数字图像处理

第4章 图像增强

信息科学研究所

图像增强是指按特定的需要突出一幅图像中的某些信息，同时，削弱或去除某些不需要的信息的处理方法。其主要目的是使处理后的图像对某种特定的应用来说，比原始图像更适用。

因此，这类处理是为了某种应用目的而去改善图像质量的。处理的结果使图像更适合于人的视觉特性或机器的识别系统。

应该明确的是增强处理并不能增强(加)原始图像的信息，其结果只能增强对某种信息的辨别能力，而这种处理有可能损失一些其他信息。图像增强是数字图像处理的基本内容之一。

图像增强技术主要包括:

- 直方图修改处理
- 图像平滑化处理
- 图像尖锐化处理
- 彩色处理技术

在实用中可以采用单一方法处理，也可以采用几种方法联合处理，以便达到预期的增强效果。

图像增强技术基本上可分成两大类:

- 频域处理法
- 空域处理法

频域处理法的基础是卷积定理。它采用修改图像傅里叶变换的方法实现对图像的增强处理。由卷积定理可知，如果原始图像是$f(x,y)$，处理后的图像是$g(x,y)$，而$h(x,y)$是处理系统的冲激响应，那么，处理过程可由下式表示

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y) \quad (3—1)$$

其中$*$代表卷积。

如果$G(u,v)$，$F(u,v)$，$H(u,v)$分别是$g(x,y)$、$f(x,y)$、$h(x,y)$的傅立叶变换，那么，上面的卷积关系可表示为变换域的乘积关系，即

$$G(u,v)=H(u,v)\cdot F(u,v) \quad (3\text{-}2)$$

式中，$H(u,v)$为传递函数。

在增强问题中，$f(x,y)$是给定的原始数据，经傅立叶变换可得到$F(u,v)$。选择合适的$H(u,v)$，使得由式

$$g(x,y)=\mathscr{F}^{-1}[H(u,v)\cdot F(u,v)]$$

得到的$g(x,y)$比$f(x,y)$在某些特性方面更加鲜明、突出，因而更加易于识别、解译。

例如，可以强调图像中的低频分量使图像得到平滑，也可以强调图像中的高频分量使图像的边缘得到增强等等。以上就是频域处理法的基本原理。

空域法是直接对图像中的像素进行处理，基本上是以灰度映射变换为基础的。所用的映射变换取决于增强的目的。例如增加图像的对比度，改善图像的灰度层次等处理均属空域法处理。

应该特别提及的是增强后的图像质量好坏主要靠人的视觉来评定，而视觉评定是一种高度的主观处理。因此，为了一种特定的用途而采用的一种特定的处理方法，得到一幅特定的图像，对其质量的评价方法和准则也是特定的，所以，很难对各种处理定出一个通用的标准。由此可知，图像增强没有通用理论。

4.1 图像

（1）、图像的数学表示：

图像是传递信息的重要媒介，当我们用计算机来处理图像时，就需要用数学来描述它们，用数学方法来描述图像就需要考虑其点的性质，也就是说，一幅图像可以看成是坐标点上强度的集合。最普遍的表达式如下：

例如一幅图像可以被看成是空间各个座标点上强度的集合。它的最普遍的数学表达式为

$$I = f(x, y, z, \lambda, t) \qquad (3—3)$$

其中,**(*x,y,z*)** 是空间座标，**λ**是波长，***t***是时间，***I***是图像的强度。

这样一个表达式可以代表一幅活动的、彩色的、立体图像。

当我们研究的是静止图像（***Still Image***）时，则上式与时间 ***t*** 无关；

当研究的是单色图像时，显然与波长 λ 无关；

对于平面图像来说则与座标 *z* 无关。

因此，对于静止的、平面的、单色的图像来说其数学表达式可简化为下式。

$$I = f(x, y) \qquad \textbf{(3—4)}$$

上式说明一幅平面图像可以用二维亮度函数来表示。因为光也是能量的一种表现形式，所以：

$$0 \le f(x, y) < \infty$$

人们所感受到的图像一般都是由物体反射的光组成的。***f*(*x,y*)**可以看成由两个分量组成，一个是我们所看到的景物上的入射光，另一分量是由景物自身特性决定的反射特性，它们可分别被称为入射分量和反射系数。如果用表示 ***i*(*x,y*)** 入射分量，用 ***r*(*x,y*)** 表示反射系数，那么

$$I = f(x, y) = i(x\ y) \cdot r(x\ y) \qquad (3—5)$$

$$0 \le i(x, y) < \infty \qquad (3—6)$$

$$0 \le r(x, y) \le 1 \qquad (3—7)$$

其中(3—7)式表示全吸收情况为0，全反射的情况为1。这里***i***(***x,y***)由光源的性质来确定，而***r***(***x,y***)则取决于景物中的物体。

