第一章 矩阵

1.2 矩阵和运算

1.2.3 矩阵的乘法

1.2.3 矩阵的乘法

你会如何定义矩阵的乘法呢？

矩阵的Hadamard乘积

1.2.3 矩阵的乘法

定义 设A为$m\times k$ 矩阵，B为$l\times n$矩阵，则当且仅当$k=l$时A与B可相乘且A与B的乘积为$m\times n$矩阵C，定义如下：

若$A=(a_{ij})_{m\times k}, B=(b_{ij})_{k\times n}$,则$C=(c_{ij})_{m\times n}$,

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}$$

$$=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj}.\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

即AB的(i,j)元素等于将A的第i行元素与B的第j列元素分别相乘以后再求和的结果.

1.2.3 矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 2 \quad 2} \\ 2 \quad 1 \quad 0 \\ 4 \quad 3 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

1.2.3 矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & 13 \end{pmatrix}$$

1.2.3 矩阵的乘法

例
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

则(*)可表示为 $AX = \beta$. A 称为系数矩阵.

1.2.3 矩阵的乘法

注

矩阵A，B乘积**一般不可交换！**

例如对于 $A=(1\quad 0\quad 4), B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

有$AB=1$, 而 $BA=\begin{pmatrix}1&0&4\\1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1.2.3 矩阵的乘法

注 矩阵乘积一般不满足消去律

~~消去律~~

$AB=0$ 且 $A\neq 0 \nRightarrow B=0$

例如

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=0,\text{但}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\neq 0,\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq 0$$

1.2.3 矩阵的乘法

问题

由$AB = AC$ 且 $A \neq 0$是否能得到$B = C$?

1.2.3 矩阵的乘法

- **运算规则**
  - ✓ **乘法的结合律:** $(AB)C = A(BC)$
  - ✓ $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$
  - ✓ $cAB = (cA)B = A(cB)$
  - ✓ **对任意**$m\times n$**矩阵**A, $E_m A = A = A E_n$
  - ✓ **对任意**$m\times n$**矩阵**A, $O_{s\times m} A = O_{s\times n}$, $O_{m\times t} = A\ O_{n\times t}$.

1.2.3 矩阵的乘法

定义 设A为n阶方阵(A的行数 = 列数= n),

定义方阵的幂:

$A^2:=AA$, $A^3:=A^2A$, …, $A^r:=A^{r-1}A$. 则

✓ $A^{r+s} = A^r A^s$

✓ $A^{rs} = (A^r)^s$

1.2.3 矩阵的乘法

若$AB=BA$(矩阵 A, B 乘积可交换 或可交换), 则

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)$$
$$=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$$

进一步地，

$$(A+B)^s=A^s+C_s^1A^{s-1}B+C_s^2A^{s-2}B^2+\ldots+C_s^{s-1}AB^{s-1}+B^s$$

此式对一般的方阵A, B不成立.

1.2.3 矩阵的乘法

问题

设A与B均为n阶方阵，问等式

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

成立的充分必要条件是什么?