

数字图像处理

第4章 图像增强

信息科学研究所

3.1.4 直方图规定化处理

直方图均衡化处理方法是行之有效的增强方法之一，但是由于它的变换函数采用的是**累积分布函数**，它只能产生近似均匀的直方图这样一种结果。这样就必然会限制它的效能。

有时需要具有特定的直方图的图像，以便能够**对图像中的某些灰度级加以增强**。直方图规定化方法就是针对上述思想提出来的一种直方图修正增强方法。下面讨论直方图规定化的基本思想。

假设 $p_r(r)$ 是原始图像灰度分布的概率密度函数， $p_z(z)$ 是希望得到的图像的概率密度函数。如何建立 $p_r(r)$ 和 $p_z(z)$ 之间的联系是直方图规定化处理的关键。

$$p_r(r) \longleftrightarrow p_z(z)$$

所以，直方图规定化处理的关键思路是寻找一个 $p_r(r)$ 和 $p_z(z)$ 间的中介，在 $p_r(r)$ ， $p_z(z)$ 间搭建一座桥梁，建立 r 与 z 的关系。

首先对原始图像进行直方图均衡化处理，即：

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(\omega) d\omega \quad (3-20)$$

假定所希望的图像的概率密度函数是 $P_z(z)$ 。对这幅图像也作均衡化处理，即：

$$u = G(z) = \int_0^z p_z(\omega) d\omega \quad (3-21)$$

因为对于两幅图同样做了均衡化处理，所以 $p_s(s)$ 和 $p_u(u)$ 具有同样的均匀密度。其中式(3—21)的逆过程为

$$z = G^{-1}(u) \quad (3-22)$$

这样，如果用从原始图像中得到的均匀灰度级 s 来代替逆过程中的 u ，其结果灰度级将是所要求的概率密度函数 $P_z(z)$ 的灰度级。

$$\begin{aligned} z &= G^{-1}(u) \approx G^{-1}(s) \\ &\approx G^{-1}[T(r)] \end{aligned}$$

根据以上思路，可以总结出直方图规定化增强处理的步骤如下：

- (1)、用直方图均衡化方法将原始图像作均衡化处理；
- (2)、规定希望的灰度概率密度函数 $p_z(z)$ ，并用式(3—21)求得变换函数 $G(z)$ ；

(3)、将逆变换函数 $z \approx G^{-1}(s)$ 用到步骤(1)中所得到的灰度级。

(4)、 $z \approx G^{-1}[T(r)]$

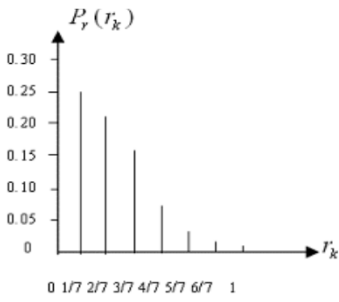
以上四步得到了原始图像的另一种处理方法。在这种处理方法中得到的新图像的灰度级具有事先规定的概率密度函数。

下面通过例子来说明处理过程。

这里仍用 64×64 像素的图像，其灰度级仍然是8级。其直方图如图3—7(a)所示，(b)是规定的直方图，(c)为变换函数，(d)为处理后的结果直方图。原始直方图和规定的直方图之数值分别列于表3—2和表3—3中，经过直方图均衡化处理后的直方图数值列于表3—4。

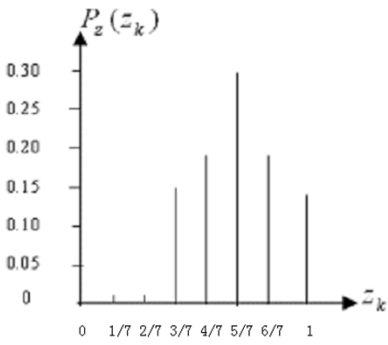
r_k	n_k	$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n}$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = \frac{1}{7}$	1023	0.25
$r_2 = \frac{2}{7}$	850	0.21
$r_3 = \frac{3}{7}$	656	0.16
$r_4 = \frac{4}{7}$	329	0.08
$r_5 = \frac{5}{7}$	245	0.06
$r_6 = \frac{6}{7}$	122	0.03
$r_7 = 1$	81	0.02

表3—2 原始直方图数据



z_k	$p_z(z_k)$
$z_0 = 0$	0.00
$z_1 = \frac{1}{7}$	0.00
$z_2 = \frac{2}{7}$	0.00
$z_3 = \frac{3}{7}$	0.15
$z_4 = \frac{4}{7}$	0.20
$z_5 = \frac{5}{7}$	0.30
$z_6 = \frac{6}{7}$	0.20
$z_7 = 1$	0.15