***i*(*x,y*)** 的单位用照度来度量，

即流明 / 平方米($Lm\ /\ m^2$)或勒克司。

下面我们列出 ***i*(*x* , *y*)** 一些的典型值，以便建立一点初步的感性认识。

例如：

晴朗的日子，太阳在地球表面造成的照度为

9000英尺-烛光（英制单位）

96840勒克司

96840流明/平方米

当天空有云时，太阳在地球表面造成的照度为

1000英尺-烛光

10760勒克司

10760流明/平方米

晴天的夜晚而且是满月的情况下，地球表面的照度为:

0.01英尺-烛光=0.1076勒克司

一般房间照明充分的室内照度大约为:

100英尺-烛光=1076勒克司

$r(x, y)$是反射系数，典型物质的典型值如下：

黑天鹅绒	---0.01；
不锈钢	---0.65；
白色墙	---0.80；
镀银金属	---0.90；
白雪	---0.98；

在数字图像处理中经常用到监视器或电视机。自然景物映射到摄象管靶面的光的强弱取决于景物上反射出来的光通量。目前，一般黑白或彩色电视机的屏幕亮度CRT大约为500cd/m^{2}左右，最新的PDP显示器达到1000cd/m^2。

(2)、图像的模型及信息量

图像是信源的一种，由于产生信息的物理机理十分复杂，因此，不同的信源可遵循的物理模型也各不相同。通常有两大类模型：

A、确定性模型

B、统计模型

确定性模型可用抽象的数学表达式来描述，如：正弦波 $sin\theta$,冲激函数$\boldsymbol{\delta(t)}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \qquad t = 0$$

$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

统计模型只能用统计数学的表达式来描述。如：分布函数、概率密度函数、相关函数、相关矩、中心矩、功率谱等。

图像的统计特性表征，认为图像信号是一个随机信号。对于一个随机信号的数学描述则是振幅或相位的分布函数、概率密度函数以及一系列的相关矩、中心矩、功率谱等。

利用这些参数来表征图像的特性，建立图像信息的数学模型，以便对图像信息进行有效的分析及处理。

图像的信息量：

1）、离散的图像信息的熵

对于一个连续的图像信号经过编码后就变成了离散的图像信息。

一幅图像如果有 $s_1,s_2,s_3,\ldots s_q$共q种幅度值，概率分别为：$P_1,P_2,P_3,\ldots,P_q$。

那么每一种幅值所具有的信息量分别为：

$$\log_2(\frac{1}{P_1}),\log_2(\frac{1}{P_2}),\log_2(\frac{1}{P_3})\cdots\cdots,\log_2(\frac{1}{P_q})$$

由此，其平均信息量可由下式表示。

$$H=\sum_{i=1}^{q}P_i\log_2\frac{1}{P_i}=-\sum_{i=1}^{q}P_i\log_2 P_i$$

把这个平均信息量叫做熵，记作 H

如果一个图像信源能输出K个独立的消息，当这些消息出现的概率彼此相等时，那么这个信源的熵最大。例如，一个信源只输出P和Q两个消息，熵的最大值出现在两个消息的概率都等于0.5处。

2）、连续的图像信息的熵

对于离散的图像信息来说，它只输出有限个符号。如果输出的不是有限个而是无限个，那么，这样的图像信息叫做连续图像信息。

对于连续图像信息的熵也可以仿照离散图像信息的熵来计算。如图2—6所示的连续信源，把*s*分成小微分段⊿*s*，这样，类似于离散信源的熵可导出如下

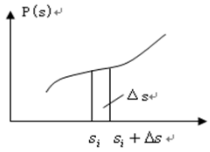
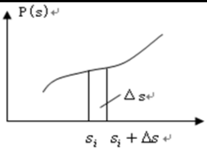


