数字图像处理

第3章 图像处理中的正交变换

信息科学研究所

3.4 沃尔什函数的性质

沃尔什函数有如下一些主要性质：

（1） 在区间**[0,1]**内有下式成立

$$\int_0^1 wal(0,t)dt = 1 \qquad (3—119)$$

$$\int_0^1 wal(i,t)dt = 0 \quad i = 1,2\cdots\cdots \qquad (3—120)$$

$$[wal(i,t)]^2 = 1 \quad i = 0,1,2,3\cdots\cdots \qquad (3—121)$$

这说明在**[0,1]**区间内除了 ***wal* (0,t)** 外，其他沃尔什函数取＋1 和－1 的时间是相等的。

（2） 在区间**[0,1]**的第一小段时间内（通常称为时隙）沃尔什函数总是取＋1 。

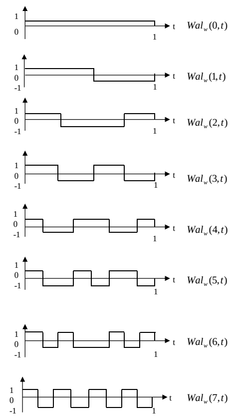

图 3—10
按沃尔什排列的沃尔什函数

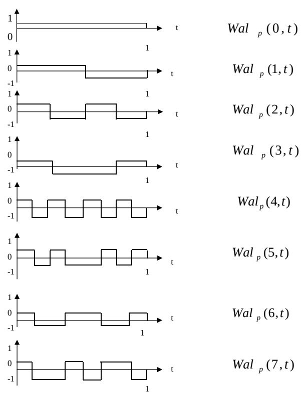

图 3—11 按佩利排列的沃尔什函数

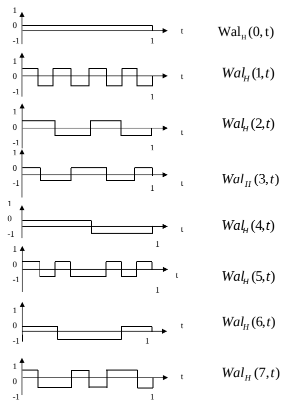

图 3—12 按哈达玛排列的沃尔什函数

（3） 沃尔什函数有如下乘法定理

$$wal(i,t)\cdot wal(j,t)=wal(i\oplus j,t) \qquad (3—122)$$

并且，该定理服从结合律

$$[wal(i,t)\cdot wal(j,t)]\cdot wal(k,t)$$
$$=wal(i,t)\cdot[wal(j,t)\cdot wal(k,t)] \qquad (3—123)$$
$$i,j,k=0,1,2,\cdots\cdots(2^p-1)$$

证明：由定义式

$$wal(i,t)\cdot wal(j,t)=\prod_{k=0}^{p-1}\left[R(k+1,t)\right]^{g(i)_k}\cdot\prod_{k=0}^{p-1}\left[R(k+1,t)\right]^{g(j)_k}$$
$$=\prod_{k=0}^{p-1}\left[R(k+1,t)\right]^{g(i)_k+g(j)_k}$$

但是

$$g(i)_k,\ g(j)_k\in\{0,1\}$$

$$\left[R(k+1,t)\right]^{1+1}=\left[R(k+1,t)\right]^2=1$$
$$\left[R(k+1,t)\right]^{1\oplus 1}=\left[R(k+1,t)\right]^0=1$$
$$\left[R(k+1,t)\right]^{1+0}=\left[R(k+1,t)\right]^{1\oplus 0}$$
$$\left[R(k+1,t)\right]^{0+1}=\left[R(k+1,t)\right]^{0\oplus 1}$$
$$\left[R(k+1,t)\right]^{0+0}=\left[R(k+1,t)\right]^0=1$$
$$\left[R(k+1,t)\right]^{0\oplus 0}=\left[R(k+1,t)\right]^0=1$$

因此

$$wal(i,t)\cdot wal(j,t)=\prod_{k=0}^{p-1}\left[R(k+1,t)\right]^{g(i)_k+g(j)_k}$$
$$=\prod_{k=0}^{p-1}\left[R(k+1,t)\right]^{g(i)_k\oplus g(j)_k}=wal(i\oplus j,t)$$

以上便是乘法定理的证明。

（4） 沃尔什函数有归一化正交性

$$\int_0^1 wal(i,t)\cdot wal(j,t)dt=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases} \qquad (3—124)$$

