

数字图像处理

第4章 图像复原

信息科学研究所

图像复原是图像处理的另一重要课题。它的主要目的是改善给定的图像质量。当给定了一幅退化了的或者受到噪声污染了的图像后，利用退化现象的某种先验知识来重建或恢复原有图像是图像复原处理的基本过程。

可能的退化有：

光学系统中的衍射，传感器非线性畸变，光学系统的像差，摄影胶片的非线性，大气湍流的扰动效应，图像运动造成的模糊，几何畸变等等。



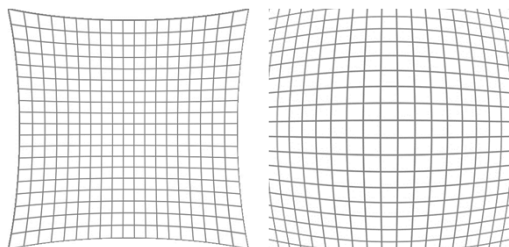
大气湍流造成的图像退化



运动模糊的图像



散焦造成的图像退化



枕形及桶形失真

噪声干扰可以由电子成像系统传感器、信号传输过程或者胶片颗粒性造成的。各种退化图像的复原都可归结为一种过程：

把退化模型化，并且采用相反的过程进行处理，以便恢复出原图像。

6.1 退化模型

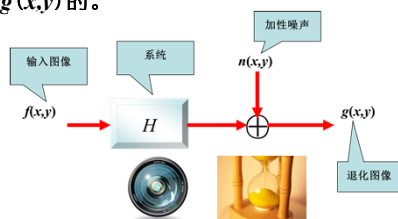
图像复原处理的关键问题在于建立退化模型。在用数学方法描述图像时，普遍的数学表达式为：

$$I = f(x, y, z, \lambda, t)$$

当研究的是静止的、单色的、平面的图像时，则其数学表达式就简化为：

$$I = f(x, y)$$

基于这样的数学表达式，可建立退化模型如图所示的形式：一幅纯净的图像 $f(x, y)$ 是由于通过了一个系统 H 及加入外来加性噪声 $n(x, y)$ 而使其退化为一幅图像 $g(x, y)$ 的。



图像复原可以看成是一个估计过程。如果已经给出了退化图像 $g(x, y)$ 并估计出系统参数 H ，从而可近似地恢复 $f(x, y)$ 。这里， $n(x, y)$ 是一种统计性质的信息。当然，为了对处理结果作出某种最佳的估计，一般应首先明确一个质量标准。

6.1.1 系统 H 的基本定义

根据图像的退化模型及复原的基本过程可见，复原处理的关键在于对系统 H 的基本了解。就一般而言，系统是某些元件或部件以某种方式构造而成的整体。系统本身所具有的某些特性就构成了通过系统的输入信号与输出信号的某种联系。

系统的分类方法很多。如：

线性系统和非线性系统；

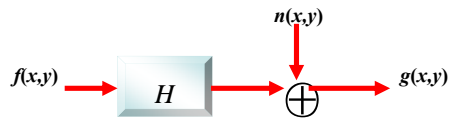
时变系统和非时变系统；

集中参数系统和分布参数系统；

连续系统和离散系统等等。

线性系统就是具有均匀性和相加性的系统。对于如图所示的系统来说，可表示成下数学表达式：

$$g(x, y) = H \cdot [f(x, y)] + n(x, y) \quad (6-1)$$



如果暂不考虑加性噪声 $n(x,y)$ 的影响，而令 $n(x,y)=0$ 时，则：

$$g(x, y) = H \cdot [f(x, y)] \quad (6-2)$$

如果输入信号为 $f_1(x,y)$ ， $f_2(x,y)$ ，对应的输出信号为 $g_1(x,y)$ ， $g_2(x,y)$ ，通过系统后有下式成立

$$\begin{aligned} & H \cdot [k_1 f_1(x, y) + k_2 f_2(x, y)] \\ &= H \cdot [k_1 f_1(x, y)] + H \cdot [k_2 f_2(x, y)] \quad (6-3) \\ &= k_1 g_1(x, y) + k_2 g_2(x, y) \end{aligned}$$