图 2—6 连续信源的熵的计算



$$H=-\sum_{i=-\infty}^{\infty}p(s_i)\cdot\Delta s\cdot\log_2[p(s_i)\Delta s]$$
$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}p(s_i)\cdot\Delta s\cdot\log_2\frac{1}{p(s_i)\Delta s}$$
$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}p(s_i)\Delta s\cdot\log_2\frac{1}{p(s_i)}+\sum_{i=-\infty}^{\infty}p(s_i)\Delta s\cdot\log_2\frac{1}{\Delta s}$$

当 $\Delta s\to 0$ 时，则

$$H\approx\int_{-\infty}^{\infty}p(s)\log\frac{1}{p(s)}ds+\infty$$

第二项是由于 $\Delta s\to 0$ 时，$\log_2\frac{1}{\Delta s}\to\infty$ 所至。一般忽略掉第二项，连续的图像信息源的熵如下式

$$H=-\int_{-\infty}^{\infty}p(s)\log_2 p(s)ds$$

这里应该注意的是连续图像信息的熵并不是绝对熵，而是绝对熵减去一个无限大项。因此，也可以说这是一个相对熵。其中 **$p(s)$** 是概率密度。

对于离散信源来说，

当所有消息输出是等概率时其熵最大。

但对连续信源来说最大熵的条件取决于输出受限情况。

当输出幅值受限的情况下，幅度概率密度是均匀分布时其熵值最大。

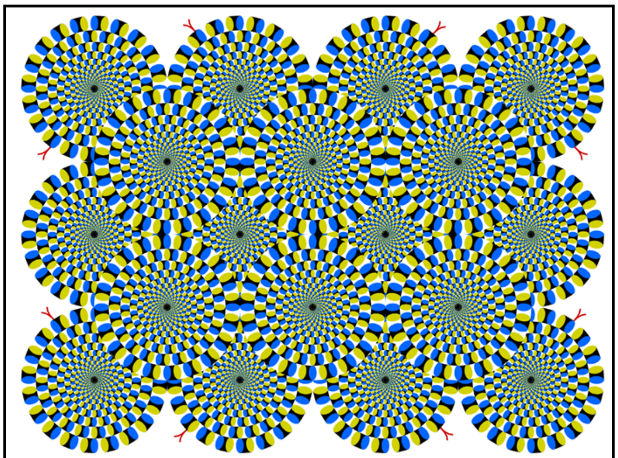
当输出功率受限的情况下，则输出幅度概率密度是高斯分布时其熵值最大。

4.3 人的视觉的一些错视现象(视错觉)

