第一章 矩阵

1.2 矩阵和运算

1.2.2 矩阵的和与数乘

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **例1** 某工厂的两个分厂都生产三种产品.

在某年第一季度，生产情况如下表：

产品 / 产量	产品$_1$	产品$_2$	产品$_3$
分厂$_1$	10	8	12
分厂$_2$	15	10	11

$$A=\begin{pmatrix}10 & 8 & 12\\ 15 & 10 & 11\end{pmatrix}$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **定义** 由数域F上的mn个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

排成m行n列的矩形阵列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

称为 F上m 行 n 列**矩阵**，简记为$m\times n$**矩阵**，

a_{ij}称为 A 的第 i 行第 j 列元素或第(i,j)元素.

a_{ii} $(i=1,2,\ldots,n)$称为A 的第 i 个(主)对角元.

1.2.2 矩阵的和与数乘

- 1850年英国数学家西尔维斯特（Sylvester，1814-1897）首先提出矩阵的概念.

- 1858年英国数学家卡莱（A. Cayley, 1821-1895）建立了矩阵运算规则.

1.2.2 矩阵的和与数乘

定义 若两个矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{s\times t}$ 满足如下条件

- ✓ $m=s,\ \ n=t$
- ✓ $a_{ij}=b_{ij}\quad i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n$

则称A 与B**相等**.

注 具有不同行列数的零矩阵代表不同的矩阵.

例如 $O_{2\times 3}\neq O_{1\times 6}$

1.2.2 矩阵的和与数乘

例1（续） 设第二季度的生产情况用矩阵B表示：

$$B=\begin{pmatrix} 12 & 10 & 10 \\ 14 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

则上半年的生产情况可以用矩阵C表示:

$$C=\begin{pmatrix} 10+12 & 8+10 & 12+10 \\ 15+14 & 10+12 & 11+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22 & 18 & 22 \\ 25 & 22 & 19 \end{pmatrix}$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

定义

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{s\times t}$，

则当且仅当$m=s$, $n=t$时它们可以相加且它们的**和**为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **运算规则**

  ✓ 交换律: $A+B = B+A$

  ✓ 结合律: $(A+B)+C = A+(B+C)$

  ✓ 存在零元: $O+A = A+O = A$

  ✓ 存在负元:

  若$A = (a_{ij})_{m\times n}$，令$B = (-a_{ij})_{m\times n}$，则$A+B = O$.

  矩阵B称为A的负矩阵，记为$-A$.

1.2.2 矩阵的和与数乘

- 矩阵的**减法**是加法的逆运算，即 $A\text{-}B=A+(-B)$.

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\quad B=(b_{ij})_{m\times n},$$

$$A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

例1（续）依据该工厂第一季度的生产情况对应的矩阵A，预测全年生产情况:

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 8 & 12 \\ 15 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 10\times 4 & 8\times 4 & 12\times 4 \\ 15\times 4 & 10\times 4 & 11\times 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 40 & 32 & 48 \\ 60 & 40 & 44 \end{pmatrix}=4A$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **定义**

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$为数域F上的$m\times n$矩阵, $c\in F$,

则c与A的数量乘积为

$$cA=(ca_{ij})_{m\times n}.$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2.3 矩阵的乘法

- **单位矩阵 E_n：** 亦记作I_n

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.3 矩阵的乘法

- **数量矩阵：** 亦记作cE_n

$$cE_n = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **运算规则：**

  ✓ $c(A+B)=cA+cB$

  ✓ $(c+d)A=cA+dA$

  ✓ $(cd)A=c(dA)$

  ✓ $1A=A$

  显然, $0A=O$

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **定义** n**维标准单位向量** ε_i

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

•例2 对于n维列向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，有

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots+a_n\varepsilon_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i.$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{转置}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \qquad\qquad \boldsymbol{A}^T$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

定义

对于$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,m$.

A的**转置**为$n\times m$矩阵$B=(a_{ji})_{n\times m}$，记做A^{T}.

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **运算规则**
  - ✓ $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A.$
  - ✓ $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$
  - ✓ $(cA)^{\mathrm{T}} = cA^{\mathrm{T}}$

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **对称矩阵A：** $A=A^{\mathrm{T}}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$a_{ij}=a_{ji}, \forall i \neq j,\ i, j=1,2,\cdots,n.$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **反对称矩阵A：** $A=-A^{\mathrm{T}}$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{ij}=-a_{ji}, \forall i\neq j,\ \ i,j=1,2,\cdots,n.$$

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **例3 证明：对任意方阵A, 必存在对称矩阵B, 反对称矩阵C, 使得$A=B+C$.**

1.2.2 矩阵的和与数乘

- **问题** 只有零矩阵既是对称矩阵又是反对称矩阵吗？