

UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Physikalisches Praktikum PAP 2

für Studierende der Physik

Mechanik und Thermodynamik (PAP2.1)

Praktikumsvorbereitung

- 211 Gekoppelte Pendel
- 212 Zähigkeit von Flüssigkeiten
- 213 Kreisel
- 221 Adiabatenkoeffizient $\kappa = c_p/c_v$
- 222 Heißluftmotor
- 223 Messung der Boltzmannkonstante
 - Teil I Brownsche Bewegung

Optik (PAP2.1)

- 232 Michelson-Interferometer
- 233 Fourieroptik (2-Tages-Versuch)
- 234 Lichtquellen und Gitterspektroskopie

Elektrizität und Radioaktivität (PAP2.2)

- 241 Wechselstromeigenschaften von RCL-Gliedern (2-Tages-Versuch)
- 242 Spannungsverstärkung
- 243 Messung der Boltzmannkonstante
 - Teil II Thermisches Rauschen
- 245 Induktion
 - Grundlagen zu den Versuchen der Radioaktivität
- 251 Statistik
- 252 Aktivierung mit thermischen Neutronen
- 253 Absorption von α -, β - und γ -Strahlen
- 255 Röntgenspektrometer
- 256 Röntgenfluoreszenz

Versuch 232

Michelson-Interferometer

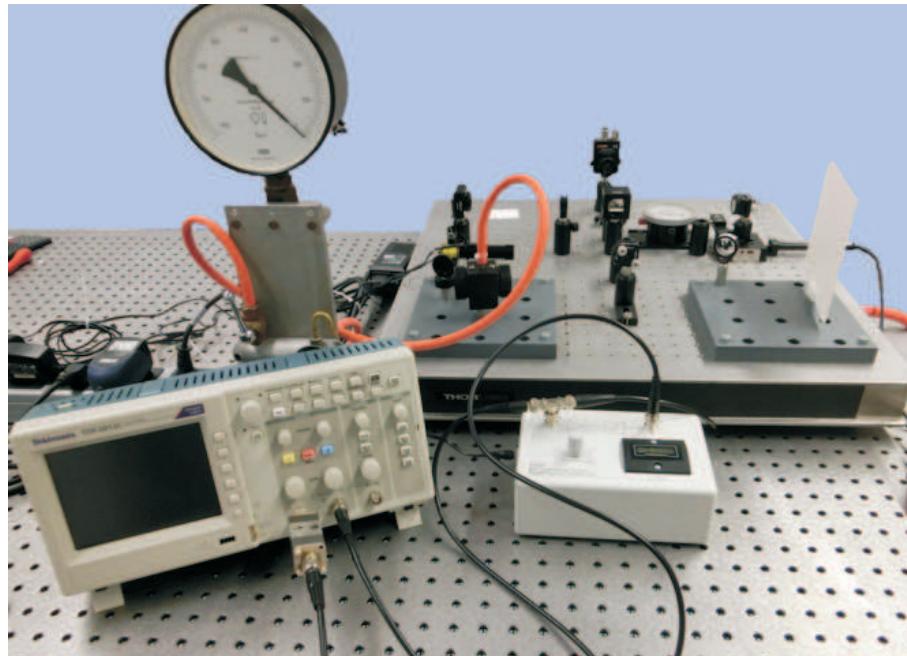


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- Michelson Interferometer
- Laser, Leuchtdiode
- Thermometer
- Vakuumpumpe

II Literatur

- Bergmann- Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band III*, de Gruyter Berlin.
- R. P. Pohl, *Optik und Atomphysik*, Springer Verlag.
- W. Demtröder, *Experimentalphysik 2*, Springer Verlag.

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen der Wellenoptik (Hyugens'sches Prinzip, Interferenz, Superpositionsprinzip, Kohärenz). Interferenz gleicher Neigung, Interferenz gleicher Dicke. Aufbau eines Michelson-Interferometers.

Verständnisfragen:

1. Was ist Interferenz? Was besagt das Superpositionsprinzip?
2. Was sind Interferenzmuster und wie kommen sie zustande? Nennen Sie die Bedingungen für die Phasenverschiebung bzw. für den Gangunterschied zweier Wellen, damit die überlagerte Welle eine maximale bzw. eine verschwindende Intensität besitzt. Was ist zu beachten, wenn eine Teilwelle ein Medium mit einem anderem Brechungsindex durchläuft als die andere Teilwelle?
3. Warum kann man bei natürlichem Licht in der Regel keine Interferenzerscheinungen beobachten? Erläutern Sie die Begriffe Kohärenz, Kohärenzzeit und Kohärenzlänge. Wie groß sind die Größenordnungen der Kohärenzlängen einer Glühlampe bzw. eines Lasers?
4. Wie groß ist gemäß Gleichung (8) die Intensität der überlagerten Welle, wenn die interferierenden Wellen inkohärent sind?
5. Was versteht man unter *Interferenz gleicher Neigung* und *Interferenz gleicher Dicke*?
6. Beschreiben Sie den Aufbau eines Michelson-Interferometers. Erklären Sie das Zustandekommen der verschiedenen Interferenzmuster (Kreissystem, Streifensystem).

7. Wie lässt sich mit einem Michelson-Interferometer die Wellenlänge der Lichtquelle bzw. der Brechungsindex eines Mediums bestimmen?
8. Wie muss der bewegliche Spiegel des Interferometers justiert sein, um Interferenzen mit Licht einer sehr kleinen Kohärenzlänge beobachten zu können (Weißlichtinterferenz)?
9. Warum erscheint das an einer rauen Oberfläche reflektierte Licht eines Lasers granuliert (Stichwort: Speckle-Muster)?

IV Aufgaben

1. Messen Sie die Wellenlänge des grünen Lasers.
2. Bestimmen Sie den Brechungsindex von Luft.
3. Messen Sie die Kohärenzlänge einer Leuchtdiode.

V Grundlagen

Interferenz bezeichnet allgemein die Überlagerung von Wellen. Sie haben dieses Phänomen sicherlich schon anhand von Wasserwellen an einem See oder bei Experimenten mit der Wellenwanne in der Vorlesung kennengelernt. Treffen z.B. zwei Wasserwellen aufeinander, so überlagern sich diese zu einer neuen Welle. Die Amplitude der resultierenden Welle hängt von der Phasenverschiebung der beiden Teilwellen ab. Trifft in einem bestimmten Punkt (Abbildung 2) ein „Wellenberg“ der einen Welle auf einen „Wellenberg“ der anderen Welle, so vergrößert sich die Amplitude der resultierenden Welle (konstruktive Interferenz). Trifft dagegen ein „Wellenberg“ auf ein „Wellental“, so verringert sich die Amplitude. Sind die Amplituden gar gleich groß, so löscht sich im letzten Fall die Amplitude der resultierenden Welle aus.

Auch Licht lässt sich durch eine Welle beschreiben. Betrachten wir zwei ebene monochromatische Lichtwellen \vec{E}_1, \vec{E}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_1)} \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{02} e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_2)}\end{aligned}\quad (1)$$

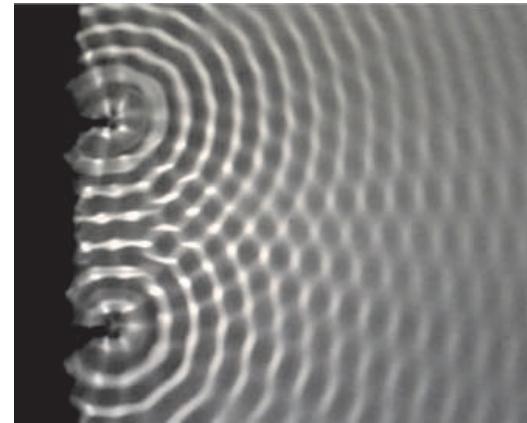


Abbildung 2: Interferenz zweier Wasserwellen.

Dabei bezeichnen \vec{E}_{0i} die Amplituden, \vec{k}_i die Wellenvektoren, ω die Frequenz und ϕ_i die Phasen der jeweiligen Wellen. Treffen diese aufeinander, so überlagern sie sich gemäß des Superpositionsprinzips, d.h. die Wellen addieren sich vektoriell zu einer resultierenden Welle $\vec{E}_S(\vec{r}, t)$:

$$\vec{E}_S(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t). \quad (2)$$

Bei Licht ist aufgrund der hohen Frequenz nicht die Amplitude der Welle beobachtbar, sondern nur die Intensität I , d.h. der zeitliche Energiemittelwert, der auf eine bestimmte Fläche trifft. Dieser ist proportional zum Betragsquadrat der Amplitude:

$$I_S(\vec{r}, t) \propto |\vec{E}_S(\vec{r}, t)|^2. \quad (3)$$

In der hier verwendeten komplexen Notation lässt sich das Betragsquadrat sehr einfach berechnen. Wir müssen lediglich \vec{E}_S mit dem komplex konjugierten \vec{E}_S^* multiplizieren:

$$\begin{aligned}I_S \propto |\vec{E}_S|^2 &= \vec{E}_S \vec{E}_S^* = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)(\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) \\ &= \vec{E}_1 \vec{E}_1^* + \vec{E}_2 \vec{E}_2^* + \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^* \\ &= |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^*.\end{aligned}\quad (4)$$

Die ersten beiden Summanden sind die Betragsquadrate der Einzelwellen. Für

die beiden anderen Summanden berechnen wir durch Einsetzen von Gleichung (1)

$$\vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^* = \vec{E}_{01} \vec{E}_{02} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad (5)$$

wobei wir hier die Phasenverschiebung

$$\varphi = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r} + \phi_1 - \phi_2 \quad (6)$$

definiert haben. Mit Hilfe der Euler'schen Gleichung

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (7)$$

erhalten wir schließlich für die Intensität der überlagerten Welle:

$$I_S \propto |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + \underbrace{2\vec{E}_{01} \vec{E}_{02} \cos \varphi}_{\text{Interferenzterm}}. \quad (8)$$

Die Intensität der überlagerten Welle entspricht demnach nicht der Summe der Intensitäten der Einzelwellen. Es tritt zusätzlich ein Interferenzterm auf, der dazu führt, dass die Intensität der überlagerten Wellen größer (konstruktive Interferenz) oder kleiner (destruktive Interferenz) ist als die Summe der Einzelintensitäten.

Beispiel: Interferenz zweier linear polarisierten, ebener Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, die sich in z -Richtung ausbreiten und gleiche Polarisationsrichtungen (z.B. in x -Richtung) besitzen. Für die x -Komponente der elektrischen Feldstärke gilt:

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= E_0 e^{i(\omega t - kz + \phi_1)} \\ E_2(z, t) &= E_0 e^{i(\omega t - kz + \phi_2)}, \end{aligned} \quad (9)$$

und für die Intensität I_S der überlagerten Welle $E_S = E_1 + E_2$:

$$I_S \propto E_S^2 \propto 2I_0 (1 + \cos \varphi), \quad (10)$$

wobei I_0 proportional zur Intensität der Einzelwelle ist und $\varphi = \phi_1 - \phi_2$ die Phasenverschiebung der beiden Wellen darstellt. In Abbildung 3 ist die Intensität als Funktion der Phasenverschiebung φ aufgetragen. Maximale Intensität ergibt sich, wenn die Phasenverschiebung ein Vielfaches von 2π beträgt. Für ein ungerades Vielfaches von π verschwindet dagegen die Intensität der überlagerten Welle:

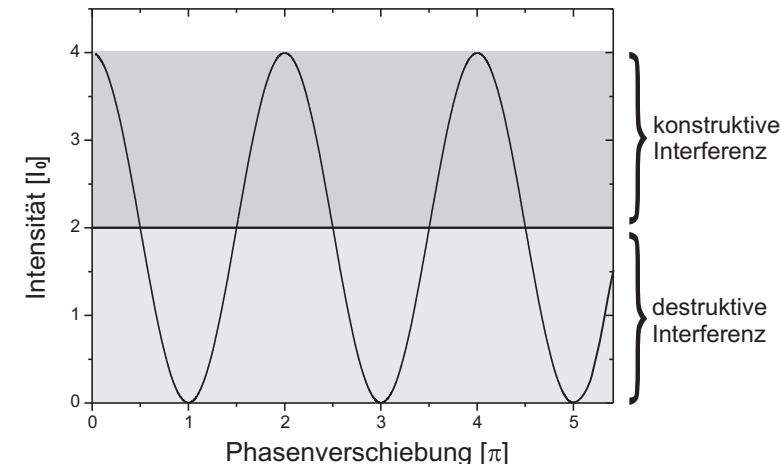


Abbildung 3: Intensität der überlagerten Welle nach Gleichung (10) in Einheiten von I_0 als Funktion der Phasenverschiebung in Einheiten von π .

$$\text{Maximale Intensität für } \varphi = 2m\pi, (m \in \mathbb{Z}) \quad (11)$$

$$\text{Minimale Intensität für } \varphi = (2m+1)\pi, (m \in \mathbb{Z}) \quad (12)$$

Bei vielen Interferenzversuchen kommt die Phasenverschiebung dadurch zu stande, dass die sich überlagernden Wellen zuvor unterschiedliche Weglängen durchlaufen haben. Ein Beispiel ist in Abbildung 4a) dargestellt. Nehmen wir an, dass die beiden Lichtquellen punktförmig sind und Licht mit gleicher Frequenz, Amplitude, Polarisationsrichtung und konstanter Phase aussenden. Die Intensität der überlagerten Welle im Punkt P hängt dann von der Phasenverschiebung ab, die durch den Gangunterschied $\Delta = s_1 - s_2$ der beiden Wellen hervorgerufen wird. Dabei bezeichnen s_1 und s_2 die Weglängen der jeweiligen Teilwellen. Da eine Phasenverschiebung von 2π einem Wegunterschied von λ entspricht, besteht zwischen der Phasenverschiebung φ und dem Gangunterschied Δ die Beziehung:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta, \quad (13)$$

wobei λ die Wellenlänge der Teilwellen beschreibt.

Breitet sich ein Wellenzug nicht im Vakuum aus, sondern durchläuft ein Medium mit dem Brechungsindex n (Abbildung 4b), so tritt eine zusätzliche Phasenverschiebung auf. Da die Wellenlänge im Medium um das n -fache der Vakuumlichtgeschwindigkeit kleiner ist, darf man bei der Berechnung des Gangunterschieds nicht die geometrischen Weglängen s verwenden, sondern muss die optischen Weglängen Λ berücksichtigen. Diese entspricht dem Produkt des Brechungsindex des Mediums, in dem sich die Welle ausbreitet und der geometrischen Weglänge s , die die Welle in dem Medium zurücklegt:

$$\Lambda = n s. \quad (14)$$

Mit Hilfe des Gangunterschieds lassen sich die Gleichungen (11) und (12) auch wie folgt formulieren:

$$\text{Maximale Intensität für } \Delta = m\lambda, (m \in \mathbb{Z}) \quad (15)$$

$$\text{Minimale Intensität für } \Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, (m \in \mathbb{Z}) \quad (16)$$

Kohärenz

Voraussetzung für die Beobachtung von Interferenzerscheinungen ist die Kohärenz der Lichtquellen. Damit ist gemeint, dass die interferierenden Wellen eine konstante Phasenbeziehung aufweisen müssen. Bei inkohärentem Licht ist die Phasenverschiebung φ in Gleichung (8) statistisch verteilt, so dass der Interferenzterm verschwindet und man daher keine Interferenzen beobachtet kann.

Die meisten Lichtquellen, wie z.B. das Licht der Sonne oder einer Glühbirne, erzeugen inkohärentes Licht. Die Atome dieser Lichtquellen senden innerhalb eines sehr kurzen Zeitraums τ unabhängig voneinander Wellenzüge aus, deren einzelnen Phasen statistisch verteilt sind. Das in Abbildung 4a) dargestellte Experiment würde daher bei Verwendung von natürlichem Licht nicht funktionieren. Um dennoch mit natürlichem Lichtquellen Interferenzen beobachten zu können, muss man das Licht einer einzigen Lichtquelle verwenden und dieses in Teilwellen aufspalten. Abbildung 4c) zeigt ein Beispiel, welches auch bei der Verwendung von natürlichem Licht, die Beobachtung von Interferenzerscheinungen ermöglicht. Anstatt zwei Lichtquellen, die statistisch unabhängig

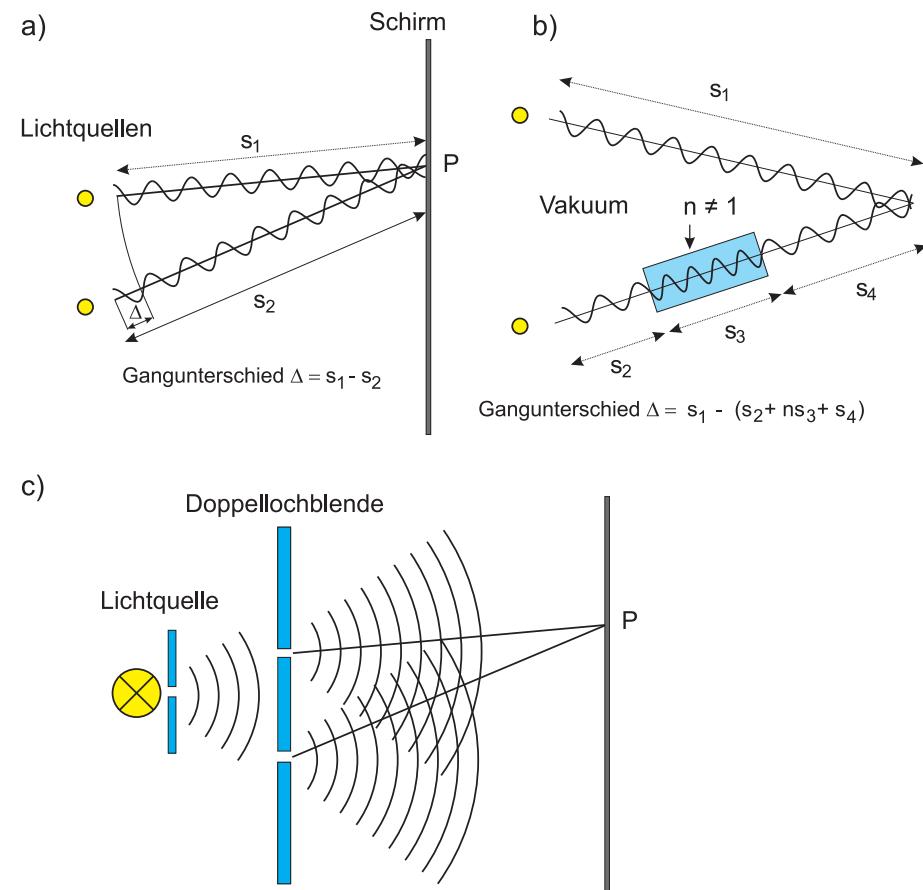


Abbildung 4: a) Gangunterschied Δ zweier Teilwellen nach dem Durchlaufen unterschiedlicher Weglängen. b) Breitet sich eine Teilwelle in einem Medium mit dem Brechungsindex n aus, tritt eine zusätzliche Phasenverschiebung auf. c) Erzeugung von kohärentem Licht durch Teilung der Wellenfront mit einer Doppelbohrblende.

voneinander emittieren, verwenden wir hier eine Lichtquelle, deren Wellenfront mit Hilfe einer Doppelochblende in zwei Teilwellen aufgespalten wird. Da beide Öffnungen von der gleichen Primärwelle angeregt werden, emittieren diese nach dem Huygen'schen Prinzip Sekundärwellen, die die gleiche Phase aufweisen und daher „interferenzfähig“ sind.

Es gibt noch weitere Eigenschaften, die bei der Beobachtung von Interferenzerscheinungen erfüllt sein müssen. So darf der Gangunterschied der Wellen nicht beliebig groß sein. Wie bereits erwähnt wurde, erfolgt die atomare Emission eines Wellenzugs bei natürlichem Licht in einem sehr kurzen Zeitraum τ (Kohärenzzeit). Diese kurze Emissionszeit bedingt schließlich, dass die ausgesendeten Wellenzüge auch nur eine kleine Länge¹ besitzen. Ist c die Lichtgeschwindigkeit, so ergibt sich für die Länge L des emittierten Wellenzugs

$$L = c\tau. \quad (17)$$

Die Länge L wird als Kohärenzlänge bezeichnet. Bei Interferenzversuchen ist darauf zu achten, dass der Gangunterschied nicht größer als die Kohärenzlänge wird. Andernfalls stammen die interferierenden Teilwellen nicht aus dem selben „Emissionsakt“ und besitzen daher keine konstante Phasenbeziehung.

Die Kohärenzlängen von Temperaturstrahlern wie z.B. einer Glühlampe oder der Sonne sind sehr klein (einige Wellenlängen $\approx 10 \mu\text{m}$). Bei Gasentladungslampen liegt die Kohärenzlänge bei einigen Millimetern bis Metern und kann sich bei Lasern gar im Bereich von vielen Kilometern bewegen.

Kohärenzlänge und spektrale Bandbreite

Bei unseren bisherigen Betrachtungen sind wir immer davon ausgegangen, dass die Lichtquelle monochromatisch ist. Die Kohärenzbedingung besagt, dass nur dann Interferenzen beobachtbar sind, wenn die sich überlagernden Wellen eine konstante Phasenbeziehung aufweisen. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Lichtquelle monochromatisches Licht aussendet. Solch eine Lichtquelle gibt es aber nicht! Auch eine reale, extrem schmalbandige Lichtquelle wie z.B. ein Laser, emittiert nur Licht einer bestimmten Frequenz ω_0 mit einer endlichen spektralen Bandbreite² $\Delta\omega$. Damit ist gemeint, dass das Licht Frequanzanteile im Bereich von $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$ enthält.

¹Achtung: Hier ist die geometrische Länge des Wellenzugs gemeint und nicht die Wellenlänge!

²Dies folgt z.B. aus der Heisenberg'schen Energie-Zeit Unschärfe.

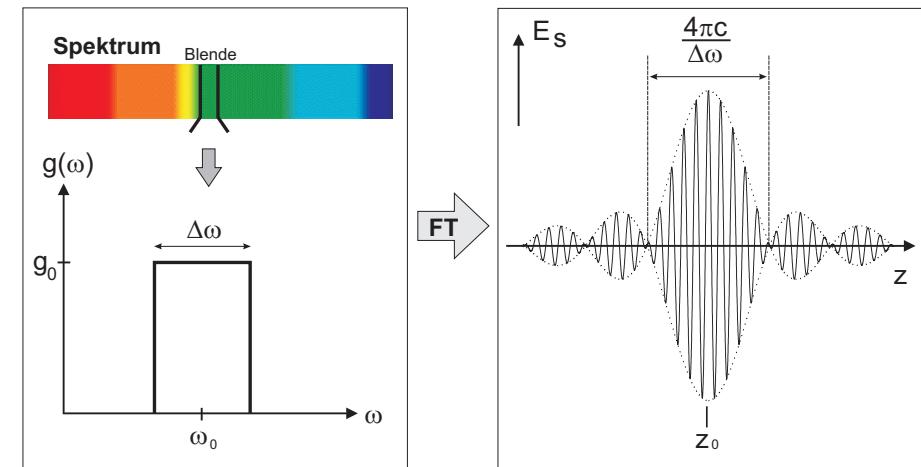


Abbildung 5: Links: Polychromatisches Licht mit rechteckförmigem Spektrum der spektralen Breite $\Delta\omega$. Rechts: Resultierende Wellenform. Der Pfeil mit der Abkürzung FT steht für Fouriertransformation.

