第一章 矩阵

1.4 行列式

1.4.2 行列式的性质(I)

1.4.2 行列式的性质(I)

性质1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\,?\times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.4.2 行列式的性质(I)

性质1 将行列式$\det A$的某一列乘以常数c

得到行列式$\det B$，则$\det B=c(\det A)$.

证明 对行列式的阶数n用数学归纳法.

当$n=1$时，结论显然成立.

假设命题对任意的$n-1$阶行列式都成立，

考虑n阶行列式$\det B$.

1.4.2 行列式的性质(I)

若det$B$的第1列是det$A$的第1列元的c倍，

以M_{i1}表示A的$(i,1)$元对应的余子式，则

$$\det B=(ca_{11})M_{11}-(ca_{21})M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}(ca_{n1})M_{n1}$$

$$=c(a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1})$$

$$=c(\det A).$$

1.4.2 行列式的性质(I)

若det$B$的第i列元(i>1)是det$A$的第i列元的c倍，则

$$\det B = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1},$$

其中N_{j1}是B中(j,1)元对应的余子式，

它是M_{j1} 中第i-1列乘c得到.

由归纳假设，$N_{j1} = cM_{j1}\ (j = 1, 2, \cdots, n)$. 所以，

$$\det B = a_{11}(cM_{11}) - a_{21}(cM_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}(cM_{n1})$$

$$= c(a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1})$$

$$= c\det A$$

1.4.2 行列式的性质(I)

注 若A为n阶矩阵，则

$$\det(cA) = c^n \det A.$$

1.4.2 行列式的性质(I)

性质2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}+b_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r}+b_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr}+b_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.4.2 行列式的性质(I)

问题

若A, B为n阶方阵，则$\det(A+B) = \det A + \det B$是否成立？

1.4.2 行列式的性质(I)

性质3 交换行列式的两列，行列式值改变符号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.4.2 行列式的性质(I)

推论 若方阵A的两列相同，则det$A$=0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

证明 将这两列对换可得det$A$=-det$A$，

所以det$A$=0.

1.4.2 行列式的性质(I)

性质4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ca_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ca_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ca_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \ ? \ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.4.2 行列式的性质(I)

性质4 将行列式的一列乘常数c加到另一列上，行列式值不变.

证明 设将行列式$\det A$的第j列乘以c加到第i列上得到行列式$\det B$, 则

$$\det B = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1i}+ca_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2i}+ca_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ni}+ca_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} = \det A$$

1.4.2 行列式的性质(I)

(**行列式按第r列展开**) $\det A = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \ldots + a_{nr}A_{nr}.$

证明 依次对换第r列和第r-1列，再对换第r-1列和第r-2列，……，最后对换第2列和第1列，经过这r-1次互换后，将原行列式中第r列换至第1列，得到行列式$\det B$.

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{11} & \cdots & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2r} & a_{21} & \cdots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nr} & a_{n1} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

1.4.2 行列式的性质(I)

则

$$(-1)^{r-1}\det A=\det B=a_{1r}N_{11}+(-1)^{2+1}a_{2r}N_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{nr}N_{n1}$$

$$=a_{1r}M_{11}+(-1)^{2+1}a_{2r}M_{2r}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{nr}M_{nr}$$

上面的 N_{i1}，M_{i1}分别表示B及A中元素的余子式. 故

$$\det A=(-1)^{1+r}a_{1r}M_{1r}+(-1)^{2+r}a_{2r}M_{2r}+\cdots+(-1)^{n+r}a_{nr}M_{nr}$$

$$=a_{1r}A_{1r}+a_{2r}A_{2r}+\cdots+a_{nr}A_{nr}.$$