第 19 卷 第 5 期
2018 年 9 月

北华大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF BEIHUA UNIVERSITY(Natural Science)

Vol. 19 No. 5
Sep. 2018

文章编号: 1009-4822(2018)05-0575-07

DOI: 10.11713/j.issn.1009-4822.2018.05.003

一类随机海洛因毒品传播模型的全局分析

王诗雪,刘俊利

(西安工程大学理学院,陕西 西安 710048)

摘要: 研究了一类接触率受到白噪声干扰的海洛因毒品传播随机模型,证明了该模型正解的全局存在唯一性. 当基本再生数 $R_0<1$ 时,证明了随机模型无海洛因传播平衡点的随机渐近稳定性. 当 $R_0>1$ 时,讨论了随机模型的解会围绕确定性模型的海洛因传播平衡点振荡,进而证明了随机模型的解是平均持续的.

关键词: 随机模型; Lyapunov 函数; 平均持续

中图分类号: O211.63　　文献标志码: A

Global Analysis of a Stochastic Heroin Epidemic Model

Wang Shixue, Liu Junli

(School of Science, Xi' an Polytechnic University, Xi' an 710048, China)

Abstract: A stochastic heroin epidemic model was analyzed, considering that the contact rate is influenced by environmental noise. By constructing Lyapunov functions and Itô formula, the existence of global positive solution was obtained. The stochastic asymptotical stability of the drug-free equilibrium point was proved that is if $R_0<1$. And if $R_0>1$, the solution of the stochastic model is oscillating around the drug spread equilibrium of the deterministic model. Furthermore, the sufficient conditions of persistence in the mean was proved.

Key words: stochastic model; Lyapunov function; oscillating behavior

1 引　　言

近几十年来,全世界药物滥用人数持续增加,其中,常见滥用药物中尤以海洛因的危害性最高[1],表现为用药人数最多、复吸率高[2]、对身体伤害最大,且与犯罪行为高度相关. 因此,针对海洛因毒品传播进行研究具有现实意义.

2007 年,White 和 Comiskey 利用传染病动力学中的仓室建模思想,把传染病模型扩展并应用于吸毒人群的研究中,建立了第一个海洛因毒品传播的常微分方程数学模型[3]. 许多学者基于文献[3]中的模型做了进一步的研究工作[4-8]. 如文献[4]得到了模型平衡点的存在性以及局部渐近稳定性; 文献[5]考虑到海洛因毒品传播现象与季节因素有关,建立了具有分布时滞的非自治海洛因毒品传播模型; 文献[6]考虑易感人群年龄的分布情况,建立了易感性与年龄相关的海洛因毒品传播模型; 文献[7]假设处于戒毒治疗阶段的海洛因滥用者对易感者不具有传染性,建立具有复吸现象的海洛因毒品传播的常微分方程模型.

注意到以上的研究工作大多是确定性模型,由于传染病模型会受到外部环境的随机干扰,仅对确定性

收稿日期: 2018-05-16
基金项目: 陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2014JQ1038); 陕西省教育厅专项科研计划项目(16JK1331).
作者简介: 王诗雪(1993-),女,硕士研究生,主要从事传染病动力学研究,E-mail: 296872749@qq.com; 通信作者: 刘俊利(1981-),女,博士,副教授,硕士生导师,主要从事传染病动力学研究,E-mail: jlliu2008@126.com.

模型进行研究是不够的. 因此,有必要对随机因素影响下的随机传染病模型进行研究. 本文在文献[7]模型的基础上进一步考虑环境随机因素,建立了一类接触率受到白噪声干扰的海洛因毒品传播随机模型,并通过对该随机模型的研究来揭示环境因素对海洛因传播的影响.