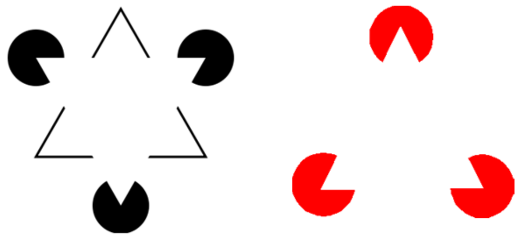
人的视觉由许多有趣的特性：

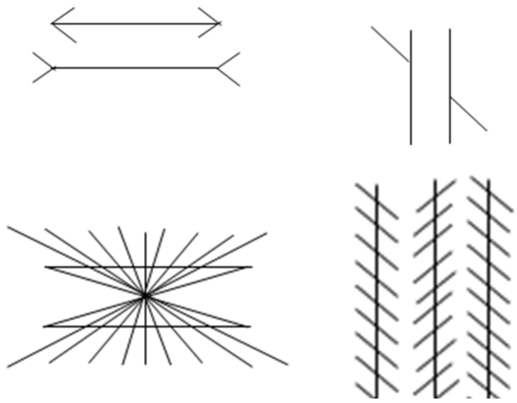
如：运动感觉、光觉和色觉、时间特性、错视等。

马赫带效应

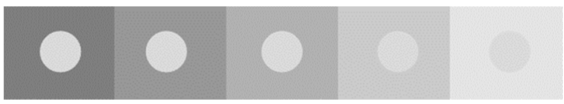


Kanizsa Illusion

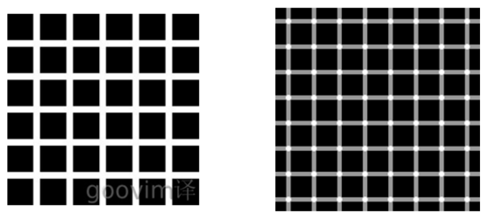




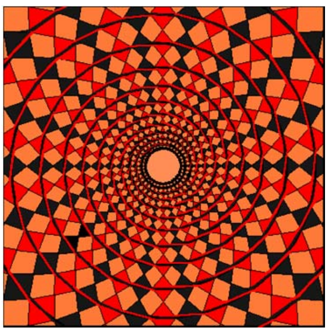
Simultaneous Contrast（同时比对）



The Hermann Grind

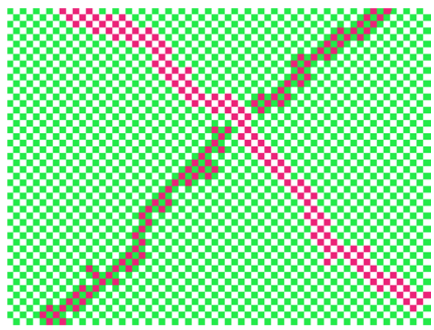


It's a spiral, right?

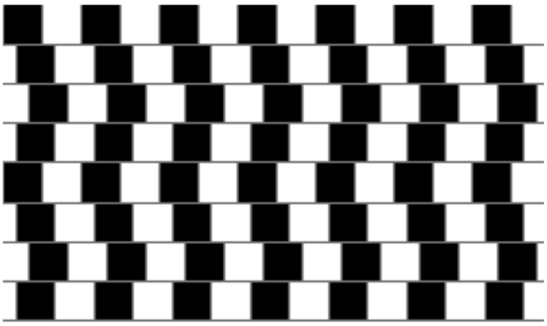


No, these are a bunch of independent circles

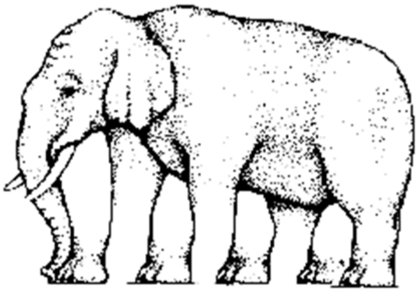
How many colors do you see?



Do you see a couple or a skull?



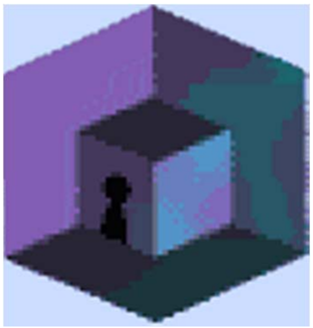
Are the horizontal lines parallel or do they slope?



How many legs does this elephant have?

Do you see the three faces?

Do you see the face? Or an Eskimo?



Do you see a cube missing a corner?
Or do you see a small cube in a big one?

Is the blue on the inner left back or the outer left front?

Do you see a musician or a girl's face?

Do you see an old man's face or two lovers kissing?

4.4 用直方图修改技术进行图像增强

灰度级的直方图描述了一幅图像的概貌，用修改直方图的方法增强图像是实用而有效的处理方法之一。

4.4.1 直方图

什么是灰度级的直方图呢？

灰度级的直方图就是反映一幅图像中的灰度级与出现这种灰度的概率之间的关系的图形。

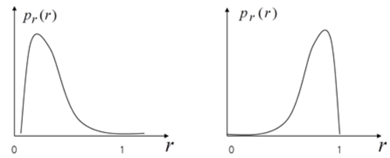
设变量r代表图像中像素灰度级。在图像中，像素的灰度级可作归一化处理，这样，r的值将限定在下述范围之内

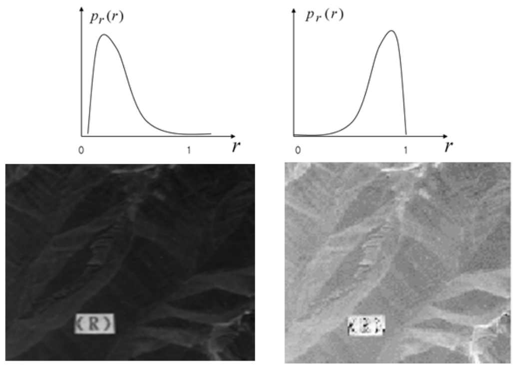
$$0 \le r \le 1$$

在灰度级中，$r = 0$代表黑，$r = 1$代表白。

对于一幅给定的图像来说，每一个像素取得[0,1]区间内的灰度级是随机的，也就是说r是一个随机变量。假定对每一瞬间它们是连续的随机变量，那么，就可以用概率密度函数$p_r(r)$来表示原始图像的灰度分布。