Betrachten wir eine Lichtquelle mit einem rechteckigen Frequenzspektrum, wie es links in Abbildung 5 dargestellt ist. Solch ein Spektrum kann z.B. durch Ausblenden eines bestimmten Spektralbereichs eines kontinuierlichen Spektrums erzeugt werden. Die Amplitude $g(\omega)$ bei der Frequenz ω sei gegeben durch:

$$g(\omega) = \begin{cases} g_0, & |\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega/2 \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \Delta\omega/2. \end{cases} \quad (18)$$

Das von solch einer Lichtquelle ausgesendete Licht entspricht einer Überlagerung von Wellen mit Frequenzen im Bereich von $\omega_0 - \Delta\omega/2$ bis $\omega_0 + \Delta\omega/2$:

$$E_S = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} g_0 e^{i\omega(t-z/c)} d\omega, \quad (19)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Für die Phase nehmen wir an, dass diese am Ort $z = ct$ für alle Frequenzen Null ist. Verwenden wir der Übersichtlichkeit wegen die Abkürzungen $\sigma = \omega - \omega_0$, $d\sigma = d\omega$ und $\rho = t - z/c$, so folgt:

$$E_S = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} g_0 e^{i\rho(\omega_0+\sigma)} d\sigma \quad (20)$$

$$= g_0 e^{i\rho\omega_0} \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} e^{i\rho\sigma} d\sigma. \quad (21)$$

$$= \frac{g_0}{i\rho} e^{i\rho\omega_0} \left(e^{i\rho\Delta\omega/2} - e^{-i\rho\Delta\omega/2} \right) \quad (22)$$

$$= \frac{2g_0}{\rho} e^{i\rho\omega_0} \sin \rho\Delta\omega/2. \quad (23)$$

Ersetzen wir nun wieder σ und ρ durch die ursprünglichen Größen, so erhalten wir schließlich:

$$E_S = E_0 \frac{\sin(\Delta\omega/2(t - z/c))}{\Delta\omega/2(t - z/c)} e^{i\omega_0(t - z/c)}, \quad (24)$$

wobei hier $E_0 = g_0 \Delta\omega$ definiert wurde. Die Form dieser Welle ist in Abbildung 5 rechts dargestellt. Die Abbildungen 6a) und 6b) zeigen eine Messung die mit dem Michelson- Interferometer durchgeführt wurden. Die von einer Lichtquelle mit einem rechteckigen Frequenzspektrum ausgehende Welle ist amplitudenmoduliert. Die Amplitude ist an der Stelle z_0 maximal. Zudem besitzt der Wellenzug noch weitere Nebenmaxima, deren Amplituden aber schnell abfallen. Man bezeichnet solch einen Wellenzug auch als Wellenpaket.

Die Intensität des Wellenpakets berechnet sich aus dem Quadrat der Amplitude. Eine Rechnung zeigt, dass die Intensität des ersten Nebenmaximums nur 4,7 % der Intensität des Hauptmaximums beträgt. Die Intensitäten der weiteren Nebenmaxima betragen gar nur 1,7 %, 0,8 %, 0,5 % u.s.w. Nahezu die gesamte Intensität des Wellenpakets steckt im Hauptmaximum. Wir können daher annehmen, dass das Wellenpaket eine endliche Breite besitzt, welches der Breite des Hauptmaximums von $4\pi c/\Delta\omega$ entspricht.

Überlagern sich zwei solcher Wellenpakete mit einer relativen Verschiebung von $\Delta z = 2\pi c/\Delta\omega$, so fällt die Maximalamplitude des einen auf die erste Nullstelle des anderen Wellenpakets. Man kann also für Wellenpakete dieser Art die Kohärenzlänge L definieren durch:

$$\text{Kohärenzlänge: } L = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}. \quad (25)$$

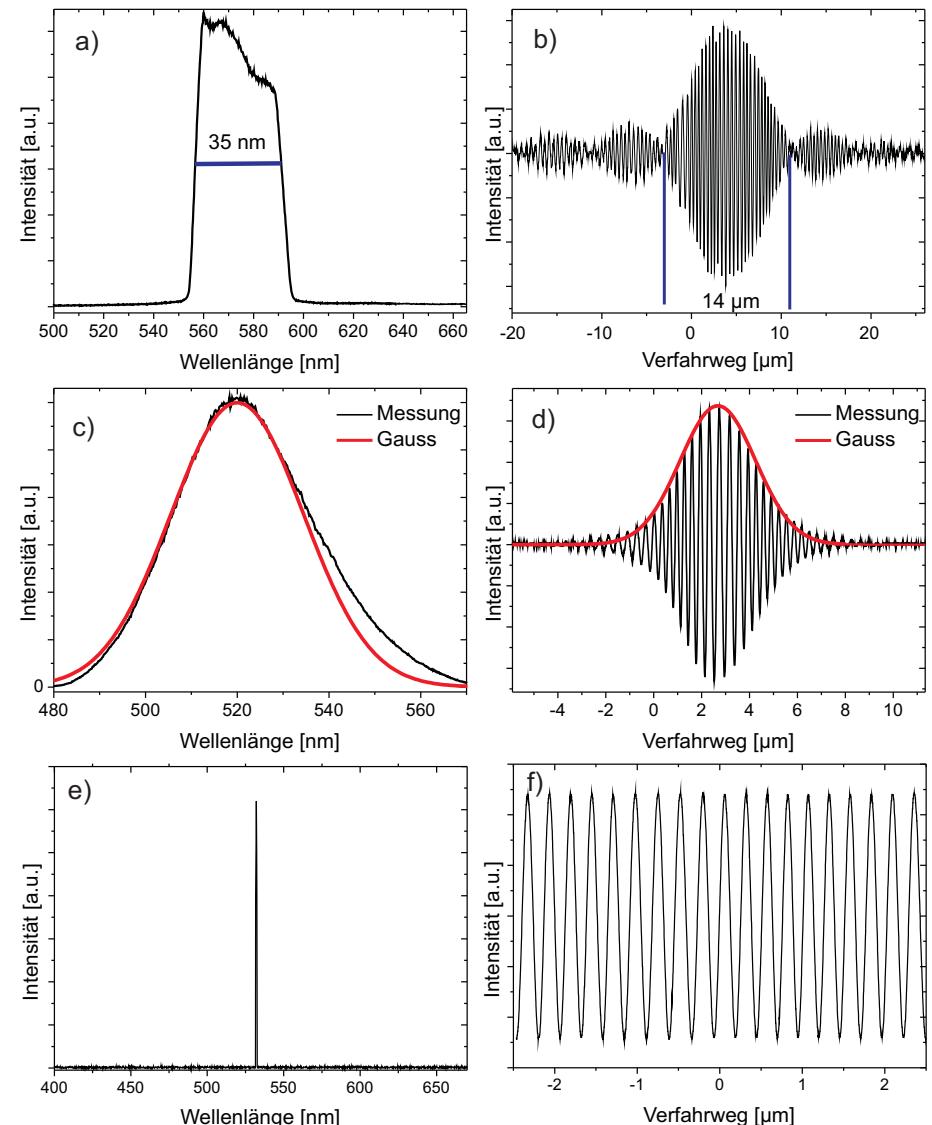


Abbildung 6: a) Modifiziertes, „rechteckförmiges“ Spektrum einer Halogenlampe. b) Gemessenes Interferogramm. c) Spektrum einer LED. d) Interferogramm der LED. e) Spektrum eines Lasers. f) Interferogramm eines Lasers.

Je schmalbandiger die Lichtquelle, desto größer ist die Kohärenzlänge. Damit wird nun auch verständlich, warum die Kohärenzlängen von Temperaturstrahlern so klein sind. Nur streng monochromatisches Licht (d.h. $\Delta\omega \rightarrow 0$) hat unendlich lange Wellenzüge und damit eine unendliche Kohärenzlänge. Anstatt die Kohärenzlänge durch die Frequenz auszudrücken, können wir diese auch durch die Angabe der Wellenlänge beschreiben. Mit $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu = 2\pi c\Delta\lambda/\lambda^2$ schreibt sich die Kohärenzlänge

$$\text{Kohärenzlänge: } L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (26)$$

Es soll noch angemerkt werden, dass zwischen der Amplitude E_S und dem Frequenzspektrum $g(\omega)$ in Gleichung (19) ein wichtiger Zusammenhang besteht: $g(\omega)$ ist die Fouriertransformierte von E_S . Im nächsten Praktikumsversuch *Fourieroptik* werden Sie sich mit dieser Thematik noch genauer beschäftigen.

In Abbildung 6c) ist das Spektrum einer grünen Leuchtdiode (LED) dargestellt. In Abbildung 6d) das resultierende mit dem Michelson- Interferometer gemessene Wellenpaket (Interferogramm). Das Spektrum lässt sich durch eine Gauß-Verteilung approximieren. Die Fouriertransformation einer Gaußfunktion ist ebenfall eine Gaußfunktion. Das Interferogramm ist daher gaußförmig moduliert. Diese Methode findet Anwendung in der Fourier-Transform-Infrarotspektroptrie (FTIR-Spektroskopie). Dabei werden mit dem Michelson-Interferometer Interferogramme von Infrarot- Lichtquellen aufgenommen. Die dazugehörigen Spektren können danach einfach durch eine Fouriertransformation berechnet werden. Abbildung 6e) zeigt das Spektrum eines Lasers. Da dieses sehr schmalbandig ist, sieht man im Interferogramm auch über einen sehr großen Verfahrweg keine Modulation. Das erklärt die große Kohärenzlänge gegenüber anderen Lichtquellen.

Interferenzen an dünnen Schichten

In den beiden folgenden Abschnitten, werden zwei Spezialfälle, die *Interferenzen gleicher Neigung* und die *Interferenzen gleicher Dicke* behandelt, die für das Verständnis des Michelson-Interferometers sehr wichtig sind.

Interferenzen gleicher Neigung

Interferenzen gleicher Neigung treten dann auf, wenn ein Lichtbündel auf eine transparente, planparallele Platte trifft. Abbildung 7a) verdeutlicht

das Prinzip. Das von einer Lichtquelle ausgehende Lichtbündel fällt unter dem Winkel α auf eine Platte der Dicke d und mit dem Brechungsindex n . Ein Teil der Intensität wird an der Oberfläche reflektiert, der andere Teil wird im Medium nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz gebrochen. Beim Austritt des Lichtbündels aus dem Medium tritt erneut eine Reflexion bzw. Transmission auf.

Durch die Platte wird das einfallende Lichtbündel in mehrere reflektierte und transmittierte Lichtbündel aufgespalten, wobei benachbarte Teilbündel einen Gangunterschied entsprechend des optischen Wegunterschieds besitzen. In Abbildung 7b) ist dies für zwei benachbarte reflektierte Teilbündel dargestellt. Für den Gangunterschied Δ berechnen wir:

$$\begin{aligned} \Delta &= n(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{AD} \\ &= \frac{2nd}{\cos\beta} - 2d \tan\beta \sin\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

Mit Hilfe des Snellius'schen Brechungsgesetzes ergibt sich:

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos\beta} - \frac{2nd \sin^2\beta}{\cos\beta} \quad (28)$$

$$= 2nd \cos\beta \quad (29)$$

$$= 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}.$$

Berücksichtigen wir noch zusätzlich, dass bei Reflexion am optisch dichteren Medium ein Phasensprung von π (bzw. ein Gangunterschied von $\lambda/2$) auftritt, so erhalten wir schließlich für den Gangunterschied:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2}. \quad (30)$$

Bringt man in den Strahlengang eine Sammellinse, so interferieren die Teilbündel im Punkt P in der Brennebene der Linse. Dabei tritt maximale Intensität auf, wenn der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Für den Fall, dass der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt, löschen sich die Teilwellen aus.

Der Gangunterschied benachbarter Teilbündel hängt vom Einfallsinkel α (Neigungswinkel) des einfallenden Lichts ab. Ist das einfallende Licht nicht parallel, so dass mehrere Lichtbündel mit unterschiedlichen Einfallsinkel auf die Platte treffen (Abbildung 7c), so interferieren alle Teilbündel, die unter

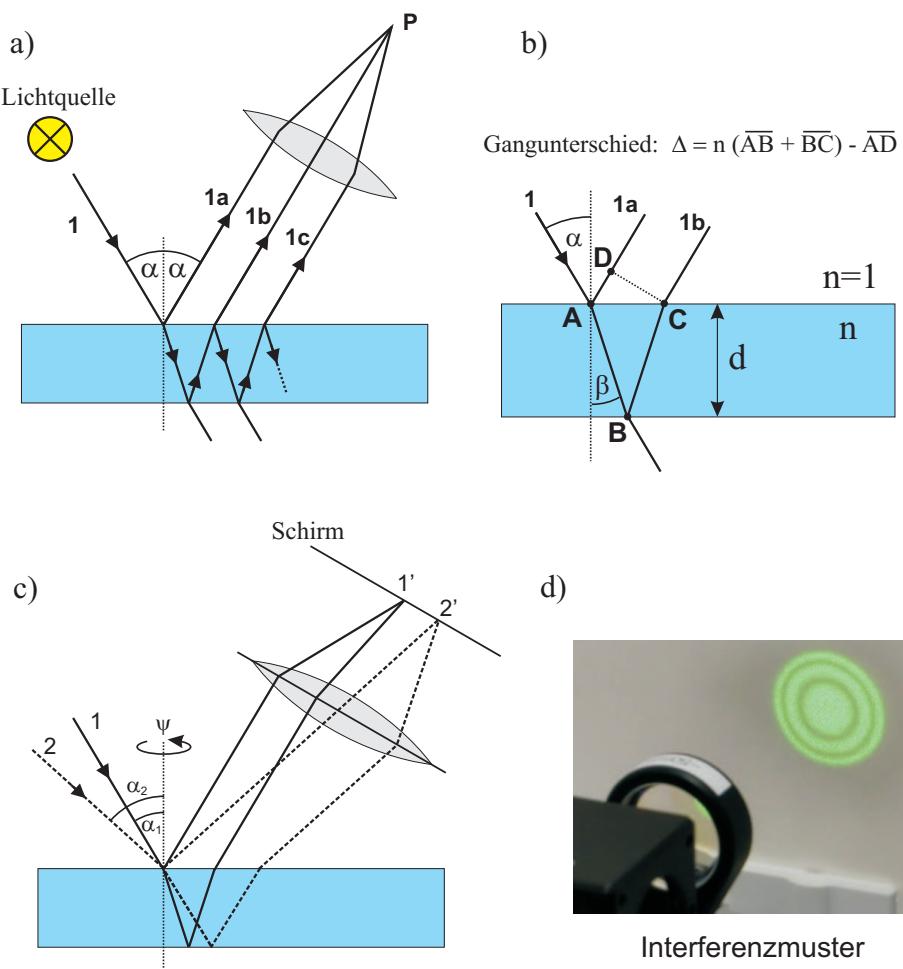


Abbildung 7: a) Interferenz gleicher Neigung. b) Berechnung des Gangunterschieds benachbarter Teilbündel. c) Strahlengang für zwei Lichtbündel mit unterschiedlichem Einfallswinkel. d) Interferenzmuster: Haidinger'sche Ringe.

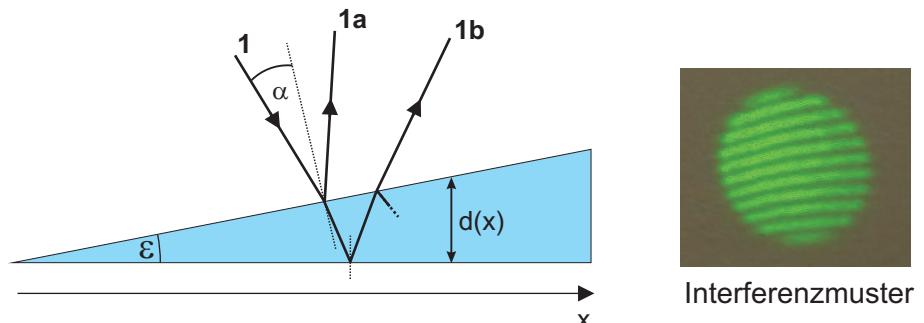


Abbildung 8: Interferenz gleicher Dicke.

dem gleichen Neigungswinkel einfallen im selben Punkt. Daher spricht man von Interferenz gleicher Neigung.

Abbildung 7c) zeigt nur einen zweidimensionalen Spezialfall, bei dem die Wellenbündel in der gleichen EinfallsEbene auf die Platte treffen. Im Dreidimensionalen, bei dem die Wellenbündel auch unter unterschiedlichen Winkel ψ zum Einfallslot einfallen, interferieren alle Teilwellen, die den gleichen Neigungswinkel α besitzen, nicht in einem Punkt, sondern innerhalb eines Kreisrings in der Brennebene der Linse. Als Interferenzmuster beobachtet man daher ein konzentrisches Ringsystem, die als Haidinger'sche Ringe bezeichnet werden (Abbildung 7d).

Interferenzen gleicher Dicke

Fällt paralleles Licht auf eine keilförmige Platte, so verlaufen die reflektierten Lichtbündel nicht mehr parallel zueinander (Abbildung 8). Falls der Keildinkel ϵ sehr klein ist, gilt für den Gangunterschied der Teilbündel 1a und 1b

$$\Delta \approx 2d(x)\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \quad (31)$$

Fällt das Licht zudem fast senkrecht auf den Keil, so gilt $\sin \alpha \approx 0$ und somit

$$\Delta \approx 2d(x)n - \frac{\lambda}{2}. \quad (32)$$

Der Gangunterschied ändert sich mit der Keildicke $d(x)$. Nur in einem Streifen parallel zur Keilkante, d.h. für $d(x) = \text{konstant}$, ist der Gangunterschied

gleich groß. Blickt man von oben auf den Keil, so beobachtet man daher ein Streifenmuster (Fizeau-Streifen).

Das Michelson-Interferometer

Der Aufbau eines Michelson-Interferometers ist in Abbildung 9a) skizziert. Die von einer Lichtquelle ausgehenden Wellenzüge treffen auf einen Strahlteiler, der das einfallende Licht in zwei Teilwellen gleicher Intensität aufteilt. Der eine Teil wird senkrecht zur Einfallsrichtung „nach oben“ abgelenkt, der andere Teil wird nicht abgelenkt und läuft weiter in den „linken“ Schenkel. Nach dem Durchlaufen einer Wegstrecke s treffen die Teilwellen jeweils auf einen weiteren Endspiegel, der das Licht zurückreflektiert. Der Endspiegel im linken Schenkel des Interferometers (beweglicher Spiegel) ist zudem um eine Distanz Δx verschiebbar. Der kippbare Spiegel im oberen Schenkel lässt sich um einen kleinen Winkel ϵ verkippen. Die reflektierten Wellenbündel treffen wieder auf den Strahlteiler und verlassen diesen in gleicher Richtung. Schließlich treffen beide Wellenbündel auf einem Schirm oder Detektor, an dem sich die entstehenden Interferenzmuster beobachten lassen.

Die optischen Lichtwege in den jeweiligen Schenken sind je nach Position des beweglichen Spiegels unterschiedlich groß. Zum besseren Verständnis können wir uns die jeweiligen Lichtwege in der gleichen Richtung vorstellen, indem wir uns z.B. den linken Schenkel um 90° auf den oberen Schenkel geklappt denken. Dadurch ändern sich nicht die tatsächlich durchlaufenen Lichtwege. Es wird aber ersichtlich, dass die beiden Spiegel eine Luftplatte der Dicke Δx bilden und je nach Orientierung des kippbaren Spiegels, entweder Interferenz gleicher Neigung oder Interferenz gleicher Dicke auftritt (Abbildung 9b).

Bei parallelen Spiegeln (Interferenz gleicher Neigung) beträgt der Gangunterschied in Richtung des Winkels α gemäß Gleichung (30):

$$\Delta = 2\Delta x \cos \alpha - \frac{\lambda}{2}, \quad (33)$$

wobei wir hier für den Brechungsindex $n = 1$ angenommen haben. Als Interferenzmuster beobachtet man ein Ringsystem wie es in Abbildung 10 für unterschiedliche Spiegelabstände Δx dargestellt ist. Die Interpretation dieses Musters ist besonders einfach, wenn wir uns nur auf das Zentrum, d.h. $\alpha = 0$, beschränken. Hierfür folgt aus (33):

$$\Delta|_{\alpha=0} = 2\Delta x - \frac{\lambda}{2}. \quad (34)$$

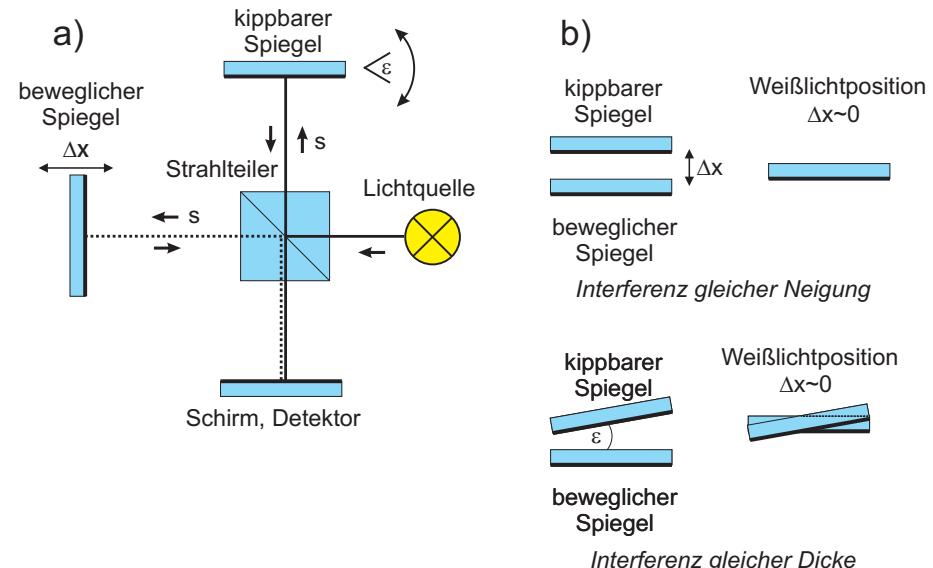


Abbildung 9: a) Aufbau eines Michelson-Interferometers. b) Die beiden Endspiegel bilden eine „Luftplatte“, so dass je nach Spiegelstellung entweder Interferenz gleicher Neigung oder Interferenz gleicher Dicke auftritt.

Für $\Delta x = \lambda/2$ beträgt der Gangunterschied $\lambda/2$, so dass im Zentrum das Minimum 0-ter Ordnung liegt. Sind die Spiegel um $\Delta x = 3\lambda/4$ verschoben, beträgt der Gangunterschied λ . Im Zentrum liegt dann das Maximum 1-ter Ordnung. Verändert man den Spiegelabstand kontinuierlich, so quillt bei jeder Wegänderung um $\lambda/2$ eine neue Interferenzordnung aus dem Zentrum hervor und die niedrigeren Ordnungen bewegen sich radial nach außen.

Wird der kippbare Spiegel um einen kleinen Winkel geneigt, so geht das kreisförmige Interferenzmuster in ein Streifenmuster über (Interferenz gleicher Dicke). Auch in diesem Fall führt eine Vergrößerung von Δx um $\lambda/2$ dazu, dass eine neue Interferenzordnung entsteht. Wird der bewegliche Spiegel kontinuierlich verschoben, so wandern die Interferenzstreifen gleichmäßig in eine bestimmte Richtung.

Dieses Prinzip lässt sich zur Bestimmung der Wellenlänge der Lichtquelle verwenden. Der bewegliche Spiegel kann mit Hilfe eines Motors messbar verschoben werden. Wird der Spiegel um die Strecke Δx verschoben, so wandern

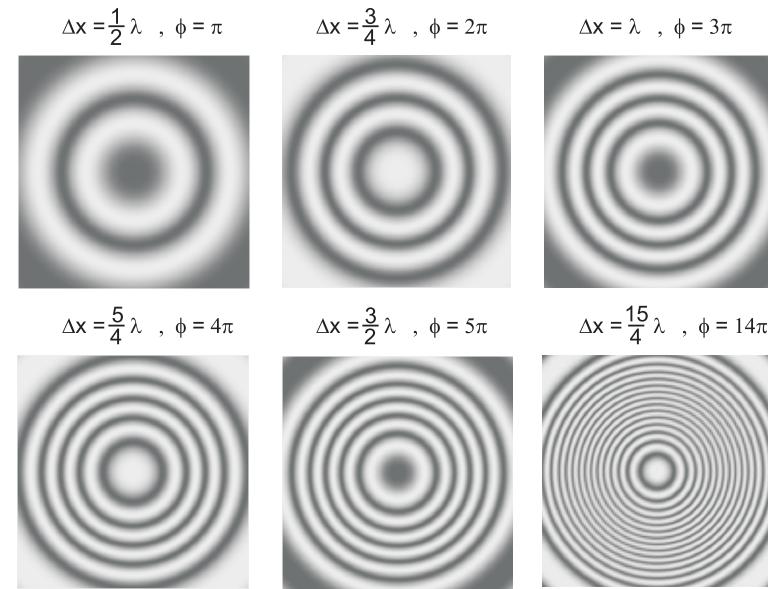


Abbildung 10: Interenzmuster bei unterschiedlichen Spiegelabständen.