2 数学模型

设 $S(t)$, $U_1(t)$, $U_2(t)$ 分别表示 t 时刻总人群中易感个体的数量,未接受治疗的海洛因吸食者和接受治疗的海洛因吸食者的个体数量. 文献[7]提出了下面的确定性海洛因毒品传播模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=\Lambda-\beta S(t)U_1(t)-\mu S(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}U_1(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)U_1(t)+kU_2(t)-(p+\mu+\delta_1)U_1(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}U_2(t)}{\mathrm{d}t}=pU_1(t)-(k+\mu+\delta_2)U_2(t),\end{cases}\tag{1}$$

其中: Λ 表示由普通人群转化为对海洛因具有易感性的个体数量; β 表示一个易感者被海洛因吸食者感染成为新的海洛因吸食者的概率,即接触率; p 表示海洛因吸食者进入戒毒治疗的比率; k 表示海洛因吸食者停止戒毒治疗再次复吸的概率; μ 表示自然死亡率; δ_1, δ_2 分别表示未接受治疗的海洛因吸食者和接受治疗的海洛因吸食者的移出率. 假定所有参数均是非负常数.

对于模型(1),文献[7]给出了以下结论:

(a) 集合 $D=\left\{(S,U_1,U_2)\in\mathbb{R}_+^3 \,\middle|\, 0\leqslant S+U_1+U_2\leqslant\dfrac{\Lambda}{\mu}\right\}$ 是模型(1)的正向不变集.

(b) 该模型的基本再生数为 $R_0=\dfrac{\beta\frac{\Lambda}{\mu}}{p+\mu+\delta_1}+\dfrac{pk}{(p+\mu+\delta_1)(k+\mu+\delta_2)}$.

(c) 当 $R_0\leqslant 1$ 时,无海洛因传播平衡点 $E^0=\left(\dfrac{\Lambda}{\mu},0,0\right)$ 全局渐近稳定.

(d) 当 $R_0>1$ 时,无海洛因传播平衡点不稳定,模型(1)存在唯一的海洛因传播平衡点 $E^*(S^*,U_1^*,U_2^*)$ 且全局渐近稳定,其中:

$$S^*=\frac{\Lambda}{\beta U_1^*+\mu},\quad U_2^*=\frac{pU_1^*}{k+\mu+\delta_2},$$

$$U_1^*=\frac{\mu}{\beta}\cdot\frac{(p+\mu+\delta_1)(k+\mu+\delta_2)}{p(\mu+\delta_2)+(\mu+\delta_1)(k+\mu+\delta_2)}\cdot(R_0-1).$$

由于任何传染病模型都会不可避免地受到外部环境的随机干扰,与相应的确定性模型相比,在随机因素影响下的随机模型更具有现实意义,而且在毒品传播过程中,接触率往往更容易受到环境噪声的影响. 因此,为了更好地预测和描述海洛因传播的动力学行为,本文考虑模型(1)中参数 β 受到白噪声干扰的情形,即

$$\beta\to\beta+\sigma\dot{B}(t),$$

其中 $B(t)$ 是标准布朗运动, σ 代表噪声强度. 此时,可建立如下随机模型:

$$\begin{cases}\mathrm{d}S=(\Lambda-\beta SU_1-\mu S)\mathrm{d}t-\sigma SU_1\mathrm{d}B,\\ \mathrm{d}U_1=(\beta SU_1+kU_2-(p+\mu+\delta_1)U_1)\mathrm{d}t+\sigma SU_1\mathrm{d}B,\\ \mathrm{d}U_2=(pU_1-(k+\mu+\delta_2)U_2)\mathrm{d}t.\end{cases}\tag{2}$$

显然, $E^0=\left(\dfrac{\Lambda}{\mu},0,0\right)$ 是随机模型(2)的无海洛因传播平衡点,但是该模型不存在海洛因传播平衡点.

3　正解的全局存在唯一性

定理 1　对任意给定的初值 $(S^0, U_1^0, U_2^0) \in D$，模型(2)存在唯一解 $(S(t), U_1(t), U_2(t))$ $(t \geqslant 0)$，且该解以概率 1 位于 D 中，即 $(S(t), U_1(t), U_2(t)) \in D, t \geqslant 0$ a.s..

