2} - \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|$$
$$\leftrightarrow Z(B) - Z(A) = \frac{-\frac{m \times \Delta V}{2} - \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|}{P}$$
$$\leftrightarrow Z(B) = \frac{-\frac{m \times \Delta V}{2} - \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|}{P} + Z(A)$$

Nous connaissons désormais, l'altitude de l'objet, qui va nous permettre de connaitre par la suite sa position, par le biais du calcul des racines d'un polynôme.

A partir de ces informations, nous pouvons déterminer la position de l'objet. En effet, en ayant l'altitude par rapport à la Terre, et connaissant son rayon, nous pouvons déterminer sa position. Comme dit précédemment, tous les objets sont circulaires ou sphériques dans le cas d'une application en trois dimensions.

Nous cherchons X(B), qui est la position de l'objet au point B. Nous pouvons premièrement déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}$ en ajoutant simplement le rayon de la Terre.

Donc $\|\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}\| = Z(B) + R_{Terre}$.

Cependant, actuellement, nous ne pouvons pas retrouver aisément les composantes $\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}$. Pour cela, nous devons reprendre les calculs.

On sait que $X(\Delta t) = \frac{a \times t^2}{2} + V(0) \times t + X(0)$

On connait $\|\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}\|$. On peut considérer que $\|\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{X}(\Delta t)}\right\|$. Cela signifie que $\|\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}\|$ est solution de l'équation $\left\|\overrightarrow{\mathrm{X}(\Delta t)}\right\|$. A partir de cela, nous pouvons déterminer les composantes de l'équation.

Comme $\|\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{X}(\Delta t)}\right\|$

Alors :

$$\frac{a \times t^2}{2} + V(0) \times t + X(0) = -\frac{\Delta V}{g \times 2} + Z(A) + R_{Terre}$$

$$\leftrightarrow \frac{a \times t^2}{2} + V(0) \times t + X(0) + \frac{\Delta V}{\mathrm{g} \times 2} - Z(A) - R_{Terre} = 0$$

On peut considérer que

$$X(0) = Z(A) + R_{Terre}$$

Donc :

$$\leftrightarrow \frac{a \times t^2}{2} + V(0) \times t + \frac{\Delta V}{\mathrm{g} \times 2} = 0$$

Etant donné que nous sommes dans une configuration où le poids est l'unique force :

$$\vec{P} = m.\vec{a}$$
$$\leftrightarrow \mathrm{m}.\vec{g} = m.\vec{a}$$
$$\leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Donc :

$$\leftrightarrow \frac{g \times t^2}{2} + V(0) \times t + \frac{\Delta V}{\mathrm{g} \times 2} = 0$$

On a une équation quadratique de la forme $a \times x^2 + b \times x + c = 0$ où :

- $\mathrm{a} = \frac{g}{2}$
- $\mathrm{b} = V(0)$
- $\mathrm{c} = \frac{V(B)^2 - V(A)^2}{\mathrm{g} \times 2}$

On peut désormais déterminer les valeurs de t pour lesquels notre position est correcte.

Pour cela, nous disposons d'un outil puissant, le « Δ » qui permet de trouver les racines de notre polynôme. Petit rappel, $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4 \times \mathrm{a} \times \mathrm{c}$ avec a, b, c, les coefficients de la fonction f, mis en évidence précédemment.

Dans notre càs, Δ sera toujours supérieur ou égale à 0. Pour trouver les valeurs des racines, il nous suffit d'appliquer la formule suivante :

Dans le cas où $\Delta = 0$, il n'existe qu'une unique solution et donc $t = \frac{-b}{2 \times a}$.

