L'objectif de ce dossier est de vulgariser de la manière la plus simple possible la simulation de trajectoires d'objets célestes à partir de la physique Newtonienne.
Il s'agit également de s'amuser à calculer des équations accessibles.

Les problématiques :

- Le choix des équations de cinématique.
- Les forces à considérer.
- La méthode de résolution numérique à choisir.
- Comment corriger les erreurs d'orbites dû à la résolution numérique.
- Comment mettre en place la résolution partielle du problème à N corp.

Problématique 1 : -> partiellement résolue. En cours de résolution.

- Le choix est fait sur les équations de cinématique de Newton.
- La deuxième loi de Newton est utilisé pour calculer les différentes accélérations et vitesses.
- En ce qui concerne la vitesse, le théorème de l'énergie mécanique est utilisé lorsqu'un objet ne fournit aucune force.
- Dans le cas où l'objet émet une poussé, les équations de Newton sont utilisées pour calculer la position.
- Une méthode entière détaillant les calculs sera faite.

Problématique 2 : -> Résolue avec les forces actuelles.

- Les forces considérées actuellement sont le poids et l'accélération de la poussé des objets.
- Une section plus approfondi sera faite par la suite pour également introduire les frottement dû à l'air dans l'atmosphère terrestre par exemple.

Problématique 3 : -> partiellement résolue. En cours de résolution.

- Pour l'heure, la méthode d'Euler est utilisée.
- Pour limiter les erreurs dans un premier temps, la méthode de Verlet ou saute-mouton sera utilisé afin de diviser drastiquement la quantité d'erreurs dû au delta.
- Une partie entière sur la méthode utilisé sera faite.

Problématique 4 : -> En cours de résolution.

- Deux cas sont à considérer :
    - 1- Lorsque l'objet effectue une poussé. Dans ce càs là, seule une méthode de résolution numérique performante me semble obligatoire à trouver.
    - 2- Lorsque le corp n'effectue plus de pousser. L'utilisation du théorème de l'énergie mécanique est utile.
- Une problématique se pose sur la manière de récupérer la position exacte après le calcul de la nouvelle norme du vecteur position.
- Tout cela sera expliqué dans une partie indépendante.

Problématique 5 : -> Non résolue. Il s'agit d'un problème secondaire.

- Pour la résolution partielle du problème à N corp, les calculs vont se faire sur l'accélération et par conséquent l'intensité du champ de pesanteur 'g'.
- Une partie entière sera élaboré sur le sujet plus tard.

Pour le calcul de l'accélération, nous appliquons la deuxième loi de Newton qui nous dicte la formule suivante :

$$\sum \overrightarrow{Force} = m.\vec{a}$$

On notera que $\vec{P}$ correspond au vecteur poids et $\vec{F}$ qui est la force de poussé de la fusée permise par les propulseurs de cette dernières. En outre, cette équation permettant de déterminer l'accélération sera uniquement employé dans le cas d'une poussé, c'est-à-dire lorsque le théorème de l'énergie mécanique n'est plus nulle.

$$\leftrightarrow \vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\leftrightarrow \vec{a} = \frac{(\vec{P} + \overrightarrow{F})}{m}$$

$\vec{P} = m.\vec{g}$ avec $\vec{g}$, le vecteur correspondant au champ de pesanteur et m correspondant à la masse du corp.

$$\leftrightarrow \vec{a} = \frac{(m.\vec{g} + \overrightarrow{F})}{m}$$

$$\leftrightarrow \vec{a} = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m}$$

En projetant sur l'axe des x on obtient :

$$\overrightarrow{a.x} = \overrightarrow{g.x} + \frac{\overrightarrow{F.x}}{m}$$

En projetant sur l'axe des y on obtient :

$$\overrightarrow{a.y} = \overrightarrow{g.y} + \frac{\overrightarrow{F.y}}{m}$$

Pour le calcul de la norme de l'accélération on effectue :

$$\parallel \vec{a} \parallel = \parallel \vec{g} \parallel + \frac{\parallel \vec{F} \parallel}{m}$$

$$\leftrightarrow \parallel \vec{a} \parallel = \sqrt{\overrightarrow{g.x}^2 + \overrightarrow{g.y}^2} + \frac{\sqrt{\overrightarrow{F.x}^2 + \overrightarrow{F.y}^2}}{m}$$