证明：显然随机模型(2)满足局部 Lipschitz 条件，故对于任意给定的初值 $(S^0, U_1^0, U_2^0) \in \mathbb{R}_+^3$，存在唯一的局部解 $(S(t), U_1(t), U_2(t)) \in \mathbb{R}_+^3, t \in [0, \tau_e)$，其中 τ_e 为爆破时间[8]. 要证明解的全局存在性，只需证明 $\tau_e = \infty$，a.s.

设 $\eta_0 > 0$ 且满足 $S^0 > \eta_0, U_1^0 > \eta_0, U_2^0 > \eta_0$. 对任意 $\eta \leqslant \eta_0 (\eta > 0)$，定义停时

$$\tau_\eta = \inf\{t \in [0, \tau_e): S(t) \leqslant \eta, U_1(t) \leqslant \eta, U_2(t) \leqslant \eta\}.$$

令 $\inf\varnothing = \infty$（$\varnothing$ 表示空集）. 由停时的定义可知，当 $\eta \to 0$ 时，τ_η 单调递增. 令 $\tau_0 = \lim_{\eta \to 0} \tau_\eta$，显然 $\tau_0 \leqslant \tau_e$. 因此要证 $\tau_e = \infty$，只需证明 $\tau_0 = \infty$. 否则，存在常数 $T > 0$ 和 $\delta \in (0,1)$ 使得 $P\{\tau_0 \leqslant T\} > \delta$，即存在 $\eta_1 \in (0, \eta_0)$，使得当 $\eta \in (0, \eta_1)$ 时有 $P\{\tau_\eta \leqslant T\} > \delta$.

另外，由模型(2)可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(S + U_1 + U_2) &= (\Lambda - \mu(S + U_1 + U_2) - \delta_1 U_1 - \delta_2 U_2)\,\mathrm{d}t \leqslant \\ &(\Lambda - \mu(S + U_1 + U_2))\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

设 $X(t)$ 是如下方程的解

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = (\Lambda - \mu X(t))\,\mathrm{d}t, \\ X^0 = S^0 + U_1^0 + U_2^0. \end{cases}$$

由比较定理得

$$S(t) + U_1(t) + U_2(t) \leqslant X(t) \leqslant \max\left\{S^0 + U_1^0 + U_2^0, \frac{\Lambda}{\mu}\right\} = C, \quad t \in [0, \tau_e).$$

定义函数

$$V(S, U_1, U_2) = -\ln\frac{S}{C} - \ln\frac{U_1}{C} - \ln\frac{U_2}{C},$$

则 V 显然正定，由 Itô 公式得

$$\mathrm{d}V = LV\mathrm{d}t + \sigma(U_1 - S)\,\mathrm{d}B,$$

其中

$$LV = -\frac{\Lambda}{S} + \beta(U_1 - S) - k\frac{U_2}{U_1} - p\frac{U_1}{U_2} + 3\mu + p + k + \delta_1 + \delta_2 + \frac{\sigma^2(S^2 - U_1^2)}{2}.$$

令

$$K = 3\mu + p + k + \delta_1 + \delta_2 + \beta C + \frac{\sigma^2 C^2}{2},$$

则

$$\mathrm{d}V \leqslant K\mathrm{d}t + \sigma(U_1 - S)\,\mathrm{d}B.$$

对上式两端从 0 到 $\tau_\eta \wedge T$ 积分，并取期望得

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(V(S(\tau_\eta \wedge T), U_1(\tau_\eta \wedge T), U_2(\tau_\eta \wedge T))) \leqslant \\ &V(S^0, U_1^0, U_2^0) + K\mathrm{E}(\tau_\eta \wedge T) \leqslant V(S^0, U_1^0, U_2^0) + KT. \end{aligned}$$

令 $\Omega_\eta = \{\tau_\eta \leqslant T\}$，则 $P(\Omega_\eta) > \delta$ 成立. 对任意的 $\omega \in \Omega_\eta$，根据停时的定义可知 $S(\tau_\eta, \omega)$，$U_1(\tau_\eta, \omega)$，$U_2(\tau_\eta, \omega)$ 中至少有一个等于 η，可得

$$V(S(\tau_\eta, \omega), U_1(\tau_\eta, \omega), U_2(\tau_\eta, \omega)) \geqslant -\ln\frac{\eta}{C}.$$

于是

$$V(S^0, U_1^0, U_2^0) + KT \geqslant \mathrm{E}(I_{\Omega_\eta} V(S(\tau_\eta, \omega), U_1(\tau_\eta, \omega), U_2(\tau_\eta, \omega))) \geqslant -\delta \ln \frac{\eta}{C},$$

其中 I_{Ω_η} 表示 Ω_η 的示性函数.