Dans le cas où $\Delta > 0$, il n'existe qu'une unique solution et donc $t1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \times a}$ et $t2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \times a}$. Nous prendrons toujours une valeur de t positive car il s'agit d'une altitude.

$$\Delta = \mathrm{V}(0)^2 - 4 * \frac{g}{2} * \left(\frac{V(B)^2 - V(A)^2}{\mathrm{g} \times 2}\right)$$
$$\Delta = \mathrm{V}(0)^2 - V(B)^2 + V(A)^2$$
$$\Delta = 2 \times \mathrm{V}(0)^2 - V(B)^2$$

On souhaite que

$$\Delta \geq 0$$

Donc

$$2 \times \mathrm{V}(0)^2 - V(B)^2 \geq 0$$
$$-V(B)^2 \geq -2 \times \mathrm{V}(0)^2$$
$$V(B)^2 \leq 2 \times \mathrm{V}(0)^2$$

Le signe du delta semble cohérent. Il y a de très forte de chance, que le delta soit toujours supérieur à 0. En effet, étant donné que les accélérations subit par l'objet ne seront pas excessive, nous pouvons considérer que la position sera toujours déterminable avec cette méthode.

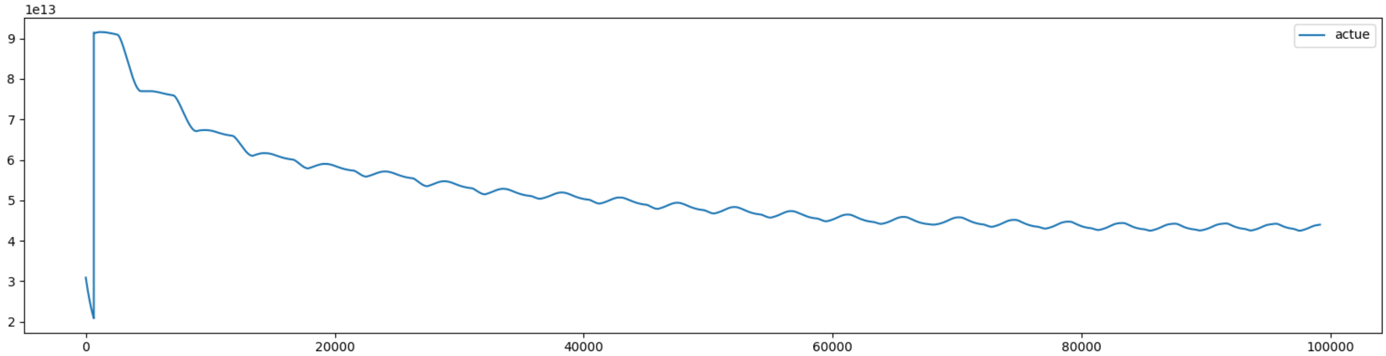
Nos valeurs de $t1$ et $t2$ sont :

$$t1 = \frac{-V(0) - \sqrt{2 \times \mathrm{V}(0)^2 - V(B)^2}}{g}$$

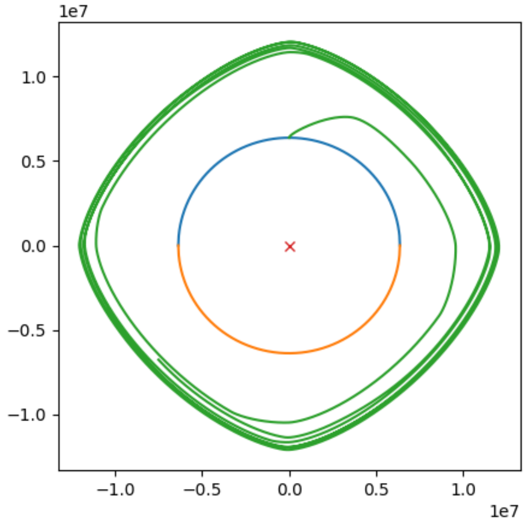
$$t2 = \frac{-V(0) + \sqrt{2 \times \mathrm{V}(0)^2 - V(B)^2}}{g}$$

