第一章 矩阵

1.4 行列式

1.4.2 行列式的性质(I)

1.4.2 行列式的性质(I)

交换行列式的两列，行列式值改变符号.

证明 若交换的两列不含第1列，由归纳法即得.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.4.2 行列式的性质(I)

若det$A$的第1列和第2列交换后的行列式为det$B$,

$$\det B=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i2}M_{i2}$$

另外，当$1\le i<j\le n$时，在det$A$中去掉第i行、第j行以及第1列、第2列后剩下的元按照原先的相对位置构成的n-2阶行列式记为$M\begin{bmatrix} i & j \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.则

1.4.2 行列式的性质(I)

$$\det B=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i2}M_{i2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i2}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j+1}a_{j1}M\begin{bmatrix} j & i\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{(j-1)+1}a_{j1}M\begin{bmatrix} i & j\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i+j}a_{i2}a_{j1}M\begin{bmatrix} j & i\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{i2}a_{j1}M\begin{bmatrix} i & j\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}a_{j1}a_{i2}M\begin{bmatrix} j & i\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+j+1}a_{j1}a_{i2}M\begin{bmatrix} i & j\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}\left(\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{(i-1)+1}a_{i2}M\begin{bmatrix} j & i\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+1}a_{i2}M\begin{bmatrix} i & j\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}M_{j1}=-\det A.$$

以上说明互换相邻两列，行列式改变符号.

1.4.2 行列式的性质(I)

若第1列与第r列交换后的行列式为det$B$，

依次对换第r列和第r-1列，再对换第r-1列和第r-2列，

……，最后对换第2列和第1列，经过这r-1次互换后，

将原行列式中第r列换至第1列.

1.4.2 行列式的性质(I)

再依次对换第2列和第3列，对换第3列和第4列，

……，最后对换第r-1列和第r列，

经过这r-2次互换后，

将原来的第1列换到了第r列.

这样共经过2(r-2)+1次相邻两列的互换，

从行列式det$A$得到行列式det$B$. 所以

$$\det B = (-1)^{2(r-2)+1}\det A = -\det A.$$