第一章 矩阵

1.5 行列式的展开式和Laplace定理

1.5.2 Laplace定理的证明

1.5.2 Laplace定理的证明

定义 k **阶子式**

$$A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

1.5.2 Laplace定理的证明

定义

k 阶子式对应的余子式$M\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$

对应的代数余子式$\hat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$

$$\equiv (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

1.5.2 Laplace定理的证明

Laplace定理

设A是n阶方阵, 在A中任意取定k行(列), 那么含于这k行(列)的全部k阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于det$A$.

即若取定k行: $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$,

则 $$\det A = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \hat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

若取定k列: $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$,

则 $$\det A = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \hat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

1.5.2 Laplace定理的证明

引理

n阶行列式$\det A$的任一k阶子式与其代数余子式之积展开式中每一项都是$\det A$的展开式中的一项，并且符号也一致.

1.5.2 Laplace定理的证明

证明 首先考虑特殊情况. 设

$$i_1 = 1, i_2 = 2, \cdots, i_k = k;$$

$$j_1 = 1, j_2 = 2, \cdots, j_k = k.$$

此时 $\det A = \begin{vmatrix} A_1 & * \\ * & A_2 \end{vmatrix},$

其中A_1是k阶方阵, A_2是$n-k$阶方阵，并且

$$\det A_1 = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{bmatrix}, \det A_2 = \hat{A}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{bmatrix}.$$

1.5.2 Laplace定理的证明

因为 $\det A_1$展开式中每一项具有形式

$$(-1)^{\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_k)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ki_k},$$

$\det A_2$ 中每一项具有形式

$$(-1)^{\sigma(i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_n)} a_{k+1,i_{k+1}} a_{k+2,i_{k+2}} \cdots a_{ni_n}.$$

所以$A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{bmatrix} \hat{A}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{bmatrix}$

中任一项具有下列形式

$$(-1)^{\sigma} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ki_k} a_{k+1,i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} \ (*)$$

1.5.2 Laplace定理的证明

其中 $\sigma=\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_k)+\sigma(i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_n)$.

此处 $(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 是(1,2,…,k)的一个排列，

$(i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_n)$ 是 (k+1, k+2, …, n)的一个排列.

故

$$\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_k)+\sigma(i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_n)=\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_k,i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_n),$$

从而(*)为det$A$中一项且符号一致.

1.5.2 Laplace定理的证明

(接板书)

1.5.2 Laplace定理

Laplace定理

$$\det A = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \hat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

证明 由引理知等式右边任意一项均是

det$A$的展开式中的一项且符号一致.

当$i_1, i_2, \cdots, i_k$固定时,

对于不同的$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$,

等式右边的各项是没有重复的.

所以我们只需证明

1.5.2 Laplace定理的证明

$$\det A=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}\hat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

左右两边的项数相等.

固定$\det A$的k行，共有C_n^k个不同的子式,

每个子式的展开式有$k!$项,

每个相应的代数余子式的展开式有$(n-k)!$项,

因此右边一共有$k!(n-k)!C_n^k=n!$项,

而左边也一共有$n!$项,

所以定理成立.