Etant donné que $V(0) > 0$, l'unique solution est :

$$t2 = \frac{-V(0) + \sqrt{2 \times \mathrm{V}(0)^2 - V(B)^2}}{g}$$

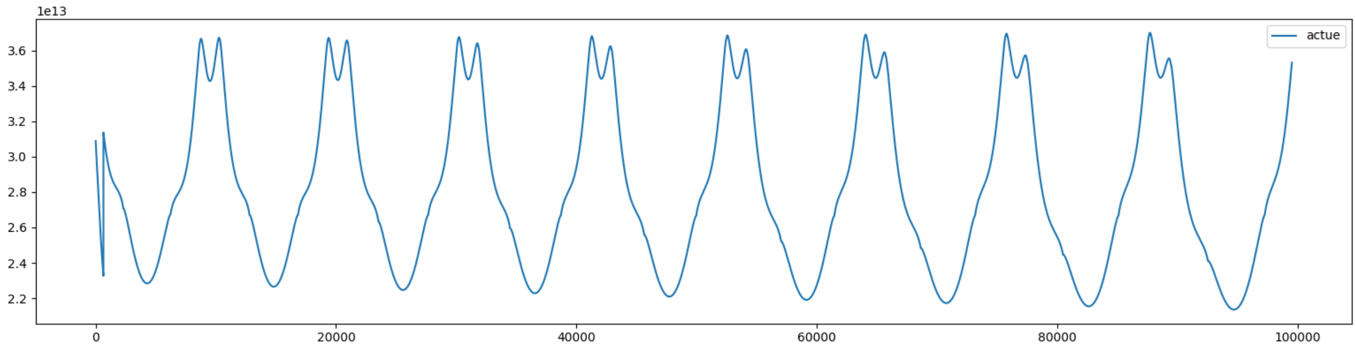


Avec ce système, nous obtenons cette courbe pour l'énergie mécanique. En abscisse nous avons le nombre d'itération. En ordonné, l'énergie mécanique.



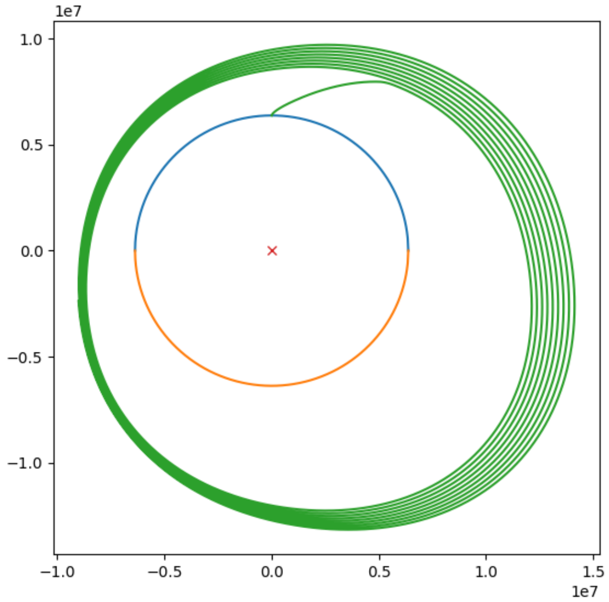
Et voici l'orbite de notre objet avec la méthode décrite ci-dessus. On remarque une variation de l'orbite que l'on pourrait qualifier de divergente. De plus, elle ne forme pas une orbite elliptique comme ce que nous devrions observer. A la place, nous obtenons une sorte de losange. Les unités sont des mètres exprimés sur chacun des axes.

Dans le cas où nous n'utilisons que les équation classiques, la courbe de l'énergie mécanique suivante.



Nous pouvons observer une modification très accentué. De plus, plus le nombre de révolution augmente, plus l’énergie mécanique accentue ses extremums. Cela permet de mettre en évidence une divergence de l’orbite.

En ce qui concerne l’orbite, voici une graphe représentatif.



Cette accentuation des extremums de l’énergie mécanique se traduit bien sur l’apparence de l’orbite dans laquelle l’apogée (point le plus éloigné du centre l’orbite) augmente ainsi que le périgée (point le plus proche du centre l’orbite).

La véritable problématique après la constatation de deux résultats différents, est de savoir pourquoi les deux résultats sont différents.

Fin de la partie comportant des erreurs avérées.

Désormais, passons à la partie programmation.
L'ensemble du code sera effectué avec des class pour plus de clartés, mais également pour mieux séquencer le programme étant donné que celui-ci risque d'être imposant.