表3—3 规定的直方图数据



$r_j \rightarrow s_k$	n_k	$p_s(s_k)$
$r_0 \rightarrow s_0 = \frac{1}{7}$	790	0.19
$r_1 \rightarrow s_1 = \frac{3}{7}$	1023	0.25
$r_2 \rightarrow s_2 = \frac{5}{7}$	850	0.21
$r_3, r_4 \rightarrow s_3 = \frac{6}{7}$	985	0.24
$r_5, r_6, r_7 \rightarrow s_4 = 1$	448	0.11

表3—4 均衡化处理后的直方图数据

计算步骤如下：

- (1) 对原始图像进行直方图均衡化映射处理的数值列于表3—4的栏目内。
- (2) 利用式(3—21)计算变换函数。

$$u_k = G(z_k) = \sum_{j=0}^k p_z(z_j)$$

$$u_0 = G(z_0) = \sum_{j=0}^0 p_z(z_j) = p_z(z_0) = 0.00$$

$$u_1 = G(z_1) = \sum_{j=0}^1 p_z(z_j) = p_z(z_0) + p_z(z_1) = 0.00$$

$$u_2 = G(z_2) = \sum_{j=0}^2 p_z(z_j) = p_z(z_0) + p_z(z_1) + p_z(z_2) = 0.00$$

$$u_3 = G(z_3) = \sum_{j=0}^3 p_z(z_j) = p_z(z_0) + p_z(z_1) + p_z(z_2) + p_z(z_3) = 0.15$$

以此类推求得

$$u_4 = G(z_4) = 0.35$$

$$u_5 = G(z_5) = 0.65$$

$$u_6 = G(z_6) = 0.85$$

$$u_7 = G(z_7) = 1$$

(3) 用直方图均衡化中的 s_k 进行 G 的反变换求 z_k 。

$$z_k = G^{-1}(s_k)$$

这一步实际上是近似过程。也就是找出 s_k 与 $G(z_k)$ 的最接近的值。

$$u \approx s$$

例如: $s_0 = \frac{1}{7} \approx 0.14$

与它最接近的是 $G(z_3) = 0.15$, 所以可写成

$G^{-1}(0.15) = z_3$ 用这样方法可得到下列变换值。

$$\begin{array}{lll} s_0 = \frac{1}{7} \rightarrow z_3 = \frac{3}{7} & 790 \\ s_1 = \frac{3}{7} \rightarrow z_4 = \frac{4}{7} & 1023 \\ s_2 = \frac{5}{7} \rightarrow z_5 = \frac{5}{7} & 850 \\ s_3 = \frac{6}{7} \rightarrow z_6 = \frac{6}{7} & 985 \\ s_4 = 1 \rightarrow z_7 = 1 & 448 \end{array}$$

(4) 用 $z = G^{-1}[T(r)]$ 找出 r 与 z 的映射关系

$$\begin{aligned} r_0 = 0 & \rightarrow z_3 = \frac{3}{7} \\ r_1 = \frac{1}{7} & \rightarrow z_4 = \frac{4}{7} \\ r_2 = \frac{2}{7} & \rightarrow z_5 = \frac{5}{7} \\ r_3 = \frac{3}{7} & \rightarrow z_6 = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_4 = \frac{4}{7} & \rightarrow z_6 = \frac{6}{7} \\ r_5 = \frac{5}{7} & \rightarrow z_7 = 1 \\ r_6 = \frac{6}{7} & \rightarrow z_7 = 1 \\ r_7 = 1 & \rightarrow z_7 = 1 \end{aligned}$$

z_k	n_k	$P_k(z_k)$
$z_0 = 0$	0	0.00
$z_1 = \frac{1}{7}$	0	0.00
$z_2 = \frac{2}{7}$	0	0.00
$z_3 = \frac{3}{7}$	790	0.19
$z_4 = \frac{4}{7}$	1023	0.25
$z_5 = \frac{5}{7}$	850	0.21
$z_6 = \frac{6}{7}$	985	0.24
$z_7 = 1$	448	0.11

