第一章 矩阵

1.5 行列式的展开式和Laplace定理

1.5.2 Laplace定理

1.5.2 Laplace定理

定义

k 阶子式

$$A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

1.5.2 Laplace定理

定义

k 阶子式对应的余子式 $M\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$

对应的代数余子式

$$\hat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

$$\equiv (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

1.5.2 Laplace定理

Laplace定理

设A是n阶方阵, 在A中任意取定k行(列), 那么含于这k行(列)的全部k阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于det$A$.

即若取定k行: $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$,

则

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \hat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

1.5.2 Laplace定理

Laplace定理

若取定k列： $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$,

则

$$\det A = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \hat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

1.5.2 Laplace定理

例1 求下列行列式的值

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 因为第一、二列含有较多的零，因此在这两列上作Laplace展开，得

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2.$$

1.5.2 Laplace定理

例2 求

$$\det\begin{pmatrix} A_{n\times n} & 0 \\ C_{m\times n} & B_{m\times m} \end{pmatrix}.$$

解 对前n行用Laplace定理，得

$$\det\begin{pmatrix} A_{n\times n} & 0 \\ C_{m\times n} & B_{m\times m} \end{pmatrix} = (\det A)(\det B).$$

1.5.2 Laplace定理

问题 求 $\det\begin{pmatrix} C_{n\times m} & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & 0 \end{pmatrix}$.

1.5.2 Laplace定理

例3（板书）

设A, B是n阶矩阵, 求证：

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

$$\det(AB) = \det(BA).$$