证明：由乘法定理有

$$\int_0^1 wal(i,t)\cdot wal(j,t)dt=\int_0^1 wal(i\oplus j,t)dt=\int_0^1 wal(l,t)dt$$

其中 $i\oplus j=l$

由于

$$\int_0^1 wal(0,t)dt=1$$
$$\int_0^1 wal(i,t)dt=0 \qquad i=1,2,3,\cdots\cdots$$

所以当***l*=0**，即***i*=*j***时，则

$$\int_0^1 wal(i,t)\cdot wal(j,t)dt=1$$

而当 $l \neq 0$ ，即 $i \neq j$ 时，则

$$\int_0^1 wal\ (i,t) \cdot wal\ (j,t)\, dt = 0$$

正交性得证。

3.5 沃尔什变换

离散沃尔什变换可由以下二式表达

$$W(i) = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} f(t) \cdot wal\,(i,t) \qquad (3—127)$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} W(i) \cdot wal\,(i,t) \qquad (3—128)$$

离散沃尔什变换解析式写成矩阵式可得到沃尔什变换矩阵式

$$\begin{bmatrix} W(0) \\ W(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ W(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\left[wal(N)\right]\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} = \left[wal\,(N)\right]\begin{bmatrix} W(0) \\ W(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ W(N-1) \end{bmatrix} \qquad (3—130)$$

式中 $Wal(N)$ 代表 N 阶沃尔什矩阵。

另外，沃尔什函数可写成如下形式

$$wal\ (i,t) = (-1)^{\sum_{k=0}^{p-1} t_{p-1-k}\,(i_{k+1} \oplus i_k)}$$

式中

$$t = (t_{p-1}t_{p-2}\cdots t_k\cdots t_2t_1t_0)_{\text{二进}}$$

$$i = (i_{p-1}i_{p-2}\cdots i_k\cdots t_2t_1t_0)_{\text{二进}} \qquad N = 2^p$$

因此，可得到指数形式的沃尔什变换式

$$W(i) = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} f(t) \cdot (-1)^{\sum_{k=0}^{p-1} t_{p-1-k}\,(i_{k+1} \oplus i_k)} \qquad \textbf{(3—132)}$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} W\,(i)(-1)^{\sum_{k=0}^{p-1} i_{p-1-k}\,(t_{k+1} \oplus t_k)} \qquad \textbf{(3—133)}$$

以上是离散沃尔什变换的三种定义，其中矩阵式最为简洁。

3.6 离散沃尔什哈达玛变换

沃尔什函数的定义可知，按哈达玛排列的沃尔什函数与按沃尔什排列的沃尔什函数相比较只是排列顺序不同，其本质并没有什么不同。

但是哈达玛矩阵具有简单的递推关系，也就是高阶矩阵可用低阶矩阵的直积得到，这就使得沃尔什一哈达玛变换有许多方便之处。因此，用得较多的是沃尔什一哈达玛变换。

离散沃尔什一哈达玛变换的定义可直接由沃尔什变换得到，只要用按哈达玛排列的沃尔什函数去代替沃尔什排列的沃尔什函数，就可以得其矩阵式如下：

$$\begin{bmatrix} W(0) \\ W(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ W(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\left[H(N)\right]\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}134)$$

式中， $[W(0), W(1), w(2), \cdots W(N-1)]'$ 是沃尔什哈达玛变换系数序列， $[f(0), f(1). f(2), \cdots f(N-1)]'$ 是时间序列， $N = 2^{P}$ ，***p***为正整数。

式**(3—134)**的逆变换式如下

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} = \left[H(N)\right]\begin{bmatrix} W(0) \\ W(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ W(N-1) \end{bmatrix} \qquad (3\text{—}135)$$

例：将时间序列 [0 , 0 ,1 ,1 , 0 , 0 ,1 ,1 }

做沃尔什一哈达玛变换及反变换。

$$\begin{bmatrix} W(0) \\ W(1) \\ W(2) \\ W(3) \\ W(4) \\ W(5) \\ W(6) \\ W(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

