第一章 矩阵

1.1 数域

1.1 数域

自然数集$\mathbb{N}$　整数集$\mathbb{Z}$　有理数集$\mathbb{Q}$

实数集$\mathbb{R}$　复数集$\mathbb{C}$

这些数集不仅仅是一些数字符号的集合，

更重要的是在其上定义了**运算**。

1.1 数域

在自然数范围内，减法运算不是总能进行的.

在整数范围内，除法运算也不是总能进行的.

而对于有理数集中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍是有理数.

实数集和复数集同样有类似性质.

1.1 数域

定义

复数集$\mathbb{C}$的子集F 称为数域，若其满足下列条件:

- F至少包含0和1；
- F中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍然属于F.

(F关于通常数的加、减、乘、除运算封闭.)

1.1 数域

定义

若集合F中任意两个数作某一运算后的结果仍然在F中，则称F关于这个运算封闭。

1.1 数域

例1 自然数集$\mathbb{N}$不是数域.

整数集$\mathbb{Z}$不是数域.

例2 有理数集$\mathbb{Q}$、实数集$\mathbb{R}$、

复数集$\mathbb{C}$均为数域 .

1.1 数域

例3. 证明$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$是数域.

板书

1.1 数域

问题 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是数域吗？

1.1 数域

命题 任一数域必包含有理数域$\mathbb{Q}$.

证明 设F是一个数域，则$0,1\in F$.

对于$n\in\mathbb{N}$，因为$n=1+1+\cdots 1$(n个1相加)，

所以$n\in F$，$-n\in F$. 因此$\mathbb{Z}\subseteq F$.

对于$a,b\in\mathbb{Z}$，$b\neq 0$，由$a,b\in F$得到$\dfrac{a}{b}\in F$.

故$\mathbb{Q}\subseteq F$.

1.1 数域

命题 $\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$之间不存在任何其他数域.

证明 设F是一个数域且满足$\mathbb{R} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$.

设$\mathbb{R} \neq F$，则存在$a+bi \in F\,(a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$.

由于$\mathbb{R} \subseteq F$且对减法和除法封闭，因此

$bi = (a+bi) - a \in F$，进一步 $i = \dfrac{bi}{b} \in F$.

这样，对于任意$c+di \in \mathbb{C}$,

因为$1, i \in F$且$c, d \in \mathbb{R}$，所以$c+di \in F$.

因此$F = \mathbb{C}$.

1.1 数域

问题

是否存在无穷多个数域？