Le calcul du champ de pesanteur a effectué est le suivant :

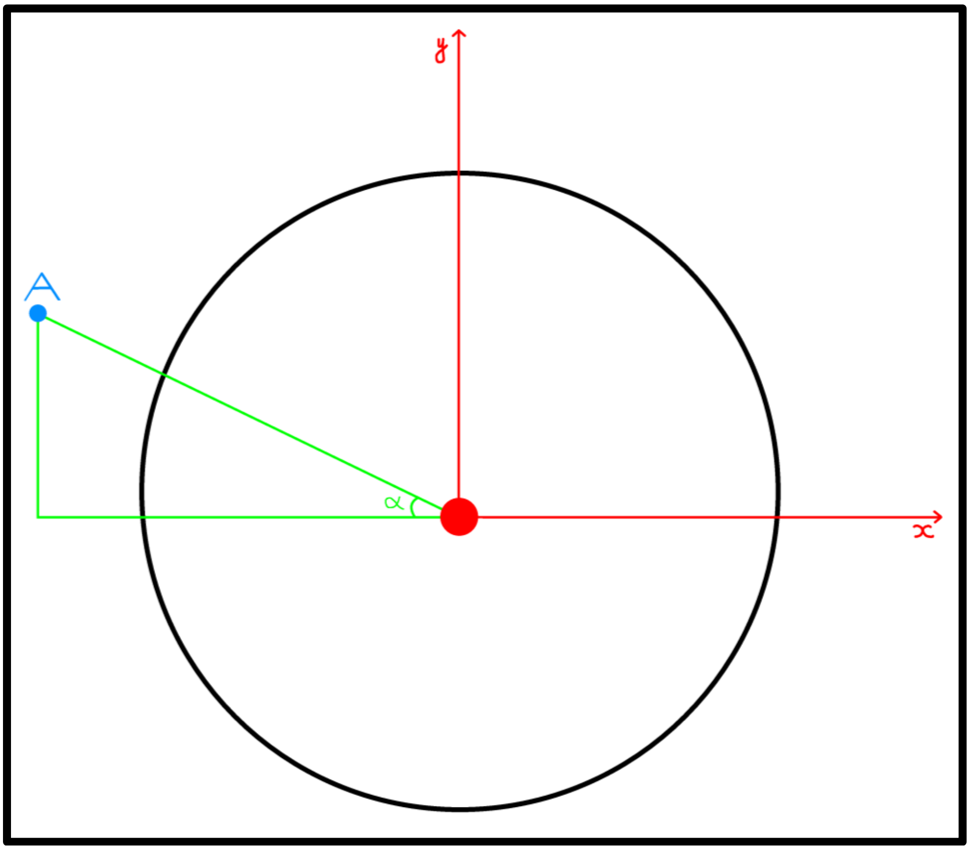
$$\|\vec{g}\| = G + \frac{M(attracteur)}{\|\vec{R}\|^2}$$

Avec G qui est la constante de Newton : $G \approx 6{,}67.10^{-11}$, $\vec{R}$ qui correspond à la distance entre le centre l'astre attracteur et le centre de l'astre attiré et $M(attracteur)$ correspond à la masse de l'objet attracteur.

Cependant, actuellement, nous ne connaissons que la norme de ce vecteur et non ses coordonnées. Pour cela, de la trigonométrie ainsi que le théorème de Pythagore s'imposent.

Pour la calcul de la coordonnée en x, on effectue le calcul suivant :

$$X = \|\vec{g}\|^2 \times \cos \alpha$$



On appelle ici l'angle α, l'angle représenté sur l'image ci-contre.

