第一章 矩阵

1.7 初等矩阵与初等变换

1.7.4 分块矩阵的初等变换

1.7.4 分块矩阵的初等变换

定义 分块矩阵的行初等变换包含三类：

(1) 交换矩阵中某两块行；

(2) 用某个可逆矩阵左乘分块矩阵某一块行；

(3) 以某个矩阵左乘分块矩阵的某块行后加到另一块行上.

类似可定义分块矩阵的列初等变换.

1.7.4 分块矩阵的初等变换

定义 对分块单位矩阵做一次分块初等变换得到的矩阵称为<u>分块初等矩阵</u>.

1.7.4 分块矩阵的初等变换

例1 设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$,

其中 A,D 分别是 $r\times h, s\times l$ 矩阵, 则

$$\begin{pmatrix} O & E_s \\ E_r & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E_h \\ E_l & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$$

1.7.4 分块矩阵的初等变换

令N, P为可逆矩阵，

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & N_{s\times s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ NC & ND \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_h & O \\ O & P_{l\times l} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & BP \\ C & DP \end{pmatrix}$$

1.7.4 分块矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ K & E_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ KA+C & KB+D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_h & O \\ L & E_l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+BL & B \\ C+DL & D \end{pmatrix}$$

1.7.4 分块矩阵的初等变换

例2 设A为m阶可逆矩阵，B为n阶可逆矩阵，

C为$n\times m$阶矩阵.

(1) 证明分块矩阵 $D=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆；

(2) 求D的伴随矩阵.

解 (1) 由于A, B均为可逆矩阵,

因此 $\det D=(\det A)(\det B)\neq 0$,

从而D可逆.

1.7.4 分块矩阵的初等变换

$$\left(\begin{array}{cc:cc} A & O & E_m & O \\ C & B & O & E_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:cc} A & O & E_m & O \\ O & B & -CA^{-1} & E_n \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc:cc} E_m & O & A^{-1} & O \\ O & B & -CA^{-1} & E_n \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc:cc} E_m & O & A^{-1} & O \\ O & E_n & -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{array}\right)$$

因此$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$

1.7.4 分块矩阵的初等变换

(2) 由于$D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$,

且$\det D=(\det A)(\det B)\neq 0$,

因此$D^{*}=(\det D)D^{-1}$

$$=(\det A)(\det B)\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix},$$

$$=\begin{pmatrix} (\det B)A^{*} & O \\ -B^{*}CA^{*} & (\det A)B^{*} \end{pmatrix}.$$

1.7.4 分块矩阵的初等变换

例3 设A是m阶**可逆**矩阵, D是n阶方阵, 则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

特别地, 若A可逆, 且$AC=CA$, 则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

板书

1.7.4 分块矩阵的初等变换

问题

若A是m阶方阵, D是n阶可逆矩阵, 则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)\text{成立么？}$$

1.7.4 分块矩阵的初等变换

若A是m阶方阵, D是n阶**可逆**矩阵, 则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D \det(A - BD^{-1}C).$$

特别的, 若D可逆, 且$DB=BD$, 则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC).$$

1.7.4 分块矩阵的初等变换

例4 设A是$n\times m$矩阵, B是$m\times n$矩阵, 则

$$\det(E_n - AB) = \det(E_m - BA).$$

证明 因为

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & A \\ O & E_m - BA \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_n & -A \\ O & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - AB & O \\ B & E_m \end{pmatrix},$$

1.7.4 分块矩阵的初等变换

两边取行列式，有

$$\det\begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_m \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} E_n & A \\ O & E_m - BA \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} E_n & -A \\ O & E_m \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} E_n - AB & O \\ B & E_m \end{pmatrix}.$$

即 $\det\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix} = \det(E_m - BA),$

$$\det\begin{pmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix} = \det(E_n - AB),$$

从而 $\det(E_n - AB) = \det(E_m - BA).$

1.7.4 分块矩阵的初等变换

问题

设A是$n\times m$矩阵, B是$m\times n$矩阵$(n\geq m)$, k为常数, 则

$\det(kE_n-AB)$与$\det(kE_m-BA)$之间有何关系式？

1.7.4 分块矩阵的初等变换

例5 计算n阶行列式 $\det\begin{pmatrix} 1-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & 1-a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & 1-a_nb_n \end{pmatrix}$

解

原式 $=\det(E_n-\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}) =\det(E_n-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix})$

$$=\det(E_1-\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) =1-\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$