表3—5 结果直方图数据

(5) 根据这样的映射重新分配像素，并用 $n=4096$ 去除，可得到最后的直方图。

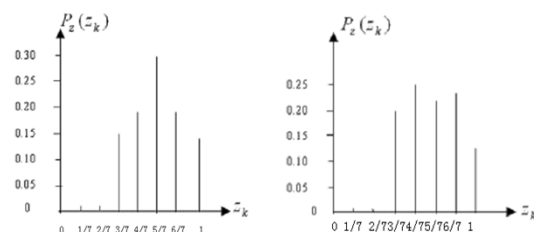


图4—7 直方图规定化处理方法

由图3—7可见，结果直方图并不很接近希望的形状，与直方图均衡化的情况一样，这种误差是多次近似造成的。只有在连续的情况下，求得准确的反变换函数才能得到准确的结果。

在灰度级减少时，规定的和最后得到的直方图之间的误差趋向于增加。但是实际处理效果表明，尽管是一种近似的直方图也可以得到较明显的增强效果。

利用直方图规定化方法进行图像增强的主要困难在于如何构成有意义的直方图。

一般有两种方法，一种是给定一个规定的概率密度函数，如高斯，瑞利等函数。一些常用的直方图修正转换函数列于表3—6中。

表3—6 直方图修正转换函数

	规定的概率密度模型	转换函数
均匀	$p_z(z) = \frac{1}{r_{\max} - r_{\min}}$ $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$	$r = [r_{\max} - r_{\min}]p_r(r) + r_{\min}$
指数	$p_z(z) = a \exp\{-a(r - r_{\min})\}$ $r \geq r_{\min}$	$r = r_{\min} - \frac{1}{a} \ln[1 - p_r(r)]$
雷利	$p_z(z) = \frac{r - r_{\min}}{a^2} \exp\left\{-\frac{(r - r_{\min})^2}{2a^2}\right\}$ $r \geq r_{\min}$	$r = r_{\min} + \left[2a^2 \ln\left(\frac{1}{1 - p_r(r)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$
双曲线 (立方根)	$p_z(z) = \frac{1}{3} \frac{r^{\frac{2}{3}}}{r_{\max}^{\frac{1}{3}} - r_{\min}^{\frac{1}{3}}}$	$r = \left[\left(r_{\max}^{\frac{1}{3}} - r_{\min}^{\frac{1}{3}} \right) p_r(r) + r_{\min}^{\frac{1}{3}} \right]^3$
双曲线 (对数)	$p_z(z) = \frac{1}{r[\ln r_{\max} - \ln r_{\min}]}$	$r = r_{\min} \left[\frac{r_{\max}}{r_{\min}} \right]^{p_r(r)}$

另一种方法是规定一个任意可控制的直方图，其形状可由一些直线所组成，得到希望的形状后，将这个函数数字化。这种方法如图3—9所示。

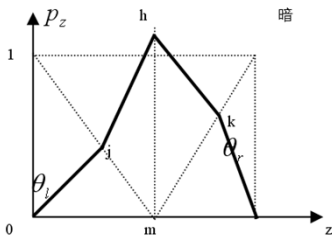


图3—9 直方图参量规定化法

3.1.5 图像对比度处理

由于图像的亮度范围不足或非线性会使图像的对比度不理想，可用像素幅值重新分配的方法来改善图像对比度。

扩大图像的亮度范围可以用线性映射的方法，这种方法如图所示。由图可以看出原图像的范围较小，经映射后的图像亮度范围展宽了。

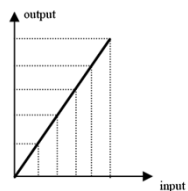


图3—10 数字图像对比度增强

在对比度处理法中，根据不同的目的可以设计出不同的转换函数。图3—11是线性转换函数，这种函数将图像在整个灰度范围内作线性映射。

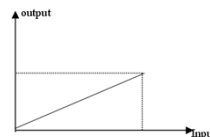


图3—11 图像灰度的线性映射变换

另外一种映射转换函数如图3—12所示。这种转换是将图像中两个极端的灰度值加以限幅，这种限幅的比例也是可以选择的。

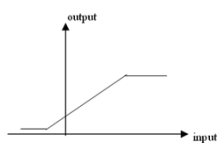


图3—12 限幅的线性映射变换

除此之外，为了不同的目的还有其他一些类型的转换函数。这些转换函数的形式如图3—13(a)、(b)、(c)所示。

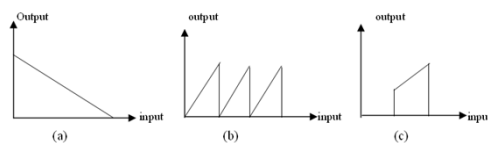


图3—13 其他一些转换函数

灰度变换的效果如图3—14 (a) (b) 所示，其中 (a) 是原像，(b) 是处理后的图像。

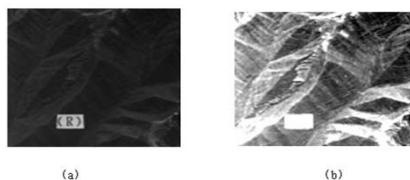
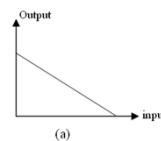


图 3—14 灰度变换处理效果

灰度反转的转换函数是把图像的低亮度区域转到较高的亮度区，而高亮度区转换为低亮度区，其效果如图3—15所示，其中(a)是原像，(b)是处理后的图像。



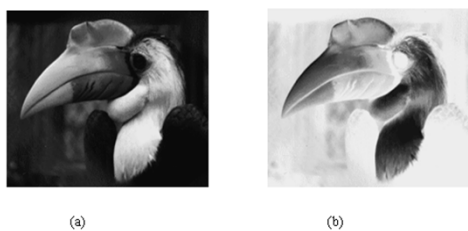
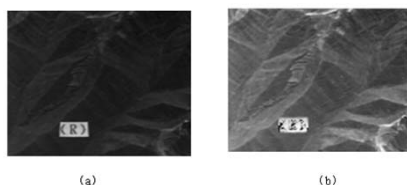
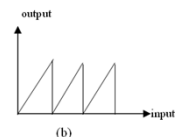
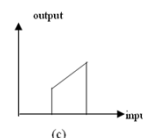