如果用直角坐标系的横轴代表灰度级r，用纵轴代表灰度级的概率密度函数$p_r(r)$，这样就可以针对一幅图像在这个坐标系中作一曲线来。这条曲线在概率论中就是分布密度曲线。





从图像灰度级的分布可以看出一幅图像的灰度分布特性。例如，从图3—1中的(a)和(b)两个灰度密度分布函数中可以看出：(a)的大多数像素灰度值取在较暗的区域，所以这幅图像肯定较暗，一般在摄影过程中曝光过强就会造成这种结果；

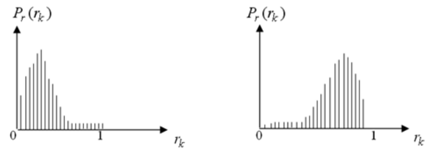
而(b)图像的像素灰度值集中在亮区，因此，图像(b)的特性将偏亮，一般在摄影中曝光太弱将导致这种结果。当然，从两幅图像的灰度分布来看图像的质量均不理想。

为了有利于数字图像处理，必须引入离散形式。在离散形式下，用r_k离散灰度级，用$P_r(r_k)$代表$p_r(r)$，并且有下式成立

$$P_r(r_k) = \frac{n_k}{n} \qquad 0 \le r_k \le 1 \qquad \textbf{(3—9)}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, l-1$$

式中n_k为图像中出现r_k这种灰度的像素数，n是图像中像素总数，而$\frac{n_k}{n}$就是概率论中所说的频数。在直角坐标系中作出r_k与$P_r(r_k)$的关系图形，这个图形称为直方图。如图所示。



4.4.2 直方图修改技术的基础

如上面所述，一幅给定的图像的灰度级分布在$0 \leqslant r \leqslant 1$范围内。可以对[0, 1]区间内的任一个$r$值进行如下变换

$$s = T(r) \qquad (3—10)$$

也就是说，通过上述变换，每个原始图像的像素灰度值r都对应产生一个s值。

变换函数$T(r)$应满足下列条件：

（1）在$0 \le r \le 1$区间内，$T(r)$单值单调增加；

（2）对于$0 \le r \le 1$，有$0 \le T(r) \le 1$。

第一个条件保证了图像的灰度级从白到黑的次序不变。

第二个条件则保证了映射变换后的像素灰度值在允许的范围内。

满足这两个条件的变换函数的一个例子如图下所示。

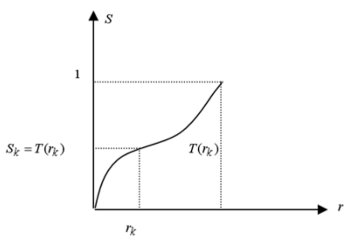


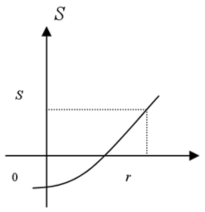
图4—3 一种灰度变换函数

从s到r的反变换可用式(3—11)表示

$$r = T^{-1}(s) \qquad (3—11)$$

由概率论可知，如果已知随机变量ξ的概率密度为$p_r(r)$，而随机变量η是ξ的函数，即$\eta = T(\xi)$，η的概率密为$p_s(s)$，所以可以由$p_r(r)$求出$p_s(s)$。

因为 $s=T(r)$ 是单调增加的，由数学分析可知，它的反函数 $r=T^{-1}(s)$ 也是单调函数。在这种情况下，如图所示，$\eta < s$ 且仅当 $\xi < r$ 时发生，



所以可以求得随机变量η 的分布函数为

$$F_\eta(s) = P(\eta < s) = P[\xi < r] = \int_{-\infty}^{r} p_r(x)dx \quad (3—12)$$

对式(3—12)两边求导，即可得到随机变量 η 的分布密度函数 $p_s(s)$ 为

$$p_S(s) = p_r(r)\cdot\frac{d}{ds}[T^{-1}(s)] = \left[p_r(r)\cdot\frac{dr}{ds}\right]_{r=T^{-1}(S)}$$

(3—13)

