第一章 矩阵

1.3 分块矩阵

1.3.1 分块矩阵 (I)

1.3.1 分块矩阵(I)

我们经常对矩阵采用分块的方法.

即用从左通到右的横线和从上通到下的纵线，

将它分划成若干个子块（每个小块都是矩阵），

以这些子块为元素的矩阵就称为**分块矩阵**.

1.3.1 分块矩阵(I)

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$A \qquad\qquad\qquad\qquad B$$

看成 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$

厦门大学 止於至善

1.3.1 分块矩阵(I)

对$m\times n$矩阵A, 用横线将其划成r块, 用竖线

把它划成 s 块, 就得到了分块矩阵, 记为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}=(A_{ij})_{r\times s}$$

其中A_{ij}是$m_i\times n_j$矩阵, $i=1, 2, \ldots, r$, $j=1, 2, \ldots, s$,

满足$m=m_1+m_2+\ldots+m_r$, $n=n_1+n_2+\ldots+n_s$.

A_{ij} 称为A的第(i, j)块, A可记为$A=(A_{ij})_{r\times s}$.

1.3.1 分块矩阵(I)

- 若$m \times n$矩阵A, B有相同的分块法

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\boldsymbol{A}_{11}} & \cdots & \boxed{\boldsymbol{A}_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\boldsymbol{B}_{11}} & \cdots & \boxed{\boldsymbol{B}_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}的行数相同，列数相同，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11}} & \cdots & \boxed{\boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

1.3.1 分块矩阵(I)

- 设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数, 则

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

1.3.1 分块矩阵(I)

- 设$m\times n$矩阵A和$n\times l$矩阵 B有如下分块：

$$A=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} n_1 & \cdots & n_s \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{array} \end{array}, \quad B=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} l_1 & \cdots & l_t \end{array} & \\ \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ \vdots \\ n_s \end{array} \end{array},$$

其中$A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{it}$的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{ij}$的行数, 则

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},\ \text{其中}\ C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}\left(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r\right).$$

1.3.1 分块矩阵(I)

- **证明** 记 $AB=(c_{ij})_{m\times l}$. 考察任意的 c_{ij} $(1\le i\le m, 1\le j\le l)$,

它是A的第 i 行元与B的第 j 列元对应乘积之和，

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

设$i=m_1+\cdots+m_{h\text{-}1}+u(1\le h\le r, 1\le u\le m_h)$,

$j=l_1+\cdots+l_{k\text{-}1}+v(1\le k\le t, 1\le v\le l_k)$,

则$\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$中的$(i,j)$元为$C_{hk}$中的$(u,v)$元.

1.3.1 分块矩阵(I)

由于$C_{hk} = A_{h1}B_{1k} + A_{h2}B_{2k} + \cdots + A_{hs}B_{sk}$,

所以它是$A_{hq}B_{qk}\,(q = 1, 2, \cdots, s)$的第$(u, v)$元之和,

由于$A_{h1}, A_{h2}, \cdots, A_{hs}$的第$u$行元凑起来就是$A$的第$i$行元,

$B_{1k}, B_{2k}, \cdots, B_{sk}$的第$v$列元凑起来就是$B$的第$j$列元,

因此$\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$中的$(i, j)$元即为$AB$的$(i, j)$元.

1.3.1 分块矩阵(I)

注 分块矩阵的运算法则与

一般矩阵的运算法则一致.

分块矩阵相加时子块应当同型，

分块矩阵相乘时子块应当可乘.

1.3.1 分块矩阵(I)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{r1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{r2}^{\mathrm{T}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1s}^{\mathrm{T}} & A_{2s}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{rs}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

即$(A_{ij})_{rs}^{\mathrm{T}} = (A_{ji}^{\mathrm{T}})_{sr}$.

1.3.1 分块矩阵(I)

例1 $\underbrace{\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{A}\underbrace{\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)}_{B}$ 看成 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$

则$AB=\begin{pmatrix} \boxed{A_1B_1} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2B_2} \end{pmatrix}$. 此时 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 18 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 20 & 19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

1.3.1 分块矩阵(I)

- 一般地，若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}$

  其中A_i与B_i都是n_i阶方阵,则

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_kB_k \end{pmatrix}.$$

厦 門 大 學
善 至 於 止

1.3.1 分块矩阵(I)

问题

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\text{是否等于}\begin{pmatrix} 0 & A^2 \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}?$$

1.3.1 分块矩阵(I)

例2 设
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\-1&2&0&2\\1&0&2&1\\-1&1&2&0\end{pmatrix},$$
求 AB.

解 A, B可分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E&0\\A_{21}&E\end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&0\\-1&2&0&2\\\hline 1&0&2&1\\-1&1&2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&2E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

$$\text{则}AB=\begin{pmatrix}E&0\\A_{21}&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&2E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&2E\\A_{21}B_{11}+B_{21}&2A_{21}+B_{22}\end{pmatrix},$$

1.3.1 分块矩阵(I)

例2 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

求 AB.

解

由于$A_{21}B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$2A_{21}+B_{22}=2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

于是$AB=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \boxed{2E} \\ \boxed{A_{21}B_{11}+B_{21}} & \boxed{2A_{21}+B_{22}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$