图 3—15 灰度反转处理效果

锯齿形转换可以把几段较窄的输入灰度区间都扩展到整个输出灰度范围内，这种处理可以把灰度变化较平缓的区域也较鲜明地显示出来。其效果如图3—16所示，其中(a)是原像，(b)是处理后的图像，这里选 $n=2$ 。

图 3—16 锯齿状变换函数处理效果 ($n=2$)

开窗式转换的目的是只对部分输入灰度区间进行转换，通过窗口位置的选择可以观察某些灰度区间的灰度分布，并且对这一区域的灰度进行映射变换。



经开窗式转换函数处理的图像效果如图3—17所示，图(a)是原像 (b)是处理后的图像。

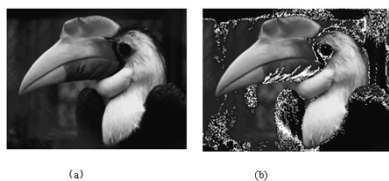


图 3—17 经开窗变换函数处理的效果

利用直方图修正技术增强图像简便而有效。直方图均衡化处理可大大改善图像灰度的动态范围，利用直方图规定化方法能得到更加符合需要的结果，通过对比度转换函数的正确设计可以方便灵活地改善图像。

3.2 图像平滑化处理

一幅图像可能存在着各种寄生效应。这些寄生效应可能在传输中产生，也可能在量化等处理过程中产生。一个较好的平滑方法应该是既能消掉这些寄生效应又不使图像的边缘轮廓和线条变模糊。这就是研究图像平滑化处理要追求的主要目标。

图像平滑化处理方法有空域法和频域法两大类。

主要有：

邻域平均法

低通滤波法

多图像平均法

等

3.2.1 邻域平均法

邻域平均法是简单的空域处理方法。这种方法的基本思想是用几个像素灰度的平均值来代替每个像素的灰度。假定有一幅 $N \times N$ 个像素的图像 $f(x,y)$ ，平滑处理后得到一幅图像 $g(x,y)$ ，由下式决定

$$g(x,y) = \frac{1}{M} \sum_{(m,n) \in S} f(m,n) \quad (3-23)$$

$$x, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

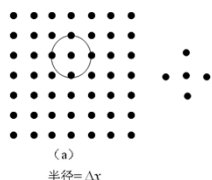
式中， S 是 (x,y) 点邻域中点的坐标的集合，但其中不包括 (x,y) 点， M 是集合内坐标点的总数。

式(3—23)说明，平滑化的图像 $g(x,y)$ 中的每个像素的灰度值均由包含在 (x,y) 的预定邻域中的 $f(x,y)$ 的几个像素的灰度值的平均值来决定。

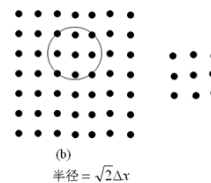
例如，可以以点 (x,y) 为中心，取单位距离构成一个邻域，其中点的坐标集合为：

$$S = \{(x, y+1), (x, y-1), (x+1, y), (x-1, y)\}$$

图(a)的方法是一个点的邻域，定义为以该点为中心的圆的内部或边界上的点的集合。图中像素间的距离为 Δx ，选取 Δx 为半径作圆，那么，点 R 的灰度值就是圆周上四个像素灰度值的平均值。



图(b)是选 $\sqrt{2}\Delta x$ 为半径的情况下构成的点 R 的邻域，选择在圆的边界上的点和在圆内的点为 S 的集合。



四邻域:

$$S = \{(x, y+1), (x, y-1), (x+1, y), (x-1, y)\}$$

八邻域:

$$S = \{(x, y+1), (x, y-1), (x+1, y), (x-1, y), (x-1, y-1), (x-1, y+1), (x+1, y-1), (x+1, y+1)\}$$

处理结果表明，上述选择邻域的方法对抑制噪声是有效的，但是随着邻域的加大，图像的模糊程度也愈加严重。为克服这一缺点，可以采用阈值法减少由于邻域平均所产生的模糊效应。

其基本方法由下式决定:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{(m,n) \in S} f(m, n) & \text{若 } \left| f(x, y) - \frac{1}{M} \sum_{(m,n) \in S} f(m, n) \right| > T \\ f(x, y) & \text{其他} \end{cases} \quad (3-24)$$

