第一章 矩阵

1.7 初等矩阵与初等变换

1.7.2 矩阵的相抵

1.7.2 矩阵的相抵

定义 若A 经过有限次初等变换后变成 B,

则称 A与 B 是相抵的.

1.7.2 矩阵的相抵

定理 任意矩阵 A 必相抵于

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

该矩阵称为 A 在相抵关系下的标准形

或相抵标准形.

1.7.2 矩阵的相抵

证明 若$A=0$，结论显然成立.

若$A \neq 0$，不妨设$a_{11} \neq 0$.

否则，设$a_{ij} \neq 0$,

则可经行和列的互换将其调到(1,1)位置.

1.7.2 矩阵的相抵

将第1行乘以$-a_{11}^{-1}a_{i1}$加到第i行上$(i=2,\cdots,m)$,

则A的第1列的元素除a_{11}外全为0;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

1.7.2 矩阵的相抵

将第1列乘以$-a_{11}^{-1}a_{1j}$加到第j列上$(j=2,\cdots,n)$,

则A的第1行的元素除a_{11}外全为0;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.7.2 矩阵的相抵

将第1行乘以a_{11}^{-1},得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.7.2 矩阵的相抵

若所有b_{ij}均为0, 则结论已经成立.

否则，不妨设$(2,2)$位置的元素不为0,

用类似的方法可以使第2行和第2列除

$(2,2)$元以外全为0.

不断做下去,直到变为相抵标准形.

1.7.2 矩阵的相抵

例1 用初等变换将矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

化成标准形.

1.7.2 矩阵的相抵

解

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&5\\1&2&0&0\\2&0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E(1,2)}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&5\\2&0&2&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E(3,1(-2))}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&5\\0&-4&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[E(1,2(-2))]{}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&5\\0&-4&2&0\end{pmatrix}$$

1.7.2 矩阵的相抵

$$\xrightarrow{E(3,2(4))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[E(2,4(-5))]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E(3(\frac{1}{2}))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[E(3,4(-10))]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7.2 矩阵的相抵

- **矩阵的相抵关系是等价关系**，即满足

(1) **反身性**: A相抵于A.

(2) **对称性**: 若A相抵于B , 则B相抵于A.

(3) **传递性**: 若A相抵于B, B相抵于C,

则A相抵于C.

1.7.2 矩阵的相抵

推论

A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在 n 阶方阵 B, 使得 $AB = E$;

$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶方阵 B, 使得 $BA = E$;

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$;

$\Leftrightarrow$ A 与 E 相抵;

$\Leftrightarrow$ A 可表示为若干个初等矩阵之积.

1.7.2 矩阵的相抵

证明用板书

1.7.2 矩阵的相抵

问题

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$是否相抵?

1.7.2 矩阵的相抵

推论 设 A, B 是$m\times n$阶矩阵, 则下列叙述等价:

(1) A相抵于B;

(2) 存在初等矩阵 $P_i, Q_j (i = 1, 2, ..., s; j = 1, 2, ..., t)$

使得 $P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = B$;

(3) 存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q 使得

$$PAQ = B.$$

1.7.2 矩阵的相抵

问题 矩阵A相抵标准形中的r 唯一吗?