令 $\eta \to 0$,得到如下矛盾

$$\infty > V(S^0, U_1^0, U_2^0) + KT = \infty.$$

因此,$\tau_0 = \infty$ a. s. . 证毕.

定理 1 证明了随机模型(2) 正解的全局唯一性,且由定理 1 的证明,得到如下结论:

推论 1 集合 D 是模型(2) 的几乎必然正不变集,那么,若$(S^0, U_1^0, U_2^0) \in D$,则对任意的 $t \geqslant 0$ 有 $P((S(t), U_1(t), U_2(t)) \in D) = 1.$

4 无海洛因传播平衡点的渐近稳定性

易知,确定性模型(1) 的无海洛因传播平衡点 E^0 也就是随机模型(2) 的无海洛因传播平衡点.

定理 2 若满足条件 $R_0 < 1$ 和$\frac{1}{2}\beta^2 < \mu\sigma^2$,则随机模型(2) 的无海洛因传播平衡点 E^0 在 D 内是几乎必然指数稳定的.

证明: 设$(S^0, U_1^0, U_2^0) \in D$,根据定理 1,随机模型(2) 的解仍在 D 内,则定义函数

$$V = \ln\left(\left(\frac{\Lambda}{\mu} - S\right) + U_1 + U_2\right).$$

利用多维 Itô 公式[9] 可得

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{\partial V}{\partial U_1}\mathrm{d}U_1 + \frac{\partial V}{\partial U_2}\mathrm{d}U_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\mathrm{d}S\mathrm{d}S + \frac{\partial^2 V}{\partial U_1^2}\mathrm{d}U_1\mathrm{d}U_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial U_2^2}\mathrm{d}U_2\mathrm{d}U_2\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial U_1}\mathrm{d}S\mathrm{d}U_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial U_2}\mathrm{d}S\mathrm{d}U_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial U_1 \partial U_2}\mathrm{d}U_1\mathrm{d}U_2\right).$$

通过计算得

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{\frac{\Lambda}{\mu} - S + U_1 + U_2}(-\Lambda + 2\beta S U_1 + \mu S - (\mu + \delta_1)U_1 - (\mu + \delta_2)U_2)\mathrm{d}t - \frac{2\sigma^2 S^2 U_1^2}{\left(\frac{\Lambda}{\mu} - S + U_1 + U_2\right)^2}\mathrm{d}t + \frac{2\sigma S U_1}{\frac{\Lambda}{\mu} - S + U_1 + U_2}\mathrm{d}B.$$

令 $A = \dfrac{S U_1}{\frac{\Lambda}{\mu} - S + U_1 + U_2}$,得

$$\mathrm{d}V = \left(-2\sigma^2 A^2 + 2\beta A - \frac{\mu\left(\frac{\Lambda}{\mu} - S\right) + (\mu + \delta_1)U_1 + (\mu + \delta_2)U_2}{\frac{\Lambda}{\mu} - S + U_1 + U_2}\right)\mathrm{d}t + 2\sigma A\mathrm{d}B \leqslant (-2\sigma^2 A^2 + 2\beta A - \mu)\mathrm{d}t + 2\sigma A\mathrm{d}B \leqslant \frac{\beta^2 - 2\mu\sigma^2}{2\sigma^2}\mathrm{d}t + 2\sigma A\mathrm{d}B,$$

即

$$\mathrm{d}V \leqslant \frac{\beta^2 - 2\mu\sigma^2}{2\sigma^2}\mathrm{d}t + 2\sigma A\mathrm{d}B.$$