Nous commençons par créer un class Vector2. Cette class va nous permettre de manipuler facilement les vecteurs de nos formules.

La class vecteur sera composé d'uniquement 3 fonctions :

- La fonction « Get » qui permettra de récupérer les coordonnées du vecteur sous la forme d'une liste.
- La fonction « Set », qui permettra de modifier les coordonnées du vecteur.
- La fonction « Norme » qui permettra d'obtenir la norme du vecteur.

D'autre fonctions pourront-être ajouté par la suite en fonction des problématiques.

Voici le code correspondant :

```
class Vector2:
 def __init__(self, x: float, y: float) -> None: self.x, self.y = x, y
 def Get(self) -> tuple: return [self.x, self.y]
 def Set(self, x: float, y: float): self.x, self.y = x, y
 def Norme(self) -> float: return np.sqrt(self.x ** 2 + self.y ** 2)
```

Une fois la class Vecteur2 crée, nous pouvons commencer à travailler sur les systèmes physiques dont nous avons besoin. Le premier système que nous allons concevoir est celui de la gravité.
Pour cela, nous allons créer une class appelée Gravite, qui contiendra 2 fonctions :

- IntensitePesenteur, la fonction qui nous permettra de connaitre les composantes de notre du vecteur gravité aux coordonnées de notre objet. Elle renverra par conséquent un objet Vecteur2 issus de la class Vecteur2 crée précédemment.
- ForceInteraction qui permet de calculer la force attirant deux corps. Elle renverra par conséquent un nombre réel strictement positif.

La méthode IntensitePesenteur prendra 3 arguments en entré :

- *position_* qui est un vecteur et qui correspond à la position en laquelle nous devons calculer les composantes de notre vecteur gravité.
- *masse_attracteur_* qui correspond à la masse du corp attirant notre objet. Cette dernière est un nombre réel strictement positif et peut-être entière ou décimale.
- rayon_ qui correspond au rayon de l'astre attracteur. Cette dernière est un nombre réel strictement positif et peut-être entière ou décimale. Nous considérerons dans ce cours, tous les objets comme des solides indéformables, soit ponctuel ou bien sphérique d'un rayon invariant.

La méthode se présente sous la forme suivante :

```
def IntensitePesenteur(
    position_: Vector2, masse_attracteur_: float, rayon_: float
    ) -> Vector2:
```

Par la suite, nous devons calculer la norme au carrée de l'intensité gravitationnelle à notre position, c'est-à-dire :

$$\|\vec{g}\|^2 = \left(G \times \frac{M(attracteur)}{\|\vec{R}\|^2}\right)^2$$

Cela revient dans le code à écrire la ligne suivante :

```
gravite: float = ((Constante.G * masse_attracteur_)/(position_.Norme() ** 2)) ** 2
```

Une fois $\|\vec{g}\|$ déterminé, il nous faut connaître ses composantes, c'est-à-dire ses coordonnées. Cela revient à obtenir les deux lignes suivante :

```
pos_x: float = gravite * (position_.x/position_.Norme())
pos_y: float = gravite * (position_.y/position_.Norme())
```

Finalement, il nous reste à effectuer la racine carré de chacune des coordonnées. Cependant, nous devons vérifier que les coordonnées ne sont pas nulle, car il est impossible de diviser par 0. Nous obtenons par conséquents les deux lignes suivantes :

```
if pos_x != 0: pos_x = np.sqrt(abs(pos_x)) * (pos_x/abs(pos_x))
if pos_y != 0: pos_y = np.sqrt(abs(pos_y)) * (pos_y/abs(pos_y))
```

La méthode ForceInteraction prendra 4 arguments en entré :

- *masse_objet1_* qui correspond à la masse de l'objet 1 est qui est un nombre réel strictement positif.
- *masse_objet2_* qui correspond à la masse de l'objet 2 est qui est un nombre réel strictement positif.
- *Position_objet1_* qui correspond à la position de l'objet 1. Il s'agit d'un vecteur.
- *Position_objet2_* qui correspond à la position de l'objet 2. Il s'agit d'un vecteur.

