第一章 矩阵

1.4 行列式

1.4.1 行列式的定义

板书

1.4.1 行列式的定义

对于任意n个变元n个线性方程组成的线性方程组，

是否有类似的结论？能否用行列式表示方程组的解？

现在我们用归纳法定义行列式.

1.4.1 行列式的定义

定义

1阶方阵$A=(a)$的行列式定义为数a.

设n-1阶方阵的行列式已经定义，考虑n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.4.1 行列式的定义

定义

删去A的元a_{ij}所在的第i行和第j列的所有元，

得到$(n-1)^2$个元按照原来的顺序组成的$n-1$阶

矩阵的行列式M_{ij}称为a_{ij}的余子式.

1.4.1 行列式的定义

a_{ij}的余子式M_{ij}

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
= M_{ij}
$$

1.4.1 行列式的定义

定义

A_{ij}为a_{ij}<u>的代数余子式</u>, 定义为$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

1.4.1 行列式的定义

定义 方阵A的行列式为

$$a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

其中M_{ij}为a_{ij}的余子式.

方阵A的行列式记为$\det A$或$|A|$或
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.4.1 行列式的定义

根据代数余子式的定义，方阵A的行列式可表示为

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

行列式的这种定义方法称为按第一列展开归纳定义.

1.4.1 行列式的定义

问题

比较下列行列式第一列元素的余子式，你有怎样的结论？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u & a_{12} & a_{13} \\ v & a_{22} & a_{23} \\ w & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1.4.1 行列式的定义

例1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

1.4.1 行列式的定义

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$$

$-$ $+$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

4阶及4阶以上行列式不遵循此规则!

1.4.1 行列式的定义

例3 计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解 原式$=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+0+0+3\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-3\cdot(2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix})$

$=(-1)\cdot 3+(-2)-3\cdot[2\cdot(-2)+(-4)]=19.$

1.4.1 行列式的定义

问题

行列式能否按第2列展开归纳定义？