第一章矩阵

1.5 行列式的展开式和Laplace定理

1.5.1 行列式的展开式



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



行列式的展开式

$$\det A = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

这里 $(i_1, i_2, ..., i_n)$ 取遍1, 2,, n的所有全排列.

$$=\sum_{(j_1,j_2,...,j_n)}(-1)^{\sigma(j_1,j_2,...,j_n)}a_{j_11}a_{j_22}...a_{j_nn}$$

这里 $(j_1,j_2,...,j_n)$ 取遍1,2,....,n的所有全排列.



定义 设正整数 $i_1, i_2, ..., i_m$ 两两不同,

在排列 $(i_1, i_2, ..., i_m)$ 中,如果一个较大的数

排在较小的数之前,则称它们是一个逆序.

一个排列中逆序的总数就称为这个排列的

逆序数, 记为 $\sigma(i_1, i_2, ..., i_m)$.



定义 若排列 $(i_1, i_2, ..., i_m)$ 的逆序数为

偶数(含零),则称之为偶排列;

若排列 $(i_1, i_2, ..., i_m)$ 的逆序数为奇数,

则称之为奇排列.



例1 求排列n, n-1, ..., 3, 2, 1 的逆序数

并讨论该排列的奇偶性.

$$n(n-1)(n-2)\cdots 321$$

$$n-2$$

$$\sigma(n, n-1, \dots, 2,1) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

$$= \frac{n(n-1)}{2},$$

当
$$n = 4k + 2,4k + 3$$
 时为奇排列.

问题

求排列 2,4,6,...(2n),1,3,...,(2n-1) 的逆序数并 讨论该排列的奇偶性.



行列式的展开式

$$\det A = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

这里 $(i_1, i_2, ..., i_n)$ 取遍1, 2,, n的所有全排列.

$$= \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)} (-1)^{\sigma(j_1,j_2,\dots,j_n)} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n}$$

这里 $(j_1,j_2,...,j_n)$ 取遍1,2,....,n的所有全排列.



注1 n阶行列式展开式共有n!项.

注2每项为取自不同行不同列的n个元素之积.

注3每项的正负号由逆序数的奇偶性决定.

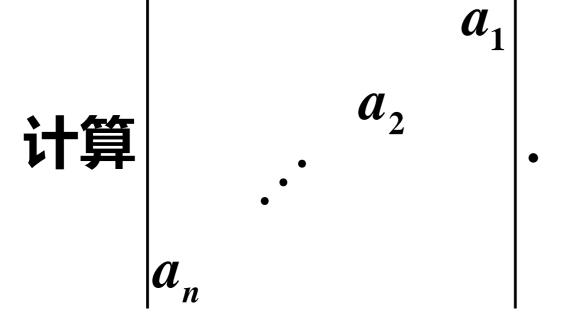


注4 在n(>1)阶行列式的n!项展开式中,正负号各占一半。

这表示正负号各占一半.



例2



解

原式 =
$$(-1)^{\sigma(n, n-1, \dots 2, 1)} a_1 a_2 \dots a_n$$

= $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \dots a_n$



例3(板书) 求f(x)中 x^3 的系数,其中

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 & 4 \\ 3 & 0 & x & 1 \\ 1 & 2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$



对换改变排列的奇偶性

设 $(i_1, i_2, ..., i_m)$ 为一个m级排列,若将其中 i_k 与 i_j 位置对换,

其余保持不动,则改变排列的奇偶性 $(m \ge 2)$.

思考 试用行列式的展开式作为行列式的定义,推出行列式的性质.

