第一章 矩阵

1.5 行列式的展开式和Laplace定理

1.5.1 行列式的展开式

1.5.1 行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

1.5.1 行列式的展开式

行列式的展开式

$$\det A=\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\dots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$$

这里$(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 取遍1, 2, …… , n的所有全排列.

$$=\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)}(-1)^{\sigma(j_1,j_2,\dots,j_n)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\dots a_{j_n n}$$

这里$(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 取遍1, 2, …… , n的所有全排列.

1.5.1 行列式的展开式

定义 设正整数$i_1, i_2, \ldots, i_m$两两不同，

在排列 $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$中，如果一个较大的数

排在较小的数之前，则称它们是一个**逆序**.

一个排列中逆序的总数就称为这个排列的

逆序数，记为$\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_m)$.

1.5.1 行列式的展开式

定义 若排列$(i_1, i_2, \ldots, i_m)$的逆序数为偶数(含零), 则称之为**偶排列**;

若排列$(i_1, i_2, \ldots, i_m)$的逆序数为奇数, 则称之为**奇排列**.

1.5.1 行列式的展开式

例1 求排列$n, n-1, \ldots, 3, 2, 1$的逆序数

并讨论该排列的奇偶性.

解

$$\overbrace{n\underbrace{(n-1)(n-2)\cdots 3}_{n-2}}^{n-1}21$$

$$\sigma(n, n-1, \cdots, 2, 1) = (n-1) + (n-2) + \cdots 2 + 1$$

$$= \frac{n(n-1)}{2},$$

当$n = 4k, 4k+1$ 时为偶排列；

当 $n = 4k+2, 4k+3$ 时为奇排列.

1.5.1 行列式的展开式

问题

求排列 $2,4,6,\ldots(2n),1,3,\cdots,(2n-1)$ 的逆序数并讨论该排列的奇偶性.

1.5.1 行列式的展开式

行列式的展开式

$$\det A=\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\ldots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}$$

这里$(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 取遍1, 2, …… , n的所有全排列.

$$=\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}(-1)^{\sigma(j_1,j_2,\ldots,j_n)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\ldots a_{j_n n}$$

这里$(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 取遍1, 2, …… , n的所有全排列.

1.5.1 行列式的展开式

注1 n阶行列式展开式共有$n!$项.

注2 每项为取自不同行不同列的n个元素之积.

注3 每项的正负号由逆序数的奇偶性决定.

1.5.1 行列式的展开式

注4 在$n(>1)$阶行列式的$n!$项展开式中, 正负号各占一半.

证明

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$, 即 $\sum\limits_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_n)}=0.$

这表示正负号各占一半.

1.5.1 行列式的展开式

例2 计算
$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}.$$

解

$$\text{原式} = (-1)^{\sigma(n,n-1,\cdots 2,1)} a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

1.5.1 行列式的展开式

例3(板书） 求$f(x)$中x^3的系数, 其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 & 4 \\ 3 & 0 & x & 1 \\ 1 & 2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

1.5.1 行列式的展开式

对换改变排列的奇偶性

设$(i_1, i_2, \ldots, i_m)$为一个m级排列, 若将其中i_k与i_j位置对换, 其余保持不动, 则改变排列的奇偶性$(m\geq 2)$.

思考 试用行列式的展开式作为行列式的定义，推出行列式的性质.