通过变换函数 $T(r)$可以控制图像灰度级的概率密度函数，从而改变图像的灰度层次。这就是直方图修改技术的基础。

4.4.3 直方图均衡化处理

直方图均衡化处理是以累积分布函数变换法为基础的直方图修正法。

假定变换函数为

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(\omega)d\omega \qquad (3—14)$$

式中 ω 是积分变量，而 $\int_0^r p_r(\omega)d\omega$ 就是r的累积分布函数(*CDF*)。

这里，累积分布函数是r 的函数，并且单调地从0增加到1，所以这个变换函数满足关于

在$0\le T(r)\le 1$内单值单调增加，

在$0\le r\le 1$内有$0\le T(r)\le 1$

的两个条件。

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(\omega)d\omega$$

对上式中的 r 求导，则

$$\frac{ds}{dr} = p_r(r)$$

再把结果代入式(3—13)，则

$$p_S(s) = \left[p_r(r) \cdot \frac{dr}{ds} \right]_{r=T^{-1}(s)}$$

$$= \left[p_r(r) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dr}} \right]_{r=T^{-1}(s)} \qquad = \left[p_r(r) \cdot \frac{1}{p_r(r)} \right] = 1$$

变换后的变量s的定义域内的概率密度是均匀分布的。即，用r的累积分布函数作为变换函数可以产生一副灰度分布具有均匀概率密度的图像。

两个重要概念：

1）、直方图均衡化处理技术是用累积分布函数作变换函数的直方图修正方法；

2）、用累积分布函数作为变换函数可产生一幅灰度级分布具有均匀概率密度的的图像。

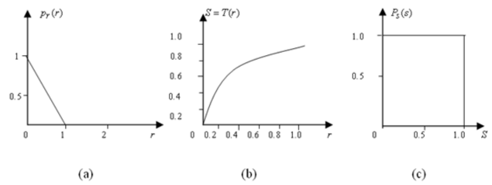
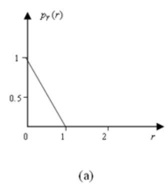


图3—5　均匀密度变换法

例如，在图3—5中，(a)是原始图像的概率密度函数。从图中可知，这幅图像的灰度集中在较暗的区域，这相当于一幅曝光过强的照片。(b)和(c)分别为变换函数和变换后的均匀的概率密度函数。

由图(a)可知，原始图像的概率密度函数为

$$p_r(r) = \begin{cases} -2r+2 & 0 \le r \le 1 \\ 0 & r \text{ 为其它值} \end{cases}$$



用累积分布函数原理求变换函数

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(\omega)d\omega$$

$$= \int_0^r (-2\omega + 2)d\omega = -r^2 + 2r$$

由此可知变换后的s值与r值的关系为

$$s = -r^2 + 2r = T(r)$$

按照这样的关系变换就可以得到一幅改善了质量的新图像。这幅图像的灰度层次将不再是呈现黑暗色调的图像，而是一幅灰度层次较为适中的，比原始图像清晰，明快得多的图像。

下面还可以通过简单的推证，证明变换后的灰度级概率密度是均匀分布的。

因为 $s = T(r) = -r^2 + 2r$

所以 $r = T^{-1}(r) = 1 \pm \sqrt{1-s}$

由于 r 取值在[0, 1]区间内，所以

$$r = 1 - \sqrt{1-s}$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds}\left[1 - \sqrt{1-s}\right] = \frac{1}{2\sqrt{1-s}}$$

而

$$p_r(r) = -2r + 2 = -2(1-\sqrt{1-s}) + 2 = 2\sqrt{1-s}$$

因此

$$p_S(s) = \left[p_r(r)\cdot\frac{dr}{ds}\right]_{r=T^{-1}(S)} = \left[2\sqrt{1-s}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-s}}\right] = 1$$

这个简单的证明说明在希望的灰度级范围内，它是均匀密度。

上面的修正方法是以连续随机变量为基础进行讨论的。正如前面谈到的那样，为了对图像进行数字处理，必须引入离散形式的公式。当灰度级是离散值的时候，可用频数近似代替概率值，即

$$P_r(r_k) = \frac{n_k}{n} \qquad 0 \le r_k \le 1 \qquad k = 0, 1, \cdots\cdots l-1 \qquad (3—17)$$