La distance séparant les deux objets se détermine à partir de la formule qui sera uniquement explicité sous la forme de la ligne de code suivante :

```
distance: Vector2 = Vector2(position_objet1_.x - position_objet2_.x, position_objet1_.y - position_objet2_.y).Norme()
```

La méthode renvoie par la suite, la formule suivante de la théorie de la gravitation universelle de Newton :

$$\|\vec{F}\| = G \times \frac{M_1 \times M_2}{\|\vec{R}\|^2}$$

Cela correspond à la ligne suivante contenant un objet de la class Constante qui sera expliqué dans les lignes suivantes :

```
return (Constante.G * masse_objet1_ * masse_objet2_)/(distance ** 2)
```

L'ensemble de la class Gravite est la suivante est écrite entièrement dans le programme du code Github présent dans le repository pour plus de simplicité de lecture.

Comme dit dans les lignes précédentes, une class Constante est présente. Cette class contient l'ensemble des constantes du programmes. Il ne s'agit pas d'un objet, mais simplement d'un outil de structure. Il se peut par la suite, qu'un script entier dédier aux constantes soit créé pour plus de simplicité.
L'ensemble des constantes suivantes y sont présentes :

- La constante de Newton → G.
- La masse de la Terre → MASSE_TERRE.
- Le rayon de la Terre → RAYON_TERRE.
- La position de la Terre → POS_TERRE.
- La masse de la Lune → MASSE_LUNE.
- Le Rayon de la Lune → RAYON_LUNE.
- Le Δt → DELTA.

Par la suite, nous allons nous occuper de définir une class responsable du calcul des équations horaires de notre système, c'est-à-dire des équations régissant les déplacements de notre objet.

Pour cela, nous allons définir une class que l'on appellera EquationHoraire. Pour rappel, ces équations ne seront presque exclusivement utilisé que dans la càs d'une non-conservation de l'énergie mécanique du système.
Cette class sera composé de 3 méthodes :

- La première responsable du calcul de l'accélération de l'objet. Elle renverra un Vecteur2.
- La seconde responsable du calcul de la vitesse. Elle renverra un Vecteur2.
- La troisième, responsable du calcul de la position. Elle renverra un Vecteur2.

La méthode permettant de calculer l'accélération sera nommé CalculAcceleration. Elle comporte trois arguments que voici :

- La masse de l'objet étudié. Il s'agit d'un nombre réel strictement positif.
- La poussé de l'objet. Il s'agit d'un Vecteur2.
- La position de l'objet. Il s'agit d'un Vecteur2.

La méthode se présente sous la forme suivante :

```
def CalculAcceleration(
    masse_objet_: float, pousse_: Vector2, position_: Vector2
    )-> Vector2:
```

Il nous faut par la suite calculer la gravité. Pour cela, nous utilisons une méthode déjà créé pour cela présente dans la class Gravite qui s'appelle IntensitePesenteur.
La ligne est la suivante :

```
gravite: Vector2 = Gravite.IntensitePesenteur(
    position = position_, masse_attracteur = Constante.MASSE_TERRE,
    rayon = Constante.RAYON_TERRE, position_attracteur = Constante.POS_TERRE
    )
```

Il ne nous reste plus qu'à effectuer le calcul de l'accélération avec la formule vu précédemment.
Cela revient à écrire la ligne suivante :

```
acceleration = Vector2((pousse_.x)/masse_objet_ - gravite.x, (pousse_.y)/masse_objet_ - gravite.y)
```

La méthode permettant de calculer la vitesse sera nommé CalculVitesse. Elle comporte 2 arguments que voici :

- L'accélération de l'objet étudié. Il s'agit d'un nombre Vecteur2.
- La vitesse de l'objet. Il s'agit d'un Vecteur2.

