第一章 矩阵

1.6 可逆矩阵

1.6.1 可逆矩阵

1.6.1 可逆矩阵

在建立了矩阵的加法、减法与乘法的运算后，

我们自然会问：

可否定义矩阵的除法？

在数的运算中，利用倒数可以将除法转化为

乘积的形式，即

$$\frac{c}{a}=c\cdot\frac{1}{a},\text{其中}a\neq 0.$$

1.6.1 可逆矩阵

倒数：对于非零数a, 如果存在数b, 使得

$$ab = ba = 1,$$

则称数b是数a的倒数.

$$1 \Longrightarrow E_n$$

$$ab = ba = 1 \qquad AB = BA = E_n$$

1.6.1 可逆矩阵

定义

设A是一个n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得

$$AB = BA = E_n,$$

则称A是**可逆矩阵**, 称B是A的**逆矩阵**.

注 由于$AB = E_n$意味着A的行数为n,

而$BA = E_n$意味着A的列数为n,

所以定义中直接设“A是n阶方阵”.

1.6.1 可逆矩阵

问题1 任意非零矩阵都有逆矩阵吗？

例1 单位阵是可逆矩阵.

例2 由于$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+c & b+d \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

因此 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 不可逆.

答：并非任一非零矩阵都有逆矩阵.

1.6.1 可逆矩阵

问题2 若n阶方阵A可逆，则逆矩阵唯一吗？

事实上，若B、C 均为A 的逆矩阵，则

$$AB = BA = E_n,\ AC = CA = E_n,$$

从而$B = BE_n = B(AC) = (BA)C = E_nC = C.$

答: 若n阶方阵A可逆，则逆矩阵唯一.

注 由于可逆矩阵A的逆矩阵是唯一确定的，

故可用确定的符号记之为A^{-1}.

1.6.1 可逆矩阵

若A可逆, 则$(A^{-1})^{-1}=A$;

若A可逆, 且c非零, 则cA可逆, 且$(cA)^{-1}=c^{-1}A^{-1}$;

若A, B均可逆, 则AB 也可逆, 且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

若A可逆, 则A^{T} 可逆, 且$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

若A可逆, 则$\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$.

1.6.1 可逆矩阵

问题

若n阶方阵A, B可逆，则$A+B$是否一定可逆？

1.6.1 可逆矩阵

定义

设A为n阶方阵, A_{ij}为A的第i行第j列元素a_{ij}的代数余子式, 则称矩阵$A^*=(A_{ji})_{n\times n}$为A的伴随矩阵.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A^*的(i,j)元素为 A_{ji}

1.6.1 可逆矩阵

命题 $AA^*=A^*A=(\det A)E_n.$

证明

$$AA^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \det A & & & 0 \\ & \det A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \det A \end{pmatrix}=(\det A)E_n.$$

类似地，可验证$A^*A=(\det A)E_n.$

1.6.1 可逆矩阵

定理 n 阶方阵A 可逆的充要条件是 $\det A \neq 0$.

且A可逆时 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$.

证明 设A为可逆矩阵，则存在矩阵B，使

$$AB = BA = E_n.$$

于是$(\det A)(\det B) = 1$, 从而 $\det A \neq 0$.

反之, 若 $\det A \neq 0$, 由于$AA^* = A^* A = (\det A)E_n$,

则$A\dfrac{A^*}{\det A} = \dfrac{A^*}{\det A}A = E_n$, 因此$A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$.

1.6.1 可逆矩阵

推论 若$AB=E_n$(或$BA=E_n$), 则A可逆且

$$A^{-1}=B.$$

证明 若 $AB=E_n$, 则 $\det A\det B=1$,

因此$\det A\neq 0$. 于是A可逆且

$$A^{-1}=A^{-1}E_n=A^{-1}(AB)=(A^{-1}A)B=E_nB=B.$$

对于$BA=E_n$的情况同理可证.

1.6.1 可逆矩阵

例3 求 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(ad-bc\neq 0)$ 的逆矩阵.

解 由于 $\det A = ad\text{-}bc \neq 0$,

又 $A^{*}=\begin{pmatrix} d & \text{-}b \\ \text{-}c & a \end{pmatrix}$,

因此 $A^{-1}=\dfrac{A^{*}}{\det A}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1.6.1 可逆矩阵

例4（板书）已知方阵A,B满足$AB=A+B$.证明：

1) $A-E$是可逆矩阵； 2) $AB=BA$.

1.6.1 可逆矩阵

问题

若n阶方阵A满足方程$A^2-A-2E=0$,

则A与$A+2E$都是可逆矩阵么？