Donc $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{R(x)}}{\|\vec{R}\|}$

$$\leftrightarrow X = \|\vec{g}\|^2 \times \frac{\overrightarrow{R.x}}{\|\vec{R}\|}$$

Pour la calcul de la coordonnée en y, on effectue le calcul suivant :

$$Y = \|\vec{g}\|^2 \times \sin\alpha$$

Donc $\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{R(y)}}{\|\vec{R}\|}$

$$\leftrightarrow Y = \|\vec{g}\|^2 \times \frac{\overrightarrow{R.y}}{\|\vec{R}\|}$$

Nous sommes dans une configuration où la coordonnée est au carré du faite que la norme du vecteur $\vec{g}$ soit au carré dans les calculs.

En outre, ces coordonnées peuvent-être négative comme positive dû aux équations de trigonométries.

Le calcul pour connaître chacune des coordonnées est le suivant :

$$\leftrightarrow \overrightarrow{g.x} = \sqrt{|X|} \times \frac{X}{|X|}$$

$$\leftrightarrow \overrightarrow{g.y} = \sqrt{|Y|} \times \frac{Y}{|Y|}$$

Pour le calcul de la vitesse, nous utilisons une nouvelle fois la deuxième loi de Newton en sachant que la vitesse est décrite par l'équation suivante :

$$V(\Delta t) = \int a$$

On considère Δt comme étant une durée invariante tout au long des calculs et correspondant au temps mis par l'objet pour parcourir une certaine distance dans notre repère.

$$\leftrightarrow V(\Delta t) = a \times t + V(0)$$

En exprimant cette équation sur les x, on obtient :

$$\leftrightarrow V(\Delta t).x = a.x \times t + V(0).x$$

En exprimant cette équation sur les y, on obtient :

$$\leftrightarrow V(\Delta t).y = a.y \times t + V(0).y$$

Pour le calcul de la position, nous utilisons une nouvelle fois la deuxième loi de Newton en sachant que la position est décrite par l'équation suivante :

$$X(\Delta t) = \iint a$$

On considère Δt comme étant une durée invariante tout au long des calculs et correspondant au temps mis par l'objet pour parcourir une certaine distance dans notre repère.

$$\leftrightarrow X(\Delta t) = \frac{a \times t^2}{2} + V(0) * t + X(0)$$

En exprimant cette équation sur les x, on obtient :

$$\leftrightarrow X(\Delta t).x = \frac{a.x \times t^2}{2} + V(0).x * t + X(0).x$$

En exprimant cette équation sur les y, on obtient :

$$\leftrightarrow X(\Delta t).y = \frac{a.y \times t^2}{2} + V(0).y * t + X(0).y$$

L'équation de la position ne sera utilisé que dans le càs où l'objet émette une poussé. Par exemple dans le càs d'une fusée au décollage. A partir du moment où la fusée arrête les moteurs, cette équation ne peut plus être utilisé sous cette forme. Pour cela nous devons utiliser les équations qui seront décrite ci-dessous.

Pour le calcul de la position dans le càs d'une variation de l'énergie mécanique nulle.

Comme il n'y a pas de variation de l'énergie mécanique,

$$\Delta Em = 0$$
$$\leftrightarrow Em(B) - Em(A) = 0$$
$$\leftrightarrow \frac{1}{2} \times m \times V(B)^2 + m \times g(B) \times h(B) - Em(A) = 0$$
$$\leftrightarrow \frac{1}{2} \times m \times V(B)^2 + m \times G \frac{m(t)}{\left(R + h(B)\right)^2} \times h(B) - Em(A) = 0$$
$$\leftrightarrow m \times \frac{G \times m(t)}{\left(R + h(B)\right)^2} \times h(B) = Em(A) - \frac{1}{2} \times m \times V(B)^2$$
$$\leftrightarrow h(B) = \frac{(h(B) + R)^2 \times (Em(A) - \frac{1}{2} \times m \times V(B)^2)}{G \times m(t) \times m}$$
$$\leftrightarrow h(B) = \frac{(h(B)^2 + 2 \times h(B) \times R + R^2) \times (Em(A) - \frac{1}{2} \times m \times V(B)^2)}{G \times m(t) \times m}$$
$$\leftrightarrow h(B) = \frac{h(B)^2 \times Em(A) - h(B)^2 \times \frac{1}{2} \times m \times V(B)^2 + 2 \times h(B) \times R \times Em(A) - h(B) \times R \times m \times V(B)^2 + R^2 \times Em(A) - R^2 \times \frac{1}{2} \times m \times V(B)^2}{G \times m(t) \times m}$$

