第一章 矩阵

1.5 行列式的展开式和Laplace定理

1.5.1 行列式的展开式

1.5.1 行列式的展开式

- **例** 设 $(i_1, i_2, ..., i_n)$是1, 2, …, n的一个排列,

  计算 $\sigma(i_1, i_2, ..., i_n) - \sigma(i_1, i_2, ..., i_{n-1})$.

  解　由于i_n前面有$n - i_n$个数

  (即$i_n + 1, i_n + 2, \cdots, n$)大于$i_n$,

  所以$(i_1, i_2, ..., i_n)$比$(i_1, i_2, ..., i_{n-1})$多$n - i_n$个逆序.

  故$\sigma(i_1, i_2, ..., i_n) - \sigma(i_1, i_2, ..., i_{n-1}) = n - i_n$.

1.5.1 行列式的展开式

定理 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,则

$$\det A=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

这里$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$取遍1, 2, …… , n 的所有全排列.

1.5.1 行列式的展开式

证明 对行列式阶数n用归纳法.

当n=1时，$\det A = a_{11}$，结论成立.

假设结论对于n-1阶行列式都成立，

考虑 n 阶行列式 $\det A$. 按照第 n行展开,

得到 $\det A = \sum\limits_{1\le i\le n} (-1)^{n+i} a_{ni} M_{ni}$.

记 $M_{ni} = \det(b_{kl})$，其中 $1 \le k, l \le n-1$.

由归纳假设知 $M_{ni} = \sum\limits_{(l_1, l_2, \cdots, l_{n-1})} (-1)^{\sigma(l_1, l_2, \cdots, l_{n-1})} b_{1l_1} b_{2l_2} \cdots b_{n-1l_{n-1}}$,

这里 $(l_1, l_2, \cdots, l_{n-1})$ 取遍1,2，…，n-1的所有全排列.

1.5.1 行列式的展开式

注意到，$b_{1l_1}b_{2l_2}\cdots b_{n-1,l_{n-1}}=a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}$.

当$l_h<i$时，$i_h=l_h$;

当$l_h\geq i$ 时，$i_h=l_h+1$.

可见$\sigma(l_1,l_2,\cdots,l_{n-1})=\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})$ ，

其中$(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})$ 取遍1, 2, … , *i*-1, *i*+1, … , *n*

的所有全排列. 因此

$$M_{ni}=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}$$

1.5.1 行列式的展开式

这样

$$\det A=\sum_{1\le i\le n}(-1)^{n+i}a_{ni}\Big(\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}\Big)$$

$$=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i)}(-1)^{(n+i)+\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}a_{n,i}$$

$$=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i)}(-1)^{(n-i)+\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}a_{n,i}$$

$$=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n)}(-1)^{(n-i_n)+\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n-1,i_{n-1}}a_{n,i_n}$$

$$=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}\cdots a_{n,i_n},$$

这里 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 取遍1, 2, … , n 的所有全排列.

根据归纳法，结论成立.