反变换为

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.7 离散沃尔什变换的性质

离散沃尔什变换有许多性质。下面把主要性质列举于下。为叙述方便起见，用 **{f (t)}** 表示时间序列，用 **{W(n)}** 表示变换系数序列，

以 $\{f(t)\} \Leftrightarrow \{W(n)\}$ 表示沃尔什变换对应关系。

（1）线性

如果

$$\{f_1(t)\} \Leftrightarrow \{W_1(n)\}$$

$$\{f_2(t)\} \Leftrightarrow \{W_2(n)\}$$

则

$$a_1\{f_1(t)\}+a_2\{f_2(t)\} \Leftrightarrow a_1\{W_1(n)\}+a_2\{W_2(n)\}$$

其中 a_1 ，a_2 为常数。

（2） 模2移位性质

将时间序列 **{f(t)}** 作L位模2移位所得到的序列，

我们称为模2移位序列。模2移位是这样实现的：

设：$\{f(t)\}=\{f(0),\ f(1),\ f(2),\cdots\cdots\ f(N-1)\}$

是周期长度为N的序列。

作一个新的序列

$$\{z(m)\}_l=\{z(0),z(1),z(2)\cdots\cdots z(N-1)\} \quad (3—137)$$

其中 $z(m)=f(t\oplus l)$ 。此时，称 $\{z(m)\}_l$

是序列 **f(t)** 的*L*位模2移位序列。

例：

$$\{f(t)\}=\{f(0),f(1),f(2),f(3),f(4),f(5),f(6),f(7)\}$$

$N=8$　　L=2，则：

$$\{z(m)\}_2=\{f(0\oplus2),f(1\oplus2),f(2\oplus2)f(3\oplus2),f(4\oplus2),$$

$$f(5\oplus2),f(6\oplus2),f(7\oplus2)\}$$

由于

$0\oplus2=(000)\oplus(010)=(010)_B=(2)_D$

$1\oplus2=(001)\oplus(010)=(011)_B=(3)_D$

$2\oplus2=(010)\oplus(010)=(000)_B=(0)_D$

$3\oplus2=(011)\oplus(010)=(001)_B=(1)_D$

$4\oplus2=(100)\oplus(010)=(110)_B=(6)_D$

$5\oplus2=(101)\oplus(010)=(111)_B=(7)_D$

$6\oplus2=(110)\oplus(010)=(100)_B=(4)_D$

$7\oplus2=(111)\oplus(010)=(101)_B=(5)_D$

所以 $\{z(m)\}_2=\{f(2),f(3),f(0)f(1),f(6),f(7),f(4),f(5)\}$

同理 $\{z(m)\}_3=\{f(3),f(2),f(1)f(0),f(7),f(6),f(5),f(4)\}$

用矩阵表示为 $[z]_1=[M_1][f]$

式中 $[f]=\{f(t)\}'$ $[z]_1=\{z(m)\}_1'$ (3—139)

$$[M_1]=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \quad (3—140)$$

$[z]_2=[M_2][f]$

$$[M_2]=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix} \quad (3—141)$$

按照模2和的性质，可知 $[M]^T[M]=[I]$

模2移位性质是指下面的关系，

如果 $\{f(t)\}\Leftrightarrow\{W(n)\}$ ，并且 $\{z(t)\}_l$ 是 $f(t)$ 的模2移位序列，

则

$$\{z(t)\}_l\Leftrightarrow\{W_z(n)\}$$

式中：$W_z(n)=wal(n,l)\cdot W(n)$ ，$Wal(n,l)$ 是矩阵 $[wal]_{2^p}$ 中的第n行第l列的元素；

n=0，1，2……，(N-1)； $N=2^p$

t=0，1，2，……，(N-1)； p是正整数。

此定理可证明如下：

令 $z(t)$ 为 $[z(t)]_l$ 的元素，$[z(t)]_l$ 是 $[f(t)]$ 的模2移位序列，则

$$W_z(n)=\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}z(t)\cdot wal(n,t)$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}f(t\oplus l)\cdot wal(n,t)$$

令 $r=t\oplus l$ ，则有 $t=r\oplus l$ ，并且当 t 取值由0到N-1时，r 也取同样的值，只不过取值的顺序不同而已。于是可写成如下形式：

$$W_z(n)=\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} f(r)\cdot wal(n,r\oplus l)$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} f(r)\cdot wal(n,r)\cdot wal(n,l)$$
$$=wal(n,l)[\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} f(r)\cdot wal(n,r)]$$
$$=wal(n,l)[\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\cdot wal(n,t)]$$
$$=wal(n,l)\cdot W(n)$$