那么，系统 H 是一个线性系统。其中 k_1, k_2 为一常数。如果 $k_1 = k_2 = 1$ ，则

$$\begin{aligned} & H \cdot [f_1(x, y) + f_2(x, y)] \\ &= H \cdot [f_1(x, y)] + H \cdot [f_2(x, y)] \quad (6-4) \\ &= g_1(x, y) + g_2(x, y) \end{aligned}$$

式(6—3)及式(6—4)说明, 如果 H 为线性系统, 那么, 两个输入之和的响应等于两个响应之和。显然, 线性系统的特性为求解多个激励情况下的输出响应带来很大方便。

H 是空间不变系统(或称为位置不变系统), 式中的 α 和 β 分别是空间位置的位移量。这说明了图像中任一点通过该系统的响应只取决于在该点的输入值, 而与该点的位置无关。

$$\begin{aligned} & H \cdot [f(x - \alpha, y - \beta)] \\ &= g(x - \alpha, y - \beta) \end{aligned}$$

由上述基本定义可见, 如果系统 H 有式(6—3)和式(6—5)的关系, 那么, 系统就是线性的和空间位置不变的系统。

在图像复原处理中, 尽管非线性和空间变化的系统模型更具普遍性和准确性, 但是, 它却给处理工作带来巨大的困难, 它常常没有解或者很难用计算机来处理。

因此, 在图像复原处理中, 往往用线性和空间不变性的系统模型加以近似。这种近似的优点是使线性系统理论中的许多理论可直接用来解决图像复原问题, 所以图像复原处理特别是数字图像复原处理主要采用线性的、空间不变的复原技术。

6.1.2 连续函数退化模型

在线性系统理论中, 曾定义了单位冲激信号 $\delta(t)$ 。它是一个振幅在零点之外所有时刻为零, 在零点处振幅为无限大、宽度无限小, 面积为1的窄脉冲。

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 & t = 0 \\ \delta(t) = 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (6-6)$$

如果冲激信号 $\delta(t)$ 有一个时刻 t_0 的延迟, 那么

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 & t = t_0 \\ \delta(t-t_0) = 0 & t \neq t_0 \end{cases} \quad (6-7)$$

冲激信号 $\delta(t)$ 的一个重要特性是**取样特性**。由于除了 $t=0$ 外, 其它值均为零, 所以有:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(0)dt \\ &= f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \end{aligned} \quad (6-8)$$

同理, 当 t 有 t_0 延时的时候有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t_0)dt \\ &= f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0) \end{aligned} \quad (6-9)$$

冲激函数的另外一个取样公式就是卷积取样, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\delta(t)dt = f(x) \quad (6-10)$$

一维时域冲激函数 $\delta(t)$ 不难推广到二维空间域中。
如果推广至二维空间, 那么可定义 $\delta(x,y)$ 为冲激函数。 $\delta(x-a,y-\beta)$ 就是有延迟的冲激函数。

显然, 可以把 $f(x,y)$ 写成下式形式:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta \quad (6-11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\delta(t)dt = f(x)$$

根据 $g(x, y) = H \cdot [f(x, y)] + n(x, y)$ 的关系,

如果令 $n(x, y) = 0$, 则有以下式成立

$$\begin{aligned} g(x, y) &= H \cdot [f(x, y)] \\ &= H \cdot \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right] \end{aligned}$$

由于 H 是线性算子, 所以

$$\begin{aligned} g(x, y) &= H \cdot [f(x, y)] \\ &= H \cdot \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right] \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} H \cdot [f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) H \cdot \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (6-12)$$

$$\text{令 } h(x, \alpha, y, \beta) = H \cdot \delta(x - \alpha, y - \beta)$$

则

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta \quad (6-13)$$

$h(x, \alpha, y, \beta) = H \cdot \delta(x - \alpha, y - \beta)$ 就是系统 H 的冲激响应。也就是说 $h(x, \alpha, y, \beta)$ 是系统 H 对坐标为 α, β 处的冲激函数 $\delta(x - \alpha, y - \beta)$ 的响应。在光学中, 冲激为一光点, 所以 $h(x, \alpha, y, \beta)$ 又称为点扩散函数 (PSF)。

式 (6-13) 就是线性系统理论中非常重要的费雷德霍姆 (Fredholm) 积分: 如果系统 H 对冲激函数的响应为已知, 则对任意输入 $f(\alpha, \beta)$ 的响应可用式 (6-13) 求得。换句话说, 线性系统 H 完全可由其冲激响应来表征。