La méthode se présente sous la forme suivante :

```
def CalculVitesse(acceleration_n_: Vector2, vitesse_: Vector2 ) -> Vector2:
```

Il ne nous reste plus qu'à effectuer le calcul de la vitesse avec la formule vu précédemment. Cela revient à écrire la ligne suivante :

```
return Vector2(acceleration_n_.x * Constante.DELTA + vitesse_.x, acceleration_n_.y * Constante.DELTA + vitesse_.y)
```

La méthode permettant de calculer la position sera nommé CalculPosition. Elle comporte 3 arguments que voici :

- L'accélération de l'objet étudié. Il s'agit d'un nombre Vecteur2.
- La vitesse de l'objet. Il s'agit d'un Vecteur2.
- La position de l'objet étudié. Il s'agit d'un Vecteur2.

La méthode se présente sous la forme suivante :

```python
def CalculPosition(acceleration: Vector2, vitesse: Vector2, position: Vector2) -> Vector2:
```

Il ne nous reste plus qu'à effectuer le calcul de la position avec la formule vu précédemment. Cela revient à écrire la ligne suivante :

```python
return Vector2(0.5 * (acceleration.x * Constante.DELTA ** 2) + vitesse.x * Constante.DELTA + position.x, 0.5 * (acceleration.y * Constante.DELTA ** 2) + vitesse.y * Constante.DELTA + position.y)
```

La partie qui suit, correspond au calcul de l'altitude de l'objet dans un cas plus complexe, mais plus véridique. Il s'agit pour l'heure, de piste de résolutions.

Nous conservons l'énergie mécanique au point « A » sous la forme $Em(A)$, étant donné que cette dernière est déjà connu et par conséquent, une constante.

$$\leftrightarrow \left(m \times \left\|\overrightarrow{g(B)}\right\| \times \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|\right) + \left(\frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right) - Em(A) = 0$$

On remplace par la suite $\left\|\overrightarrow{g(B)}\right\|$, qui est la norme du vecteur de l'intensité gravitationnelle au point « B ».

$$\leftrightarrow m \times G \times \frac{M(attracteur)}{\left\|\vec{R}\right\|^2} \times \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| + \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 - Em(A) = 0$$

L'objectif final est de simplifier cette équation afin d'en obtenir une expression sous la forme d'un polynôme du second degré, c'est-à-dire sous la forme $a \times x^2 + b \times x + c$, où « a, b, c » sont des coefficients et "x", notre inconnue correspondant à $\left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|$.

On pourra également écrire $\left\|\vec{R}\right\| = R + \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|$, où "$R$" est le rayon de l'astre attracteur.

$$\leftrightarrow m \times \frac{G \times M(attracteur)}{\left(R + \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|\right)^2} \times \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| = Em(A) - \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2$$

$$\leftrightarrow \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| = \frac{\left(\left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| + R\right)^2 \times \left(Em(A) - \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right)}{G \times M(attracteur) \times m}$$

$$\leftrightarrow \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| = \frac{\left(\left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|^2 + 2 \times \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| \times R + R^2\right) \times \left(Em(A) - \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right)}{G \times M(attracteur) \times m}$$

$$\leftrightarrow \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|^2 \times Em(A) - \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|^2 \times \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 + 2 \times \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| \times R \times Em(A) - \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| \times R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 + R^2 \times Em(A) - R^2 \times \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2}{G \times M(attracteur) \times m}$$

$$\leftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|^2 \times Em(A) - \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|^2 \times \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 + 2 \times \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| \times R \times Em(A) - \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| \times R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 + R^2 \times Em(A) - R^2 \times \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| \times G \times M(attracteur) \times m}{G \times M(attracteur) \times m} = 0$$

$$\leftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|^2 \times \left(Em(A) - \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right) + \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| \times \left(2 \times R \times Em(A) - R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 - G \times M(attracteur) \times m\right) + \left(R^2 \times Em(A) - R^2 \times \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right)}{G \times M(attracteur) \times m} = 0$$

On peut définir une fonction que l'on appellera f qui prendra comme paramètre l'altitude de notre fusée par rapport à un astre donnée.

$$f\left(\left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|\right) = \frac{\left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|^2 \times \left(Em(A) - \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right) + \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\| \times \left(2 \times R \times Em(A) - R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 - G \times M(attracteur) \times m\right) + \left(R^2 \times Em(A) - R^2 \times \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right)}{G \times M(attracteur) \times m}$$