对上式两端从 0 到 t 积分,计算得

$$\ln\left(\left(\frac{\Lambda}{\mu} - S\right) + U_1 + U_2\right) \leqslant \ln\left(\left(\frac{\Lambda}{\mu} - S^0\right) + U_1^0 + U_2^0\right) + \frac{\beta^2 - 2\mu\sigma^2}{2\sigma^2}t + \int_0^t 2\sigma A\mathrm{d}B. \tag{3}$$

设 $M(t) = \int_0^t 2\sigma A\mathrm{d}B$,显然 $M(t)$ 为连续的局部鞅,$M(0) = 0$ 且

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{[M,M]_t}{t}\leqslant 4\sigma^2\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^2<\infty,$$

由大数定律[8,10]得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=0\quad \text{a. s.}. \tag{4}$$

由条件$\frac{1}{2}\beta^2<\mu\sigma^2$并结合式(3)和(4)得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left(\left(\frac{\Lambda}{\mu}-S\right)+U_1+U_2\right)\leqslant\frac{\beta^2-2\mu\sigma^2}{2\sigma^2}<0.$$

证毕.

5　解的渐近性

当$R_0>1$时，确定性模型(1)存在唯一的海洛因传播平衡点$E^*(S^*,U_1^*,U_2^*)$且全局渐近稳定. 但随机模型(2)不存在任何海洛因传播平衡点，本节主要讨论随机干扰对海洛因传播平衡点扰动的情况.

定理 3　当$R_0>1$时，随机模型(2)的解$(S(t),U_1(t),U_2(t))$满足

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left(K_1(S-S^*)^2+K_2(U_1-U_1^*)^2+K_3(U_2-U_2^*)^2\right)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\mu\sigma^2U_1^*C^2}{\beta}\quad \text{a. s.},$$

其中

$$K_1=\frac{\mu(2\mu+k+\delta_2)}{k},\quad K_2=(\mu+\delta_1)+\frac{(\mu+p+\delta_2)(2\mu+\delta_2)}{k},\quad K_3=\mu+\delta_2,$$

且(S^*,U_1^*,U_2^*)是确定性模型(1)的海洛因传播平衡点.

证明：当$R_0>1$时，模型(1)海洛因传播平衡点(S^*,U_1^*,U_2^*)满足方程

$$\begin{cases}\Lambda-\beta S^*U_1^*-\mu S^*=0,\\ \beta S^*U_1^*+kU_2^*-(p+\mu+\delta_1)U_1^*=0,\\ pU_1^*-(k+\mu+\delta_2)U_2^*=0.\end{cases}$$

定义如下函数

$$V=V_1+\frac{2\mu+\delta_2}{k}V_2+\frac{2\mu}{\beta}\left(V_3+\frac{k}{\mu+k+\delta_2}V_4\right),$$

其中

$$V_1=\frac{1}{2}(S-S^*+U_1-U_1^*+U_2-U_2^*)^2,$$

$$V_2=\frac{1}{2}(S-S^*+U_1-U_1^*)^2,$$

$$V_3=U_1-U_1^*-U_1^*\ln\frac{U_1}{U_1^*},$$

$$V_4=U_2-U_2^*-U_2^*\ln\frac{U_2}{U_2^*}.$$

显然V_1,V_2,V_3,V_4正定，利用 Itô 公式计算得

$$\begin{aligned}LV_1=&-\mu(S-S^*)^2-(\mu+\delta_1)(U_1-U_1^*)^2-(\mu+\delta_2)(U_2-U_2^*)^2-\\&(2\mu+\delta_1)(S-S^*)(U_1-U_1^*)-(2\mu+\delta_2)(S-S^*)(U_2-U_2^*)-\\&-(2\mu+\delta_1+\delta_2)(U_1-U_1^*)(U_2-U_2^*),\end{aligned}$$

$$LV_2=-\mu(S-S^*)^2-(\mu+p+\delta_1)(U_1-U_1^*)^2-(2\mu+p+\delta_1)(S-S^*)(U_1-U_1^*)+$$