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta$$

在空间位置不变的情况下

$$H \cdot \delta(x - \alpha, y - \beta) = h(x - \alpha, y - \beta) \quad (6-14)$$

在这种情况下, 显然

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (6-15)$$

这说明，系统 H 加入输入信号的响应就是系统输入信号与冲激响应的卷积积分。

在有加性噪声的情况下，前述的线性退化模型可表示为

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)h(x-\alpha, y-\beta)d\alpha d\beta + n(x, y) \quad (6-16)$$

当然，在上述情况中，都假设噪声与图像中的像素位置无关。

6.1.3 离散的退化模型

连续函数的退化模型是由输入函数 $f(\alpha, \beta)$ 和点扩散函数相乘后再积分来表示的。如果把 $f(\alpha, \beta)$ 和 $h(x-\alpha, y-\beta)$ 进行均匀取样后就可引伸出离散的退化模型。

为了研究离散的退化模型，不妨用一维函数来说明基本概念，然后再推广至二维情况。

假设有两个函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ ，它们被均匀取样后分别形成 A 维和 B 维的阵列。在这种情况下， $f(x)$ 变成在 $x=0, 1, 2, \dots, A-1$ 范围内的离散变量， $h(x)$ 变成在 $x=0, 1, 2, \dots, B-1$ 范围内的离散变量。

由此，连续函数退化模型中的连续卷积关系就演变为离散卷积关系。

如果 $f(x)$, $h(x)$ 都是具有周期为 N 的序列, 那么, 它们的时域离散卷积可定义为下式之形式。

$$g(x) = \sum f(m)h(x-m) \quad (6-17)$$

显然, $g(x)$ 也是具有周期 N 的序列。周期卷积可用常规卷积法计算也可用卷积定理进行快速卷积计算。

如果 $f(x)$ 和 $h(x)$ 均不具备周期性, 则可以用延拓的方法使其成为周期函数。为了避免折叠现象, 可以令周期 $M \geq A+B-1$, 使 $f(x)$, $h(x)$ 分别延拓为下列离散阵列

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq A-1 \\ 0 & A-1 < x \leq M-1 \end{cases} \quad (6-18)$$

$$h_e(x) = \begin{cases} h(x) & 0 \leq x \leq B-1 \\ 0 & B-1 < x \leq M-1 \end{cases}$$

这样延拓后, 可得到一个离散卷积退化模型

$$g_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m)h_e(x-m) \quad (6-19)$$

式中 $x=0, 1, 2, \dots, M-1$ 。显然, $g_e(x)$ 的周期也是 M 。

经过这样的延拓处理, 一个非周期的卷积问题就变成了周期卷积问题了。因此也就可以用快速卷积法进行运算了。

如果用矩阵来表示上述离散退化模型，可写成下式之形式

$$[g] = [H][f] \quad (6-20)$$

这里 $[g]$, $[H]$, $[f]$ 分别代表矩阵，其中

$$[f] = \begin{bmatrix} f_e(0) \\ f_e(1) \\ \vdots \\ f_e(M-1) \end{bmatrix} \quad [g] = \begin{bmatrix} g_e(0) \\ g_e(1) \\ \vdots \\ g_e(M-1) \end{bmatrix} \quad (6-21) \quad (6-22)$$

$[H]$ 是 $M \times M$ 阶矩阵

$$[H] = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(-1) & h_e(-2) & \cdots h_e(-M+1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(-1) & \cdots h_e(-M+2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots h_e(-M+3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & h_e(M-3) & \cdots h_e(0) \end{bmatrix} \quad (6-23)$$

由于 $h_e(x)$ 具有周期性，所以

$$h_e(x) = h_e(M+x),$$

利用这一性质，式 (6-23) 又可以写成下式形式

$$[H] = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(M-1) & h_e(M-2) & \cdots h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(M-1) & \cdots h_e(2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots h_e(3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & h_e(M-3) & \cdots h_e(0) \end{bmatrix} \quad (6-24)$$

由于 $h_e(x)$ 的周期性，使得 $[H]$ 成为一个循环矩阵。

上述基本模型不难推广至二维情况。如果给出 $A \times B$ 大小的数字图像以及 $C \times D$ 大小的点扩散函数，可首先作成大小为 $M \times N$ 的周期延拓图像，即：