式中 T 就是规定的非负的阈值。这个表达式的物理概念是：当一些点和它的邻域内的点的灰度的平均值的差不超过规定的阈值 T 时，就仍然保留其原灰度值不变，如果大于阈值 T 时就用它们的平均值来代替该点的灰度值。这样就可以大大减少模糊的程度。

实现方法:

以(a)或(b)作模板, 扫描全部图像, 即可完成平滑处理。

边缘处理:

- 1)、在原图像上补上行和列, 再处理;
- 2)、处理后重复一下边缘行或列的结果。

3.2.2 低通滤波法

这种方法是一种**频域处理法**。在分析图像信号的频率特性时, 一幅图像的边缘、跳跃部分以及颗粒噪声代表图像信号的高频分量, 而大面积的背景区则代表图像信号的低频分量。用滤波的方法滤除其高频部分就能去掉噪声, 使图像得到平滑。

由卷积定理可知

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) \quad (3-25)$$

其中: $F(u, v)$ 是含有噪声的图像的傅立叶变换;

$G(u, v)$ 是平滑处理后的图像之傅立叶变换;

$H(u, v)$ 是传递函数。

选择传递函数 $H(u, v)$, 利用 $H(u, v)$ 使 $F(u, v)$ 的高频分量得到衰减, 得到 $G(u, v)$, 后再经反傅立叶变换就可以得到所希望的平滑图像 $g(x, y)$ 了。

根据前面的分析, 显然 $H(u, v)$ 应该具有低通滤波特性, 所以这种方法叫**低通滤波法平滑化处理**。低通滤波平滑化处理流程如图3—20所示。

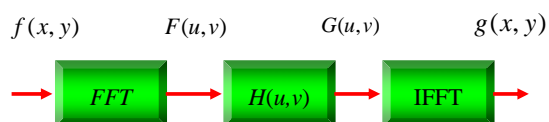


图3—20 线性滤波器处理框图

$$G(u, v) = H(u, v) \bullet F(u, v)$$

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[G(u, v)]$$

常用的低通滤波器有如下几种：

- 理想低通滤波器
- 布特沃斯（Butterworth）低通滤波器
- 指数低通滤波器
- 梯形低通滤波器

➤ 理想低通滤波器

一个理想的二维低通滤波器的传递函数由下式表示：

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (4-26)$$

式中 D_0 是一个规定的非负的量，叫做理想低通滤波器的截止频率。 $D(u, v)$ 是从频率域的原点到 (u, v) 点的距离，即

$$D(u, v) = [u^2 + v^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3-27)$$

$H(u, v)$ 对 (u, v) 来说是一幅三维图形。 $H(u, v)$ 的剖面图如图所示。将剖面图绕纵轴旋转 360° 就可以得到整个滤波器的传递函数。

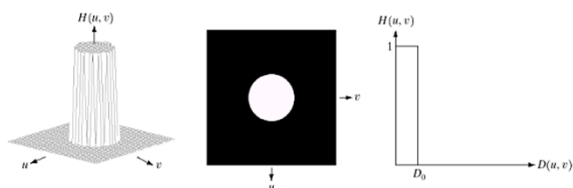
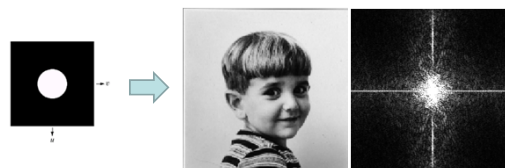


图3—21 理想低通滤波器剖面图

所谓理想低通滤波器是指以截频 D_0 为半径的圆内的所有频率都能无损地通过，而在截频之外的频率分量完全被衰减。**理想低通滤波器可以用计算机模拟实现，但是不能用电子元器件来实现。**



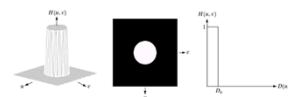
理想低通滤波器平滑处理的概念是清晰的，但在处理过程中会产生较严重的模糊和振铃现象。这种现象是由于傅立叶变换的性质决定的。因为滤波过程是由式（3—28）描述的，由卷积定理可知在空域中则是一种卷积关系，即：

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) \quad (3-28)$$

式中 $f(x, y)$ ， $g(x, y)$ ， $h(x, y)$ 分别是， $F(u, v)$ ， $G(u, v)$ ， $H(u, v)$ 的傅里叶反变换。

既然 $H(u, v)$ 是理想的矩形特性，那么它的反变换 $h(x, y)$ 的特性必然会产生无限的振铃特性。经与 $f(x, y)$ 卷积后则给 $g(x, y)$ 带来模糊和振铃现象， D_0 越小这种现象越严重，当然，其平滑效果也就较差。这是理想低通不可克服的弱点。

由卷积定理可知，频率域下的理想低通滤波器 $H(u, v)$ 存在一个空域下与之对应的函数 $h(x, y)$ ，且可通过对 $H(u, v)$ 作傅里叶逆变换求得。产生振铃效应的原因在于，理想低通滤波器在频率域下的分布线性（在 D_0 处呈现一条垂直线，在其他频率处呈现一条水平线）



