第一章 矩阵

1.3 分块矩阵

1.3.2 分块矩阵 (II)

1.3.2 分块矩阵(II)

矩阵按列分块

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$$ 记为 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$

其中 $A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, A_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$

1.3.2 分块矩阵(II)

矩阵按行分块

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{记为} A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}.$$

其中 $\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$,

$$\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),$$

$$\cdots$$

$$\alpha_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn}).$$

1.3.2 分块矩阵(II)

例1 试用不同方法将$A_{m\times n}$, $B_{n\times l}$进行分块, 计算AB并写出$AB=0$的充分必要条件.

解 (方法1) 对于$m\times n$矩阵A, $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$,

则$AB=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}\alpha_1 B\\ \alpha_2 B\\ \vdots\\ \alpha_m B\end{pmatrix}$.

这时$AB=0$的充分必要条件是$\alpha_i B=0(1\le i\le m)$.

1.3.2 分块矩阵(II)

例1 试用不同方法将$A_{m\times n}$, $B_{n\times l}$进行分块并计算AB.

写出$AB = 0$ 的充分必要条件.

解 (方法2) 对于$n\times l$矩阵B, $B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_l \end{pmatrix}$,

则$AB=A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_l \end{pmatrix}$.

这时$AB=0$的充分必要条件是$AB_i = 0(1\le i\le l)$.

1.3.2 分块矩阵(II)

- 例2 计算（板书）

$$A\varepsilon_i, \varepsilon_i^T A, \varepsilon_i^T A\varepsilon_j$$

1.3.2 分块矩阵(II)

例3 已知 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，求$A^n$.

解 $A^2=A\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}O&\varepsilon_1&\varepsilon_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}O&A\varepsilon_1&A\varepsilon_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A^3=A^2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}O&\varepsilon_1&\varepsilon_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}O&A^2\varepsilon_1&A^2\varepsilon_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

从而 当$n\geq 3$时，$A^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1.3.2 分块矩阵(II)

问题 已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$A^n$.

1.3.2 分块矩阵(II)

例4 设 $A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hdashline 0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)$，求 A^{2016}.

解 记$M=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，则$A=\begin{pmatrix}E&O\\O&M\end{pmatrix}$，

于是$A^{2016}=\begin{pmatrix}E^{2016}&O\\O&M^{2016}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\O&M^{2016}\end{pmatrix}$.

令$\alpha=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，由于$M=(\alpha\quad -\alpha)=\alpha(1\quad -1)$，

因此$M=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}(1\quad -1)$，

从而$M^2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}(1\quad -1)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}(1\quad -1)$

$=(-2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}(1\quad -1)=-2M.$

如此继续得$M^{2016}=(-2)^{2015}M$.

因此$A^{2016}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2^{2015}&-2^{2015}\\0&0&-2^{2015}&2^{2015}\end{pmatrix}$.