第一章 矩阵

1.4 行列式

1.4.4 行列式的计算

1.4.4 行列式的计算

定义 对于一个n阶矩阵，如果它的主对角线以下的元素都等于零，则称A为**上三角矩阵.**

例1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.4.4 行列式的计算

证明 对行列式的阶数n用数学归纳法.

当$n=1$时, $\det A=a_{11}$, 结论成立.

假设命题对任意n-1阶上三角形矩阵的行列式都成立，

对于n阶上三角形矩阵A,

可见 $\det A = a_{11}M_{11}$,

其中M_{11}是n-1阶上三角形矩阵的行列式.

由归纳假设, $M_{11}=a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$. 所以 $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.

1.4.4 行列式的计算

对于一个n阶矩阵，如果它的主对角线以上的元素都等于零，则称A为**下三角矩阵.**

注 下三角形矩阵的行列式有类似结论.

1.4.4 行列式的计算

问题

$$\begin{vmatrix} & & & a_{11} \\ & & a_{22} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{nn} & & & \end{vmatrix} = ?$$

1.4.4 行列式的计算

例2
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 90.$$

1.4.4 行列式的计算

例3 板书

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}, a_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$$

1.4.4 行列式的计算

例4

设$A=\begin{pmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{pmatrix}$，计算 $\det A$.

解 将第2行，第3行，……，第n行加到第1行上，得到

$$\det A=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

1.4.4 行列式的计算

提取第1行的公因子$x+(n-1)a$,

$$\det A = [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

1.4.4 行列式的计算

例5

设$A_n=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$,

证明$\det A_n=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$.

证明 对行列式的阶数n用数学归纳法.

当$n=1$时, 结论成立.

假设命题对任意n-1阶具有上述形状的行列式都成立，

1.4.4 行列式的计算

考虑n阶情形，将行列式按照第1行展开，

第(1,1)元λ的余子式是与$\det A_n$具有相同特点的n-1阶行列式, 记为$\det A_{n-1}$.

第(1,n)元a_n 的余子式是上三角形矩阵的行列式，其值为$(-1)^{n-1}$. 故

$$\begin{aligned}\det A_n &= \lambda \det A_{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} a_n \\ &= \lambda \det A_{n-1} + a_n .\end{aligned}$$

利用归纳假设得到

$$\det A_n = \lambda(\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) + a_n$$
$$= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

1.4.4 行列式的计算

例6 证明Vander monde（范德蒙德）行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

证明 对行列式阶数用数学归纳法

$$V_2=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\le j<i\le 2}(x_i-x_j),$$

因此当 $n=2$ 时等式成立．

1.4.4 行列式的计算

假设结论对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，

第n-1列乘以-x_n加到第n列上，第n-2列乘以-x_n加到第n-1列上，

一直下去，第1列乘以-x_n加到第2列上，得

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1-x_n & x_1^2-x_1x_n & \cdots & x_1^{n-2}-x_1^{n-3}x_n & x_1^{n-1}-x_1^{n-2}x_n \\ 1 & x_2-x_n & x_2^2-x_2x_n & \cdots & x_2^{n-2}-x_2^{n-3}x_n & x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}^2-x_{n-1}x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-2}-x_{n-1}^{n-3}x_n & x_{n-1}^{n-1}-x_{n-1}^{n-2}x_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1.4.4 行列式的计算

$$=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x_1-x_n & x_1^2-x_1x_n & \cdots & x_1^{n-2}-x_1^{n-3}x_n & x_1^{n-1}-x_1^{n-2}x_n \\ x_2-x_n & x_2^2-x_2x_n & \cdots & x_2^{n-2}-x_2^{n-3}x_n & x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}-x_n & x_{n-1}^2-x_{n-1}x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-2}-x_{n-1}^{n-3}x_n & x_{n-1}^{n-1}-x_{n-1}^{n-2}x_n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

***n*-1阶范德蒙德行列式**

1.4.4 行列式的计算

$$V_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})V_{n-1}.$$

由归纳假设，$V_{n-1} = \prod\limits_{1\le j<i\le n-1}(x_i - x_j).$

进而有

$$V_n = \prod_{j=1}^{n-1}(x_n - x_j)\prod_{1\le j<i\le n-1}(x_i - x_j).$$

$$= \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j).$$

1.4.4 行列式的计算

问题

求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.