第一章 矩阵

1.8 矩阵的秩

1.8.1 矩阵的秩

1.8.1 矩阵的秩

定义 如果矩阵 $A_{m\times n}$ 有一个r阶子式不等于零,

所有$r+1$阶子式(如果存在的话)全等于零,

则称矩阵A的秩为r, 记为$r(A)$.

注1 零矩阵的秩为0;

注2 n阶可逆矩阵的秩为n;

注3 $r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$.

1.8.1 矩阵的秩

注4

$$r\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r.$$

1.8.1 矩阵的秩

问题　证明$r(A)=r(A^T)$.

1.8.1 矩阵的秩

例1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 由于A仅有三行是非零行，

所以A的四阶子式均为零.

而$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, 因此$r(A)=3$.

1.8.1 矩阵的秩

定义 满足下列条件的矩阵$A_{m\times n}$称为

行阶梯形矩阵:

(1) 若第r行元素全为零, 则第$r+1$行(若存在)元素必是零;

(2) 若第$l+1$行元素存在非零元, 则该行首个非零元素所在的列数必大于第l行首个非零元素所在列数.

1.8.1 矩阵的秩

命题 行阶梯形矩阵的秩等于该矩阵的非零行的个数.

证明 设行阶梯形矩阵的非零行个数是r.

取其非零的r行和各行首个非零元所在的列

构成的r阶子式, 该r阶子式是上三角行列式

且主对角元非零, 所以是非零子式.

而任意的$r+1$阶子式（如果存在的话）必为零,

因它有一行元素全为零. 由秩的定义, 命题得证.

1.8.1 矩阵的秩

定理 任意矩阵 $A_{m\times n}$ 可经过行的初等变换化为行阶梯形矩阵.

证明 若A是零矩阵, 则已是行阶梯形矩阵.

设A非零. 设A的第$1, 2, \cdots, j_1-1$列的元素均为0,

而第j_1列有非零元, 将该非零元换至第一行,

从第二行起，每行加上第一行的适当倍数,

可使第j_1列中除第一行的元素以外全为0，

于是A化为

1.8.1 矩阵的秩

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,j_1}' & a_{1,j_1+1}' & \cdots & a_{1,n}' \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,j_1+1}' & \cdots & a_{2,n}' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{m,j_1+1}' & \cdots & a_{m,n}' \end{pmatrix},\text{其中} a_{1,j_1}' \neq 0,$$

若此时后m-1行全为0，则已经是行阶梯形.

若后$m-1$行中第$1,2,\cdots,j_2-1$列的元素均为0,

而第j_2列有非零元，则重复上述步骤,

可使$(2,j_2)$元素不为0，且当$i>2$时,(i,j_2)元素全为0，

如此继续下去，最后可得行阶梯形.

1.8.1 矩阵的秩

命题 对矩阵做有限次初等变换不改变矩阵的秩.

证明 只讨论行的初等变换情况，列的情况类似讨论.

因为初等变换是可逆的，

我们只需证明矩阵A经一次初等变换成为B时

$r(A) \le r(B)$即可.

又因为互换变换可以表为另外两种初等变换的乘积，

我们只需讨论倍法变换和消法变换的情况. 设$r(A)=r$.

1.8.1 矩阵的秩

倍法变换　对A的第i行乘非零常数c.

当A的r阶非零子式M_r包含第i行时,

B存在相应的非零r阶子式N_r 满足$N_r=cM_r$;

当A的r阶非零子式M_r不包含第i行时,

B存在相应的非零r阶子式N_r 满足$N_r=M_r$.

所以 $r(B)\geq r$.

板书

1.8.1 矩阵的秩

消法变换 将A的第j行乘c加到第i行上.

对于A的r阶非零子式M_r , 分三种情况讨论:

(1) M_r不包含第i行;

(2) M_r包含第i行但不包含第j行;

(3) M_r同时包含第i行和第j行;

对于情况(1) ,

B中存在相应的非零r阶子式N_r 满足$N_r=M_r$,

所以$r(B)\geq r$.

1.8.1 矩阵的秩

对于情况(3)，

B中有相应的r阶子式N_r是

从M_r的第j行乘c加到第i行上得到,

此时$N_r=M_r$非零，

所以 $r(B) \geq r.$

1.8.1 矩阵的秩

对于情况(2)，

将M_r 中的第i行换成A中第j行相应元素得到

的r阶子式记为L_r，

如果L_r非零，则在B中存在相应于L_r

的非零r阶子式N_r满足 $N_r = \pm L_r$.

如果L_r=0，则在B中存在相应于M_r的r阶子式N_r满足

$N_r = M_r + cL_r = M_r \neq 0$

所以 $r(B) \geq r$.

1.8.1 矩阵的秩

例2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以$r(A)=3$.