$$k(S-S^*)(U_2-U_2^*)+k(U_1-U_1^*)(U_2-U_2^*),$$

$$LV_3=\beta(S-S^*)(U_1-U_1^*)-k\frac{U_2^*}{U_1^*}(U_1-U_1^*)-kU_1^*\frac{U_2}{U_1}+kU_2+\frac{1}{2}\sigma^2U_1^*S^2,$$

$$LV_4=pU_1-pU_2^*\frac{U_1}{U_2}-(\mu+k+\delta_2)(U_2-U_2^*),$$

$$\begin{aligned}LV_3+\frac{k}{\mu+k+\delta_2}LV_4&=\beta(S-S^*)(U_1-U_1^*)+\frac{1}{2}\sigma^2U_1^*S^2+2kU_2^*-kU_1^*\frac{U_2}{U_1}-\frac{pk}{\mu+k+\delta_2}U_2^*\frac{U_1}{U_2}\leqslant\\&\beta(S-S^*)(U_1-U_1^*)+\frac{1}{2}\sigma^2U_1^*S^2+2kU_2^*-2k\sqrt{U_1^*\frac{U_2}{U_1}\cdot\frac{p}{\mu+k+\delta_2}U_2^*\frac{U_1}{U_2}}=\\&\beta(S-S^*)(U_1-U_1^*)+\frac{1}{2}\sigma^2U_1^*S^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}LV&<-K_1(S-S^*)^2-K_2(U_1-U_1^*)^2-K_3(U_2-U_2^*)^2+\frac{\mu\sigma^2U_1^*S^2}{\beta}\leqslant\\&-K_1(S-S^*)^2-K_2(U_1-U_1^*)^2-K_3(U_2-U_2^*)^2+\frac{\mu\sigma^2U_1^*C^2}{\beta}.\end{aligned}$$

又

$$\mathrm{d}V=LV\mathrm{d}t+\frac{2\mu\sigma}{\beta}S(U_1-U_1^*)\mathrm{d}B,$$

对上式两端从 0 到 t 积分可得

$$V(t)-V(0)=\int_0^t LV\mathrm{d}s+M(t),$$

其中

$$M(t)=\frac{2\mu\sigma}{\beta}\int_0^t S(U_1-U_1^*)\mathrm{d}B,$$

且

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{[M,M]_t}{t}\leqslant\frac{4\mu^2\sigma^2}{\beta^2}C^2(C+U_1^*)^2<\infty.$$

根据大数定律[8,10]可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=0\quad \text{a. s.},$$

则

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t(K_1(S-S^*)^2+K_2(U_1-U_1^*)^2+K_3(U_2-U_2^*)^2)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\mu\sigma^2U_1^*C^2}{\beta}\quad \text{a. s.}.$$

证毕.

从定理3可以看出随机模型(2)的解将围绕确定性模型(1)的海洛因传播平衡点 E^* 做随机振荡，并且振荡幅度的大小与噪声强度有关，白噪声强度 σ 越大，振荡的幅度就越大.

定理4 若满足条件 $R_0>1$ 和 $\sigma^2<\min\left\{\frac{\beta(S^*)^2}{\mu U_1^*C^2},\frac{\beta S^*}{\mu C^2},\frac{\beta S^*U_2^*}{\mu U_1^*C^2}\right\}$ 时，随机模型(2)平均持续存在，即模型(2)的解 $(S(t),U_1(t),U_2(t))$ 满足

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)\mathrm{d}s>0,\quad \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t U_1(s)\mathrm{d}s>0,\quad \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t U_2(s)\mathrm{d}s>0\quad \text{a. s.}.$$

证明：由定理3可得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t K_1(S-S^*)^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{\mu\sigma^2U_1^*C^2}{\beta}\quad \text{a. s.}.$$