不难想象出对应 $h(x, y)$ 有类似于 \sin 函数那样周期震荡的空间分布特性。正是由于理想低通滤波器的空间域表示有类似于 \sin 函数的形状，位于正中央的突起使得理想低通滤波器有模糊图像的功能，而外层的其他突起则导致理想低通滤波器会产生振铃效应。



FIGURE 4.42 (a) Original image. (b)-(f) Results of filtering using ILPF, with cutoff frequencies set at radii values 10, 20, 40, 100, and 400, as shown in Fig. 4.41(b). The power removed by these filters was 13, 6.9, 4.3, 2.2, and 0.0% of the total, respectively.

➤ 布特沃斯 (Butterworth) 低通滤波器

一个 n 阶布特沃斯低通滤波器的传递函数由下式表示

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}} \quad (3-29)$$

式中 D_0 为截止频率, $D(u, v)$ 的值由下式决定

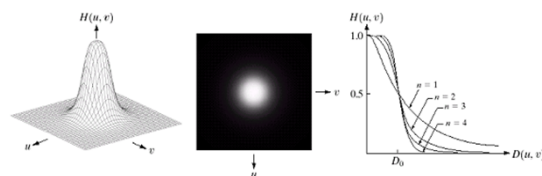
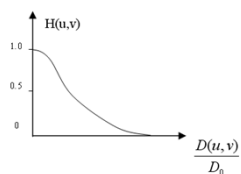
$$D(u, v) = [u^2 + v^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3-30)$$

布特沃斯低通滤波器又称**最大平坦滤波器**。它的通带与阻带之间没有明显的不连续性。也就是说, 在通带和阻带之间有一个平滑的过渡带。通常把 $H(u, v)$ 下降到某一值的那一点定为截止频率 D_0 。在式 (3—29) 中是把 $H(u, v)$ 下降到原来值的 $1/2$ 时的 $D(u, v)$ 定为截频点 D_0 。

一般情况下常常采用下降到 $H(u, v)$ 最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 那一点为截止频点。这样, 式(4—27)可修改为式 (3—31) 的形式

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1] \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}} \quad (3-31)$$

布特沃斯低通滤波器 $H(u, v)$ 的剖面图如图所示。与理想低通滤波器的处理结果相比, 经布特沃斯滤波器处理过的图像模糊程度会大大减少。因为它的 $H(u, v)$ 不是陡峭的截止特性, 它的尾部会包含有大量的成分。



布特沃斯低通滤波器的特点：

- 1)、由于有平缓的过渡带，图像将不会有振铃现象。
- 2)、模糊程度大大减小。

➤ 指数低通滤波器

在图像处理中常用的另一种平滑滤波器是指数低通滤波器。它的传递函数如下式表示

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D(u, v)}{D_0}\right]^n} \quad (3-32)$$

式中 D_0 为截频， $D(u, v)$ 由下式决定

$$D(u, v) = \left[u^2 + v^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-33)$$

式中的 n 是决定衰减率的系数。从式 (3-32) 可见，如果 $D(u, v) = D_0$ 则

$$H(u, v) = \frac{1}{e} \quad (3-34)$$

如果仍然把截止频率定在 $H(u, v)$ 最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处，那么，公式可作如下修改

$$\begin{aligned} H(u, v) &= e^{-\left[\ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \left[\frac{D(u, v)}{D_0}\right]^n} \\ &= e^{-0.347 \left[\frac{D(u, v)}{D_0}\right]^n} \end{aligned}$$

指数低通滤波器有更快的衰减率，所以，经指数低通滤波的图像比布特沃斯低通滤波器处理的图像稍模糊一些。由于指数低通滤波器的传递函数也有较平滑的过渡带，所以图像中也没有振铃现象。

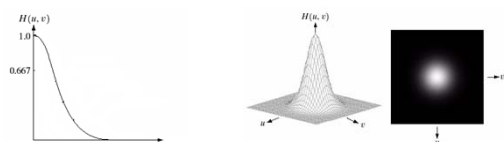
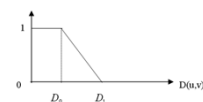


图3—23 指数低通滤波器传递函数径向剖面图

► 梯形低通滤波器



梯形低通滤波器传递函数的形状介于理想低通滤波器和具有平滑过渡带的低通滤波器之间。它的传递函数由下式表示

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) < D_0 \\ \frac{1}{[D_0 - D_1]} [D(u,v) - D_1] & D_0 \leq D(u,v) \leq D_1 \\ 0 & D(u,v) > D_1 \end{cases}$$

(3—35)