Δm Interferenzstreifen an einer Markierung vorbei. Durch Messung von Δx und Zählung der dabei vorbeigelaufenen Interferenzstreifen Δm kann die Wellenlänge berechnet werden. Da jeder gezählte Streifen einer Änderung von Δx um $\lambda/2$ entspricht, folgt für die Wellenlänge:

$$\lambda = 2 \frac{\Delta x}{\Delta m}. \quad (35)$$

Des Weiteren sollen Sie interferometrisch den Brechungsindex von Luft bestimmen. Dazu wird in einem Interferometerschenkel eine Glasküvette eingebaut. Der Luftdruck in der Küvette kann mit Hilfe einer Pumpe und einem Nadelventil variiert werden. Ändert sich der Druck in der Küvette, so ändert sich der Brechungsindex Δn und damit die optische Weglänge. Auf einem Schirm kann man dann wieder Δm Interferenzstreifen an einer Markierung vorbeilaufen sehen. Ist a die Länge der Küvette, so folgt für die Änderung des Gangunterschieds

$$\Delta = 2a\Delta n. \quad (36)$$

Die Zwei berücksichtigt, dass die Küvette von dem Lichtbündel zweimal durchlaufen wird. Mit $\Delta = \lambda\Delta m$ folgt:

$$\Delta m = \frac{\Delta}{\lambda} = 2a \frac{\Delta n}{\lambda} \rightarrow \Delta n = \frac{\lambda}{2a} \Delta m. \quad (37)$$

Der Brechungsindex wird über den ganzen verfügbaren Bereich $\Delta n = n(\text{Luft}) - n(\text{Vakuum}) = n - 1$ variiert, indem der Druck in der Küvette von $p = 0$ bis $p = b$ (b : Luftdruck) verändert wird und man dabei die am Marker vorbeilaufenden Interferenzstreifen Δm zählt. Dann ist

$$n(\lambda, T, b) - 1 = \frac{\lambda}{2a} \Delta m(b). \quad (38)$$

Mit dem Michelson-Interferometer lassen sich auch Interferenzen mit Lichtquellen beobachten, die eine sehr kleine Kohärenzlänge besitzen (z.B. Leuchtdiode, Glühbirne). Voraussetzung dafür ist, dass der Gangunterschied in den beiden Interferometern nicht größer ist als die Kohärenzlänge. Daher müssen zur Beobachtung dieser sogenannten „Weißlichtinterferenzen“ die Lichtwege in den beiden Schenkeln nahezu gleich groß sein. Diese Einstellung, bei der der bewegliche Spiegel so justiert ist, dass $\Delta x \approx 0$ gilt, bezeichnet man als Weißlichtposition (Abbildung 9b).

VI Durchführung des Versuchs

Achtung:

Optische Elemente wie Linsen und Spiegel sind äußerst empfindlich. Nicht benötigte Elemente in der Lochplatte aufbewahren. Die Oberflächen niemals mit den Fingern berühren. Nicht direkt in den Laser und die Leuchtdiode blicken. Schalten Sie diese aus falls sie nicht benötigt werden.

VI.1 Justierung des Interferometers

Der Aufbau des im Praktikum verwendeten Michelson-Interferometers ist in Abbildung 11 dargestellt. Der Aufbau entspricht im wesentlichen der Skizze in Abbildung 9a). Auf der rechten Seite können zwei verschiedene Lichtquellen (Laser oder Leuchtdiode) montiert werden. Das Licht trifft auf einen fest

justierten Strahlteilerwürfel. Ein Teilstrahl wird nach links zum beweglichen Spiegel geleitet, der andere nach oben zu dem festen Spiegel. Die Interferenz der Teilstrahlen lassen sich auf einem Schirm beobachten und können zusätzlich mit einer Fotodiode elektronisch detektiert werden. Im oberen Schenkel auf Position 3 kann zur Messung des Brechungsindex von Luft noch eine evakuierbare Glasküvette eingesetzt werden. Die Position des beweglichen Endspiegels im linken Interferometerschenkel kann mit Hilfe eines Motors eingestellt werden. Die Bedienelemente der Motorsteuerung sind in Abbildung 11 unten dargestellt. Mit dem linken Wipptaster (VELOCITY) kann der Spiegel kontinuierlich verfahren werden. Wird der Taster nach vorne gedrückt, so bewegt sich der Spiegel in Richtung des Strahlteilers. Die beiden Taster (MOVE/JOG) rechts bewegen den Spiegel um eine feste Distanz. Der obere Taster verschiebt den Spiegel um 3 mm in Richtung des Strahlteilers, der untere Taster entsprechend 3 mm vom Strahlteiler weg. Die Position des Spiegels kann mit einer Messuhr gemessen werden.

Entfernen Sie die evakuierbare Kuvette falls sich diese im Strahlengang befindet. Der bewegliche Spiegel sollte sich zunächst nicht im Bereich der Weißlichtposition befinden. Um dies sicherzustellen, verfahren Sie den Spiegel am einfachsten auf die Nullposition der Messuhr. Die Arbeitshöhe wird durch eine Irisblende festgelegt. Platzieren Sie diese in der Halterung 1 (Abbildung 11) und stellen Sie den Durchmesser der Öffnung auf etwa 0,5 mm ein. Platzieren Sie den grünen Diodenlaser in der Halterung ganz rechts und justieren Sie diesen so, dass er zentrisch auf die Irisblende trifft. Anschließend die Iris in den Halter bei Position 2 stecken. Blenden Sie den vertikalen Strahl aus, indem Sie den Schirm in den Halter bei Position 3 stecken. Justieren Sie den linken, beweglichen Spiegel so, dass der reflektierte Strahl zentrisch auf die Irisblende des Detektors trifft. Dazu befinden sich auf der Rückseite der Spiegelhalterung zwei Mikrometerschrauben mit denen Sie den reflektierten Strahl in horizontaler und vertikaler Richtung verschieben können. Die Mikrometerschrauben vorsichtig einstellen und auf keinen Fall überdrehen.

Analog verfahren Sie mit dem festen Spiegel. Blenden Sie den horizontalen Strahl aus (Schirm auf Position 1) und justieren Sie den festen Spiegel so, dass der Strahl zentrisch auf die Irisblende des Detektors trifft. Entfernen Sie danach die Irisblende aus dem Aufbau und stellen Sie den Schirm auf den Halter vor dem Detektor. Eventuell sehen Sie jetzt schon ein Interferenzmuster. Weiten Sie den Laser etwas auf. Montieren Sie dazu die -50 mm Linse in den Halter auf Position 4. Nun sollten Sie Interferenzen beobachten können. Falls die Streifen sehr eng beieinander liegen, können Sie diese durch vorsichtiges Nachjustie-

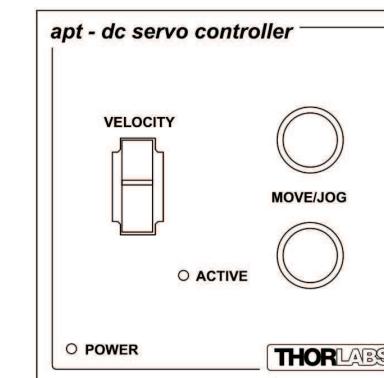
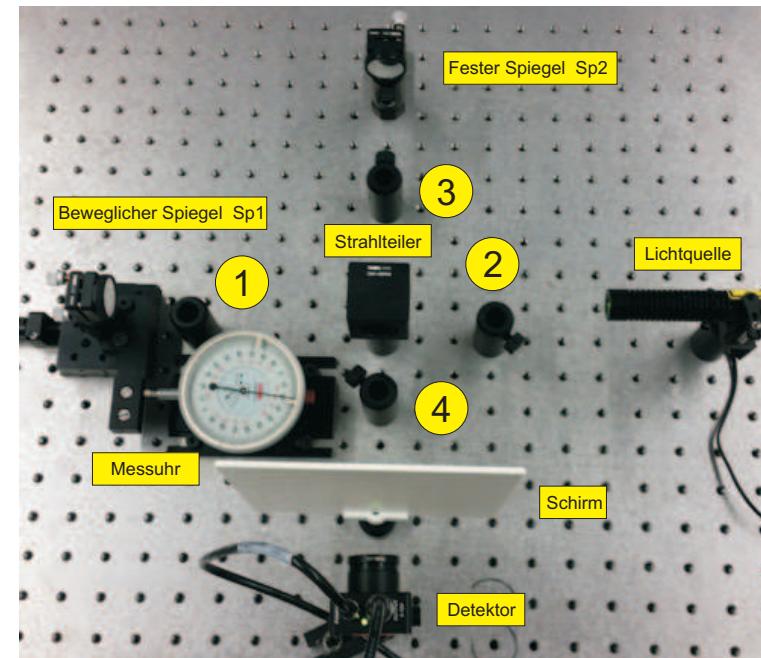


Abbildung 11: Oben: Aufbau des im Praktikum verwendeten Michelson-Interferometers. Unten: Bedienoberfläche der Motorsteuerung.

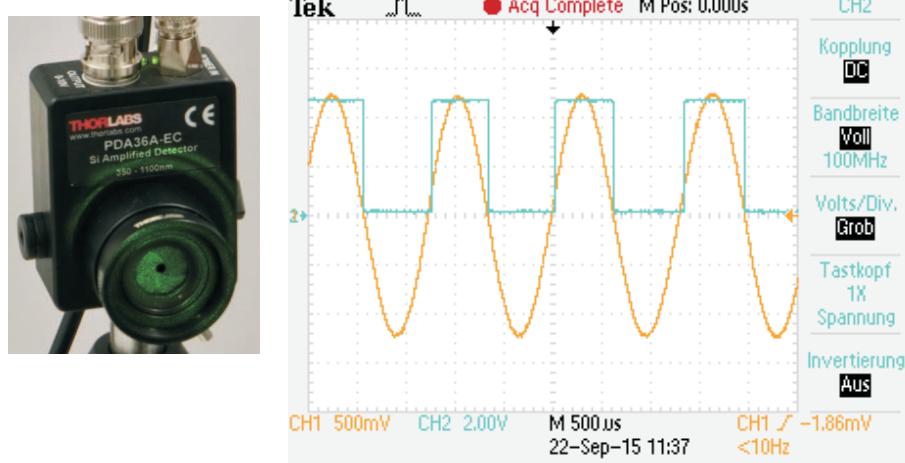


Abbildung 12: Links: Einstellung des Interferometers und des Detektors zur Messung der Wellenlänge. Rechts: Messung der Signale mit einem Oszilloskop.

ren einer der Spiegel auseinander schieben. Um ein Ringsystem beobachten zu können brauchen wir divergentes Licht. Platzieren Sie daher auf Position 2 die Linse +200 mm und richten Sie diese symmetrisch aus. Nun sollten Sie ein Ringsystem beobachten. Mit den Mikrometerschrauben an den Spiegeln können Sie das Interferenzmuster symmetrisch auf den Detektor ausrichten.

VI.2 Messung der Wellenlänge

Verstellen Sie den festen Spiegel so, dass Sie etwa 2 bis 3 Interferenzringe auf dem Detektor beobachten. Die Öffnung der Irisblende am Detektor auf einen Durchmesser von etwa 1 mm einstellen (Abbildung 12 links). Schalten Sie das Oszilloskop ein. An Kanal 1 ist direkt das Detektorsignal angeschlossen. Dieses Signal wird zusätzlich auf den Eingang eines Diskriminators gegeben. Die Elektronik bewirkt, dass das Signal nochmals verstärkt wird und in ein Rechtecksignal umgewandelt wird (Abbildung 12 rechts). Jeder Impuls entspricht einem Interferenzmaximum. Die Maxima werden mit dem integrierten Zähler gezählt.

Bei der Messung der Wellenlänge ist es wichtig, dass tatsächlich jeder Interferenzstreifen detektiert und gezählt wird. Verfahren Sie dazu mit dem Wipp-

taster der Motorsteuerung den beweglichen Spiegel und beobachten Sie das Oszilloskopbild. Bei jedem Maximum des Sinussignals muss der Diskriminator einen Rechteckpuls ausgeben. Falls dies nicht der Fall ist, können Sie folgendes optimieren:

- Variierung des Durchmessers der Irisblende am Detektor.
- Verstärkung des Detektors (Drehschalter am Detektorgehäuse auf 60 dB bzw. 70 dB stellen).
- Verstärkung des Diskriminators.

Die Irisblende sollte nicht zu groß eingestellt werden, sonst mitteln Sie über das Interferenzmuster. In der Regel reicht es aus die Verstärkung am Diskriminator zu optimieren. Die Verstärkung sollte aber auch nicht zu groß gewählt werden, sonst wird der Aufbau zu empfindlich und anfällig gegen kleinste Erschütterungen.

Machen Sie sich mit der Messuhr vertraut. Ein Teilstrich entspricht $1 \mu\text{m}$, eine volle Zeigerumdrehung $0,2 \text{ mm}$. Fahren Sie den Spiegel in Richtung Messuhr und stellen Sie die Position auf einen Startwert s_a z.B. $s_a=0$. Es ist völlig egal ob der Startwert 0 oder etwa 0,1 ist. Wichtig ist, dass Sie beim Einnehmen der Startposition nicht die Verfahrrichtung des Motors ändern. Falls Sie die Verfahrrichtung ändern zeigt die Messuhr solange nichts an, bis das Spiel der Getriebespindel ausgeglichen ist. Notieren Sie den Startwert s_a . Ab jetzt sind alle Erschütterungen zu vermeiden. Drücken Sie die Resettaste am Zähler und starten Sie den Motor indem Sie den rechten oberen Knopf am Motorcontroller vorsichtig drücken. Der Spiegel bewegt sich nun ca. 3 mm und die dabei durchlaufenen Interferenzmaxima werden vom Zähler registriert. Notieren Sie sobald der Spiegel angehalten hat sofort die gemessenen Impulse. Danach notieren Sie die Endposition s_e der Messuhr.

Diese Messung ist insgesamt fünfmal mit jeweils anderen Werten für s_0 durchzuführen. Da die Messuhr maximal 5 mm aufnehmen kann, muss die Startposition kleiner als 2 mm sein. Für die Wellenlänge gilt dann

$$\lambda = 2 \frac{s_e - s_a}{m}, \quad (39)$$

wobei m die gezählten Impulse sind. Die Genauigkeit der Messuhr können Sie aus dem ausliegenden Datenblatt entnehmen.

VI.3 Messung des Brechungsindex von Luft

Als Lichtquelle wird weiterhin der grüne Laser benutzt. Platzieren Sie vor dem Detektor den Schirm und vor dem festen Spiegel auf Position 3 die Küvette. Entfernen Sie die +200 mm Linse und stellen Sie den festen Spiegel so ein, dass Sie auf dem Schirm 2 Interferenzstreifen sehen. Schließen Sie das Nadelventil indem Sie den Einstellknopf ganz nach rechts drehen. Schalten Sie die Vakuum-pumpe ein und öffnen Sie den Absperrhebel solange, bis sich der Druck in der Küvette nicht mehr ändert. Danach den Absperrhebel wieder schließen und die Pumpe ausschalten. Kleben Sie auf den Schirm eine Haftnotiz und markieren Sie auf dieser den Mittelpunkt eines Streifens.

Mittels des Nadelventils lässt man in die evakuierte Gaszelle langsam Luft einströmen und liest nach je 5 oder 10 Streifenverschiebungen das Manometer ab (p_0, p_5, p_{10}, \dots). Falls Sie allein arbeiten, müssen Sie bei der Ablesung des Manometerwertes das Nadelventil schließen und anschließend wieder öffnen. Führen Sie die Messung dreimal durch und notieren Sie die Zimmertemperatur.

VI.4 Messung der Kohärenzlänge einer Leuchtdiode

Entfernen Sie die Küvette aus dem Strahlengang. Bauen Sie wieder die 200 mm Linse auf Position 2 ein. Verfahren Sie den beweglichen Spiegel in den Bereich der Weißlichtposition. Der ungefähre Wert ist auf dem Interferometer angegeben. Stellen Sie den festen Spiegel so ein, dass Sie sehr große Interferenzstrukturen sehen, d.h. möglichst nur einen Ring. Anstatt des Lasers bauen Sie nun die Leuchtdiode ein. Entfernen Sie die -50 mm Linse vor dem Detektor und richten Sie die Leuchtdiode so aus, dass Sie den Schatten des Strahlteilers zentrisch auf dem Detektor sehen. Die Öffnung der Irisblende am Detektor sollte etwa 1-2 mm sein. Die Verstärkung des Detektors auf das Maximum einstellen (70 dB).

Da die Kohärenzlänge der Leuchtdiode sehr klein ist, sind Interferenzen nur über einen sehr kleinen Verfahrweg beobachtbar. Um diese mit dem Oszilloskop darzustellen, muss das Oszilloskop im Single- Modus betrieben werden. In diesem Modus „wartet“ das Oszilloskop auf ein Signal einer gewissen Größe, welches Sie mit dem Triggerlevel einstellen können. Sobald ein Signal anliegt welches den Level übersteigt, beginnt das Oszilloskop mit der Aufzeichnung und speichert den Signalverlauf. Eine Anleitung zur Einstellung des Single-Modus liegt aus.

Stellen Sie die y-Ablenkung auf 50 mV und legen Sie den Triggerlevel gerade etwas über den Rauschpegel, so dass das Oszilloskop im Single- Modus nicht

auslöst. Stellen Sie das Oszilloskop scharf und verfahren Sie den beweglichen Spiegel in Richtung Strahlteiler. Dazu den Wippschalter des Motorcontrollers ganz nach oben drücken und halten. Sobald Sie auf die Weißlichtposition kommen löst das Oszilloskop aus und speichert das Signal. Lassen Sie dann sofort den Wippschalter los und stellen Sie den Schirm vor den Detektor. Fahren Sie den Spiegel **sehr langsam** in die entgegengesetzte Richtung bis Interferenzen sichtbar werden.

Entfernen Sie den Schirm und wiederholen Sie die Messung mit optimierten Oszilloskopeinstellungen. Entfernen Sie sich etwa eine Umdrehung der Messuhr von der Weisslichtposition und fahren Sie dann mit maximaler Geschwindigkeit zurück durch die Weisslichtposition (Wippschalter ganz durchdrücken). Sie sollten ein Signalverlauf bekommen, wie in Abbildungen 6d) dargestellt. Speichern Sie den Signalverlauf auf einen USB- Stick. Anleitung dazu liegt aus.

VII Auswertung

zu 2.

Berechnen Sie die Wellenlänge des grünen Lasers unter Berücksichtigung des statistischen Fehlers (Messreihe) und des systematischen Fehlers (Messuhr). Vergleichen Sie diesen Wert mit den Herstellerangaben: $\lambda = (532 \pm 1)$ nm.

zu 3.

Berechnen Sie den Brechungsindex von Luft für Normalbedingungen. Ist n_0 der Brechungsindex bei Normalbedingungen, dann gilt:

$$\frac{n_0 - 1}{n(p) - 1} = \frac{p_0 T}{p T_0}. \quad (40)$$

Mit Hilfe von Gleichung (38) folgt dann:

$$(n_0 - 1) = (n - 1) \frac{p_0}{p} \frac{T}{T_0} = \frac{\lambda}{2a} \frac{\Delta m}{p} \frac{p_0 T}{T_0}, \quad (41)$$

wobei T die Temperatur während der Messung ist und die mit 0 indizierte Größen sich auf Normalbedingungen beziehen ($T_0=273,15$ K, $p_0=101325$ Pa). Tragen Sie in einem Diagramm Δm über den Druck p auf und bestimmen Sie Steigung $\Delta m/p$. Damit können Sie aus Gleichung (41) n_0 bestimmen. Für die Wellenlänge setzen Sie entweder den Literaturwert ein oder den von Ihnen zuvor bestimmten Wert. Das Innenmaß der Küvette beträgt $a = (50 \pm 0,05)$ mm.

Das Manometer besitzt eine Güteklaasse von 0,6. Eine beliebige Ablesung kann um maximal 0,6% vom Skalenendwert (800 Torr) falsch sein, also um knapp 5 Torr. Dieser systematische Fehler der Absolutanzeige sollte sich bei Differenzmessungen zwar weitgehend herausheben, es muss jedoch damit gerechnet werden, dass auch die relative Teilungsgenauigkeit der Skala nicht viel besser als 0,6% ist (d.h. 1 Teilstreich 5 Torr $\pm 0,6\%$).

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert ($n_0=1,00028$).

zu 4.

Stellen Sie den gemessenen Signalverlauf grafisch da. Fitten Sie eine Gausskurve als Einhüllende an die Daten. Aus der Breite der Gaussverteilung (σ oder Halbwertsbreite) können Sie die Kohärenzlänge der Leuchtdiode abschätzen. Die Verfahrgeschwindigkeit beträgt 0,1 mm/s.

Versuch 233 Fourieroptik

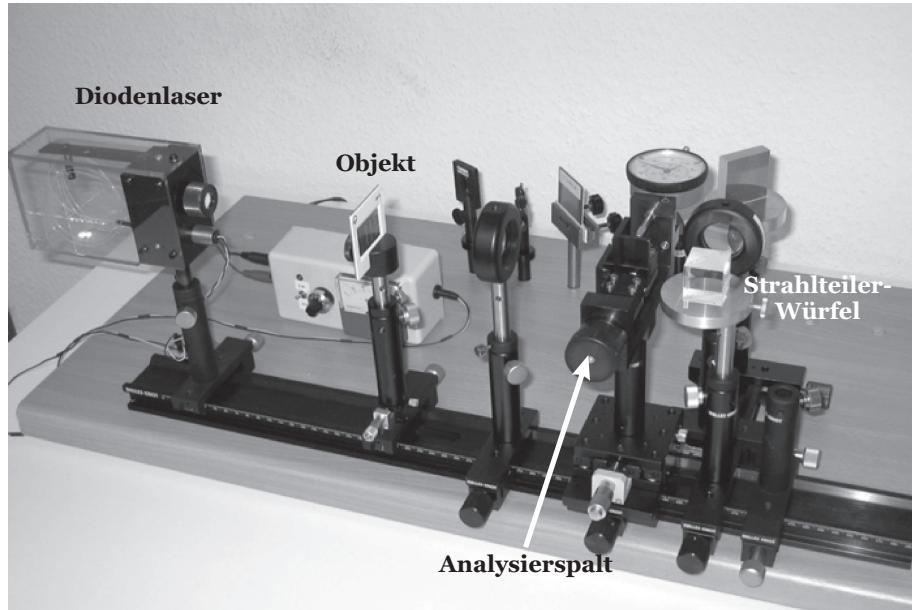


Abbildung 1: Versuchsaufbau: optische Bank.

I Messaufbau

- Singlemode Glasfaser-gekoppelter Diodenlaser mit regelbarer Stromversorgung und Justieroptik für einen Parallelstrahl
- Ein Satz Beugungsobjekte: Spalte, Doppelspalt, Gitter, Kreuzgitter, Spalt mit gaussförmigem Transmissionsprofil
- Verschiedene sphärische und Zylinder-Linsen
- Strahlteiler

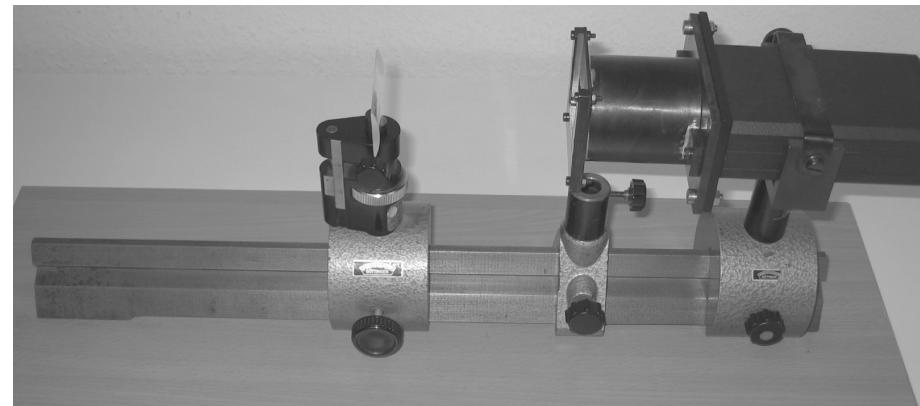


Abbildung 2: Versuchsaufbau: Zeilenkamera mit Zylinderlinse.