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1 \\ & 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1 \\ & B \leq y \leq N-1 \end{cases} \quad (6-25)$$

$$h_e(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C-1 \\ & 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq M-1 \\ & D \leq y \leq N-1 \end{cases} \quad (6-26)$$

这样延拓后 $f_e(x, y)$ 和 $h_e(x, y)$ 分别成为二维周期函数。

它们在 x 和 y 方向上的周期分别为 M 和 N 。由此得到

二维退化模型为一个二维卷积形式

$$g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) h_e(x-m, y-n) \quad (6-27)$$

式中: $x=0, 1, 2, \dots, M-1$; $y=0, 1, 2, \dots, N-1$, 卷积函数 $g_e(x, y)$ 也为周期函数, 其周期与 $f_e(x, y)$ 和 $h_e(x, y)$ 一样。

为避免重叠, 同样要按下式规则延拓

$$M \geq A + C - 1, N \geq B + D - 1 \quad (6-28)$$

式 (6-27) 的模型同样可用矩阵来表示

$$[g] = [H] [f] \quad (6-29)$$

其中 $[g]$, $[f]$ 代表 MN 维列向量。这些列向量是由 $M \times N$ 维的函数矩阵 $[f_e(x, y)]$, $[g_e(x, y)]$ 的各列堆积而成的。

例如 $[f]$ 的第一组 N 个元素是 $[f_e(x, y)]$ 的第一列元素, 第二组 N 个元素是由 $[f_e(x, y)]$ 的第二列元素得到的等等。因此, 式 (6-29) 中的 $[g]$ 和 $[f]$ 是 MN 维向量矩阵, 即 $[g]$, $[f]$ 为 $(MN) \times 1$ 维矩阵。而 $[H]$ 为 $MN \times MN$ 维矩阵, 即:

$$[H] = \begin{bmatrix} [H_0] & [H_{M-1}] & [H_{M-2}] & \dots [H_1] \\ [H_1] & [H_0] & [H_{M-1}] & \dots [H_2] \\ [H_2] & [H_1] & [H_0] & \dots [H_3] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [H_{M-1}] & [H_{M-2}] & [H_{M-3}] & \dots [H_0] \end{bmatrix} \quad (6-30)$$

每个部分 $[H_j]$ 是由延拓函数 $h_e(x,y)$ 的 j 行构成的，构成方法如下式：

$$[H_j] = \begin{bmatrix} h_e(j,0) & h_e(j,N-1) & h_e(j,N-2) & \cdots & h_e(j,1) \\ h_e(j,1) & h_e(j,0) & h_e(j,N-1) & \cdots & h_e(j,2) \\ h_e(j,2) & h_e(j,1) & h_e(j,0) & \cdots & h_e(j,3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_e(j,N-1) & h_e(j,N-2) & h_e(j,N-3) & \cdots & h_e(j,0) \end{bmatrix} \quad (6-31)$$

这里 $[H_j]$ 是一个循环矩阵， $[H]$ 的分块 $[H_j]$ 的下标也是循环方式标注。因此， $[H]$ 是一个分块循环矩阵。

一个更加完善的退化模型应加上噪声项。所以**离散退化模型**的完整形式如下式所示

$$g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m,n) h_e(x-m, y-n) + n_e(x, y) \quad (6-32)$$

其矩阵形式如下

$$[g] = [H] [f] + [n] \quad (6-33)$$

式中 $[n]$ 也是 MN 维列向量。

上述离散退化模型都是在线性的空间不变的前提下推出的。目的是在给出了 $g(x,y)$ 并且知道 $h(x,y)$ 和 $n(x,y)$ 的情况下，估计出理想的原始图像 $f(x,y)$ 。但是，要想从式(6-33)得到 $f(x,y)$ ，对于实用大小的图像来说，处理工作是十分艰巨的。

$$[g] = [H] [f] + [n]$$

例如，对于一般精度的图像来说

$M=N=512$ ，此时 $[H]$ 的大小为：

$$\begin{aligned} MN \times MN &= (512)^2 \times (512)^2 \\ &= 262144 \times 262144 \end{aligned}$$

按8bit算，约500G

因此，要直接得到 $[f]$ 则需要求解262144个联立方程组。其计算量之浩大是不难想象的。为了解决这样的问题，必须研究一些简化算法，由于 $[H]$ 的循环性质，使得简化运算得以实现。