其中 $D(u,v)=[u^2+v^2]^{1/2}$ ，在规定 D_0 和 D_1 时要满足 $D_0 < D_1$ 的条件。一般为了方便，把传递函数的第一个转折点 D_0 定义为截止频率；第二个变量 D_1 可以任意选取只要 D_1 大于 D_0 就可以。

由于梯形滤波器的传递函数特性介于理想低通滤波器和具有平滑过渡带滤波器之间，所以其处理效果也介于其两者中间。梯形滤波法的结果有一定的振铃现象。

用低通滤波器进行平滑处理可以使噪声伪轮廓等寄生效应减低到不显眼的程度，但是由于低通滤波器对噪声等寄生成分滤除的同时，对有用高频成分也滤除，因此，这种去噪的处理是以牺牲清晰度为代价的。

3.2.3 多图像平均法

如果一幅图像包含有加性噪声，这些噪声对于每个坐标点是不相关的，并且其平均值为零，在这种情况下就可能采用多图像平均法来达到去掉噪声的目的。

设 $g(x,y)$ 为有噪声图像， $n(x,y)$ 为噪声， $f(x,y)$ 为原始图像，可用下式表示：

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y) \quad (3-36)$$

多图像平均法是把一系列有噪声的图像 $\{g_j(x, y)\}$ 迭加起来, 然后再取平均值以达到平滑的目的。

具体做法如下:

取 M 幅内容相同但含有不同噪声的图像, 将它们迭加起来, 然后作平均计算, 如下式所示

$$\bar{g}(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M g_j(x, y) \quad (3-37)$$

由此得出

$$E\{\bar{g}(x, y)\} = f(x, y) \quad (3-38)$$

$$\sigma_{\bar{g}(x, y)}^2 = \frac{1}{M} \sigma_{n(x, y)}^2 \quad (3-39)$$

式中 $E\{\bar{g}(x, y)\}$ 是 $\bar{g}(x, y)$ 的数学期望, $\sigma_{\bar{g}(x, y)}^2$ 和 $\sigma_{n(x, y)}^2$ 是 \bar{g} 和 n 在 (x, y) 坐标上的方差。在平均图像中任一点的均方差可由下式得到

$$\sigma_{\bar{g}(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sigma_{n(x, y)} \quad (3-40)$$

由上二式可见, M 增加则像素值的方差就减小, 这说明由于平均的结果使得由噪声造成的像素灰度值的偏差变小。当作平均处理的噪声图像数目增加时, 其统计平均值就越接近原始无噪声图像。

这种方法在实际应用中的最大困难在于把多幅图像配准起来, 以便使相应的像素能正确地对应排列。

图3—25 示出了图像平滑处理的效果，其中（a）是待处理图像，（b）是处理后的图像。



图 3—25 图像平滑处理效果

3.3 图像尖锐化处理(Image Sharpening)

图像尖锐化处理主要用于增强图像的边缘及灰度跳变部分。通常所讲的勾边增强方法就是图像尖锐化处理。与图像平滑化处理一样，图像尖锐化处理同样也有空域和频域两种处理方法。

3.3.1 微分尖锐化处理

在图像平滑化处理中，主要的空域处理法是采用邻域平均法，这种方法类似于积分过程，积分的结果使图像的边缘变得模糊了。积分既然使图像细节变模糊，那么，微分就会产生相反的效应。因此，微分法是图像尖锐化方法之一。

微分尖锐化的处理方法最常用的是**梯度法**。由场论理论知道，数量场的梯度是这样定义的：

设一数量场 u ， $u=u(x,y,z)$ ，把大小是在某一点方向导数的最大值，方向是取得方向导数最大值的方向的**矢量**叫数量场的梯度。

$$\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

由这个定义出发，如果给定一个函数 $f(x,y)$ ，在坐标 (x,y) 上的梯度可定义为一个矢量

$$\text{grad}[f(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

由梯度的定义可知它有两个特点：

(1) 矢量 $grad[f(x,y)]$ 是指向 $f(x,y)$ 最大增加率的方向；

(2) 如果 $G[f(x,y)]$ 用来表示 $grad[f(x,y)]$ 的幅度，

$$\begin{aligned} \text{那么 } G[f(x,y)] &= \max\{grad[f(x,y)]\} \\ &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

这就是说 $G[f(x,y)]$ 等于在 $grad[f(x,y)]$ 的方向上每单位距离 $f(x,y)$ 的最大增加率。显然，式(3—42)是一个标量函数，并且 $G[f(x,y)]$ 永远是正值。因此，在后续讨论中将笼统地称“梯度的模”为梯度。

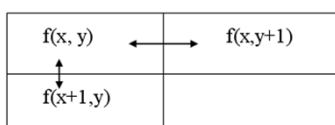
在数字图像处理中，仍然要采用离散形式，为此用差分运算代替微分运算。式(3—42)可用下面的差分公式来近似

$$\begin{aligned} G[f(x,y)] &\approx \{ [f(x,y) - f(x+1,y)]^2 \\ &\quad + [f(x,y) - f(x,y+1)]^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4-43)$$