Nous pouvons identifier trois membres distinct permettant l'écriture sous la forme d'un polynôme de degré 2.
Petit rappel de la forme d'un polynôme de degré 2 :
$g(x) = a \times x^2 + b \times x + c$

On peut écrire $f\left(\left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|\right)$ sous la forme de $g(x)$ avec :

$$a = \frac{Em(A) - \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2}{G \times M(attracteur) \times m}$$

$$b = \frac{2 \times R \times Em(A) - R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 - G \times M(attracteur) \times m}{G \times M(attracteur) \times m}$$

$$c = \frac{R^2 \times Em(A) - R^2 \times \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2}{G \times M(attracteur) \times m}$$

$$x = \left\|\overrightarrow{h(B)}\right\|$$

Donc $f(x) = a \times x^2 + b \times x + c$

Notre objectif est de trouver ce que l'on appelle les racines de notre polynôme, c'est-à-dire les valeurs de « x » pour lesquels, f(x)=0, où dans notre càs, la l'altitude correspondant au prochaines coordonnées de notre objet.

Pour cela, nous disposons d'un outil puissant, le « Δ » qui permet de trouver les racines de notre polynôme. Petit rappel, $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$ avec « a », « b » et « c », les coefficients de la fonction f, mis en évidence précédemment.

La simplification des calculs pourrait être réalisé dans le futur. Si elle s'avère importante, cela permettrait de gagner du temps pour les simulations.

Teste de simplifications et de réductions des différents calculs (en travail).

Nous allons premièrement calculer $b^2 = \left(\frac{2\times R\times Em(A)-R\times m\times\left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2-G\times M(attracteur)\times m}{G\times M(attracteur)\times m}\right)^2$

$$b^2 = \frac{\left(2 \times R \times Em(A) - R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 - G \times M(attracteur) \times m\right)^2}{(G \times M(attracteur) \times m)^2}$$

Pour le calcul du numérateur, nous avons un calcul similaire à :

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2 \times a \times b - 2 \times a \times c + 2 \times b \times c$$

$$a = 2 \times R \times Em(A)$$

$$b = R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2$$

$$c = G \times M(attracteur) \times m$$

Donc :

$$b^2 = \left(2 \times R \times Em(A)\right)^2 + \left(R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right)^2 + (G \times M(attracteur) \times m)^2 - 2 \times 2 \times R \times Em(A) \times R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 - 2 \times 2 \times R \times Em(A) \times G \times M(attracteur) \times m + 2 \times R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 \times G \times M(attracteur) \times m$$

$$b^2 = 4 \times R^2 \times Em(A)^2 + R^2 \times m^2 \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^4 + G^2 \times M(attracteur)^2 \times m^2 - 4 \times R^2 \times Em(A) \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 - 4 \times R \times Em(A) \times G \times M(attracteur) \times m + 2 \times R \times m^2 \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 \times G \times M(attracteur)$$

$$\Delta = \left(\frac{2 \times R \times Em(A) - R \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2 - G \times M(attracteur) \times m}{G \times M(attracteur) \times m}\right)^2 - 4 \times \frac{\left(Em(A) - \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right) \times \left(R^2 \times Em(A) - R^2 \times \frac{1}{2} \times m \times \left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right)}{(G \times M(attracteur) \times m)^2}$$

$$\Delta = \frac{\left(2\times R\times Em(A)-R\times m\times\left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2-G\times M(attracteur)\times m\right)^2-2\times\left(Em(A)-\frac{1}{2}\times m\times\left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right)\times\left(R^2\times Em(A)-R^2\times\frac{1}{2}\times m\times\left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right)}{(G\times M(attracteur)\times m)^2}$$

Nous allons premièrement calculer

$$\Delta = \frac{\left(2\times R\times Em(A)-R\times m\times\left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2-G\times M(attracteur)\times m\right)^2-2\times\left(Em(A)-\frac{1}{2}\times m\times\left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right)\times\left(R^2\times Em(A)-R^2\times\frac{1}{2}\times m\times\left\|\overrightarrow{V(B)}\right\|^2\right)}{(G\times M(attracteur)\times m)^2}$$

Fin Teste de simplifications et de réductions des différents calculs (en travail).