式中 l 是灰度级的总数目，$P_r(r_k)$ 是取第 k 级灰度值的概率，n_k 是在图像中出现第 k 级灰度的次数，n 是图像中像素总数。

通常把为得到均匀直方图的图像增强技术叫做直方图均衡化处理或直方图线性化处理。

式(3—14)的离散形式可由式(3—18)表示

$$S_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_j}{n} = \sum_{j=0}^{k} P_r(r_j) \quad 0 \le r_j \le 1 \qquad (3—18)$$

$$k = 0, 1, \cdots\cdots, l-1$$

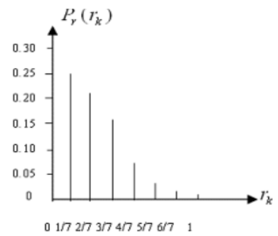
其反变换式为

$$r_k = T^{-1}(s_k) \qquad (3—19)$$

例如有一幅像素数为64×64，灰度级为8级的图像，其灰度级分布如表4—1所示，对其进行均衡化处理。其灰度级直方图如图3－5所示。

表3—1 64×64大小的图像灰度分布表

r_k	n_k	$P_r(r_k)=\frac{n_k}{n}$
r0 =0	790	0.19
r1=1/7	1023	0.25
r2=2/7	850	0.21
r3=3/7	656	0.16
r4=4/7	329	0.08
r5=5/7	245	0.06
r6=6/7	122	0.03
r7=1	81	0.02



处理过程如下：

由式(3—18)可得到变换函数

$$s_0 = T(r_0) = \sum_{j=0}^{0} P_r(r_j) = P_r(r_0) = 0.19$$

$$s_1 = T(r_1) = \sum_{j=0}^{1} P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1) = 0.44$$

$$s_2 = T(r_2) = \sum_{j=0}^{2} P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) = 0.19 + 0.25 + 0.21 = 0.65$$

$$s_3 = T(r_3) = \sum_{j=0}^{3} P_r(r_j) = P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) + P_r(r_3) = 0.81$$

$$s_4 = T(r_4) = \sum_{j=0}^{4} P_r(r_j)$$
$$= P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) + P_r(r_3)$$
$$+ P_r(r_4) = 0.89$$

$$s_5 = T(r_5) = \sum_{j=0}^{5} P_r(r_j)$$
$$= P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) + P_r(r_3)$$
$$+ P_r(r_4) + p_r(r_5) = 0.95$$

$$s_6 = T(r_6) = \sum_{j=0}^{6} P_r(r_j)$$
$$= P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) + P_r(r_3)$$
$$+ P_r(r_4) + p_r(r_5) = 0.95$$

$$s_7 = T(r_7) = \sum_{j=0}^{7} P_r(r_j)$$
$$= P_r(r_0) + P_r(r_1) + P_r(r_2) + P_r(r_3)$$
$$+ P_r(r_4) + p_r(r_5) + p_r(r_6) + p_r(7) = 1$$