在用计算机计算梯度时，通常用绝对值运算代替式(3—43)，所以，近似公式

$$G[f(x,y)] \approx |f(x,y) - f(x+1,y)| + |f(x,y) - f(x,y+1)| \quad (4-44)$$

图3—26示出了式(4—44)中像素间的关系。应该注意到，对一幅 $N \times N$ 个像素的图像计算梯度时，对图像的最后一行，或者最后一列不能用式(3—44)来求解，解决方法是对这个区域的像素在 $x=N$, $y=N$ 时重复前一行和前一列的梯度值。



关于梯度处理的另一种方法是所谓的罗伯特梯度(Robert gradient)法。这是一种交叉差分法。其近似计算值如下式

$$\begin{aligned} G[f(x,y)] &\approx \{ [f(x,y) - f(x+1,y+1)]^2 \\ &\quad + [f(x+1,y) - f(x,y+1)]^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4-45)$$

用绝对值近似计算式如下

$$G[f(x, y)] \approx |f(x, y) - f(x+1, y+1)| + |f(x+1, y) - f(x, y+1)| \quad (4-46)$$

式(4—45)和(4—46)式中像素间的关系如图3—27所示

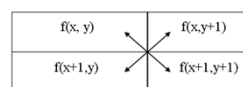


图3—27 罗伯特梯度法

由上面的公式可见，梯度的近似值都和相邻像素的灰度差成正比。这正象所希望的那样，在一幅图像中，边缘区梯度值较大，平滑区梯度值较小，对于灰度级为常数的区域梯度值为零。由于梯度运算的结果，使得二值化的图像中不变的白区变为零灰度值，黑区仍为零灰度值，只留下了灰度值急剧变化的边沿处的点。



图3—28 二值图像及计算梯度的结果

当选定了近似梯度计算方法后，可以有多种方法产生梯度图像 $g(x, y)$ 。最简单的方法是让坐标 (x, y) 处的值等于该点的梯度，即

$$g(x, y) = G[f(x, y)] \quad (3-47)$$

缺点是使 $f(x, y)$ 中所有平滑区域在 $g(x, y)$ 中变成暗区，因为平滑区内各点梯度很小。

为克服这一缺点可采用阈值法（或叫门限法）。其方法如下式表示

$$g(x, y) = \begin{cases} G[f(x, y)] & \text{若 } G[f(x, y)] \geq T \\ f(x, y) & \text{其他} \end{cases} \quad (3-48)$$

也就是说，事先设定一个非负的门限值 T ，当梯度值大于或等于 T 时，

则这一点就取其梯度值作为灰度值，如果梯度值小于 T 时则仍保留原 $f(x,y)$ 值。这样，通过合理地选择 T 值，就有可能既不破坏平滑区域的灰度值又能有效地强调了图像的边缘。

基于上述思路的另一种作法是给边缘处的像素值规定一个特定的灰度级 L_G ，即

$$g(x, y) = \begin{cases} L_G & \text{若 } G[f(x, y)] \geq T \\ f(x, y) & \text{其它} \end{cases}$$

(3—49)

这种处理会使图像边缘的增强效果更加明显。

当只研究图像边缘灰度级变化时，要求不受背景的影响，则用下式来构成梯度图像

$$g(x, y) = \begin{cases} G[f(x, y)] & \text{若 } G[f(x, y)] \geq T \\ L_B & \text{其它} \end{cases}$$

(3—50)

式中 L_B 是规定的背景灰度值。

另外，如果只对边缘的位置感兴趣，则可采用下式的规定产生图像。

$$g(x, y) = \begin{cases} L_G & \text{若 } G[f(x, y)] \geq T \\ L_B & \text{其它} \end{cases}$$

(3—51)

计算方法框图如图3—25所示。

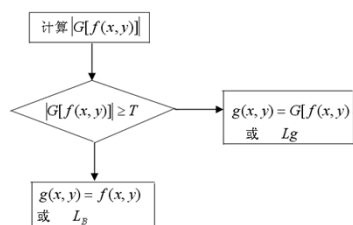


图3—25 梯度法尖锐化处理计算框图

典型的边缘增强图像如图3—26所示。

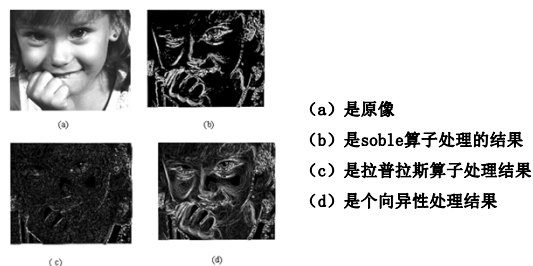


图 3—26 图像尖锐化处理的例子