$wal(i,t)\cdot wal(j,t)=wal(i\oplus j,t)$且$W'W=I$

所以，证明

$$\{z(t)\}_l \Leftrightarrow \{W_z(n)\}$$

又因为 $[W_z(n)]^2=[wal(n,l)]^2\cdot[W(n)]^2=[W(n)]^2$

，这说明 $[W_z(n)]^2$ 与l无关。

也就是说，模2移位后的序列，作沃尔什变换后，所得到的第n个系数的平方$[W_z(n)]^2$ 与模2移位的移位位数无关。$[W_z(n)]^2$ 仍然等于 $[W(n)]^2$ 。

因此，模2移位定理（或称为并元移位定理）又可表达为输入序列 $\{f(t)\}$ 模2移位后的功率谱是不变的。

例如：设输入序列 $\{f(t)\}=\{0,0,1,1,0,0,1,1\}$ ，对此序列作l=3的模2移位，得

$$\{z(t)\}_3=\{f(t\oplus 3)\}=\{1,1,0,0,1,1,0,0\}$$

作沃尔什变换得

$$\{W(n)\}=\left\{\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,0,0,0,0\right\}$$

$$\begin{bmatrix}W(0)\\W(1)\\W(2)\\W(3)\\W(4)\\W(5)\\W(6)\\W(7)\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\0\\-1/2\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

根据

$$W_z(n)=wal(n,l)\cdot W(n)$$

可得

$$\{W_z(n)\}=\{wal(n,l)\cdot W(n)\}$$
$$=\{wal(n,3)\cdot W(n)\}$$
$$=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,0,0,0,0\right\}$$

从上面结果可知

$$[W_z(0)]^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \qquad [W(0)]^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

$$[W_z(3)]^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \qquad [W(3)]^2=(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

可见***n***相同时，功率也相同，也就是说功率列率谱是不变的。

（3） 模**2**卷积定理（时间）

在讨论下面的定理之前，首先说明一下模**2**移位卷积与模**2**移位相关的概念。

令 $\{f_1(t)\}$ 和 $\{f_2(t)\}$ 是两个长度相同的周期性序列。

用下面两式来定义两个序列的模**2**移位卷积和模**2**移位相关

$$C_{12}(t)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_1(l)\cdot f_2(t\Theta l)$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_1(l)\cdot f_2(t\oplus l) \qquad (3—143)$$

式中 $C_{12}(t)$ 为模**2**卷积， Θ 为模**2**减运算符，它的运算结果与模**2**加一样。模**2**移位相关的定义式如式**(3—144)**所示

$$K_{12}(t)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_1(l)\cdot f_2(t\oplus l) \qquad (3—144)$$

其中 $K_{12}(t)$表示模**2**移位相关，$f_2(t\oplus l)$是 $f_2(t)$ 的模**2**移位序列。

由式**(3—143)**和**(3—144)**可见，模**2**移位卷积和模**2**移位相关具有相同的结果,即：

$$K_{12}(t)=C_{12}(t)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}f_1(l)\cdot f_2(t\oplus l)$$

下面讨论模**2**移位卷积定理

如果

$$\{f_1(t)\}\Leftrightarrow\{W_1(n)\}$$
$$\{f_2(t)\}\Leftrightarrow\{W_2(n)\}$$

则 $$\{C_{12}(t)\}\Leftrightarrow\{W_1(n)\cdot W_2(n)\} \qquad (3—145)$$

如果用*w*代表作沃尔什变换，则：

$$\mathrm{W}[C_{12}(t)] = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} C_{12}(t)\cdot wal(n,\ t)$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_1(l)\cdot f_2(t\oplus l)\right]\cdot wal(n,\ t)$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_1(l)\left[\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} f_2(t\oplus l)\cdot wal(n,t)\right]$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_1(l)\cdot W_2(n)\cdot wal(n,l)$$
$$= W_2(n)\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_1(l)\cdot wal(n,l)\right] = W_2(n)\cdot W_1(n)$$

所以证明 $\{C_{12}(t)\} \Leftrightarrow \{W_1(n)\cdot W_2(n)\}$

模 2移 位 性 质： $\{z(t)\}_l \Leftrightarrow \{W_z(n)\}$

（4） 模2移位列率卷积定理

模2移位列率卷积由下式来表示

$$W_1(n) * W_2(n) = \sum_{r=0}^{N-1} W_1(r)\cdot W_2(r\oplus n)$$

(3—146)

依照模2时间卷积定理，模2移位列率卷积定理如下

如果

$$\{f_1(t)\} \Leftrightarrow \{W_1(n)\}$$
$$\{f_2(t)\} \Leftrightarrow \{W_2(n)\}$$