Dans notre càs, Δ sera toujours supérieur ou égale à 0. Pour trouver les valeurs des racines, il nous suffit d'appliquer la formule suivante :

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a}$$

Nous connaissons désormais, l'altitude de l'objet, qui va nous permettre de connaitre par la suite sa position, par le biais du calcul des racines d'un polynôme.

A partir de ces informations, nous pouvons déterminer la position de l'objet. En effet, en ayant l'altitude par rapport à la Terre, et connaissant son rayon, nous pouvons déterminer sa position. Comme dit précédemment, tous les objets sont circulaires ou sphériques dans le cas d'une application en trois dimensions.

Nous cherchons X(B), qui est la position de l'objet au point B. Nous pouvons premièrement déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}$ en ajoutant simplement le rayon de la Terre.

Donc $\left\|\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}\right\| = x + R_{Terre}$.

Cependant, actuellement, nous ne pouvons pas retrouver aisément les composantes $\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}$. Pour cela, nous devons reprendre les calculs.

On sait que $X(\Delta t) = \frac{a \times t^2}{2} + V(0) \times t + X(0)$
On connait $\|\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}\|$. On peut considérer que $\|\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{X}(\Delta t)}\right\|$. Cela signifie que $\|\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}\|$ est solution de l'équation $\left\|\overrightarrow{\mathrm{X}(\Delta t)}\right\|$. A partir de cela, nous pouvons déterminer les composantes de l'équation.

Comme $\|\overrightarrow{\mathrm{X(B)}}\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{X}(\Delta t)}\right\|$
Alors :

$$\frac{a \times t^2}{2} + V(0) \times t + X(0) = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} + R_{Terre}$$
$$\leftrightarrow \frac{a \times t^2}{2} + V(0) \times t + X(0) - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} - R_{Terre} = 0$$

Etant donné que nous sommes dans une configuration où le poids est l'unique force :

$$\vec{P} = m.\vec{a}$$
$$\leftrightarrow \mathrm{m}.\vec{g} = m.\vec{a}$$
$$\leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Donc :

$$\leftrightarrow \frac{g \times t^2}{2} + V(0) \times t + X(0) - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times g} - R_{Terre} = 0$$

On a une équation quadratique de la forme $a \times x^2 + b \times x + c = 0$ où :
- $\mathrm{a}' = \frac{g}{2}$
- $\mathrm{b}' = V(0)$
- $\mathrm{c}' = X(0) - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \times g} - R_{Terre}$

On peut désormais déterminer les valeurs de t pour lesquels notre position est correcte.

Pour cela, nous disposons d'un outil puissant, le « Δ » qui permet de trouver les racines de notre polynôme. Petit rappel, $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4 \times \mathrm{a} \times \mathrm{c}$ avec a, b, c, les coefficients de la fonction f, mis en évidence précédemment.

Dans notre càs, Δ sera toujours supérieur ou égale à 0. Pour trouver les valeurs des racines, il nous suffit d'appliquer la formule suivante :

Dans le cas où $\Delta = 0$, il n'existe qu'une unique solution et donc $t = \frac{-b}{2\times a}$.
Dans le cas où $\Delta > 0$, il n'existe qu'une unique solution et donc $t1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a}$ et $t2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a}$. Nous prendrons toujours une valeur de t positive car il s'agit d'une altitude.

Nos valeurs de $t1$ et $t2$ sont :

$$t1 = \frac{-V(0) - \sqrt{\Delta}}{X(0) - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times g} - R_{Terre}}$$

$$t2 = \frac{-V(0) + \sqrt{\Delta}}{X(0) - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times g} - R_{Terre}}$$

Etant donné que $V(0) > 0$, l'unique solution est :

$$t2 = \frac{-V(0) + \sqrt{\Delta}}{X(0) - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times g} - R_{Terre}}$$

En travaille