- Graufilter
- Spiegel
- Verschiedene Fest-Reiter
- Feinjustierbare Verschiebereiter
- Symmetrisch öffnender Analysierspalt
- Verschiedene schmale Metallstreifen als Modenblende
- SCDD-Zeilenkamera mit PC und Monitor zur Aufnahme von Beugungsbildern und „Objektbildern“, sowie Drucker

II Literatur

- Hecht, „Optics“, Addison-Wesley Publishing Company
- Klein-Furtak, „Optik“, Springer Verlag
- Demtröder, „Experimentalphysik 2“, Springer Verlag
- Homepage des Praktikums
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Software.php>

III Motivation

Der vorliegende Versuch soll zu einem vertieften Verständnis der Theorie der optischen Abbildung beitragen. Es wird dabei die Rolle der Beugung am Objekt, also des abzubildenden Gegenstandes, beim Zustandekommen des Objektbildes untersucht. Das Beugungsbild des Objektes entsteht zum ersten Mal in der Brennebene einer Linse, die hinter dem Objekt aufgestellt ist. Es heißt – aus Gründen, die im Lauf der Lektüre verständlich werden sollen – auch „Fourierbild“, die Brennebene, in der es entsteht, nennt man „Fourierebene“. Ernst Abbe, der Jenaer Physiker, der sich 1873 mit den Fragen der prinzipiellen Auflösung eines Mikroskopes befasste, nannte das Beugungsbild das „primäre Bild“ und das übliche Bild des Objektes das „sekundäre Bild“. In der Betrachtungsweise der Fourieroptik ist ein Bild, das von einer Linse entworfen wird, die Summe – das Integral aller am Objekt gebeugten Teillichtbündel. Die Linse erfüllt dabei nur die Funktion, diese Teilbündel im Endlichen – der Bildebene – zusammenzuführen. Um zu untersuchen, welchen Beitrag die verschiedenen Beugungsordnungen zum entstehenden Bild liefern – also dessen Helligkeitsverteilung, Bildschärfe – erlaubt es der Aufbau, u.a. gezielt in der Fourierebene einzelne Beugungsordnungen auszublenden bzw. zuzulassen und am Bild zu verfolgen, wie sich dabei dessen Struktur ändert.

An dem formal besonders einfach zu behandelnden aber auch als Modell besonders wichtigen Objekt „Spalt“ wird zunächst die Intensitätsverteilung über die Spaltbreite bei Zulassung einer zunehmenden Zahl von Beugungsordnungen zum Spaltbild mit einer empfindlichen CCD-Zeilenkamera gemessen. Die jeweils beobachtbaren charakteristischen Bildstrukturen können mit den Ergebnissen einer theoretischen Analyse verglichen werden, in welcher das Bild aus den jeweils zur Abbildung zugelassenen Beugungsordnungen wieder mehr oder minder vollständig zusammengesetzt wird. Diese theoretische Analyse wird mit Hilfe von Python auf einem PC durchgeführt, wobei mit wenigen Programmzeilen Fourierintegrale bestimmt und damit errechnete Spaltbilder geplottet werden können. An dem etwas komplexeren aber immer noch mathematisch genau und einfach zu behandelnden Doppelspalt werden analoge Untersuchungen durchgeführt. Darüberhinaus wird an diesem Modellobjekt das Problem der Auflösung der Doppelstruktur experimentell sowie durch Simulationsrechnungen mit Python untersucht.

IV Vorbereitung

Machen Sie sich vertraut mit den Themen der geometrischen Optik, der optischen Abbildung (Linsenformel, Abbildungsmaßstab), der Fraunhoferbeugung und den mathematischen Regeln der Fouriertransformation. Schauen Sie sich auch nochmals den Versuch „Optische Abbildung“ an, den Sie im Praktikum I durchgeführt haben.

V Aufgaben

Ein einfacher optischer Aufbau mit wenigen Linsen, einem Strahlteiler sowie einem kleinen Diodenlaser als spektral schmale, intensive Parallellichtquelle ermöglicht es, simultan sowohl das Beugungsbild des Objektes (hier Spalte, Gitter, Kreuzgitter etc.) als auch das übliche Bild des Objektes selbst darzustellen. Durch Eingriffe in der „Fourierebene“ – das ist die Ebene, in der die Beugungsstruktur erstmals auftritt – werden gezielt die Beiträge der einzelnen Beugungsordnungen zum Objektbild sichtbar gemacht und können quantitativ verfolgt werden.

Folgende Aufgaben sollen bearbeitet werden:

1. Aufbau der benötigten optischen Anordnung.
2. Registrierung und Ausmessung der Beugungsfigur eines Einfachspaltes mit einer CCD-Kamera.
3. Registrierung und Ausmessung des Spaltbildes mit der CCD-Kamera bei gezielten Manipulationen (Ausblenden/Zulassen verschiedener Beugungsmaxima) in der „Fourier-Ebene“ (Fouriersynthese).
4. Zu Aufgabe 2 und 3 analoge Untersuchungen an einem Doppelspalt. Aufsuchen von Beugungsfigur und Objektbild, zunächst mit dem Auge, dann mit der Kamera. Messungen zur Grenze der Auflösung der Doppelstruktur.
5. Quantitativer Vergleich der bei 2.) bis 4.) gemessenen Strukturen mit den theoretisch zu erwartenden Intensitätsprofilen. Simulation des Grenzfalles „Verschwinden der Doppelstruktur“ beim Doppelspalt mit Hilfe von Python und Vergleich mit dem Experiment.
6. Qualitative Beobachtung verschiedener Beugungsobjekte bei Manipulationen in der Fourierebene (Liniengitter, Kreuzgitter, beugungsfreier Spalt,...).

VI Grundlagen

Die „klassische“ Theorie der Beugung

Prinzipiell gibt es zwei Versuchsanordnungen, mit denen sich Beugungerscheinungen untersuchen lassen. Bei der Fresnelschen Beugung (Abbildung 3a), die den allgemeinen Fall der Beugung beschreibt, befinden sich die Lichtquelle und die Beobachtungsebene in einem endlichen Abstand zum beugenden Objekt. Diese Anordnung führt dazu, dass die im Punkt A interferierenden Lichtbündel unter verschiedenen Winkeln gebeugt werden. Die mathematische Behandlung dieser Beugungerscheinung ist daher äußerst kompliziert. Einfacher gestaltet sich der Fall, wenn nur parallele Lichtbündel vorhanden sind. Bei dieser sogenannten Fraunhoferschen Beugung (Abbildung 3b) befindet sich die Lichtquelle im Unendlichen, so dass das beugende Objekt von parallelem Licht beleuchtet wird. Da alle Lichtbündel parallel sind, interferieren diese im Unendlichen. Will man die Intensitätsverteilung in einem endlichen Abstand beobachten, so ist dies mit einer Sammellinse hinter dem beugenden Objekt möglich. Die Beugungsstrukturen lassen sich dann in der Brennebene der Linse beobachten (Denken Sie an die elementaren Linsengesetze: Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen). Überlegen Sie sich, dass die Größe der Beugungsstruktur von der Brennweite der verwendeten Linse abhängt.

Wir wollen hier nur auf die Fraunhofersche Beugung eingehen und als Beispiel die Beugung an einem Spalt untersuchen.

Ein Spalt (Abbildung 4) wird von einem parallelen und monochromatischen Lichtstrahl der Wellenlänge λ beleuchtet. Wir können infolgedessen sagen, dass alle Punkte des Spaltes mit gleicher Amplitude E_0 und Phase $\varphi = \omega t$ erregt werden:

$$E(\text{Spalt}) = E(y) = E_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

Die Breite des Spaltes d werde in y-Richtung gemessen, der Nullpunkt liege in der Mitte des Spaltes. Zudem soll die Länge sehr groß gegenüber der Breite sein, so dass das einfallende Lichtbündel nur in einer Dimension begrenzt wird.

Gemäß dem Huygens- Fermat'schen Prinzip geht von jedem Punkt des Spaltes eine Elementarwelle aus, deren Überlagerung zu einer bestimmten Intensitätsverteilung im Unendlichen, bzw. in der Brennebene einer Linse, führt. Wir müssen dazu alle Teilbündel untersuchen, die parallel zueinander in einer bestimmten Richtung α laufen. Mathematisch bedeutet dies die Aufintegration ebener Wellen aus den Quellpunkten des Spaltes:

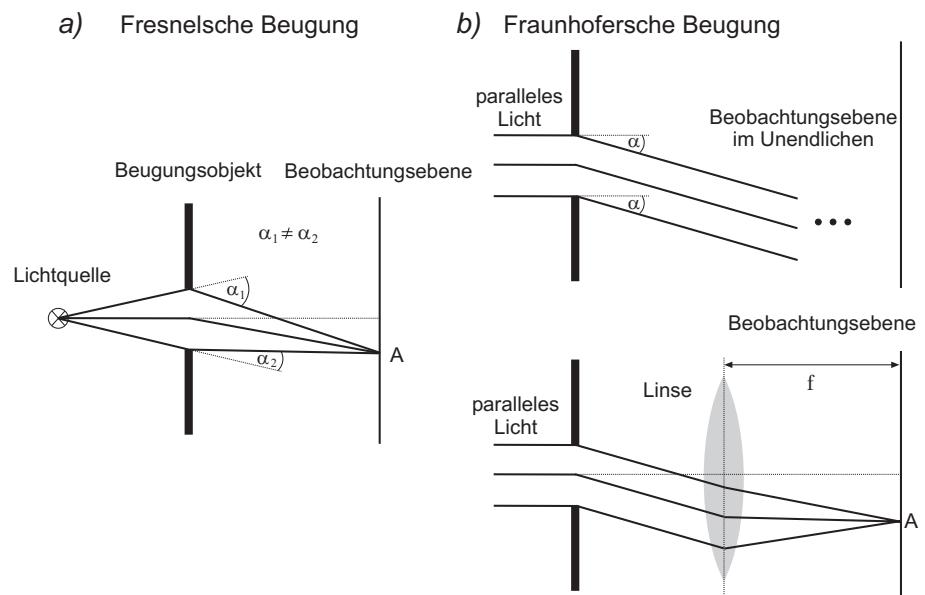


Abbildung 3: a) Fresnelsche Beugung. b) Fraunhofersche Beugung. Die Beobachtungsebene lässt sich mit Hilfe einer Linse aus dem Unendlichen auf einen endlichen Abstand verlegen.

$$E_\infty(\alpha) = \int_{-d/2}^{+d/2} E_0 e^{i(\omega t - kl)} dy. \quad (2)$$

Hierbei ist $k = 2\pi/\lambda$ der Betrag des Wellenvektors. Aus Abbildung 4b ist zu erkennen, dass ein bei y ausgehendes Lichtbündel gegenüber einem vom Mittelpunkt des Spalts ausgehenden Lichtbündel einen Gangunterschied von $y \sin \alpha$ aufweist. Für die Weglänge l gilt dann:

$$l = R + y \sin \alpha. \quad (3)$$

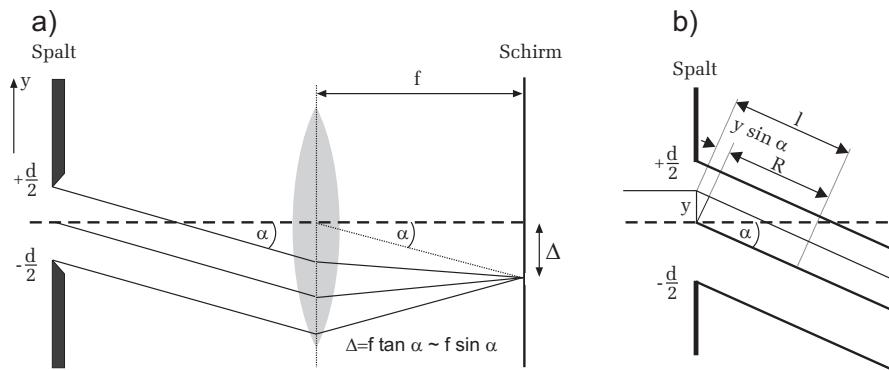


Abbildung 4: a) Fraunhofersche Beugung am Spalt. Das in Richtung α gebeugte Parallellichtbündel wird auf einen Punkt in der Brennebene der Linse, im Abstand Δ von der optischen Achse abgebildet. b) Detailansicht zur Ermittlung des Gangunterschiedes eines von y ausgehenden Lichtbündels.

Einsetzen dieses Ausdrucks in Gleichung (2) und Ausführen des Integrals ergibt:

$$E_\infty(\alpha) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{e^{-ik \sin \alpha d/2} - e^{ik \sin \alpha d/2}}{-ik \sin \alpha} \quad (4)$$

$$= E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin(\pi d \sin \alpha / \lambda)}{\pi \sin \alpha / \lambda},$$

wobei wir die Beziehung

$$e^{\pm i\delta} = \cos \delta \pm i \sin \delta$$

benutzt haben. Setzen wir zur Abkürzung

$$x = \frac{d}{\lambda} \pi \sin \alpha$$

so erhalten wir

$$E_\infty(x) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin x}{x} d. \quad (8)$$

Zur Bestimmung der Intensität muss Gleichung (8) noch quadriert werden:

$$I_\infty(x) \propto \frac{\sin^2 x}{x^2} d^2 \propto I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad (9)$$

wobei $I_0 \propto d^2$ ist.
Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 5 dargestellt.

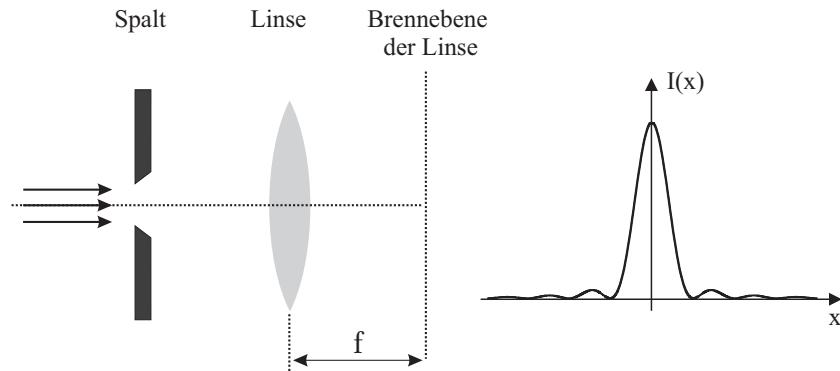


Abbildung 5: Intensitätsverteilung $I(x) = I_0 \sin^2(x)/x^2$ der Beugungsstruktur eines Spalts in der Brennebene der Linse (Fourier- Ebene).

Exkurs: Fourierreihen und Fourierintegrale

Aus der linearen Algebra ist Ihnen bekannt, dass ein Vektor durch eine Linearkombination von Basisvektoren dargestellt werden kann. Ähnliches ist Ihnen sicherlich auch schon in der Analysis begegnet. Auch hier gibt es Basissysteme, in denen sich Funktionen durch Linearkombination von „Basisfunktionen“ darstellen lassen. Am bekanntesten ist wohl die Taylorreihe. Dabei handelt es sich um eine Potenzreihe, die eine Funktion $f(x)$ um einen bestimmten x -Wert approximiert. Die Basisfunktionen sind in diesem Fall die Potenzfunktionen x^n .

Ein weiteres Basissystem stellen die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus dar. Nach dem Fourier-Theorem lassen sich **periodische Funktionen** durch eine Linearkombination dieser trigonometrischen Basisfunktionen in einer Fourierreihe entwickeln. Man bezeichnet dies als Fourierzerlegung, Fourieranalyse oder auch als harmonische Analyse.

Sei $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode L , d.h. $f(x+L) = f(x)$. Für

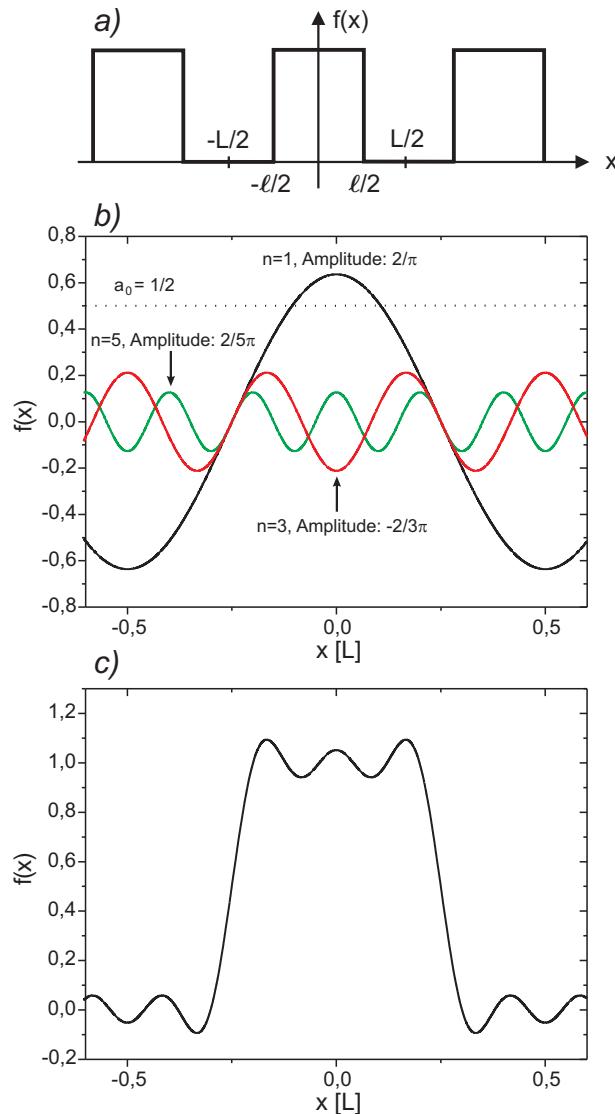


Abbildung 6: a): Rechteckfunktion mit der Periode L . b): Gleichanteil $a_0/2$, sowie die ersten drei Fourierterme. c): Summe aus Gleichanteil und den ersten drei Gliedern.

die Fourierdarstellung dieser Funktion gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \quad (10)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx \quad (11)$$

und

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx. \quad (12)$$

Wir wollen hier nicht auf die Herleitung dieser Gleichungen eingehen, sondern deren Aussagen an einem konkreten Beispiel diskutieren. Betrachten wir dazu eine Rechteckfunktion mit der Periode L , wie sie in Abbildung 6 a) dargestellt ist. Die Funktion $f(x)$ ist definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -l/2 < x < l/2 \\ 0, & l/2 > |x| > L/2. \end{cases} \quad (13)$$

Um diese Funktion in einer Fourierreihe gemäß Gleichung (10) darzustellen, müssen wir die Fourierkoeffizienten berechnen. Da die Rechteckfunktion gerade ist, d.h. $f(x) = f(-x)$, verschwinden, wie Sie leicht nachrechnen können, alle Koeffizienten b_n . Wir müssen daher nur die Koeffizienten a_n bestimmen. Für a_0 berechnen wir:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{-l/2}^{l/2} dx = \frac{2l}{L}. \quad (14)$$

Für die restlichen Koeffizienten a_n gilt:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-l/2}^{l/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\pi n \frac{l}{L}\right) \quad (15)$$

Betrachten wir als konkretes Beispiel eine Rechteckfunktion mit einem Tastverhältnis von $L:l = 2:1$ (Abbildung 6 a)). Aus Gleichung (10) und den oben berechneten Koeffizienten folgt dann für die Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right) + \frac{2}{5\pi} \cos\left(\frac{10\pi}{L}x\right) - \dots \quad (16)$$

In Abbildung 6 b) sind die ersten drei Glieder der Fourierreihe sowie der Gleichanteil $a_0/2$ grafisch dargestellt, darunter im Teilbild 6 c) die Summe dieser Terme. Zusätzlich zeigt Abbildung 7 noch die Fourierreihen bis hin zu $n = 27$. Je mehr Summanden (Ordnungen) in der Fourierreihe „mitgenommen“ werden, desto genauer nähert sich die Reihe der Rechteckfunktion an.

Die Fourieranalyse ist von außerordentlicher Bedeutung in vielen Bereichen der Physik. Ein anschauliches Beispiel findet sich für Funktionen, die ein zeitperiodisches Signal beschreiben, z.B. einen akustischen Ton oder ein elektrisches Signal. Ersetzen wir in Gleichung (10) die Variable x durch die Zeit t und wählen für die Periode L , die Periodendauer T , wobei gilt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (17)$$

so ergibt sich für die Fourierreihe einer periodischen, zeitabhängigen Funktion:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (18)$$

Dieser Ausdruck stellt eine Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen mit unterschiedlichen **Frequenzen** und **Amplituden** dar. Die Fourieranalyse gibt somit Auskunft über das Frequenzspektrum, aus dem sich ein zeitperiodisches Signal zusammensetzt. In Abbildung 8 ist das Spektrum eines zeitperiodischen Rechtecksignals dargestellt. Entlang der Abszisse ist die Frequenz aufgetragen. Die jeweiligen Amplituden entsprechen den Koeffizienten a_n .

Das Spektrum eines periodischen Signals ist stets diskret. Neben der Grundfrequenz ω (Grundton) treten auch Vielfache $n\omega$ auf, die als Obertöne oder n -te Harmonische bezeichnet werden.

In einer Fourierreihe lassen sich **nur** periodische Funktionen entwickeln. Aber auch nichtperiodische Funktionen lassen sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen darstellen. Eine nichtperiodische Funktion erhält man aus einer periodischen Funktion für den Grenzfall, dass die Periode gegen unendlich geht. In Abbildung 9 ist dies für einen Rechtekpuls, der sich aus einer periodischen Rechteckfunktion ableiten lässt, dargestellt. Bild a) zeigt das Spektrum bei einem Tastverhältnis von $L : l = 2 : 1$. Vergrößert man die Periode L bei gleich bleibender Pulsbreite l , so treten im Spektrum zusätzliche Moden auf. Die Teillbilder b) und c) zeigen dies für ein Tastverhältnis von $4 : 1$ bzw. $8 : 1$.

Für den Grenzfall $L \rightarrow \infty$ geht die Anzahl der Moden gegen unendlich und sind unendlich dicht gepackt (Abbildung 9 d). Es ist einleuchtend, dass in diesem

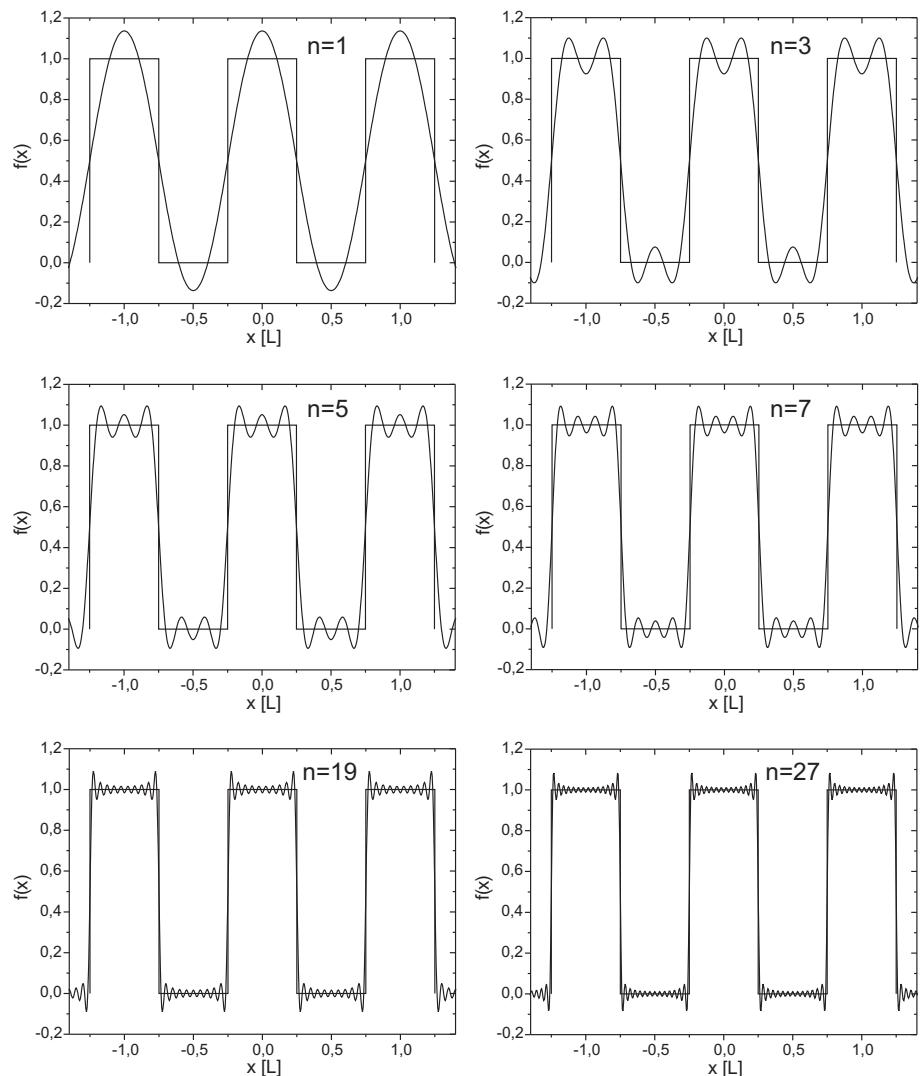


Abbildung 7: Fourierentwicklung eines Rechtecksignals.