则

$$\{W_1(n)*W_2(n)\} \Leftrightarrow \{f_1(t)\cdot f_2(t)\}$$

(3—147)

仿照模2移位时间卷积定理的证明方法可得到证明。

（5） 模2移位自相关定理

从模2 移位时间卷积(相关)定理可以得到模2移位自相关定理。只要把定理中的 $\{f_2(t)\}$ 和 $\{W_2(n)\}$ 换成 $\{f_1(t)\}$ 和 $\{W_1(n)\}$ 便立即可以得到模2移位自相关定理。

$\{K_{11}(t)\} \Leftrightarrow \{W_1^2(n)\}$ (3—148)

其证明方法也与模2移位时间卷积定理的证明一样。

从式(3—148)可以建立一个重要概念：模2移位自相关序列的沃尔什变换等于序列的功率谱。也就是说，模2移位下的自相关序列的沃尔什变换正好与序列的功率谱相符合。

与傅里叶变换相比较，模2移位下的自相关与沃尔什谱的关系相当于线性移位下的自相关序列的离散傅里叶变换与其功率谱的关系。

（6）帕斯维尔定理

如果 $\{f_1(t)\} \Leftrightarrow \{W_1(n)\}$

则 $$\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} f_1^{\,2}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} W_1^{\,2}(n) \qquad (3\text{—}149)$$

证明：设

$$\{K_{11}(t)\} \Leftrightarrow \{W(n)\}$$

则根据沃尔什反变换：

$$K_{11}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} W(n)\cdot wal(n,t)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} W_1^{\,2}(n)\cdot wal(n,t)$$

因为 $K_{11}(t)$ 是自相关函数，所以

$$\{K_{11}(t)\} \Leftrightarrow \{W_1^{\,2}(n)\}$$

又由于

$$K_{11}(t) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_1(l)\cdot f_1(t\oplus l)$$

所以

$$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_1(l)\cdot f_1(t\oplus l) = \sum_{l=0}^{N-1} W_1^{\,2}(n)\cdot wal(n,t)$$

如果令 ***t*=0**，则

$$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_1^{\,2}(l) = \sum_{n=0}^{N-1} W_1^{\,2}(n)$$

$$\begin{bmatrix} W(0)\\ W(1)\\ W(2)\\ W(3)\\ W(4)\\ W(5)\\ W(6)\\ W(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\ 1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\ 1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\ 1&-1&-1&1&-1&1&1&-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\0\\1\\1\\0\\0\\1\\1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2\\0\\-1/2\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}$$

由于 ***l*** 仅是求和运算的变量，因此将 ***l*** 换成 ***t***，

即可得：

$$\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} f_1^{\,2}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} W_1^{\,2}(n)$$

（7）循环移位定理

把序列 $\{f(t)\}$ 循环地向左移若干位，例如移***l***位，***l*=1，2，……，*N*-1**，这样得到的序列叫循环移位序列。如果用 $\{z(t)_l\}$ 来表示循环移位序列，则

$$\{z(t)_l\} = \{f(l), f(l+1), \cdots\cdots f(l-2), f(l-1)\}$$
$$l = 1, 2, \cdots\cdots, N-1 \qquad (3\text{—}150)$$

例如：有一个**N=8**的序列，

$$\{f(t)\} = \{f(0), f(1), f(2), (f3) f(4), f(5), f(6), f(7)\}$$

当***l*=5，*l*=3** 的循环移位序列分别为

$$\{z(t)_5\} = \{f(5), f(6), f(7), f(0) f(1), f(2), f(3), f(4)\}$$

$$\{z(t)_3\} = \{f(3), f(4), f(5), (f6) f(7), f(0), f(1), f(2)\}$$

循环移位定理的内容如下：

如果 $\{f(t)\}$ 和它的循环移位序列 $\{z(t)_l\}$ 的沃尔什一哈达玛变换分别是 $W_f(n)$ 和 $W_z(n)$ ，则

$$\left.\begin{aligned} W_z^2(0) &= W_f^2(0) \\ \sum_{n=2^{(r-1)}}^{2^r-1} W_z^2(n) &= \sum_{n=2^{(r-1)}}^{2^r-1} W_f^2(n) \end{aligned}\right\} \qquad (3—151)$$

