一、1. 动手算矩阵分解

1. $\hat{r}_{ij} = \vec{p}_i^{T} \vec{q}_j = (\quad)(\quad) = \sum_{k=1}^{k} p_{ik} q_{kj}$，k维向量 p, q 作内积

2. Loss 函数，$\hat{r}$ 与 r 的误差平方和为：

$$e_{ij}^2 = (r_{ij} - \hat{r}_{ij})^2 = (r_{ij} - \vec{p}_i \vec{q}_j)^2 = \left(r_{ij} - \sum_{k=1}^{k} p_{ik} q_{kj}\right)^2$$

最终求所有非负（大于0）项的损失之和的最小值

$$\min loss = \sum_{r_{ij}\text{-}} e_{ij}^2 \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

3. 根据梯度下降法获得修正的 p q 分量，梯度下降 $\theta = \theta_0 - \underset{\text{步长}}{\eta} \nabla f(\theta_0)$

$$\frac{\partial e_{ij}^2}{\partial p_{ik}} = -2\left(r_{ij} - \sum_{k=1}^{k} p_{ik} q_{kj}\right) q_{kj} = -2 e_{ij} q_{kj}$$

$$\frac{\partial e_{ij}^2}{\partial q_{kj}} = -2\left(r_{ij} - \sum_{k=1}^{k} p_{ij} q_{kj}\right) p_{ik} = -2 e_{ij} p_{ik}$$

这里是负梯度，故 $\theta = \theta_0 - \eta \nabla f(\theta_0)$

根据负梯度方向更新变量

$$p_{ik}' = p_{ik} - \underset{\text{步长}}{\alpha} \frac{\partial e_{ij}^2}{\partial p_{ik}} = p_{ik} - (-2 e_{ij} q_{kj}) = p_{ij} + 2\alpha e_{ij} q_{kj}$$

$$q_{kj}' = q_{kj} + 2\alpha e_{ij} p_{ik}$$

4. epoch 直到算法收敛 $sum(e^2) \le$ 阈值

以上方法未加入正则化项，会有过拟合

加入正则化项

1. $\hat{r}_{ij} = p_i^T q_j = \sum_{k=1}^{K} p_{ik} q_{kj}$

2. 加入正则化项：

$$\frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{K}(\|P\|^2+\|Q\|^2)$$

向量的模 $=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

模$|^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2$

$$\Rightarrow e_{ij}^2 = (r_{ij} - \sum_{k=1}^{K} p_{ik}q_{kj})^2 + \frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{K}(\|P\|^2+\|Q\|^2)$$

$$= (r_{ij} - \sum_{k=1}^{K} p_{ik}q_{kj})^2 + \frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{K}(p_{ik}^2+q_{kj}^2)$$

3. 再次求对 e_{ij} 的对 p_{ik}, q_{kj} 求偏导

$$\frac{\partial e_{ij}^2}{\partial p_{ik}} = \underbrace{-2e_{ij}q_{kj}}_{\text{之前推过}} + \beta p_{ik}$$

$$\frac{\partial e_{ij}^2}{\cancel{\partial p_{ik}}\ \partial q_{kj}} = -2e_{ij}p_{ik} + \beta q_{kj}$$

4. 更新 $p'_{ik} = p_{ik} - \alpha \cdot \nabla f(x)$

$$= p_{ik} + \alpha(2e_{ij}q_{kj} - \beta p_{ik})$$

$$q'_{kj} = q_{kj} + \alpha(2e_{ij}p_{ik} - \beta q_{kj})$$

最终得出 (i,j) 位置的 $\sum_{k=1}^{K} p_{ik}q_{kj}$ 打分