这里对图像只取8个等间隔的灰度级，变换后的值也只能选择最靠近的一个灰度级的值。因此，对上述计算值加以修正。

$s_0 = 0.19 \approx \frac{1}{7}$ $\quad s_1 = 0.44 \approx \frac{3}{7}$

$s_2 = 0.65 \approx \frac{5}{7}$ $\quad s_3 = 0.81 \approx \frac{6}{7}$

$s_4 = 0.89 \approx \frac{6}{7}$ $\quad s_5 = 0.95 \approx 1$

$s_6 = 0.98 \approx 1$ $\quad s_7 = 1.00$

由上述数值可见，新图像将只有 5 个不同的灰度级别，可以重新定义一个符号。

$s_0' = \frac{1}{7}$ $\quad s_3' = \frac{6}{7}$

$s_1' = \frac{3}{7}$ $\quad s_4' = 1$

$s_2' = \frac{5}{7}$

$s_0 = 0.19 \approx \frac{1}{7}$ $\quad s_1 = 0.44 \approx \frac{3}{7}$

$s_2 = 0.65 \approx \frac{5}{7}$ $\quad s_3 = 0.81 \approx \frac{6}{7}$

$s_4 = 0.89 \approx \frac{6}{7}$ $\quad s_5 = 0.95 \approx 1$

$s_6 = 0.98 \approx 1$ $\quad s_7 = 1.00$

⇨

$r_0 = 0 \rightarrow s_0 = \frac{1}{7}$

$r_1 = \frac{1}{7} \rightarrow s_1 = \frac{3}{7}$

$r_2 = \frac{2}{7} \rightarrow s_2 = \frac{5}{7}$

$r_3 = \frac{3}{7} \rightarrow s_3 = \frac{6}{7}$

$s_0 = 0.19 \approx \frac{1}{7}$ $\quad s_1 = 0.44 \approx \frac{3}{7}$

$s_2 = 0.65 \approx \frac{5}{7}$ $\quad s_3 = 0.81 \approx \frac{6}{7}$

$s_4 = 0.89 \approx \frac{6}{7}$ $\quad s_5 = 0.95 \approx 1$

$s_6 = 0.98 \approx 1$ $\quad s_7 = 1.00$

⇨

$r_4 = \frac{4}{7} \rightarrow s_4 = \frac{6}{7}$

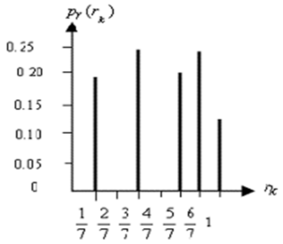
$r_5 = \frac{5}{7} \rightarrow s_5 = 1$

$r_6 = \frac{6}{7} \rightarrow s_6 = 1$

$r_7 = 1 \rightarrow s_7 = 1$

因为 r_0=0 经变换得 s_0= 1/7 ，所以有790个像素取 s_0 这个灰度值，r_1 映到 s_1，所以有1023个像素取 s_1=3/7 这一灰度值，以此类推，有850个像素取 s_2 =5/7 这一灰度值。

但是，因为 r_3 和 r_4 均映射到 s_3 = 6/7 这一灰度级，所以有656+329=985个像素取这个值。同样，有245+122+81=448个像素取 s_4 =1 这个新灰度值。用 n=4096来除上述这些 n_k 值便可得到新的直方图。新直方图如图3—6 (c)所示。



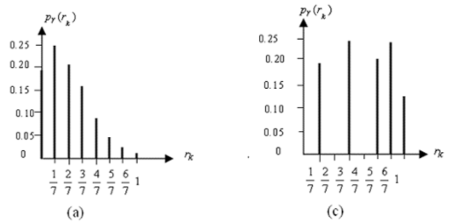


图3—6　直方图均衡化处理

由上面的例子可见，利用累积分布函数作为灰度变换函数，经变换后得到的新灰度的直方图虽然不很平坦，但毕竟比原始图像的直方图平坦得多，而且其动态范围也大大地扩展了。因此这种方法对于对比度较弱的图像进行处理是很有效的。

因为直方图是近似的概率密度函数，所以用离散灰度级作变换时很少能得到完全平坦的结果。另外，从上例中可以看出变换后的灰度级减少了，这种现象叫做“简并”现象。

$s_0 = 0.19 \approx \frac{1}{7}$　$s_1 = 0.44 \approx \frac{3}{7}$

$s_2 = 0.65 \approx \frac{5}{7}$　$s_3 = 0.81 \approx \frac{6}{7}$

$s_4 = 0.89 \approx \frac{6}{7}$　$s_5 = 0.95 \approx 1$

$s_6 = 0.98 \approx 1$　$s_7 = 1.00$

由于简并现象的存在，处理后的灰度级总是要减少的。这是像素灰度有限的必然结果。由于上述原因，数字图像的直方图均衡只是近似的。

那么如何减少简并现象呢？

产生简并现象的根源是利用变换公式 $s_k=\sum_{j=0}^{k}P_r(r_j)$ 求新灰度时，所得到的 s_k 往往不是允许的灰度值，这时就要采用舍入的方法求近似值，以便用与它最接近的允许灰度来代替它。

在舍入的过程中，一些相邻的 S_k 值变成了相同的 $s_k^{'}$ 值，这就发生了简并现象，于是也就造成了一些灰度层次的损失。

减少简并现象的简单方法是增加像素的比特数。比如，通常用8bit来代表一个像素，而现在用12bit来表示一个像素，这样就可减少简并现象发生的机会，从而减少灰度层次的损失。

直方图均衡化的一般实现方法采用如下几步：

1、统计原始图像的直方图，求出 $P_r(r_k)$ ；

2、用累积分布函数作变换 $s_k=\sum_{j=0}^{k}P_r(r_j)$ ，求变换后的新灰度；

3、用新灰度代替旧灰度，求出 $P_s(s_k)$，这一步是近似的，力求合理，同时把灰度相等的或相近的合在一起。