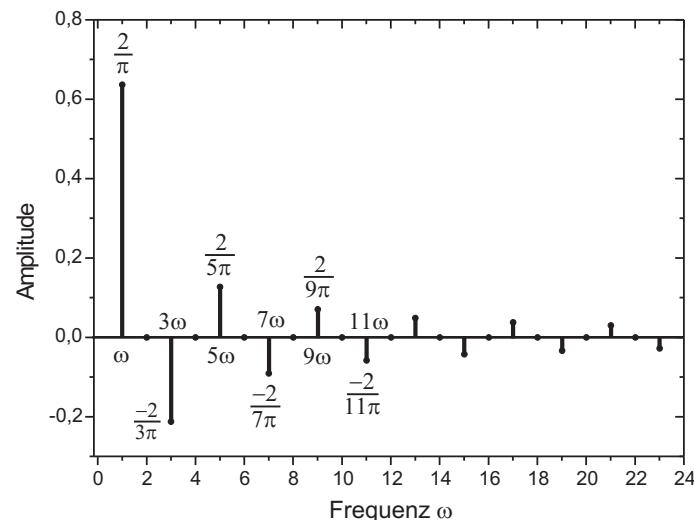


Abbildung 8: Frequenzspektrum eines Rechtecksignals. Bei den ersten sechs Moden sind die Frequenzen und Amplituden mit angegeben.

Fall die Fourierreihe in ein Integral übergeht und die Fourierreihenkoeffizienten nicht mehr diskret sind, sondern durch eine kontinuierliche Funktion beschrieben werden. Dies führt zur sogenannten Fouriertransformation eines nichtperiodischen Signals.

Die kontinuierliche Fouriertransformation¹ ist definiert durch:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (19)$$

Wegen

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx) \quad (20)$$

stellt auch die Fouriertransformation die Entwicklung einer Funktion nach trigonometrischen Funktionen dar. $F(k)$ heißt **Fouriertransformierte** der Funktion $f(x)$.

¹In der Literatur finden sich verschiedene Definitionen der Fouriertransformation, die sich durch einen Normierungsfaktor unterscheiden.

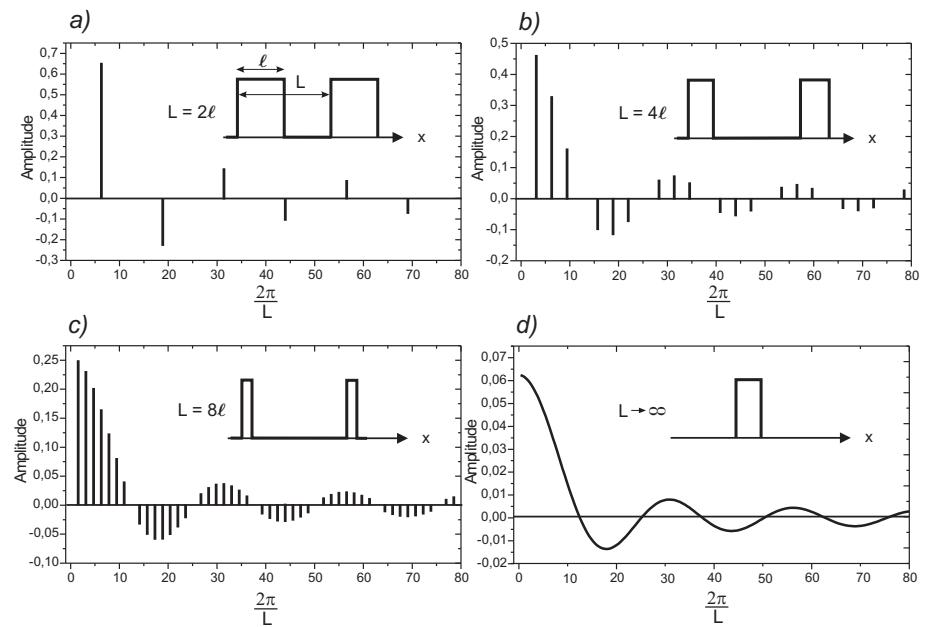


Abbildung 9: Verdeutlichung des Übergangs zur Fouriertransformation einer nichtperiodischen Funktion.

Für die Rücktransformation gilt:

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (21)$$

Handelt es sich bei $f(t)$ um eine Funktion, die von der Zeit abhängt, so stellt die Fouriertransformierte $F(\omega)$ (wir schreiben nun ω anstatt k) das kontinuierliche Frequenzspektrum dieser Funktion dar. Für den Fall, dass x eine Ortsvariable ist, schreiben wir für die Fouriertransformierte $F(k)$ und bezeichnen k als Raumfrequenz (Ortsfrequenz). Wir werden im nächsten Abschnitt ausführlich darauf eingehen.

VII.1 Herleitung der Fourierdarstellung der Fraunhofer-schen Beugung

Wir wollen im Folgenden das Thema der Fraunhofer-schen Beugung in etwas allgemeinerer Gestalt formulieren, um den Übergang zu der hier interessierenden Beschreibung mit Hilfe der Fouriertheorie vorzubereiten.

Wir betrachten nach Abbildung 10 eine Öffnung S von willkürlicher Gestalt in der yz -Ebene, die mit monochromatischem Licht bestrahlt werde und wollen die elektrische Feldstärke im Aufpunkt P bestimmen.

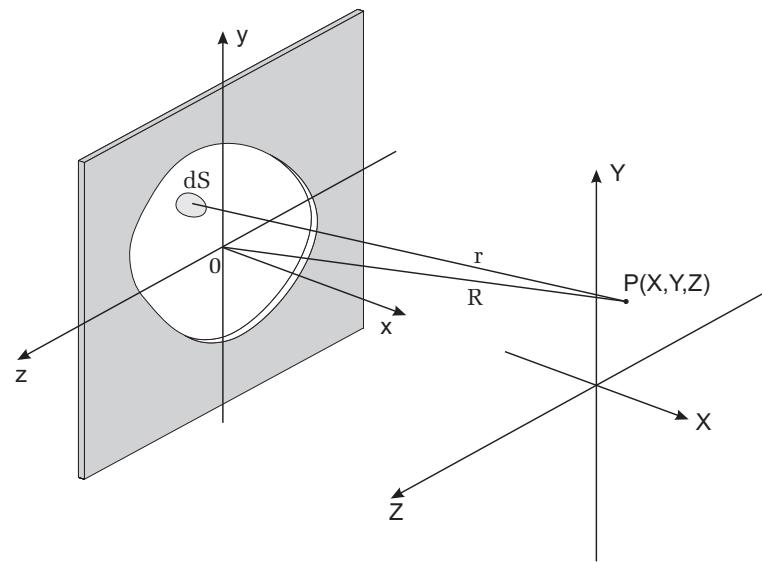


Abbildung 10: Zur Geometrie bei der Beugung an einer beliebigen Öffnung.

Dazu greifen wir ein differentielles Flächenelement $dS(x = 0, y, z)$ heraus und betrachten eine davon ausgehende Kugelwelle (Elementarwelle) e^{ikr}/r . Mit ϵ als Quellstärke pro Einheitsfläche, die zunächst als konstant über der Fläche S angenommen wird, ist die elektrische Feldstärke am Ort P durch

$$dE = \epsilon \frac{e^{ikr}}{r} dS \quad (22)$$

gegeben.

Für den Abstand von dS zu $P(X, Y, Z)$ erhalten wir

$$r = \sqrt{[X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]}. \quad (23)$$

Wenn die beugende Öffnung klein gegenüber dem Abstand OP ist, so kann man im Amplitudenterm ϵ_A/r statt r den Abstand $OP=R$ verwenden. Diese Näherung für r darf im Phasenterm hingegen nicht ohne weiteres angewendet werden, da $kr = (2\pi/\lambda)r$ eine große Zahl darstellt. (Sie entspricht dem Abstand OP in Wellenlängen ausgedrückt). Mit Hilfe von

$$R = \sqrt{[X^2 + Y^2 + Z^2]} \quad (24)$$

erhalten wir durch Einsetzen in Gleichung (23) und einigen Umformungen:

$$r = R \sqrt{[1 + (y^2 + z^2)/R^2 - 2(Yy + Zz)/R^2]}. \quad (25)$$

Im Fernfeld ist R groß gegenüber den Dimensionen der Öffnung, so dass der Term

$$(y^2 + z^2)/R^2 \ll 1 \quad (26)$$

vernachlässigbar wird. Es verbleibt:

$$r = R \sqrt{[1 - 2(Yy + Zz)/R^2]}. \quad (27)$$

Auch der Ausdruck in der eckigen Klammer kann mit Hilfe der Relation

$$\sqrt{1 - \xi} = 1 - \xi/2. \quad (28)$$

für $\xi \ll 1$ vereinfacht werden:

$$r = R [1 - (Yy + Zz)/R^2]. \quad (29)$$

Setzen wir nun diese Näherung für r in den Phasenterm in Gleichung (22) ein und integrieren über die gesamte Öffnung S , so erhalten wir für die elektrische Feldstärke am Ort P :

$$E(R) = \epsilon \frac{e^{ikR}}{R} \int \int e^{-\frac{ik}{R}(Yy + Zz)} dy dz. \quad (30)$$

Beschränken wir nun unsere Betrachtung auf einen kleinen Bereich um R . Wir können dann davon ausgehen, dass der Term e^{ikR}/R vor dem Integral eine Konstante darstellt. Auch ϵ wurde bisher als konstant angesehen. Das entspricht aber nicht dem allgemeinen Fall! Denken Sie an eine Öffnung, die z.B. von einem etwas schmutzigen und zusätzlich nicht sehr gleichmäßig dickem Glas überdeckt wird. Die daraus resultierende „Inhomogenität der Transmission“ führt dazu, dass das elektrische Feld sowohl vom Betrag als auch von der Phase vom Ort (y, z) abhängen wird. Wir berücksichtigen dies, in dem wir eine explizite Orts- und Phasenabhängigkeit der Quellstärke ϵ einführen:

$$\epsilon(y, z) = A(y, z) = A_0(y, z)e^{i\varphi(y, z)}. \quad (31)$$

$A(y, z)$ wird in der Literatur auch als Öffnungsfunktion (engl. aperture function) bezeichnet. $A(y, z)dydz$ ist dann proportional zu dem Feld der vom Flächenelement $dydz$ ausgehenden Welle. Entsprechend können wir dann das elektrische Feld im Aufpunkt (X, Y, Z) als Integral über die gesamte emittierende Öffnung S darstellen als

$$E(Y, Z) = \iint_S A(y, z)e^{-\frac{ik}{R}(Yy+Zz)}dy dz. \quad (32)$$

wobei der Vorfaktor e^{ikR}/R wie oben erwähnt als Konstante und damit unwesentlich für das Folgende weggelassen wird.

Das Differential

$$dE(Y, Z) = A(y, z)e^{-\frac{ik}{R}(Yy+Zz)}dy dz \quad (33)$$

stellt den Beitrag der vom Flächenelement $dydz$ ausgehenden ebenen Welle zum elektrischen Feld am Ort P dar, die sich in Richtung des Wellenvektors \vec{k} ausbreitet. Wir definieren die *Raumfrequenzen* (Abbildung 11):

$$k_y = k \frac{Y}{R} = k \sin \phi \quad (34)$$

$$k_z = k \frac{Z}{R} = k \sin \theta. \quad (35)$$

Es ist für das Verständnis nützlich, anzumerken, dass im Photonenspektrum die hier eingeführten „Raumfrequenzen“ bis auf den Faktor \hbar den durch die Beugung erzeugten Transversalimpulsen

$$p_y = \hbar k_y \quad (36)$$

$$p_z = \hbar k_z \quad (37)$$

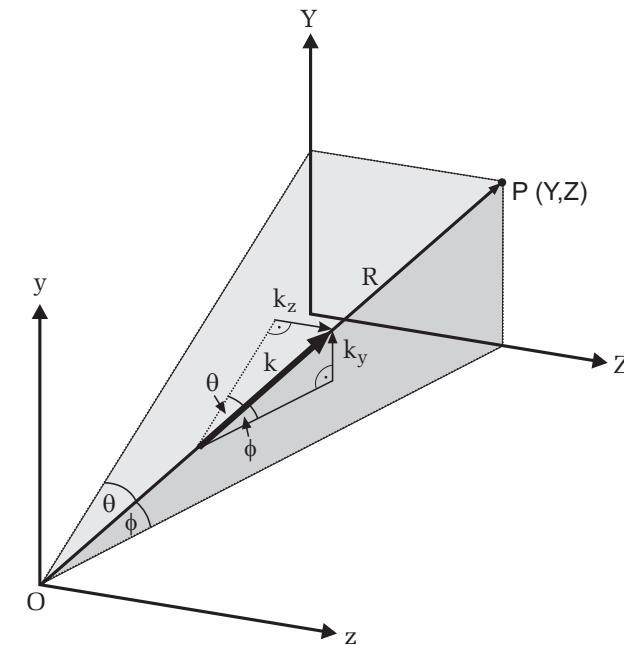


Abbildung 11: Erläuterung zur Definition der Raumfrequenzen k_y, k_z .

der Photonen entsprechen! Besitzen die Photonen ursprünglich nur einen Impuls in x -Richtung, so erhalten Sie bei Durchgang durch die Öffnung eine zusätzliche transversale Komponente in y - und z -Richtung!

Jedem Punkt (Y, Z) in der Bildebene wird also eine Raumfrequenz zugeordnet. Gleichung (32) lässt sich dann umschreiben gemäß

$$E(k_y, k_z) = \iint_S A(y, z)e^{-i(k_y y + k_z z)}dy dz. \quad (38)$$

Dieser Ausdruck stellt nichts anderes dar, als die zweidimensionale Fouriertransformation (vergleiche Gleichung (21)) der Öffnungsfunktion $A(y, z)$. Damit lässt sich das wichtige Ergebnis dieser Analyse wie folgt formulieren:

Die Feldverteilung der Beugungsstruktur bei der Fraunhofer-schen Beugung an einer Öffnung ist die Fouriertransformierte der Feldverteilung über die beugende Öffnung.

Zur Vertiefung dieser Aussage werden wir in den nächsten Kapiteln zwei Spezialfälle, nämlich die Beugung am Spalt und am Doppelspalt, detailliert untersuchen.

Das Beugungsbild des Spaltes als Fouriertransformierte der Spaltöffnung

Wir wollen im Folgenden diese Betrachtungsweise anwenden, um die Beugung am Spalt nunmehr im Rahmen der Fouriertheorie zu behandeln.

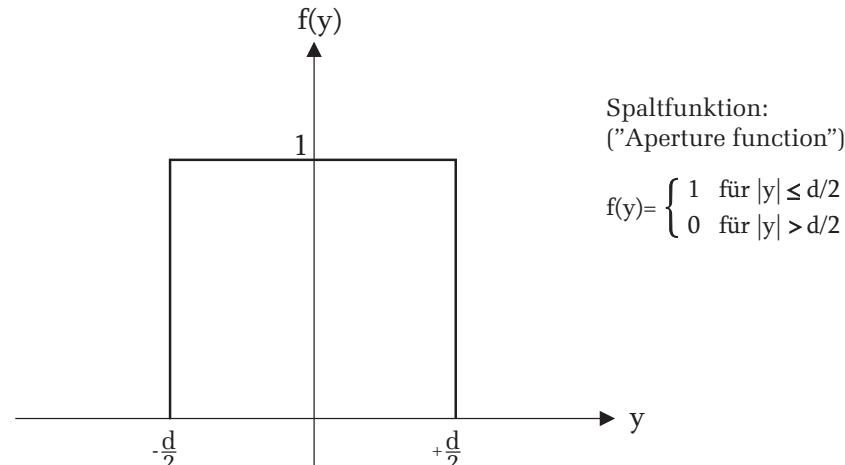


Abbildung 12: Spaltfunktion eines einfachen Spalts.

Ein Spalt wird durch folgende Spaltfunktion (aperture function, hier eindimensional: $A(y, z) \rightarrow f(y)$, $E(k_y, k_z \rightarrow F(k_y))$) beschrieben (Abbildung 12):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |y| \leq d/2 \\ 0, & |y| > d/2. \end{cases} \quad (39)$$

Die Fouriertransformierte (wir schreiben nun F statt E , um den Aspekt zu betonen, dass das elektrische Feld der Beugungsfigur nun einfach als Fouriertransformierte berechnet werden kann) ergibt sich zu:

$$F(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ik_y y} dy \quad (40)$$

Einsetzen obiger Spaltfunktion ergibt:

$$F(k_y) = \int_{-d/2}^{d/2} e^{-ik_y y} dy = -\frac{1}{ik_y} e^{-ik_y y} \Big|_{-d/2}^{d/2} = \frac{1}{ik_y} \left(e^{ik_y d/2} - e^{-ik_y d/2} \right). \quad (41)$$

Unter Berücksichtigung der Eulerschen Formel

$$e^{\pm i\delta} = \cos \delta \pm i \sin \delta, \quad (42)$$

erhalten wir

$$F(k_y) = d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \equiv \text{sinc}(k_y d/2) d \quad (43)$$

mit den Nullstellen

$$k_y = 2\pi n/d. \quad (44)$$

Gemäß dem Fouriertheorem erhält man mit dieser Funktion rückwärts wieder die Spaltfunktion durch Bildung des Integrals (Fouriersynthese):

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_y) e^{ik_y y} dk_y. \quad (45)$$

Einsetzen des von oben berechneten $F(k_y)$ und Verwendung der Symmetrie der Funktion bezüglich des Vorzeichens ($F(k_y) = F(-k_y)$) führt zu

$$f(y) = \frac{d}{\pi} \int_0^{+\infty} [\sin(k_y d/2)/(k_y d/2)] \cos(k_y y) dk_y. \quad (46)$$

Dieses Integral ist analytisch nicht lösbar, so dass eine numerische Integration notwendig wird. Mit der oberen Grenze $+\infty$ führt dies Integral wieder zurück

zur Spaltfunktion, d.h. zu dem unverfälschten rechteckigen Spaltbild.

Es stellt sich die Frage, wie anhand der Formel $F(k_y)$ für die Fouriertransformierte der Spaltfunktion die gesuchte Beugungsstruktur, also Intensität in Richtung α , abgelesen werden kann. Dazu muss man sich lediglich vergegenwärtigen, dass ja über $k_y = k_0 \sin \alpha$ unmittelbar die gewünschte Winkelabhängigkeit der Beugungsstruktur sichtbar wird.

Will man nun untersuchen, wie die nun rudimentäre Spaltfunktion aussieht, wenn man gezielt nur eine kleinere Zahl von gebeugten Teilstrahlen durch Ausblenden in der Fourierebene zur Abbildung zulässt (unser Experiment), so ist als obere Integrationsgrenze nun offenbar der k_y -Wert zu wählen, der gerade noch zur Abbildung zugelassen wird (Abbildung 13).

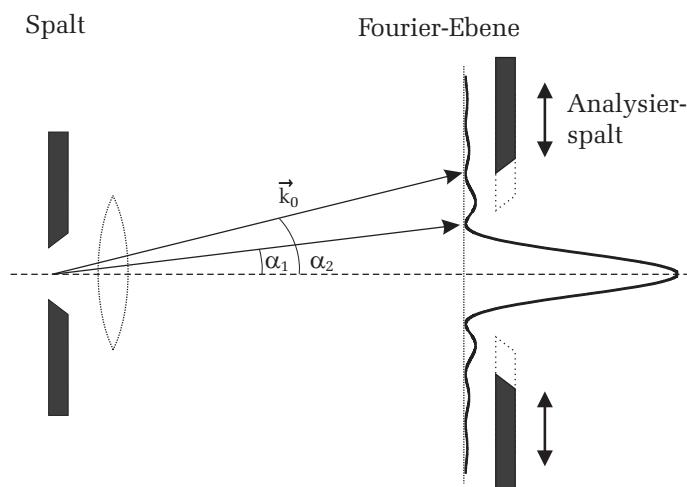


Abbildung 13: Manipulation der Beugungsstruktur durch Ausblenden von Beugungsordnungen mit Hilfe eines Analysierspaltes.

Die obere Integrationsgrenze sei die n -te Nullstelle von $F(k_y)$:

$$k_{y,n} = k_0 \sin \alpha_n = k_0 n \lambda / d = 2n\pi/d \quad (47)$$

Für das Fourierintegral folgt damit dann:

$$f_{modifiziert}(y) = \frac{d}{\pi} \int_0^{k_{y,n}} [\sin(k_y d/2)/(k_y d/2)] \cos(k_y y) dk_y \quad (48)$$

Damit kann obiges Integral für unterschiedliche k_y -Werte an z.B. jeweils 200 Stellen von y zwischen $y_i = -d$ bis $+d$, also 100 Punkte pro Spaltbreite, berechnet werden. Um die Berechnungen mit den beobachteten Spaltbildern vergleichen zu können, müssen die Ergebnisse noch quadriert werden². Das Ergebnis können Sie ausdrucken und den beobachteten Strukturen gegenüberstellen. Die nachfolgende Bilderserie (Abbildung 14) zeigt Ihnen, was Sie erwarten sollten, wenn Sie, jeweils von links nach rechts gezählt, nur das zentrale Hauptmaximum bzw. die Beugungsordnungen bis zum 1./2./6./10./14. Nebenmaximum zur Abbildung des Spaltes verwenden.

Die Fouriertransformierte des Doppelspaltes

Mit den oben gewonnenen Ergebnissen zur Fouriertransformation des Einfachspaltes bzw. zur Rücktransformation (Fouriersynthese) gelangt man in einfacher Weise zu den entsprechenden Ausdrücken für den Doppelspalt.

Die Öffnungsfunktion $f(y)$ ist in Abbildung 15 dargestellt:

Die zugehörige Fouriertransformierte hat wieder die Gestalt

$$F(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ik_y y} dy \quad (49)$$

wobei Beiträge nur von den Integrationswegen 1 → 2 sowie 3 → 4 herühren können. Berechnen wir obiges Integral zunächst über den nach rechts verschobenen Einzelspalt. Aus der Abbildung erhält man:

$$F(k_y, rechts) = \int_3^4 f(y) e^{ik_y y} dy = -\frac{1}{ik_y} e^{-ik_y y} \Big|_3^4 = e^{-ik_y g/2} d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)}, \quad (50)$$

wobei g den Spaltabstand beschreibt. Entsprechend ergibt sich für den nach

²Berechnet wird die Feldstärke. Um die Intensität zu erhalten muss diese quadriert werden.

