第一章 矩阵

1.2 矩阵和运算

1.2.1 连加号

1.2.1 连加号

为了简便起见，我们经常将若干个数连加的式子

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

记为$\sum_{i=1}^{n} a_i$.

其中Σ 称为**连加号**. a_i表示一般项.

i称为求和指标.

$i = 1$指出了i所取的最小值，n指i所取的最大值.

1.2.1 连加号

注 只要不与连加号中出现的其它指标混淆，用什么字母作为求和指标是任意的, 例如

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j .$$

善至於止

1.2.1 连加号

在数域F中，连加号具有以下性质：

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i.$$

$$c\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}(ca_i).$$

1.2.1 连加号

考虑下列阵列所有项

$$
\begin{aligned}
&a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n},\\
&a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n},\\
&\cdots\\
&a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}
\end{aligned}
$$

的和.

1.2.1 连加号

若先按行相加，再将每行的元素加起来，则这*mn*个数的和等于

$$
\begin{aligned}
&\boxed{(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})}\\
+&\boxed{(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})}\\
+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+&\boxed{(a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn})}
\end{aligned}
=\boxed{\sum_{j=1}^{n}a_{1j}}+\boxed{\sum_{j=1}^{n}a_{2j}}+\cdots+\boxed{\sum_{j=1}^{n}a_{mj}}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)
$$

1.2.1 连加号

若先按列相加，再将每列的元素加起来，则这mn个数的和等于

$$
\begin{aligned}
& \boxed{a_{11}} + \boxed{a_{12}} + \cdots + \boxed{a_{1n}} \\
+ & a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ & a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}
\end{aligned}
$$

$$
= \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}} + \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{i2}} + \cdots \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{in}}
$$

$$
= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right)
$$

1.2.1 连加号

可见 $$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}).$$

若采用**双重连加号**，记 $\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})$ 为 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$.

则以下性质成立：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{i,j}.$$

1.2.1 连加号

- **例1** 用连加号表示下列式子

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

$$a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2$$

- **例2** 用双重连加号表示下列式子

$$\sum_{1 \le j \le i \le n} a_{i,j}$$

1.2.1 连加号

- **问题**

  如何用双重连加号表示 $\sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}$ **？**