又

$$2(S^*)^2-2S^*S=2S^*(S^*-S)\leqslant(S^*)^2+(S-S^*)^2,$$

即

$$S \geqslant \frac{S^*}{2} - \frac{(S - S^*)^2}{2S^*}.$$

因此

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K_1 S(s)\,\mathrm{d}s \geqslant K_1 \frac{S^*}{2} - \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K_1 \frac{(S - S^*)^2}{2S^*}\mathrm{d}s \geqslant K_1\left(\frac{S^*}{2} - \frac{\mu\sigma^2 U_1^* C^2}{2\beta S^*}\right) > 0 \quad \text{a. s. .}$$

同理

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K_2 U_1(s)\,\mathrm{d}s \geqslant K_2 \frac{U_1^*}{2} - \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K_2 \frac{(U_1 - U_1^*)^2}{2U_1^*}\mathrm{d}s \geqslant K_2\left(\frac{U_1^*}{2} - \frac{\mu\sigma^2 C^2}{2\beta}\right) > 0 \quad \text{a. s. ,}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K_3 U_2(s)\,\mathrm{d}s \geqslant K_3 \frac{U_2^*}{2} - \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K_3 \frac{(U_2 - U_2^*)^2}{2U_2^*}\mathrm{d}s \geqslant K_3\left(\frac{U_2^*}{2} - \frac{\mu\sigma^2 U_1^* C^2}{2\beta U_2^*}\right) > 0 \quad \text{a. s. .}$$

故定理成立. 证毕.

6　结　　论

本文研究了一类接触率受到白噪声干扰的海洛因毒品传播随机模型,通过引入随机扰动,考察随机模型(2) 的解在无海洛因传播平衡点及海洛因传播平衡点附近的动力学行为. 研究结果发现: 当 $R_0 < 1$,且白噪声 σ 的强度满足定理 2 的条件时,无海洛因传播平衡点是几乎必然指数稳定的. 当 $R_0 > 1$ 时,确定性模型(1) 海洛因传播平衡点 E^* 全局渐近稳定,而随机模型(2) 不存在海洛因传播平衡点. 但定理 3 利用随机过程的相关性质说明了随机模型(2) 的解围绕 E^* 振荡,以及振荡幅度与噪声强度正相关,并且当白噪声 σ 的强度较小时,随机模型(2) 平均持续.

海洛因传播及滥用的状况在现实环境中十分复杂,会受到许多因素的影响. 因此,相对于确定性模型,在模型中加入一些环境中的随机扰动更加符合客观实际,更能反映现实中海洛因传播的情况,并且可以更好地控制海洛因的传播. 此外,在以后的研究中也可在其他参数上引入环境的随机扰动,从其他角度进一步分析和讨论海洛因的传播.

参考文献:

[1] Dark S. The life of the heroin user: typical beginnings, trajectories and outcomes [J]. Addiction, 2011, 108(2): 440-441.
[2] 陆叶,高箐箐,倪敏. 海洛因滥用者复吸情况的分析 [J]. 中国药物滥用防治杂志, 2011, 17(1): 26-31.
[3] E White, C Comiskey. Heroin epidemics, treatment and ODE modelling [J]. Math Biosci, 2007, 208(1): 312-324.
[4] G Mulone, B Straughan. A note on heroin epidemics [J]. Math Biosci, 2009, 218(2): 138-141.
[5] G P Samanta. Dynamic behavior for a nonautonomous heroin epidemic model with time delay [J]. Appl Math Comput, 2011, 35: 161-178.
[6] Fang Bin, Li Xuezhi, Maia Martcheva, *et al*. Global stability for a heroin model with age-dependent susceptibility [J]. J Syst Sci Complex, 2015, 28: 1243-1257.
[7] 方彬,郭淑利,李学志,等. 一类带有复发的海洛因传染病模型的全局稳定性 [J]. 平顶山学院学报, 2016, 31(5): 6-13.
[8] Mao X R. Stochastic different equations and applications [M]. Chichester: Horwood Publishing, 2007.
[9] Saha T, Chakrabarti C. Stochastic analysis of prey-predator model with stage structure for prey [J]. J Appl Math Comput, 2011, 35: 195-209.
[10] Arnold L. Stochastic different equations: theory and applications [M]. New York: Wiley, 1972.

【责任编辑: 伍　林】