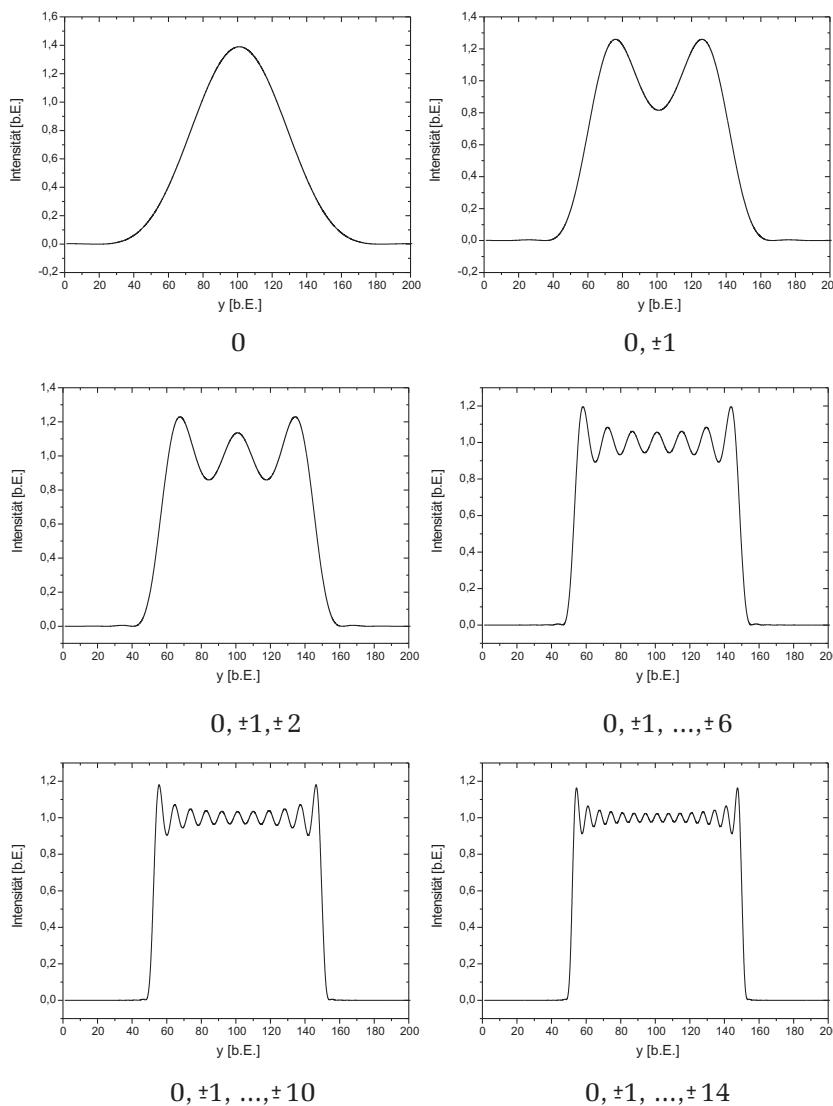


Abbildung 14: Spaltfunktion unter Berücksichtigung unterschiedlicher Beugungsordnungen.

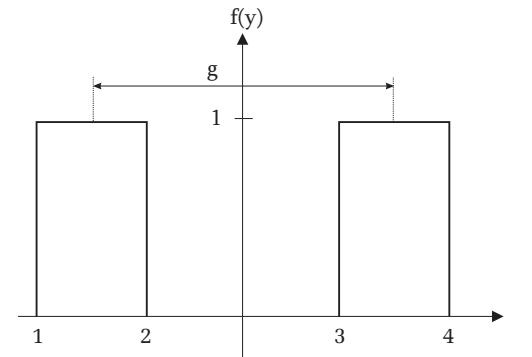


Abbildung 15: Spaltfunktion eines Doppelspalts. Die Größe g beschreibt den Spaltabstand.

links verschobenen Einzelpunkt:

$$F(k_y, \text{links}) = \int_1^2 f(y) e^{i k_y y} dy = -\frac{1}{i k_y} e^{-i k_y} \Big|_1^2 = e^{i k_y g/2} d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \quad (51)$$

Damit ergibt sich schließlich für die Fouriertransformierte des Doppelspaltes:

$$F = F(k_y, \text{rechts}) + F(k_y, \text{links}) = 2 \cos(k_y g/2) d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \quad (52)$$

Wir erkennen in dem rechts stehenden Term dieses Ausdrucks wieder die Fouriertransformierte des Einzelpaltes, der Vorfaktor beschreibt die Interferenz der von beiden Spalten ausgehenden Wellen. Führen wir wieder wie beim Einzelpunkt die Substitution $k_y = k_0 \sin \alpha = 2\pi/\lambda \sin \alpha$ durch und quadrieren den Ausdruck, so erhalten wir als **Beugungsfigur des Doppelspaltes** schließlich

$$I = 4 \cos^2(k_y g/2) d^2 \frac{\sin^2(k_y d/2)}{(k_y d/2)^2} = 4 \cos^2(\pi g/\lambda \sin \alpha) d^2 \frac{\sin^2(\pi d/\lambda \sin \alpha)}{(\pi d/\lambda \sin \alpha)^2}. \quad (53)$$

Der Ausdruck entspricht dem Produkt der Gitterfunktion $\cos^2(\pi g/\lambda \sin \alpha)$ und der Spaltfunktion, die wir bereits beim Einzelpunkt abgeleitet haben. Abbildung 16 zeigt die hiermit berechnete Beugungsfigur für den von uns verwendeten Doppelspalt zusammen mit der Beugungsstruktur, wie sie nur einer der Spalte ergibt.

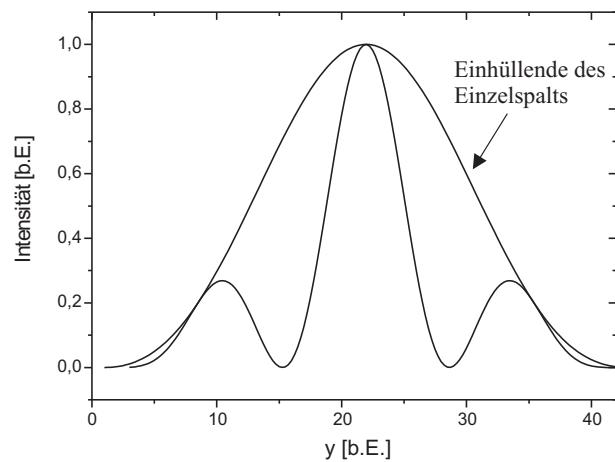


Abbildung 16: Beugungsfigur eines Spalts und eines Doppelspaltes.

Mit dem oben stehenden Ausdruck für die Fouriertransformierte des Doppelspaltes können wir dann auch leicht wieder angeben, wie das „modifizierte“ Bild $F_{\text{modifiziert}}$ des Doppelspaltes aussieht, wenn man in der Fourierebene mit dem Analysierspalt wieder die Zahl der zur Abbildung zugelassenen Fourierkomponenten gezielt begrenzt:

$$F_{\text{modifiz.}}(y) \propto [f_{\text{modifiz.}}(y)]^2 = \left[2d/\pi \int_0^{k_y,n} \cos(k_y g/2) \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \cos(k_y y) dk_y \right]^2. \quad (54)$$

Ausführung dieser Integrale $F_{\text{modifiziert}}(y)$ ergibt (obere Integrationsgrenze $k_y,n = 2\pi n/d$) für $n = 1, 2, 3, 6$ die nachfolgend wiedergegebenen Spaltbilder (Abbildung 17). Der Bezug zu den analogen Bildern des Einzelpaltes ist offensichtlich.

Ein weiterer, auch experimentell von uns untersuchter Aspekt, kann an diesen Formeln untersucht werden, nämlich die Frage nach der Auflösung:

„Welcher Anteil der Fourierkomponenten des Beugungsbildes ist notwendig, um noch die Doppelstruktur unseres Objektes im modifizierten Bild zu sehen?“ Für das Experiment bedeutet dies: „Bei welcher Spaltweite des Analysierspaltes ver-

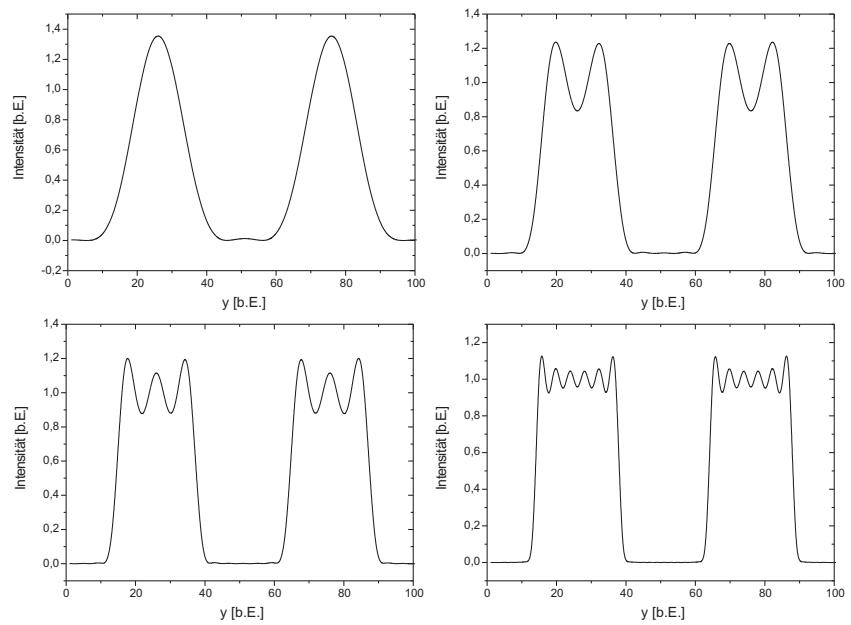


Abbildung 17: Spaltbild eines Doppelspaltes unter Berücksichtigung unterschiedlicher Beugungsordnungen.

schwindet die Doppelstruktur?“

Für die Auflösung der Doppelstruktur ist nun der Spaltabstand g maßgebend. Das Maximum 1. Ordnung erscheint unter $\sin \alpha = \lambda/g$. Diese Beugungsordnung muss mindestens noch zur Abbildung zugelassen werden, um die Doppelstruktur zu erkennen. Wenn Sie also den zugehörigen Wert $k_0 \sin \alpha = k_0 \lambda/g$ als Obergrenze für die Integration verwenden und kontinuierlich verkleinern, werden Sie zu Bildern kommen, wie sie nachstehend gezeigt sind (Abbildung 18). Der „Dunkelbereich“ zwischen den Einzelpalten hellt zunehmend auf, bis schließlich nur noch ein flaches Plateau die ursprünglichen Einzelpaltsbilder verbindet: Die Doppelstruktur ist verschwunden! Vergleichen Sie den rechnerisch gefundenen Grenzwert für k_y mit dem experimentell aus der entsprechenden Spaltbreite des Analysierspaltes bestimmten Wert für die Auflösung.

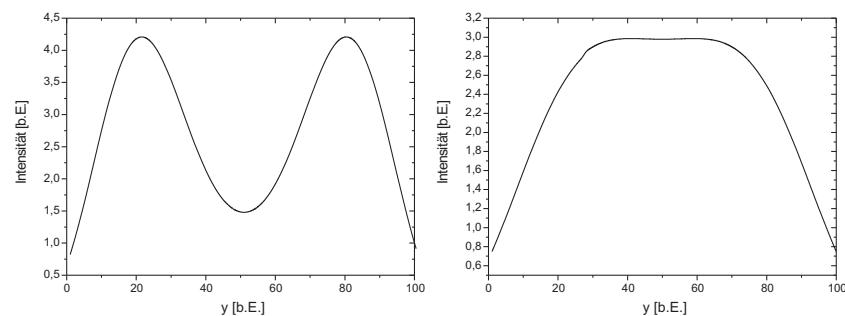


Abbildung 18: Auflösung eines Doppelspalts bei Beschneidung des Maximum 1. Ordnung.

VII Durchführung des Versuchs

Der optische Aufbau zu unseren Versuchen ist in Abbildung 19 dargestellt. Er soll als erstes von Ihnen mit den vorhandenen Komponenten erstellt werden.

Als Lichtquelle dient ein Diodenlaser mit einer Wellenlänge von 635 nm und einer Leistung von maximal 1 mW, einstellbar über ein Potentiometer, dessen Licht fest in eine „single-mode“-Lichtfaser eingekoppelt wird und an deren Ausgang über einen Faserstecker zur Verfügung steht. Das unter einem Öffnungswinkel u von ca. 14 Grad austretende Licht wird über eine kurzbrennweite Linse ins Unendliche abgebildet, wobei der austretende Parallelstrahl nun einen Durchmesser D von $D = fu = 7 \text{ mm}$ besitzt. Durch Wahl der Linse kann man sich damit einen gut kollimierten Laserstrahl von gewünschtem Durchmesser verschaffen. Nehmen Sie nun als erstes den Diodenlaser in Betrieb. Er wird über eine Schutzschaltung, die in einem kleinen Kästchen mit mA-Meter untergebracht ist, eingeschaltet und der Strom über das Potentiometer auf den fest eingestellten Maximalstrom von 60 mA hochgeregelt. Bei etwa 40 mA beginnt die Laseraktivität, bei dem Maximalstrom erhalten wir eine Laserleistung von ca. 1 mW. Hinter dem Laserauskoppelteil wird das zu untersuchende Objekt zentralisch in den Laserstrahl justiert, dahinter wiederum eine Linse L_1 von 80 mm Brennweite derart, dass Sie das Objekt scharf auf den Schirm im Abstand von ca. 1 m abbilden. Nun wollen wir simultan mit dem **Objektbild** die von dem Objekt erzeugten Beugungsstrukturen – das **Fourierbild** – auf dem Schirm sichtbar machen: Die Beugungsstrukturen entstehen zunächst in der Brennebene der ab-

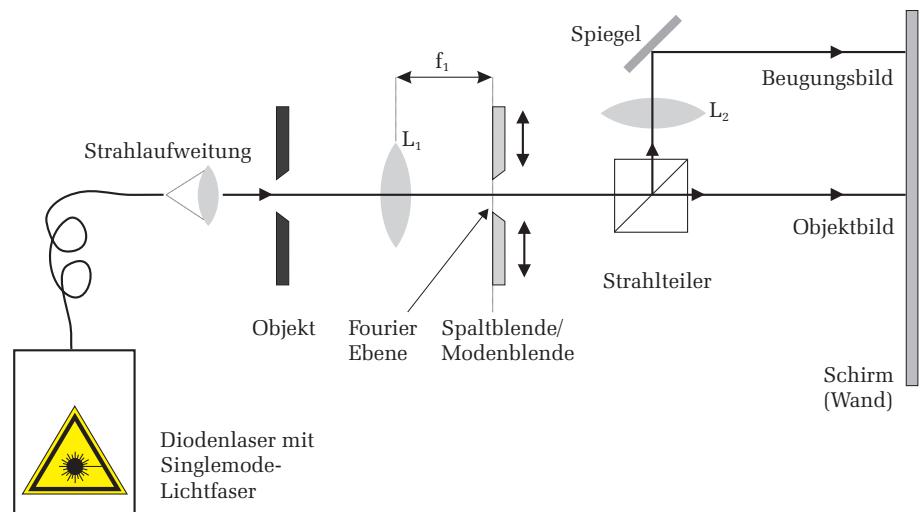


Abbildung 19: Schematische Darstellung des optischen Aufbaus.

bildenden Linse. Halten Sie da mal ein Papierzettelchen hinein und überzeugen sich davon! Mit einer zweiten Linse wollen wir nun diese Fourierebene (die Beugungsstrukturen in dieser Ebene bilden also den Gegenstand für diesen zweiten Abbildungsweg) ebenfalls auf den Schirm abbilden, aber getrennt vom ersten Abbildungspfad.

Dazu wählen wir einen Strahlteiler, der uns ca. 50 Prozent des Lichtes heraus spiegelt. Die dahinter aufgestellte Linse L_2 muss nun so positioniert werden, dass sie über den nachfolgenden Spiegel, der den weiterlaufenden Strahl wieder parallel zum ersten Strahl bringt, die Beugungsstruktur stark vergrößert neben dem Bild des Objektes, auf dem Schirm entwirft. Durch feine Verschiebungen der Linse können Sie nun auch das Bild der Beugungsstruktur scharf stellen. Schauen Sie sich die Bilder für die Spalte A,B,C zunächst ohne Kamera auf dem Schirm an.

Auf diese Weise erhalten wir also Bild und Fourierbild des Objektes nebeneinander auf dem Schirm sichtbar und können nun studieren, wie sich Manipulationen in der Fourierebene- d.h. gezieltes Zulassen und Wegblenden bestimmter Beugungsordnungen- auf das Bild auswirken.

Für diese Manipulationen stehen ein fein justierbarer symmetrisch öffnender

Spalt und Modenblenden (schmale Streifenblenden) zur Verfügung. Da diese Elemente genau in der Fourierebene (zur Erinnerung: = Brennebene der abbildenden Linse L_1) untergebracht werden müssen, sollten Sie also vor dem Strahlteiler genügend Platz für den notwendigen Reiter mit Justierbühne lassen. Es wird ein bisschen eng, aber es geht! Montieren und justieren Sie also hier zunächst den symmetrisch öffnenden Spalt auf dem Verschiebetisch, der wiederum die Mitte des Spaltes genau auf die Mitte der Beugungsstruktur einzustellen gestattet.

1. Quantitative Beobachtungen am Einfachspalt

Wir wollen zunächst die Beugungsstruktur des Spaltes bestimmen: Zur Messung steht eine CCD-Zeilenkamera zur Verfügung, die über eine USB-Schnittstelle auf einen PC ausgelesen wird und die es erlaubt, die Lichtintensität als Funktion des Ortes darzustellen. Der lichtempfindliche Teil besteht aus 2048 Pixel von jeweils $14 \mu\text{m}$ Breite und $56 \mu\text{m}$ Höhe mit einer Gesamtlänge von 28,7 mm. Justieren Sie zunächst L_2 auf ein **scharfes Beugungsbild** in der Ebene der Kamera. Sie ist durch einen Doppelpfeil auf dem Kameragehäuse gekennzeichnet. Schieben Sie diese dazu zunächst ein wenig zur Seite und schauen Sie sich das Beugungsbild auf einem daneben gehaltenen Blatt Papier an. Schieben Sie nun die Zeilenkamera mittig über die Beugungsstruktur und sehen Sie das Ergebnis auf dem PC-Monitor an. Sie werden zunächst i.a. nichts Vernünftiges sehen! Der Grund dafür ist, dass das Beugungsbild aus einer linearen, symmetrischen Anordnung von hellen Punkten besteht, deren Intensität nach außen stark abnimmt, und diese Punktlinie muss ja mit der Pixel-Zeile der Kamera zur Deckung gebracht werden - kein leichtes Unterfangen, wenn man bedenkt, dass diese Zeile nur $56 \mu\text{m}$ hoch ist! Was also tun? Suchen Sie mal unter den zur Verfügung stehenden optischen Bauteilen nach einer **Zylinderlinse**. Wie könnte man's damit machen, ohne die zu bestimmende Intensitätsverteilung zu verändern? Reduzieren Sie vor allem stark die Laserintensität weit unter die Sichtbarkeitsgrenze! Die verwendete Zeilenkamera ist sehr empfindlich und wird sehr rasch übersteuert, was zu völlig „wilden“ Strukturen führt, die nichts mit der tatsächlichen Intensitätsverteilung zu tun haben.

Wenn Sie schließlich die Beugungsstruktur in voller Schönheit auf dem Monitor haben (Abbildung 20), sollten Sie durch Feinjustieren des optischen Aufbaus (Höheneinstellung der Zylinderlinse, L_2 , transversale Position des

Spaltes auf der optischen Bank) eine optimale Symmetrie der beobachteten Beugungsstruktur herstellen. Mit Hilfe des von der Bedienungssoftware zur Verfügung gestellten Cursor können Sie nun (Betriebsmode *view* der Kamera) die **Lage und Intensitäten** der verschiedenen Beugungsmaxima und -minima bis zur typischerweise 5. Ordnung sowie auch den **Untergrund** (jeweils rechts und links!) bestimmen und protokollieren. Drucken Sie die gemessene Beugungsstruktur aus und tragen Sie die gemessenen Lagen und Intensitäten der verschiedenen Ordnungen in den Ausdruck ein. Wegen des hohen Intensitätsabfalles zu steigender Ordnung der Beugungsmaxima müssen Sie zur besseren Vermessung der höheren Beugungsordnungen ein **2. Bild** bei höherer Intensität des Dioidenlasers aufnehmen, die Sie über den Strom regeln können. Das zentrale Maximum darf dabei ruhig in Sättigung gehen. Das Maximum 1. Ordnung muss allerdings auf beiden Bildern gut zu sehen sein. Sie können hierüber alle Intensitäten relativ zur Intensität des 0-ten Maximums angeben! Tragen Sie auch hier wieder Ihre Messwerte in den Ausdruck ein.

Die Eichung der Abszisse (d.h. wieviel Pixel auf der Kamera entsprechen 1 mm in der Fourierebene) erhalten Sie bequem, indem Sie in der Fourierebene den Analysierspalt auf verschiedene Weiten einstellen und die zugehörigen Abstände in Pixel auf dem Monitor ablesen. (Die Ablesung der Spaltbreite erfolgt mit dem integrierten Messfühler. Beachten Sie, dass der Messfühler die Verschiebung nur einer Spalschneide registriert. Die andere bewegt sich dabei gegenläufig, so dass die Spaltweite dem doppelten Ablesewert entspricht). Wiederholen Sie dies für mehrere gut ablesbare Punkte des Beugungsbildes und protokollieren Sie die Daten. Speichern Sie danach die Bilder ab und drucken Sie sie für Ihr Protokollheft aus.

2. Beugungsstruktur des Doppelpaltes

Ersetzen Sie den Einzelspalt durch das Rähmchen mit dem Doppelspalt ohne den Reiter zu verschieben. Verschaffen Sie sich zunächst wieder durch Feinjustieren des neuen Objektes ein scharfes Bild der **Beugungsstruktur** des Doppelpaltes auf dem Schirm. Schauen Sie sich die Strukturen für die verschiedenen Doppelpalte in dem Dia-Rahmen an. Fertigen Sie eine Skizze der Struktur an und versuchen Sie die Strukturen zu interpretieren. Quantitative Messungen werden im Folgenden an dem mittleren Doppelspalt „B“ des Dia-Rähmchens durchgeführt. Zur Beobachtung der Beugungsstruktur verwenden wir wieder die CCD-Kamera.

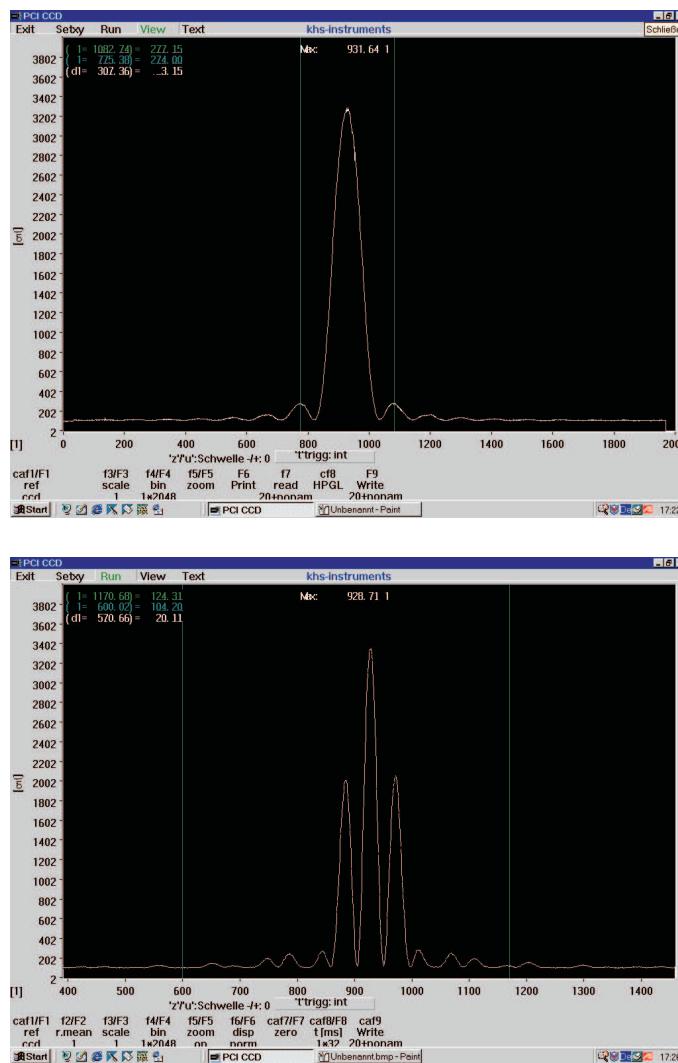


Abbildung 20: Bedienoberfläche der Kamera- Software. Dargestellt ist oben das Beugungsbild eines Spaltes und unten das Beugungsbild eines Doppelspaltes.

