第一章 矩阵

1.7 初等矩阵与初等变换

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

命题 若矩阵A可逆, 则

(1) A 可经一系列行初等变换变为E;

(2) A 可经一系列列初等变换变为E.

证明板书

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

利用初等变换求矩阵的逆矩阵的方法

$$(A, E) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (E, A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

例1 求 A^{-1}, 并将其表示成初等矩阵的乘积, 其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

解 $(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{E(2,1(-2))}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{E(3,1(-1))}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

$$\xrightarrow{E(2,3)}\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&-3&-4&-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E(1,2(-2)),E(3,2(3))}\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&-2\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-5&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E(3(-1))}\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&-2\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&1&5&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{E(1,3(-1)),E(2,3(-1))}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&1&5&-1&-3\end{pmatrix}$$

所以$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}$.

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

由于$E(2,3(-1))E(1,3(-1))E(3(-1))E(3,2(3))E(1,2(-2))E(2,3)E(3,1(-1))E(2,1(-2))A=E$,

则$A=(E(2,3(-1))E(1,3(-1))E(3(-1))E(3,2(3))E(1,2(-2))E(2,3)E(3,1(-1))E(2,1(-2)))^{-1}$,

$$A=(E(2,1(-2)))^{-1}(E(3,1(-1)))^{-1}(E(2,3))^{-1}(E(1,2(-2)))^{-1}(E(3,2(3)))^{-1}(E(3(-1)))^{-1}(E(1,3(-1)))^{-1}((E(2,3(-1)))^{-1}.$$

由初等矩阵的性质得

$$A=E(2,1(2))E(3,1(1))E(2,3)E(1,2(2))E(3,2(-3))E(3(-1))E(1,3(1))E(2,3(1)).$$

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

问题

已知$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$且将$A$表示成有限个初等矩阵的乘积.

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

以下设A为可逆阵

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

设$A^{-1}=P_s\cdots P_1$,其中$P_i\,(i=1,2,\cdots,s)$是初等矩阵.

则$P_s\cdots P_1A=E$，$P_s\cdots P_1B=A^{-1}B$.

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列行初等变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \end{pmatrix}$$

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

设A为可逆阵

$$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列列初等变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

问题

若A为可逆矩阵，求解$XA=B$时可否借助于对(A^T, B^T)作初等行变换？

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

例2 求矩阵X, 使$AX=B$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

解 由于 $\det A = 1 \neq 0$, 因此A 可逆，从而$X = A^{-1}B$.

$$(A \vdots B) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E(2,1(1))} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

$$\xrightarrow{E(3,1(-1))}\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&1&1\\0&1&2&\vdots&1&2\\0&0&1&\vdots&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E(1,3(-1))}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&3&1\\0&1&2&\vdots&1&2\\0&0&1&\vdots&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E(2,3(-2))}\begin{pmatrix}1&0&0&3&1\\0&1&0&5&2\\0&0&1&-2&0\end{pmatrix}$$

所以$X=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\\-2&0\end{pmatrix}$.

1.7.3 求逆矩阵的初等变换方法

例3 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，且$AB=A+2B$，求 B.

解 因为$AB=A+2B$，所以$(A-2E)B=A$.

由于$\det(A-2E)=2\neq 0$，所以$B=(A-2E)^{-1}A$.

由于$(A-2E \quad A)=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 因此$B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.