式中 $r=1,2,\cdots\cdots p,\ p=\log_2 N, l=1,2;\cdots\cdot\cdot,N-1$

这个定理把序列的沃尔什一哈达玛变换系数与循环移位序列的沃尔什哈达玛变换系数联系了起来。即某些 $W_f^2(n)$ 之和与 $W_z^2(n)$ 之和是相等的。所以这个定理又称为沃尔什一哈达玛变换的循环移位不变性。下面用一个例子来说明本定理的意义。

例如设 $\{f(t)\}=\{0,0,1,1,0,0,1,1\}$ ，经沃尔什一哈达玛变换后的系数序列为

$$\{W_f(n)\}=\{\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,0,0,0,0\}$$

现将 $\{f(t)\}$ 做**l=3**的循环移位，则

$$\{z(t)_3\}=\{1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1\}$$

此序列经沃尔什一哈达玛变换后的系数序列为

$$\{W_z(n)\}=\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\ 0,0,0,0\}$$

从两个序列 $W_f(n)$ 与 $W_z(n)$ 可以看出

$$W_z(0)=\frac{1}{2},\qquad W_f(0)=\frac{1}{2}$$

$$W_z^2(0)=W_f^2(0)=\frac{1}{4}$$

当**r=1**时，则：

$$\sum_{n=2^{(r-1)}}^{2^r-1} W_z^2(n) = W_z^2(1) = 0$$

$$\sum_{n=2^{(r-1)}}^{2^r-1} W_f^2(n) = W_f^2(1) = 0$$

所以 $W_z^2(1)=W_f^2(1)=0$

当 $r=2$ 时，则：

$$\sum_{n=2^{(r-1)}}^{2^r-1} W_z^2(n) = W_z^2(2)+W_z^2(3) = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=2^{(r-1)}}^{2^r-1} W_f^2(n) = W_f^2(2)+W_f^2(3) = \frac{1}{4}$$

所以

$$W_z^2(2)+W_z^2(3)=W_f^2(2)+W_f^2(3)=\frac{1}{4}$$

当r=3时，则：

$$\sum_{n=2^{r-1}}^{2^r-1} W_z^2(n)=W_z^2(4)+W_z^2(5)+W_z^2(6)+W_z^2(7)=0$$

$$\sum_{n=2^{r-1}}^{2^r-1} W_f^2(n)=W_f^2(4)+W_f^2(5)+W_f^2(6)+W_f^2(7)=0$$

所以：

$$W_z^2(4)+W_z^2(5)+W_z^2(6)+W_z^2(7)=W_f^2(4)+W_f^2(5)+W_f^2(6)+W_f^2(7)$$

显然，这些关系符合循环移位定理。

需要特别指出的是这个定理只适用于沃尔什－哈达玛变换。此定理的更加一般性的证明，请参阅有关书籍。

3.8 快速沃尔什变换

离散傅里叶变换有快速算法。同样，离散沃尔什变换也有快速算法。利用快速算法，完成一次变换只须 $N\log_2 N$ 次加减法，运算速度可大大提高。当然快速算法只是一种运算方法，就变换本身来说快速变换与非快速变换是没有区别的。

由于沃尔什－哈达玛变换有清晰的分解过程，而且快速沃尔什变换可由沃尔什－哈达玛变换修改得到，所以下面着重讨论沃尔什－哈达玛快速变换。

由离散沃尔什－哈达玛变换的定义可知

$$[W_H(n)]=\frac{1}{N}[H]\,[f(t)] \qquad (3—152)$$

式中 $N=2^p, p$ 为正整数。

这里以8阶沃尔什－哈达玛变换为例，讨论其分解过程及快速算法。由克罗内克积可知

$$\begin{aligned}[H_8] &= [H_4]\otimes[H_2] \\ &= \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_2 & H_2 & 0 & 0 \\ H_2 & -H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & H_2 \\ 0 & 0 & H_2 & -H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (3—153)$$

$$=\begin{bmatrix} H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 & I_2 & 0 & 0 \\ I_2 & -I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & I_2 \\ 0 & 0 & I_2 & -I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix}$$

$$=[G_0][G_1][G_2]$$

其中

$$[G_0]=\begin{bmatrix} H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix} \qquad (3—154)$$

$$[G_1]=\begin{bmatrix} I_2 & I_2 & 0 & 0 \\ I_2 & -I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & I_2 \\ 0 & 0 & I_2 & -I_2 \end{bmatrix} \qquad (3—155)$$

$$[G_2]=\begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix} \qquad (3—156)$$

