第一章 矩阵

1.4 行列式

1.4.3 行列式的性质(II)

1.4.3 行列式的性质(II)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\det A$ $\qquad\qquad$ $\det(A^T)$

1.4.3 行列式的性质(II)

引理1

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

1.4.3 行列式的性质(II)

引理1 若行列式det$A$的第一行全为零，则det$A$为零.

证明 对行列式的阶数n做数学归纳法.

当$n=1$时，结论显然成立.

假设命题对任意的n-1阶行列式都成立，

考虑n阶行列式det$A$.

1.4.3 行列式的性质(II)

由于$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$.

对于$j \neq 1, M_{j1}$都是$n-1$阶行列式且第一行元素全为零，

由归纳假设$M_{j1} = 0$.

而$a_{11} = 0$，故$a_{j1}M_{j1} = 0 (1 \leq j \leq n)$.

故$\det A = 0$.

1.4.3 行列式的性质(II)

引理2 (行列式按第1行展开)

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

证明

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.4.3 行列式的性质(II)

$$= a_{11}A_{11} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.4.3 行列式的性质(II)

$$= \cdots = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

1.4.3 行列式的性质(II)

性质5 行列式转置后值不变，即$\det A^{\mathrm{T}}=\det A$.

证明 对行列式的阶数n用数学归纳法.

当$n=1$时，结论显然成立.

假设命题对任意的$n-1$阶行列式都成立，

考虑n阶行列式.

1.4.3 行列式的性质(II)

设M_{ij}与N_{ij}分别表示A及A^{T}中(i, j)元素的余子式，

由归纳假设，$M_{ij}=N_{ji}$.

将$\det A^{\mathrm{T}}$按第一行展开，

$$\det A^{\mathrm{T}} = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{n1}N_{1n}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

$$= \det A.$$

1.4.3 行列式的性质(II)

问题

将行列式性质1至性质4中的“列”改成“行”，

结论是否都成立？

1.4.3 行列式的性质(II)

性质1’ 若将det A的某一行乘以常数c得到行列式det B, 则det $A = c$ det B.

性质2’ A, B, C是三个n阶方阵, 若C的第r行元素是A的第r行元素和B的第r行元素的和, 即 $c_{ri}=a_{ri}+b_{ri}$, $i=1,2,\ldots,n$, 而$c_{ij}=a_{ij}=b_{ij}$, $i\neq r$, $i,j=1,2,\ldots,n$, 则

$$\det C = \det A + \det B.$$

性质3’ 交换行列式的两行, 行列式值改变符号.

推论′ 若矩阵A的两行相同, 则det A = 0.

性质4’ 将行列式的一行乘以常数c加到另一行上, 行列式值不变.

1.4.3 行列式的性质(II)

两个重要公式

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}\det A & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases}\det A & l=j\\ 0 & l\neq j\end{cases}$$

1.4.3 行列式的性质(II)

两个重要公式（证明用板书）

1.4.3 行列式的性质(II)

- **例** 计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 及 $A_{44}+A_{45}$． 其中

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

解 由于 $1A_{41}+1A_{42}+1A_{43}+2A_{44}+2A_{45}=\det A=27$,

而 $2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+1A_{44}+1A_{45}=0$,

因此 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$, $A_{44}+A_{45}=18$.