Wie bei der vorangegangenen Vermessung des Einzelpaltes, müssen Sie auch hier wieder das Beugungsbild in die Ebene der Kamerazeile scharf einstellen und sich dann mit Hilfe von Zylinderlinse und Einregeln der Laserintensität ein brauchbares Bild der Intensitätsverteilung auf dem Monitor verschaffen. Justieren Sie wieder auf Symmetrie und optimalen Kontrast. Versuchen Sie vorab schon einmal den beobachteten Maxima und Minima, Beugungsordnungen der Spalt- und Gitterfunktion zuzuordnen. Für die Auswertung zu Hause bestimmen Sie wie beim Einzelpalt mit Hilfe der Cursor Lage und Höhe der Maxima und Minima im Bereich zwischen den 1. Minima (links-rechts) der Spaltfunktion, sowie des Untergrundes und drucken zum Schluss das Bild aus.

Die Eichung der Abszisse auf dem Monitorbild können Sie von der entsprechenden Messung am Einzelpalt (Messung 1) übernehmen. Es wurde ja lediglich das Rähmchen mit dem Einzelpalt gegen den Doppelspalt ausgetauscht. Gegenstandsweite und Bildweite bleiben unverändert. Wenn Sie versehentlich doch an den die Vergrößerung bestimmenden Positionen von Objekt (Dia-Rahmen), Fourierebene, L₂ oder die Position der Kamera nachjustiert haben, müssen Sie die Eichung für diese Messung wiederholen.

3. Das Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes

Am Beispiel des Spaltes soll nun die Auswirkung der Manipulationen in der Fourierebene auf die Struktur des Bildes quantitativ untersucht werden. Die zunächst nur qualitativ mit dem Auge feststellbaren Änderungen am Bild, etwa: „Die Ränder erscheinen schärfer, wenn man die Beugungsordnungen höherer Ordnung mit zur Abbildung zulässt“, werden nun quantitativ gemessen.

Wir bestimmen die Intensitätsverteilung des Spaltbildes wieder mit Hilfe der CCD-Zeilenkamera. **Öffnen** Sie zunächst den **Analysierspalt** in der Fourierebene und stellen Sie die Laserintensität am Steuergerät auf Maximum ein. In den Strahlengang zur Kamera stellen Sie dicht hinter dem Strahlteiler ein Graufilter (Abschwächung 10⁻²). Ohne das Graufilter würde die Kamera übersteuern! Man beobachtet eine zunächst mehr oder weniger gut ausgeprägte Rechteckfunktion mit einer großen Zahl von „wiggles“. Das wollen wir ganz sauber sehen! Also: Nachjustieren!

Bei diesem **Nachjustieren** muss man nun aufpassen: Sie wollen ja nach wie vor das Fourierbild scharf auf dem Schirm beibehalten, wozu ja wieder-

um die Gegenstandsweite für diesen Abbildungszweig (=Abstand hintere Brennebene von L₁ zu Linse L₂) **unverändert bleiben** muss! Man muss also die Linse L₁ stehen lassen und vielmehr das Objekt selbst bzgl. dieser Linse nachjustieren, bis dessen Bild in der Ebene des Photodetektors scharf erscheint. Letzteres wird dadurch kenntlich, dass Sie nun eine zunehmend ideale Rechteckfunktion auf dem Monitor beobachten können. Stellen Sie auf **größtmögliche Steilheit der Kanten** des Spaltbildes ein. Dazu den Spalt sehr feinfühlig verrücken, es geht um Bruchteile eines mm! Bei diesem Vorgehen bleibt dann die Lage der Fourierebene und damit das Beugungsbild auf dem Schirm unverändert. Nun die Laserintensität geeignet einstellen!

Um sich zunächst einen Überblick über die sukzessiv auftretenden Strukturen zu verschaffen drehen Sie den Analysierspalt nun langsam zu und beobachten **simultan** die Veränderungen der Beugungsstruktur auf dem Schirm und des Spaltbildes auf dem Monitor. Die einfachste Struktur des Spaltbildes erhalten Sie offenbar, nachdem Sie bis auf das zentrale Maximum alle Nebenmaxima ausgeblendet haben. Symmetrisieren Sie das Fourierbild gleichzeitig durch Nachjustieren des Verschiebereiters, der den Analysierspalt trägt, bzgl. der 0-ten Ordnung des Beugungsbildes.

Mit dieser Einstellung beginnend suchen Sie nun der Reihe nach bei **größer werdender Öffnung des Spaltes** die charakteristischen Bildstrukturen auf, die sich einstellen, wenn Sie der Reihe nach genau die 0-te, ±1-te, ±2-te Ordnung etc. zur Abbildung zulassen. Bis zu welcher Ordnung können Sie deutliche Strukturen beobachten? Auch hier können Sie nochmals auf die genaue Justierung der Abbildung achten. Zum Beispiel spielt die genaue vertikale Stellung der abbildenden Linse L₁ eine Rolle sowie die transversale Position des Spaltes. Hier sollten Sie die optimale Justage durch Ausprobieren herausbekommen.

Sicher ist Ihnen aufgefallen, dass die Kurven nicht so glatt sind, wie Sie es erwartet haben. Entfernen Sie deshalb das Graufilter und reduzieren gleichzeitig die Laserleistung: Sie werden im Allgemeinen eine wesentlich bessere Signalqualität beobachten. Der Grund: Die verwendeten Graufilter sind optisch nicht absolut homogen und beeinflussen Amplitude und Phase der durchlaufenden Teilbündel. Dies führt zu Störungen der Intensität in der Ebene der Kamera, in die ja die Linse L₁ letztlich alle Bündel zum - modifizierten - Bild des Spaltes zusammenführt.

Für Ihr Protokoll sollen die von Ihnen als optimal gefundenen Bilder für die fünf ersten Einstellungen des Analysierspaltes auf das 1. bis 5. Minimum der Beugungsfigur ausgedruckt werden. Zum quantitativen Vergleich mit den später auch zu berechnenden Bildern wollen wir jedoch beispielhaft an den ersten drei Bildern auch die Intensitätsverhältnisse zahlenmäßig überprüfen und protokollieren dazu (verwenden Sie wieder den Cursor) die Intensitäten der Maxima, Minima und des Untergrundes.

Die Zahl der beobachtbaren „Wiggels“ können Sie aber bis zu wesentlich höheren Beugungsordnungen (ca. $n=15$) verfolgen. Bestimmen Sie an solch einem Bild mit hohem n die Abstände der Maxima und Minima (x-Achse vernünftig strecken und die Cursor verwenden) und überprüfen Sie auf Äquidistanz. Sehen die Bilder so aus, wie Sie's erwarten? Was fällt Ihnen auf? Entnehmen Sie weiterhin diesem Bild, das einer rechteckigen Spaltfunktion am nächsten kommt, die Breite in Pixel (14 μm). Sie entspricht der Spaltbreite, die hier gemäß der optischen Abbildung (L₁) vergrößert erscheint. Die Vergrößerung ist aus Brennweite f der Linse und Bildweite b bestimmbar, letztere messen Sie mit einem Zollstock, dessen Messgenauigkeit hierzu völlig ausreicht. Vergleichen Sie den hieraus bestimmten Wert mit dem weiter oben (Auswertung zu 1) gefundenen Wert. Drucken Sie zum Schluss dieses Bild aus.

4. Fourierbild des Doppelspaltes

Als nächstes schauen Sie sich nun das **Bild des Doppelspaltes** mit der CCD-Kamera an. Justieren Sie wieder auf optimale Kantensteilheit der Spaltbilder und Symmetrie! Bestimmen Sie **Breite und Abstand** der beiden Einzelpalte auf dem Monitor (wie immer bisher in Pixel-Einheiten). In derselben Weise wie bei den Messungen am Einzelpalt können Sie aus der aktuellen Bildweite und Brennweite die Vergrößerung bestimmen und auf die Abmessungen des Doppelspaltes (**Spaltweite und Spaltabstand** siehe Abbildung 15) rückschließen. Diese Werte werden später bei der Interpretation des gemessenen Beugungsbildes benötigt! Beobachten Sie im Folgenden auch hier wieder die schon beim Einzelpalt untersuchten Beiträge der einzelnen Beugungsordnungen der Spalte, indem Sie nun den Analysierspalt in der Fourierebene auf- und zudrehen. Überlegen Sie sich hierzu die wichtige Frage: Wie liegen eigentlich die Beugungsbilder der individuellen Spalte in der Brennebene (Fourierebene) relativ zueinander? Drucken Sie ein Bild zu niedriger Beugungsordnung (≤ 5) für Ihr Protokoll

aus.

Als letztes drehen Sie nun langsam den Analysierspalt zu (Wichtig: schauen Sie sich dabei gleichzeitig immer auch das Beugungsbild auf dem Schirm an und verfolgen, was da geschieht!) und beobachten, wie die beiden rechteckigen Spaltprofile zu zwei gaussähnlichen Profilen verschwimmen (Fall a: nur noch die 1-ten Beugungsmaxima beider Spalte tragen zur Abbildung bei), wie sich zunehmend auch der Zwischenraum aufhellt und schließlich die Doppelstruktur endgültig verschwindet und nur noch ein flaches Plateau (Fall b: auch die dem Doppelspalt zuzuordnenden 1. Gittermaxima werden abgeschnitten) sichtbar bleibt. Notieren Sie die zu a) und b) gehörenden Einstellungen des Analysierspaltes und drucken die zugehörigen Bilder aus.

VIII Auswertung

Zu Aufgabe 1:

Vergleichen Sie die Lage der Maxima und Minima sowie die gemessenen Intensitätsverhältnisse der einzelnen Beugungsordnungen mit den theoretisch zu erwartenden Werten. Tragen Sie zunächst den Abstand der Minima n -ter Ordnung (jeweils in Pixel angegeben) gegen die Ordnungszahl n auf. Es sollte sich eine Gerade ergeben, deren Steigung die Spaltweite des verwendeten Beugungsspaltes zu bestimmen gestattet (Herleitung!) In dasselbe Diagramm tragen Sie nun die gemessenen Werte für die Lage der Beugungsmaxima ein und entnehmen der Geraden die Werte für n . Liegen diese genau zwischen den entsprechenden Werten der Minima bei 1,5, 2,5 etc.? Wo sollten sie liegen? Schätzen Sie die Fehler ab. Als nächstes ermitteln Sie die Intensitätsverhältnisse der gemessenen Nebenmaxima relativ zum Maximum 0-ter Ordnung und vergleichen Sie diese mit den theoretisch erwarteten Werten. Fehler angeben!

Zu Aufgabe 2:

Berechnen Sie mit Hilfe von Python oder mit dem Onlinescript³ ein Bild der theoretisch zu erwartenden Beugungsstruktur des Doppelspaltes. Benutzen Sie dabei für die Spaltweite und den Abstand der Spalte die Werte aus Aufgabe 4. Vergleichen Sie diese mit der experimentell bestimmten Struktur: Welche Minima entsprechen den Nullstellen der Spaltfunktion, welche

³Sie können die Berechnungen auch auf der Praktikumshomepage durchführen.
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Software.php>

denen der Gitterfunktion? Vergleichen Sie für die zwischen den 1. Minima der Spaltfunktion gemessenen Nebenmaxima die relativen Intensitäten bezogen auf das zentrale Maximum mit den entsprechenden theoretischen Werten.

Zu Aufgabe 3:

Berechnen Sie mit Python oder dem Onlinescript für die ersten drei spezifischen Einstellungen des Analysierspaltes die entsprechenden Bilder (die Formeln werden im Kapitel „Grundlagen“ diskutiert).

• Vergleichen Sie:

- a) Zahl und Lage der „Wiggels“ (der Maxima).
- b) Intensitäten der Maxima und Minima der ersten drei Bildkurven, normiert auf das Maximum des zur 0-ten Beugungsordnung gehörenden modifizierten Spaltbildes.
- Überlegen Sie sich warum bei einem fast geschlossenem Analysierspalt (d.h. nur die 0-te Ordnung wird durchgelassen) die Intensität in der Bildmitte höher ist, als wenn dieser weit geöffnet ist.

Zu Aufgabe 4:

Im Kapitel Grundlagen sind die Formeln für die Fouriertransformierte des Doppelspaltes sowie die durch Fouriersynthese rückwärts wieder gewonnene Darstellung des Doppelspaltbildes mit einigen gerechneten Beispielen angegeben. Auch hier erhält man wieder in einfacher Weise die „rudimentäre“ Spaltfunktion, so wie sie experimentell beobachtet wird, indem man als obere Integrationsgrenze die Zahl der für die Abbildung zugelassenen Beugungsordnungen - also deren k_y - Wert - einsetzt.

Vergleichen Sie die rechnerisch gewonnenen Bilder mit den oben experimentell beobachteten Fällen. Fall a) entspricht dem 1. Spaltminimum als obere Integrationsgrenze. Um Fall b) zu simulieren, müssen Sie sich für verschiedene Werte von k_y nahe dem Wert $k_y = k_0 \sin \alpha = k_0 \lambda / g$ die zugehörigen Bilder verschaffen und durch Iteration auf einen Wert hinarbeiten, der gerade die experimentell bestimmte Struktur wiedergibt. Dieses mit Python erstellte Bild mit dem zugehörigen Grenzwert für k_y der Auswertung beifügen. Aus der gemessenen Breite des Analysierspaltes beim Experiment (Fall b) können Sie sich zusammen mit der Kenntnis der Brennweite von L_1 den experimentell bestimmten Grenzwert für k_y verschaffen und vergleichen.

IX Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

IX.1 Berechnung der Beugungsbilder

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm **Jupyter** vom Desktop aus.

Intensitätsverteilung I des Beugungsbildes des Spalts:

$$I(x) = \frac{\sin(x)^2}{x^2} \quad (55)$$

mit $x = d/\lambda\pi\sin(\alpha)$.

Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Die Beugungsfunktion des Spalts ist eine `sinc()`-Funktion und ist im Modul Numpy enthalten.

```
#Beugungsfunktion Spalt
def beugung_spalt(x):
    return np.sinc(x)**2
```

Für den Doppelspalt gilt

$$I(x) = \frac{\sin(x)^2}{x^2} \cos(vx)^2, \quad (56)$$

wobei $v = g/d$ das Verhältnis von Spaltabstand zu der Spaltbreite darstellt. Da Numpy die normierte Form der `sinc`-Funktion verwendet, muss im Argument des Kosinus noch der Faktor π hinzugefügt werden.

```
#Beugungsfunktion Doppelspalt
def beugung_doppelspalt(x):
    return np.sinc(x)**2*np.cos(np.pi*v*x)**2
```

Die Abszissenwerte generieren wir uns mit der Numpy-Funktion `x=np.linspace(start,stop,steps)`.

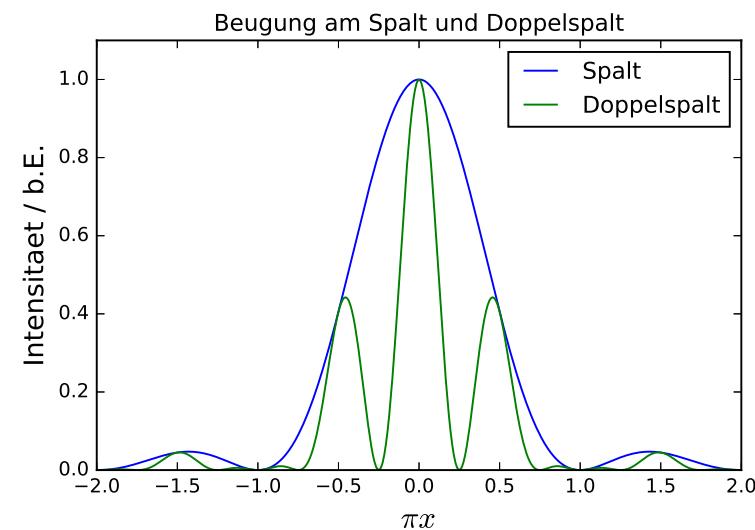


Abbildung 21: Beugung am Spalt und Doppelspalt.

```
#Anzahl a der Nebenmaxima die dargestellt werden sollen:
a=1
#Verhältnis Spaltabstand zu Spaltbreite:
v=2
x=np.linspace(-(a+1),a+1,200)
plt.plot(x,beugung_spalt(x),label='Spalt')
plt.plot(x,beugung_doppelspalt(x),label='Doppelspalt')
plt.xlabel('$\pi x$')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Beugung am Spalt und Doppelspalt')
plt.ylim((0,1.1))
plt.legend()
plt.savefig("figures/Beugung_spalt_doppelspalt.pdf", format="pdf")
```

Drucken Sie das Diagramm aus. Es sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 21.

IX.2 Berechnung der modifizierten Spaltbilder

Um das resultierende Bild des Spaltes zu erhalten muss folgendes Integral berechnet werden:

$$f_{\text{modifiziert}}(y) = \frac{d}{\pi} \int_0^{k_{y,n}} [\sin(k_y d/2)/(k_y d/2)] \cos(k_y y) dk_y \quad (57)$$

mit

$$k_{y,n} = k_0 \sin \alpha_n = k_0 n \lambda / d = 2n\pi/d, \quad (58)$$

wobei d die Spaltbreite und n den Integrationsbereich bezüglich der Nullstellen angibt. Wählen Sie z.B. $n = 1$, so erfolgt die Integration nur bis zu den ersten Nullstellen, d.h. nur über das Hauptmaximum. Bei $n = 2$ erfolgt die Integration über das Hauptmaximum und über die ersten Nebenmaxima.

```
#Integrand
def spalt(k):
    return d/np.pi*np.sin(k*d/2)/(k*d/2)*np.cos(y*k)

d=1 #Spaltbreite auf 1 setzen
n=3 #Integrationsbereich
```

Für den y -Bereiche wählen wir die doppelte Spaltbreite.

```
#y-Werte:
Y=np.linspace(-1,1,200)*d
```

Um die numerische Integration durchzuführen brauchen wir die Funktion `quad()` die im Modul `scipy.integrate` enthalten ist.

```
#Berechnung des resultierenden Objektbilds
from scipy.integrate import quad
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(spalt, 0, 2*np.pi*n/d)
    f_modifiziert.append(result**2)
#Kurve auf 1 normieren:
f_modifiziert=f_modifiziert/np.max(f_modifiziert)
```

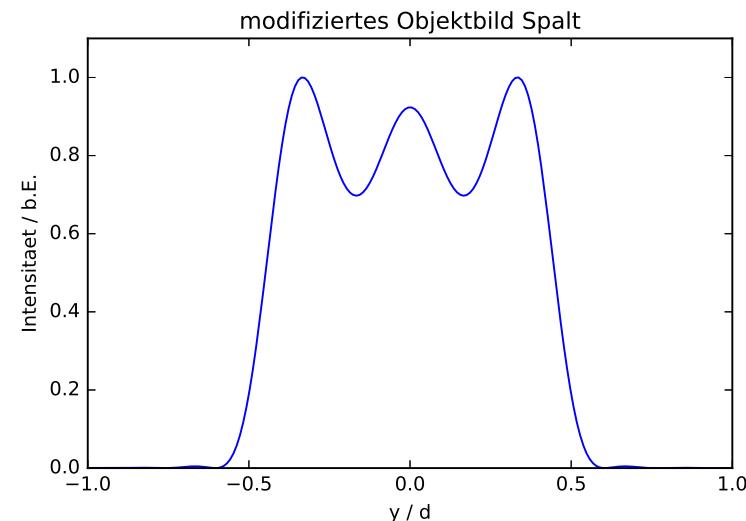


Abbildung 22: Modifiziertes Spaltbild.

Das Ergebnis ist in Abbildung 22 dargestellt. Die Abszisse ist in Einheiten der Spaltbreite d skaliert.

```
plt.plot(Y,f_modifiziert)
plt.xlabel('y / d')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('modifiziertes Objektbild Spalt')
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig("figures/spalt.pdf", format="pdf")
```

Analog verfahren Sie mit dem Doppelspalt. Sie benötigen die Funktion des Doppelspalts:

```
def doppelspalt(k):
    return d/np.pi*np.cos(k*g/2)*np.sin(k*d/2)/(k*d/2)*np.cos(y*k)

#Spaltabstand in Einheiten der Spaltbreite:
g=2*d
n=3
```

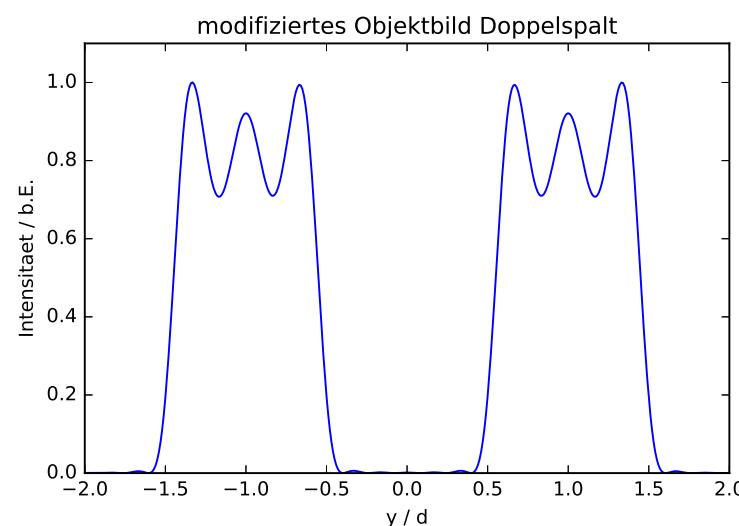


Abbildung 23: Modifiziertes Bild des Doppelspalts.

Tragen Sie das Ergebnis der Integration in ein Diagramm ein. Den y-Bereich müssen Sie gemäß Ihres gewählten Spaltabstands anpassen. Das Diagramm sollte so ähnlich wie in Abbildung 23 aussehen.

X Anhang

Die folgenden Bilder zeigen Fotografien von Objekt- und Beugungsbildern, die im Praktikum aufgenommen wurden. Bei allen Teilbildern ist neben dem Beugungsbild auch das resultierende Objektbild eingeblendet. Abbildung 24 zeigt die Beugung an einem Spalt. Im Teilbild a) tragen alle Beugungsordnungen zur Abbildung bei, so dass ein „scharfes Spaltbild“ erkennbar ist. Bei den Bildern b) bis e) wurden einzelne Moden des entsprechenden Beugungsbildes ausgeblendet, so dass nur einzelne Ordnungen zur Bildentstehung beitragen (Tiefpassfilter). Deutlich ist die Intensitätsverteilung gemäß Abbildung 14 zu erkennen. Das Teilbild f) zeigt zusätzlich das Spaltbild bei Ausblendung des Hauptmaximums (Hochpassfilter).

In Abbildung 25 ist das Beugungsbild eines Kreuzgitters zu sehen. Im oberen Bild tragen alle Ordnungen zur Bildentstehung bei und man erhält ein „unverfälschtes“ Objektbild. Im Bild darunter sind alle horizontalen Moden beschnitten. In diesem Fall geht die vertikale Information des Strichgitters verloren, so dass sich das Objektbild zu einem horizontalen Gitter verändert. Die vertikalen Striche sind im Objektbild nicht mehr vorhanden!