$$\leftrightarrow \frac{h(B)^2\times Em(A)-h(B)^2\times\frac{1}{2}\times m\times V(B)^2+2\times h(B)\times R\times Em(A)-h(B)\times R\times m\times V(B)^2+R^2\times Em(A)-R^2\times\frac{1}{2}\times m\times V(B)^2-h(B)\times G\times m(t)\times m}{G\times m(t)\times m}=0$$
$$\leftrightarrow \frac{h(B)^2\times(Em(A)-\frac{1}{2}\times m\times V(B)^2)+h(B)\times(2\times R\times Em(A)-R\times m\times V(B)^2-G\times m(t)\times m)+(R^2\times Em(A)-R^2\times\frac{1}{2}\times m\times V(B)^2)}{G\times m(t)\times m}=0$$

On peut définir une fonction que l'on appellera f qui prendra comme paramètre l'altitude de notre fusée par rapport à un astre donnée.

$$\mathrm{f(h(B))}=\frac{h(B)^2\times(Em(A)-\frac{1}{2}\times m\times V(B)^2)+h(B)\times(2\times R\times Em(A)-R\times m\times V(B)^2-G\times m(t)\times m)+(R^2\times Em(A)-R^2\times\frac{1}{2}\times m\times V(B)^2)}{G\times m(t)\times m}$$

Nous pouvons identifier trois membres distinct permettant l'écriture sous la forme d'un polynôme de degré 2.
Petit rappel de la forme d'un polynôme de degré 2 :
$g(x)=a\times x^2+b\times x+c$

On peut écrire $f(h(B))$ sous la forme de $g(x)$ avec :

$$a=\frac{h(B)^2\times(Em(A)-\frac{1}{2}\times m\times V(B)^2)}{G\times m(t)\times m}$$
$$b=\frac{h(B)\times(2\times R\times Em(A)-R\times m\times V(B)^2-G\times m(t)\times m)}{G\times m(t)\times m}$$
$$c=\frac{R^2\times Em(A)-R^2\times\frac{1}{2}\times m\times V(B)^2}{G\times m(t)\times m}$$
$$x=h(B)$$

Donc $\mathrm{f}(x)=a\times x^2+b\times x+c$

Notre objectif est de trouver ce que l'on appelle les racines de notre polynôme, c'est-à-dire les valeurs de « x » pour lesquels, f(x)=0, où dans notre càs, la l'altitude correspondant au prochaines coordonnées de notre objet.

Pour cela, nous disposons d'un outil puissant, le « Δ » qui permet de trouver les racines de notre polynôme. Petit rappel, $\Delta=\mathrm{b}^2-4\times\mathrm{a}\times\mathrm{c}$ avec « a », « b » et « c », les coefficients de la fonction f, mis en évidence précédemment.

Dans notre càs, Δ sera toujours supérieur ou égale à 0. Pour trouver les valeurs des racines, il nous suffit d'appliquer la formule suivante :

Dans le cas où $\Delta=0$, il n'existe qu'une unique solution et donc $x=\frac{-b}{2\times a}$.
Dans le cas où $\Delta>0$, il n'existe qu'une unique solution et donc $x1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a}$ et $x2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a}$.
Nous prendrons toujours une valeur de « x » positive car il s'agit d'une altitude.