第一章 矩阵

1.7 初等变换与初等矩阵

1.7.1 初等变换与初等矩阵

板书

1.7.1 初等变换与初等矩阵

定义 矩阵的**行初等变换**指

(1) **互换变换**: 交换矩阵中某两行；

(2) **倍法变换**: 用一非零常数乘以矩阵某行的各元素；

(3) **消法变换**: 将矩阵某行各元素的c倍加到另一行的对应元素上.

类似可定义**列初等变换**.

1.7.1 初等变换与初等矩阵

定义 对单位矩阵做一次初等变换

得到的矩阵称为<u>初等矩阵</u>.

1.7.1 初等变换与初等矩阵

- **互换矩阵**

$$E(i,j)=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right) & \begin{array}{l}\\ \\ \text{第}i\text{行}\\ \\ \text{第}j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccccc}&&\text{第}i\text{列}&&\text{第}j\text{列}&&\end{array} & \end{array}$$

1.7.1 初等变换与初等矩阵

- <u>倍法矩阵</u>　c为非零数

$$E(i(c)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{第}i\text{列} & \end{array}$$

1.7.1 初等变换与初等矩阵

- **消法矩阵** c为一数

$$E(i,j(c))=\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ &\ddots &&&&& \\ &&1&&c&& \\ &&&\ddots&&& \\ &&&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad \text{第}i\text{列}\quad \text{第}j\text{列} & \end{array}$$

注 $E(i,j(c))$是E第i列元素的c倍加到第j列的对应元素得到.

1.7.1 初等变换与初等矩阵

定理 设A是$m\times n$阶矩阵, 对A做一次行初等变换相当于左乘一个m阶相应的初等矩阵, 对A做一次列初等变换相当于右乘一个n阶相应的初等矩阵.

证明板书

1.7.1 初等变换与初等矩阵

纲领 **左行右列**

$$E(i,j)A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

1.7.1 初等变换与初等矩阵

$$AE(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & i\text{列} & & j\text{列} & & \phantom{a_{1n}} \end{array}\end{array}$$

1.7.1 初等变换与初等矩阵

$$E(i(c))A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} i\text{行}$$

1.7.1 初等变换与初等矩阵

$$AE(i(c))=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & ca_{1i} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & ca_{2i} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi-1} & ca_{mi} & a_{mi+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ i\text{列} \end{array}$$

1.7.1 初等变换与初等矩阵

$$E(i,j(c))A=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

1.7.1 初等变换与初等矩阵

$$AE(i,j(c))=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+ca_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j}+ca_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj}+ca_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \qquad i\text{列} \qquad\qquad\quad j\text{列} \qquad\qquad\qquad \end{array}$$

1.7.1 初等变换与初等矩阵

例1 求$E(1,3)A$, $AE(1,3)$, $E(1(3))A$, $AE(1(3))$, $E(1,3(1))A$, $AE(1,3(1))$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\-1&0&1&2\end{pmatrix}.$$

解

$$E(1,3)A=\begin{pmatrix}-1&0&1&2\\5&6&7&8\\1&2&3&4\end{pmatrix},\quad AE(1,3)=\begin{pmatrix}3&2&1&4\\7&6&5&8\\1&0&-1&2\end{pmatrix},\quad E(1(3))A=\begin{pmatrix}3&6&9&12\\5&6&7&8\\-1&0&1&2\end{pmatrix},$$

$$AE(1(3))=\begin{pmatrix}3&2&3&4\\15&6&7&8\\-3&0&1&2\end{pmatrix},\quad E(1,3(1))A=\begin{pmatrix}0&2&4&6\\5&6&7&8\\-1&0&1&2\end{pmatrix},\quad AE(1,3(1))=\begin{pmatrix}1&2&4&4\\5&6&12&8\\-1&0&0&2\end{pmatrix}.$$

1.7.1 初等变换与初等矩阵

问题 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{pmatrix}$,

$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $B=$ ________ .

A) AP_1P_2　　B) AP_2P_1　　C) P_1P_2A　　D) P_2P_1A

1.7.1 初等变换与初等矩阵

注 $E(i,j)=E(j(-1))E(i,j(1))E(j,i(-1))E(i,j(1)).$

互换矩阵可以表示为若干倍法矩阵和消法矩阵的乘积.

所以，互换变换可以表示为若干倍法变换和消法变换的合成.

但是，为了应用方便，我们还是列出三种初等变换，三种初等矩阵.

1.7.1 初等变换与初等矩阵

初等矩阵的行列式

$$\det E(i, j) = -1$$

$$\det E(i(c)) = c$$

$$\det E(i, j(c)) = 1$$

1.7.1 初等变换与初等矩阵

初等矩阵均可逆且

$$E^{-1}(i,j)=E(i,j)$$

$$E^{-1}(i(c))=E(i(\tfrac{1}{c}))$$

$$E^{-1}(i,j(c))=E(i,j(-c))$$