第一章 矩阵

1.6 可逆矩阵

1.6.2 Cramer法则

1.6.2 Cramer法则

Cramer法则

若线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵的行列式det$A$不为0,

则方程组有唯一解 $x_j = \dfrac{\det D_j}{\det A}, j = 1, 2, \cdots, n,$

其中detD_j是将det$A$第j列元素换成方程组常数项

元素b_1, b_2, …, b_n得到的行列式.

1.6.2 Cramer法则

$$\det A = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots \end{vmatrix},$$

j列

$$\det D_j = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots \end{vmatrix}$$

j列

- 证明用板书

1.6.2 Cramer法则

推论1 设 A是n 阶方阵, 且 $AX=\beta$ 无解或解不唯一,

则 $\det A = 0$.

推论2 设 A是 n 阶方阵, 且$AX = 0$有非零解,

则 $\det A = 0$.

1.6.2 Cramer法则

例1 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ -2x_1+x_2-x_3=-3 \\ x_1-4x_2+2x_3=-5 \end{cases}$.

解

该方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}=11\neq 0$，因此方程组有唯一解.

又

$$\det D_1=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=33,\ \det D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}=11,\ \det D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix}=-22,$$

故方程组的解为 $x_1=\dfrac{33}{11}=3,\ x_2=\dfrac{11}{11}=1,\ x_3=\dfrac{-22}{11}=-2.$

1.6.2 Cramer法则

例2 问k取何值时，线性方程组 $\begin{cases} (1-k)x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (2-k)x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (3-k)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？

解

方程组的系数行列式 $\det A = \begin{vmatrix} 1-k & 1 & -2 \\ 2 & 2-k & 3 \\ 1 & 1 & 3-k \end{vmatrix} = (4-k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-k & 3 \\ 1 & 1 & 3-k \end{vmatrix}$

$$= (4-k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k & 1 \\ 0 & 0 & 2-k \end{vmatrix} = (4-k)k(k-2).$$

由于该线性方程组有非零解，因此$\det A = 0.$

所以k=0, 2或 4 时该方程组有非零解.

1.6.2 Cramer法则

注 Cramer法则的适用条件：

(1) 方程个数等于未知量个数;

(2) 方程组的系数矩阵的行列式不等于零.

1.6.2 Cramer法则

问题

当线性方程组的方程个数不等于未知量的个数或系数行列式为零时,如何求解方程组?