6.2 逆滤波

6.2.1 逆滤波的基本原理

逆滤波复原法也叫做反向滤波法。基本原理如下：

如果退化图像为 $g(x,y)$ ，原始图像为 $f(x,y)$ ，在不考虑噪声的情况下，其退化模型用下式表示

$$g(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (6-45)$$

这显然是一卷积表达式。由傅立叶变换的卷积定理可知有下式成立

$$G(u, v) = H(u, v) \bullet F(u, v)$$

式中 $G(u,v)$ ， $H(u,v)$ ， $F(u,v)$ 分别是退化图像 $g(x,y)$ ，点扩散函数 $h(x,y)$ ，原始图像 $f(x,y)$ 的傅立叶变换。

由式(6-46)，可得

$$F(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \quad (6-47)$$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(u, v)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{G(u, v)}{H(u, v)}\right] \quad (6-48)$$

这意味着，如果已知退化图像的傅立叶变换和“滤波”传递函数，则可以求得原始图像的傅立叶变换，经反傅立叶变换就可求得原始图像 $f(x,y)$ 。这里 $G(u,v)$ 除以 $H(u,v)$ 起到了反向滤波的作用。**这就是逆滤波法复原的基本原理。**

在有噪声的情况下，逆滤波原理可写成如下形式

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad (6-49)$$

$$F(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} - \frac{N(u, v)}{H(u, v)} \quad (6-50)$$

式中 $N(u, v)$ 是噪声 $n(x, y)$ 的傅立叶变换。

利用式(6—47)和式(6—50)进行复原处理时可能会发生下列情况，即在 u, v 平面上有些点或区域会产生 $H(u, v)=0$ 或 $H(u, v)$ 非常小的情况，在这种情况下，即使没有噪声，也无法精确恢复 $f(x, y)$ 。

另外，在有噪声存在时，在 $H(u, v)$ 的邻域内， $H(u, v)$ 的值可能比 $N(u, v)$ 的值小的多，因此由式(6—50)得到的噪声项可能会非常大，这样也会使 $f(x, y)$ 不能正确恢复。

一般来说，逆滤波法不能正确地估计 $H(u, v)$ 的零点，因此必须采用一个折衷的方法加以解决。实际上逆滤波不是用 $1/H(u, v)$ ，而是采用另外一个关于 u, v 的函数 $M(u, v)$ 。它的处理框图如图6—2所示。

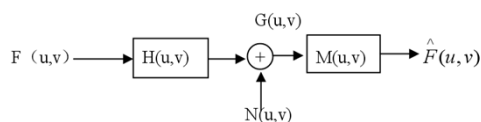


图 6—2 实际的逆滤波处理框图

在没有零点并且也不存在噪声的情况下

$$M(u, v) = \frac{1}{H(u, v)}$$

图6—2的模型包括了退化和恢复运算。退化和恢复总的传递函数可用 $H(u,v)M(u,v)$ 来表示。此时有

$$\hat{F}(u, v) = [H(u, v)M(u, v)]F(u, v) \quad (6-51)$$

式中 $\hat{f}(x, y)$ 是 $f(x, y)$ 的估计值, $\hat{F}(u, v)$ 是其傅立叶变换。 $H(u, v)$ 叫做输入传递函数, $M(u, v)$ 叫做处理传递函数, $H(u, v)M(u, v)$ 叫做输出传递函数。

一般情况下, $H(u, v)$ 的幅度随着离 u, v 平面原点的距离的增加而迅速下降, 而噪声项 $N(u, v)$ 的幅度变化是比较平缓的。在远离 u, v 平面的原点时 $N(u, v)/H(u, v)$ 的值就会变得很大, 而对于大多数图像来说 $F(u, v)$ 却变小,

在这种情况下, 噪声反而占优势, 自然无法满意地恢复出原始图像。这一规律说明, **应用逆滤波时仅在原点邻域内采用 $1/H(u, v)$ 方能奏效。**

换句话说, 应使 $M(u, v)$ 在下述范围内来选择

$$M(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & u^2 + v^2 \leq \omega_0^2 \\ 1 & u^2 + v^2 > \omega_0^2 \end{cases} \quad (6-52)$$

ω_0 的选择应该将 $H(u, v)$ 的零点排除在此邻域之外。