其中 I_2, I_4 均为单位阵

由上面的分解有

$$[W_H(n)]=\frac{1}{8}[G_0][G_1][G_2][f(t)] \qquad (3—157)$$

令

$$[f_1(t)]=[G_2][f(t)]$$
$$[f_2(t)]=[G_1][f_1(t)]$$
$$[f_3(t)]=[G_0][f_2(t)]$$

则

$$[W_H(n)]=\frac{1}{8}[f_3(t)]$$

下面是具体计算 $[f_1(t)],[f_2(t)],[f_3(t)]$ 的公式及流程图。

$$[f_1(t)]=[G_2][f(t)]$$

$$\begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \\ f_1(4) \\ f_1(5) \\ f_1(6) \\ f_1(7) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f(0)+f(4) \\ f(1)+f(5) \\ f(2)+f(6) \\ f(3)+f(7) \\ f(0)-f(4) \\ f(1)-f(5) \\ f(2)-f(6) \\ f(3)-f(7) \end{bmatrix}$$

(3—158)

$$[G_2]=\begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix}$$

$$[f_2(t)]=[G_1][f_1(t)] \qquad [G_1]=\begin{bmatrix} I_2 & I_2 & 0 & 0 \\ I_2 & -I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & I_2 \\ 0 & 0 & I_2 & -I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_2(0) \\ f_2(1) \\ f_2(2) \\ f_2(3) \\ f_2(4) \\ f_2(5) \\ f_2(6) \\ f_2(7) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \\ f_1(4) \\ f_1(5) \\ f_1(6) \\ f_1(7) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(0)+f_1(2) \\ f_1(1)+f_1(3) \\ f_1(0)-f_1(2) \\ f_1(1)-f_1(3) \\ f_1(4)+f_1(6) \\ f_1(5)+f_1(7) \\ f_1(4)-f_1(6) \\ f_1(5)-f_1(7) \end{bmatrix}$$

(3—159)

$$[f_3(t)] = [G_0][f_2(t)] \qquad [G_0]=\begin{bmatrix} H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_3(0) \\ f_3(1) \\ f_3(2) \\ f_3(3) \\ f_3(4) \\ f_3(5) \\ f_3(6) \\ f_3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2(0) \\ f_2(1) \\ f_2(2) \\ f_2(3) \\ f_2(4) \\ f_2(5) \\ f_2(6) \\ f_2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(0)+f_2(1) \\ f_2(0)-f_2(1) \\ f_2(2)+f_2(3) \\ f_2(2)-f_2(3) \\ f_2(4)+f_2(5) \\ f_2(4)-f_2(5) \\ f_2(6)+f_2(7) \\ f_2(6)-f_2(7) \end{bmatrix}$$

(3—160)

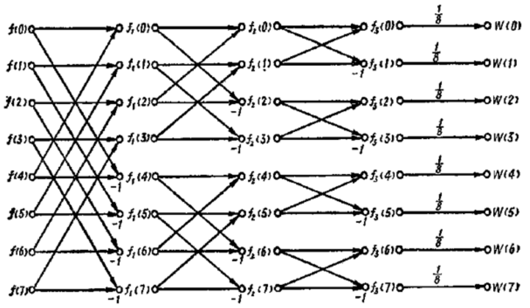

图 **3—14** 快速沃尔什-哈达玛变换信号流图（**N=8**）

因为 $[H_8]=[G_0][G_1][G_2]$

而 $[H_8],[G_0],[G_1],[G_2]$ 是对称矩阵，即：

$$[H_8]^T = [H_8] = [H_8]'$$
$$[G_0]^T = [G_0] = [G_0]'$$
$$[G_1]^T = [G_1] = [G_1]'$$
$$[G_2]^T = [G_2] = [G_2]'$$

$$[H_8]=[H_8]' = \{[G_0][G_1][G_2]\}'$$
$$=[G_2]'[G_1]'[G_0]'$$
$$=[G_2][G_1][G_0]$$

$$[W_H(n)]=\frac{1}{8}[G_2][G_1][G_0][f(t)]$$

(3—161)

$$[f_1'(t)] = [G_0][f(t)]$$
$$[f_2'(t)] = [G_1][f_1'(t)]$$
$$[f_3'(t)] = [G_2][f_2'(t)]$$
$$[W_H(n)] = \frac{1}{8}[f_3'(t)]$$

