# 第一章 矩阵

## 1.8 矩阵的秩

### 1.8.2 矩阵的相抵标准形

# 1.8.2 矩阵的相抵标准形

**命题** 对矩阵做有限次初等变换不改变矩阵的秩.

**推论** 设 $P,Q$ 是可逆阵, 则

$$r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A).$$

**证明** 可逆矩阵是有限个初等矩阵的乘积，

矩阵$A$左（右）乘初等矩阵相当于对$A$作一次

行（列）的相应的初等变换.

## 1.8.2 矩阵的相抵标准形

**推论** $A$相抵于$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$当且仅当 $r(A)=r$.

**证明** 若$A$相抵于$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则存在可逆矩阵$P$及$Q$，使得

$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$. 因此$r(A)=r\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=r$.

反之，若$A$相抵于$\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$r(A)=r_1$.

而已知$r(A)=r$，则$r_1=r$，因此$A$相抵于$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

# 1.8.2 矩阵的相抵标准形

**推论** 设$A, B$是$m\times n$矩阵, 则$A$与$B$相抵

$$\Leftrightarrow r(A)=r(B);$$

$$\Leftrightarrow A, B\text{的相抵标准形是相同的.}$$

# 1.8.2 矩阵的相抵标准形

**推论** $F^{m\times n}$ 按照相抵关系可分为 $\min\{m, n\}+1$ 类，每类的代表元是

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.8.2 矩阵的相抵标准形

**例1** 设$m\times n$ 矩阵$A$的秩为$r$, 求证$A$可以表示为$r$个秩为1的矩阵之和.

**证明** 对于矩阵$A$，存在可逆矩阵$P$及$Q$，使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

因此$A$=$P(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr})Q$

$=PE_{11}Q+PE_{22}Q+\cdots+PE_{rr}Q,$

其中$E_{ii}(i=1,\cdots,r)$为基础矩阵，

令$A_i$=$PE_{ii}Q(i=1,\cdots,r)$, 则$A$=$A_1+\cdots+A_r$.

由于$P,Q$可逆，则$r(A_i)=r(PE_{ii}Q)=1.$

## 1.8.2 矩阵的相抵标准形

**例2** 设 $m\times n$矩阵$A$的秩为$r$, 求证存在 $B_{m\times r}$, $C_{r\times n}$, 使得 $r(B)=r(C)=r$且$A=BC$.

**证明** 对于矩阵$A$, 存在可逆矩阵$P$及$Q$, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

由于$P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}Q$,

令$B=P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}Q$即可.

# 1.8.2 矩阵的相抵标准形

- （板书）例3 证明：$n$阶方阵$A$不可逆的充分必要条件是存在非零的$n$阶方阵$B$，使得$AB=0$.

# 1.8.2 矩阵的相抵标准形

**例4** 证明：$n$阶方阵$A$可以经过一系列的**行**初等变换化为对称矩阵.

**等价命题** 对于$n$阶方阵$A$, 存在可逆矩阵$B$和对称阵$C$使得$A=BC$.

**证明** 对于方阵$A$，存在可逆矩阵$P$及$Q$，使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

由于$P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=P(Q^T)^{-1}Q^T\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$,

令$B=P(Q^T)^{-1}$, $C=Q^T\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$即可.

# 1.8.2 矩阵的相抵标准形

**问题** 试利用矩阵的相抵标准型证明：

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B).$$