由此可得到另一种蝶形运算流程图。

对于一般情况，$N=2^p, p=0,1,\cdots$ ，则矩阵 $|H_{2^p}|$

可分解成***P***个矩阵 $|G_p|$ 之乘积，即：

(3—162)

$$[H_{2^p}]=\prod_{r=0}^{p-1}[G_r]=[G_0][G_1][G_2]\cdots\cdots[G_{p-1}]$$
$$=[G_{p-1}][G_{p-2}]\cdots\cdots[G_1][G_0]$$

所以，任意 2^r 阶快速沃尔什—哈达玛变换蝶式流图不难用上述方法引伸。

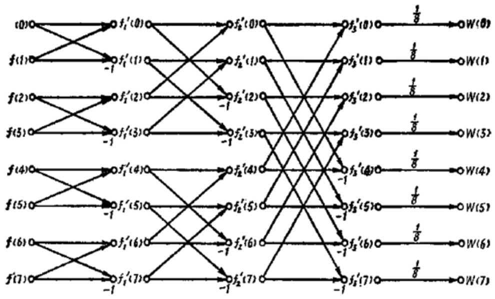

图 3—15 快速沃尔什-哈达玛变换信号流图（第二种算法）

3.9 多维变换

在图像处理中广泛运用的是二维变换，因此，下面对二维沃尔什一哈达玛变换作一介绍。

二维沃尔什一哈达玛变换可用一维沃尔什一哈达玛变换来计算，其步骤如下：

(1)、以 $N=N_x$ ，对 $f(x,y)$ 中 N_y 个列中的每一列做变换，得到 $[W_x(u,y)]$ ；

(2)、以 $N=N_y$ 对 $[W_x(u,y)]$ 中 N_x 行的每一行作变换，即可得到二维变换系数 $W_{xy}(u,v)$ 。

另外一种计算方法是将二维沃尔什一哈达玛变换当做一维来计算。这种方法是将数据矩阵的各列依次顺序排列，这样就形成由 N_xN_y 个元素的列矩阵。然后再按照一维沃尔什一哈达玛变换方法来计算。下面用实例说明一下两种计算方法。

例：设数据矩阵如下

$$[f(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

求 $[f(x,y)]$ 的二维沃尔什一哈达玛变换。

首先对 $[f(x,y)]$ 的每一列作变换：

第一列

$$W_x(u,0) = \frac{1}{2}[H_2]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

第二列

$$W_x(u,1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

第三列

$$W_x(u, 2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

第四列

$$W_x(u,\ 3)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$$

所以

$$[W_x(u,y)]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 2 & 5 & 3\\ -1 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

对 $[W_x(u,y)]$ 每一行作变换

第一行

$$W_x(u,0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 5\\ 3\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}13\\ 3\\ -3\\ -1\end{bmatrix}$$

第二行

$$W_x(u,1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -1\\ -3\end{bmatrix}$$

最后得到二维变换系数矩阵

$$[W_{xy}(u,v)]=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}13 & 3 & -3 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

以上是采用第一种算法得到的结果。

第二种算法如下：

将 ***f*(*x*,*y*)** 改写成列矩阵**[*Y*]**，即

$$[Y]=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\\ 1\\ 3\\ 2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

对**[Y]**做一维变换

$$\begin{bmatrix}W_Y(0)\\ W_y(1)\\ W_y(2)\\ W_y(3)\\ W_y(4)\\ W_y(5)\\ W_y(6)\\ W_y(7)\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\\ 1\\ 3\\ 2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}13\\ -1\\ 3\\ 1\\ -3\\ -1\\ -1\\ -3\end{bmatrix}$$

然后重排一下

$$[W_{xy}(u,v)] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 13 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

显然，与第一种算法得到的结果一致。

二维沃尔什一哈达玛变换的矩阵式定义如下

$$[W_{xy}(u,v)] = \frac{1}{N_x N_y}[H_{2^{p_x}}][f(x,y)][H_{2^{p_y}}] \qquad (3—171)$$

$$[f(x,y)] = [H_{2^{p_x}}][W_{xy}(u,v)][H_{2^{p_y}}] \qquad (3—172)$$

式中 $[H_{2^{p_y}}]$ 和 $[H_{2^{p_x}}]$ 分别为 2^{p_x} 阶和 2^{p_y} 阶哈达玛矩阵。

作业：
数字图像处理学（第三版）
P152: 12、13、14、20、21、22、23
P153: 28、29。