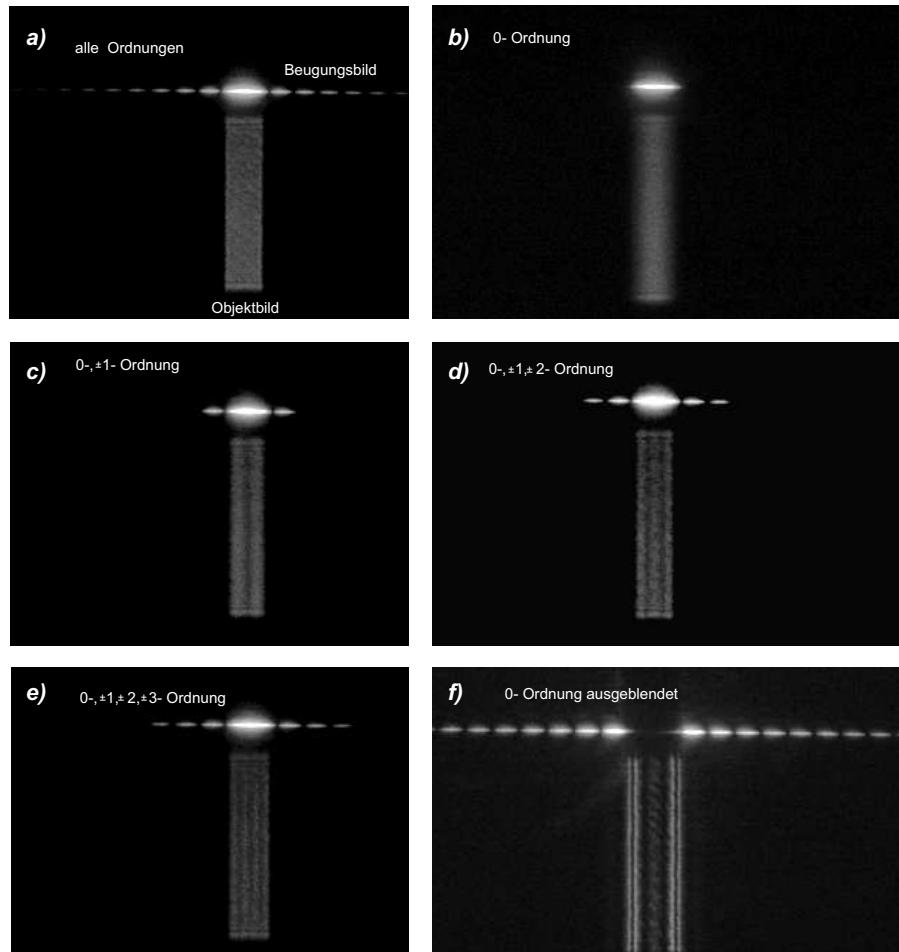


Abbildung 24: *Beugung am Spalt.*

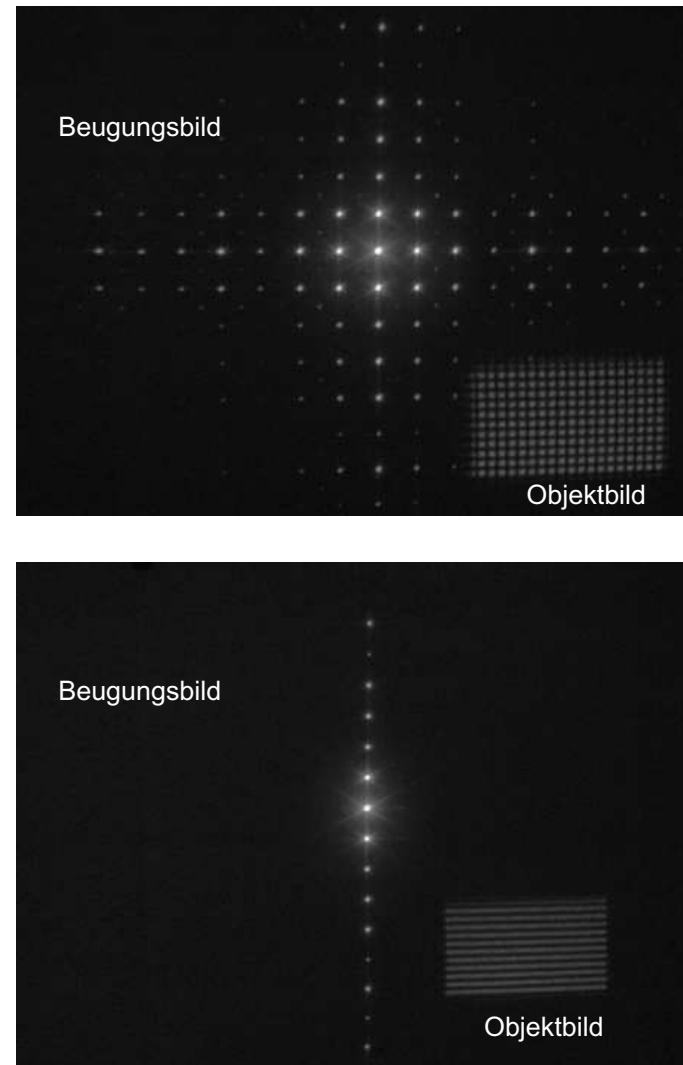


Abbildung 25: *Beugung am Kreuzgitter.*

Versuch 234 Lichtquellen



Abbildung 1: *Versuchsaufbau.*

I Messaufbau

- Gitterspektrometer, Ocean Optics USB4000
- verschiedene Lichtquellen: LED, LASER, Energiesparlampe, Halogenlampe, Glühbirne, Natriumdampflampe
- PC mit Drucker

II Literatur

- Atomic Spectra Database: <http://www.nist.gov/physlab/data/asd.cfm>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Plancksches Strahlungsgesetz, Sonnenspektrum, Fraunhofer- Linien, Gitterspektrometer, Wasserstoffspektrum, Atomspektren, Rayleigh-Streuung.

Verständnisfragen:

1. Vergleichen Sie das Spektrum einer Halogenlampe mit dem einer Gasentladungslampe. Worauf beruht die jeweilige Lichtemission?
2. Warum kann das Licht eines reinen Temperaturstrahlers niemals grünlich wirken?
3. Warum zeigt das auf der Erdoberfläche gemessene Sonnenspektrum deutlich Abweichungen von der Intensitätsverteilung eines schwarzen Strahlers?
4. Nach welchen Prinzipien lässt sich mit einer LED weißes Licht erzeugen?
5. Nach welchem Prinzip funktioniert ein Gitterspektrometer? Wie hoch ist die spektrale Auflösung.
6. Warum ist der Himmel tagsüber blau, am Morgen und am Abend jedoch rot?

IV Aufgaben

1. Aufnahme des Sonnenlichtspektrums bzw. des gestreuten Himmelslichts hinter einer Fensterscheibe und ohne Fensterscheibe. Zuordnung von starken Fraunhoferlinien im Spektrum. Messung der Absorption von Fensterglas durch Vergleich des Sonnenlichts ohne und mit Glasscheibe.
2. Wenn möglich: Aufnahme des direkten Sonnenlichts.
3. Aufnahme der Spektren von Lichtquellen und deren Vergleich: Sonnenlicht, Glühlampe, LED's, Energiesparlampe.
4. Spektroskopie: Aufnahme des Spektrums einer Natriumlampe mit hoher Auflösung. Zuordnung der Serienübergänge der Hauptserie und von zwei Nebenserien. Bestimmung der vom Drehimpuls abhängigen Korrekturen der Energieniveaus im Natrium.

V Grundlagen

V.1 Temperaturstrahler

Jeder Körper, dessen Temperatur größer als 0 K ist, sendet elektromagnetische Strahlung aus, deren Intensität von der Temperatur abhängt. Zur Quantifizierung der abgestrahlten Intensität geht man zunächst vom Modell eines schwarzen Strahlers aus. Dabei handelt es sich um einen idealisierten Körper, der die gesamte auf ihn einfallende elektromagnetische Strahlung vollständig absorbiert. Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz besitzt solch ein Körper auch ein maximales Emissionvermögen $\epsilon = 1$. Die Intensitätsverteilung der Strahlung die von einem schwarzen Strahler ausgeht, wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$M_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{(\frac{hc}{\lambda kT})} - 1} dA d\lambda, \quad (1)$$

wobei M_λ die Strahlungsleistung beschreibt, die vom Flächenelement dA im Wellenlängenbereich λ bis $\lambda + d\lambda$ in den Halbraum abgestrahlt wird. Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 2 für verschiedene Temperaturen im Bereich von 300 K bis 10000 K dargestellt.

Bei reinen Temperaturstrahlern hängt die spektrale Intensitätsverteilung nur von der Temperatur ab. Mit zunehmender Temperatur verschiebt sich das Intensitätsmaximum zu kleineren Wellenlängen. Quantitativ wird dies durch das Wiensche Verschiebungsgesetz beschrieben:

$$\lambda_{max} = \frac{2897,8 \mu m \cdot K}{T} \quad (2)$$

In der Technik werden Lichtquellen durch die sogenannte Farbtemperatur charakterisiert. Bei einer Temperatur von 0 K erscheint jeder Körper absolut schwarz. Mit zunehmender Erwärmung wird irgendwann rotes Licht emittiert. Eine weitere Temperaturerhöhung bewirkt, dass zusätzlich Grünanteile emittiert werden. Diese Grünanteile mischen sich mit den bereits vorhandenen Rotanteilen, so dass das ausgesendete Licht orange bis gelblich erscheint. Bei einer Temperatur von ungefähr 5500 K werden alle Wellenlängen des sichtbaren Bereichs mit ungefähr der gleichen Intensität emittiert und das Licht wirkt weiß. Eine weitere Erwärmung bewirkt, dass vermehrt Blauanteile ausgesendet werden. Die Farbe ändert sich dann von hellblau über blau zu violett. Umgangssprachlich

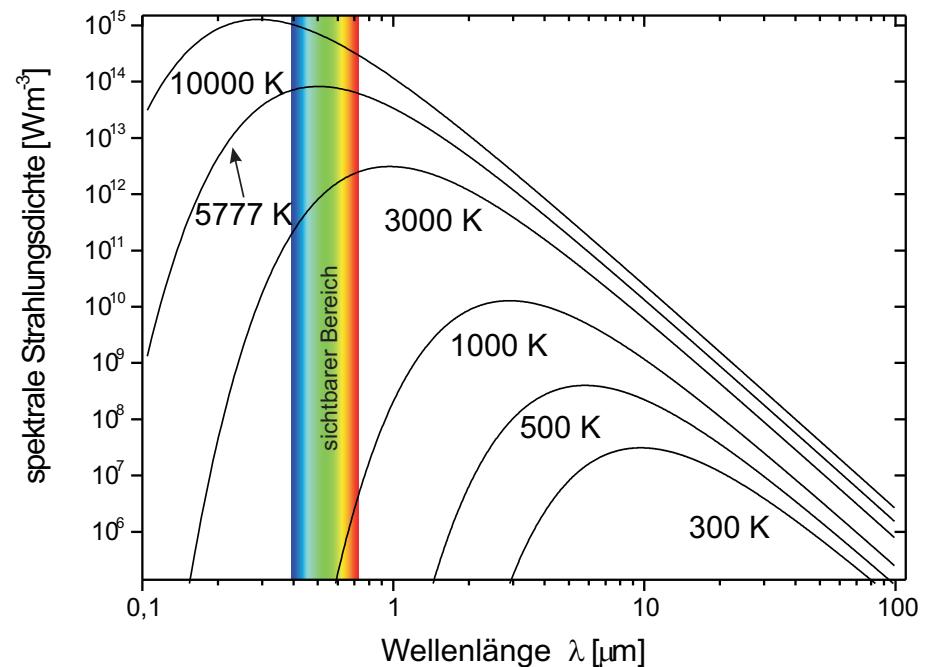


Abbildung 2: Spektrale Intensitätsverteilung eines schwarzen Körpers bei unterschiedlichen Temperaturen. Die Temperatur von 5777 K entspricht der effektiven Temperatur der Sonnenoberfläche.

wird Licht mit einem hohen Blauanteil auch als Kaltlicht und Licht mit hohem Rotanteil als Warmlicht bezeichnet.

Während das direkte Sonnenlicht „warm“ ist, ist das gestreute Sonnenlicht (Himmelslicht) bläulich kalt. Ursache dafür ist die starke Frequenzabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts bei der Streuung des Sonnenlichts (Rayleigh-Streuung). Da der Wirkungsquerschnitt proportional zur vierten Potenz der Frequenz des Lichts ist, wird blaues Licht etwa 16-fach stärker gestreut als rotes Licht. Das Sonnenlicht besitzt ein kontinuierliches Spektrum, das von vielen Absorptionslinien durchzogen ist, den „Fraunhoferlinien“. Die Absorption findet zum einen direkt in der Sonnenatmosphäre statt. Zum anderen auch in der Erdat-

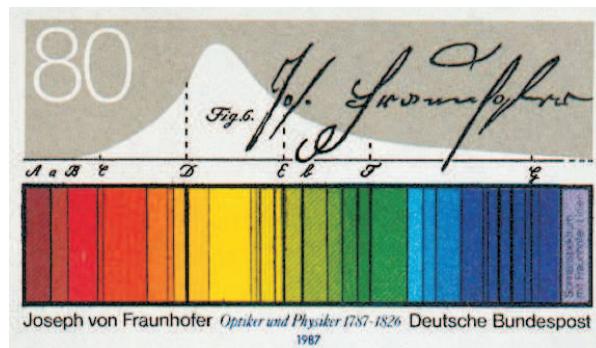


Abbildung 3: Zum 200. Geburtstag von Joseph Fraunhofer brachte die Deutsche Bundespost 1987 eine Briefmarke heraus. Dargestellt ist das Sonnenspektrum mit den nach Fraunhofer benannten Absorptionslinien der Atmosphäre.

mosphäre. Insbesondere Wasserdampf, Sauerstoff und Kohlendioxid führen zu ausgeprägten Absorptionslinien bzw. Absorptionsbanden. Ozon absorbiert breitbandig im Bereich von 200 bis 700 nm und filtert somit einen großen Teil der UV-Strahlung heraus. Das von Fraunhofer selbst kolorierte Spektrum mit den wichtigsten Linien ist in Abbildung 3 gezeigt. Im Fraunhoferspektrum wurde neben bekannten Linien wie z.B. die der Balmerserie, erstmals eine gelbe Linie entdeckt, die keinem bekannten Element zugeordnet werden konnte. Dieses wurde daher Helium genannt (von helios = Sonne). Leider ist diese Linie mit unserem Spektrometer nicht nachzuweisen, da sie von der starken Doppellinie des Natriums überlagert wird.

V.2 Nichttemperaturstrahler

Die Lichterzeugung bei Nichttemperaturstrahlern beruht nicht auf Wärmestrahlung sondern auf die Anregung von bestimmten Atomzuständen in Gasen oder Festkörpern oder durch Rekombination von Elektron-Loch Paaren in Halbleitern. Hierzu zählen Gasentladungslampen wie z.B. Leuchtstoffröhren, Leuchtdioden, oder LASER. Solche Lichtquellen haben im Gegensatz zu den Temperaturstrahlern ein diskretes Spektrum. Die spektrale Zusammensetzung des emittierten Lichts hängt bei den Gasentladungslampen von dem verwendeten „Leuchtgas“ (Metalldämpfe, Gase) ab. Von besonderer Bedeutung ist

Quecksilber, welches in Leuchtstoffröhren und Energiesparlampen verwendet wird. Das Licht einer reinen Quecksilberdampflampe erscheint bläulich bis lila. Die Intensität im sichtbaren Wellenlängenbereich ist gering. Der Hauptanteil wird im UV-Bereich emittiert. Um die Intensität des ausgesendeten Lichts im sichtbaren Bereich zu erhöhen, werden die Lampen mit einem Leuchtstoff (Leuchtstoffröhren) beschichtet. Bei Bestrahlung mit UV-Licht fluoresziert der Leuchtstoff, wobei das Fluoreszenzlicht im sichtbaren Bereich liegt. Als Beispiel einer Gasentladungslampe, werden wir im nächsten Kapitel, das Spektrum einer Natriumlampe detailliert untersuchen.

Die Emission von Licht bei Leuchtdioden (LED = Light Emitting Diode) beruht auf der Rekombination von Elektron- Loch Paaren in einem pn-Übergang. Bei den sogenannten direkten Halbleitern wird dabei ein Photon emittiert. Wichtige Halbleitermaterialien sind z.B. GaAs (IR), AlGaAs (rot, IR), GaAsP (rot, orange, gelb), GaP (grün), SiC (blau). Mittlerweile gibt es auch Leuchtdioden die weißes Licht aussenden. Solche LED's bestehen entweder aus drei separaten LED's (RGB= Rot Grün Blau), die sich additiv zu weißem Licht mischen oder werden aus blauen LED's hergestellt, die - ähnlich wie Leuchtstoffröhren - mit einer zusätzlichen Fluoreszenzschicht beschichtet sind.

Leuchtdioden besitzen im Vergleich zu anderen Lampen, einen sehr hohen Wirkungsgrad. Bei einer herkömmlichen Glühlampe beträgt dieser etwa 5 %, bei Leuchtstofflampen ungefähr 25 % und bei Leuchtdioden bis zu 70 %.

V.3 Das Natriumspektrum

Alkaliatome haben ein Leuchtelektron und besitzen daher „wasserstoffartige“ Spektren. Das Leuchtelektron im Natrium sieht nicht die volle Kernladung, sondern näherungsweise ein vom Neonrumpf mit 10 Elektronen teilweise abgeschirmtes kugelsymmetrisches Potential $V(r)$, das sich in Kernnähe dem Coulombpotential des Kerns

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3)$$

und für große Radien dem Wasserstoffpotential

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4)$$

annähert. Da das Potential kein Coulombpotential mehr ist, wird die 1-Entartung des Wasserstoffspektrums aufgehoben. Die Energieniveaus hängen

nicht mehr nur von der Hauptquantenzahl n ab sondern auch von der Bahndrehimpulsquantenzahl l . In guter Näherung können die Energieterme in der Form

$$E_{n,l} = -13,6 \text{ eV} \frac{1}{(n - \Delta_{l,n})^2} \quad (5)$$

geschrieben werden, wobei die Korrektur $\Delta_{l,n}$ nur wenig von n abhängt und daher näherungsweise als Δ_l geschrieben werden kann. Anschaulich ist klar, dass s-Elektronen im Mittel näher am Kern sind als p- Elektronen und dass d-Elektronen im Mittel grosse Abstände vom Kern und den anderen Elektronen haben. Zu einem festen Wert der Hauptquantenzahl n liegt also das s-Niveau am tiefsten und das d-Niveau am höchsten. Das Energiespektrum mit den wichtigsten Übergängen ist in Abbildung 4 gezeigt. Das Valenzelektron ist im Grundzustand im 3s-Zustand. Die Hauptserie entspricht den Übergängen $np \rightarrow 3s$, also zum Grundzustand. Die bekannteste Linie ist das gelbe Dublett bei 589 nm. Zum 3p-Zustand führen die beiden Nebenserien $nd \rightarrow 3p$ (1. Nebenserie) und $ns \rightarrow 3p$ (2. Nebenserie), die ebenfalls Linien im hier beobachtbaren Spektralbereich liefern. Das beobachtbare Spektrum ist in Abbildung 5 skizziert.

Welche Energieniveaus in der Na-Lampe durch die elektrische Entladung mit welcher Häufigkeit angeregt werden, hängt vom Druck und der Feldstärke in der Gasentladung ab und diese ist in der Lampe nicht konstant. Das Spektrum hängt daher davon ab, welcher Teil der Gasentladung in das Spektrometer abgebildet wird.

VI Durchführung des Versuchs

- Die Leuchtstofflampen im Versuchsräum dürfen während den Messungen nicht eingeschaltet sein! Sie werden sonst immer durch Streulicht störende Linien beobachten.
- Die Lichtleitfaser vom Objektiv zum Spekrometer darf auf keinen Fall geknickt werden.

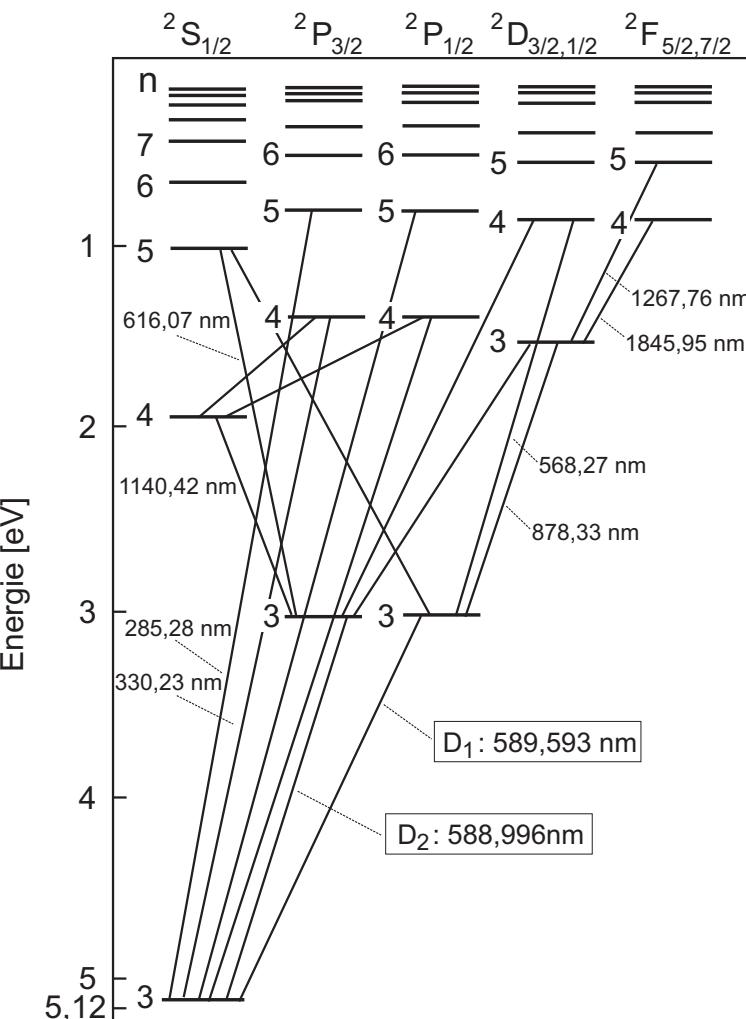


Abbildung 4: Energieschema und Photonübergänge im Natriumatom (Grotriandiagramm).

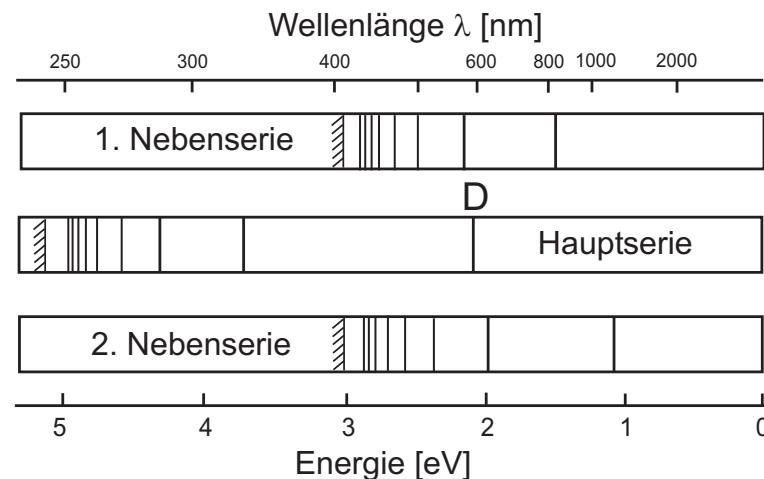


Abbildung 5: Spektren der Natriumserien. Diese sind im Experiment natürlich überlagert. Zur Auswertung müssen die beobachteten Linien den Serien zugeordnet werden.

VI.1 Bedienung des Spektrometers und der Software

Im Versuch wird ein computergesteuertes Gitterspektrometer (Abbildung 6) eingesetzt, das es erlaubt, den Spektralbereich einer Lichtquelle von 180 nm bis 950 nm zu registrieren. Die zu untersuchende Lichtquelle wird über ein Objektiv und einer Lichtleitfaser in das Spektrometer eingekoppelt und über ein optisches Gitter auf eine CCD-Zeile mit 3648 Pixel abgebildet. Dabei entspricht ein Pixel einem Wellenlängenintervall von 0,21 nm. Die Auflösung des Spektrometers beträgt etwa 1 nm. Das verfügbare Datenerfassungsprogramm **SpectraSuite** erlaubt es den Dunkelstrom zu messen und bei der Datenaufnahme automatisch abzuziehen. Zur Reduzierung von Fluktuationen kann automatisch über viele Scans gemittelt werden. Die Auswertung der Spektren erfolgt mit dem Programm **Python**.

Starten Sie das Programm **SpectraSuite** vom Desktop aus. Dabei sollte die Datenaufnahme des Spektrometers im Scope-Modus **S** automatisch gestartet werden. In diesem Modus wird das Spektrum mit der angegebenen Integrationszeit kontinuierlich gemessen und dargestellt. Sie sehen dann ein Fenster gemäß Abbildung 7. Wenn das Spektrometer vom Programm erkannt wird, erscheint links

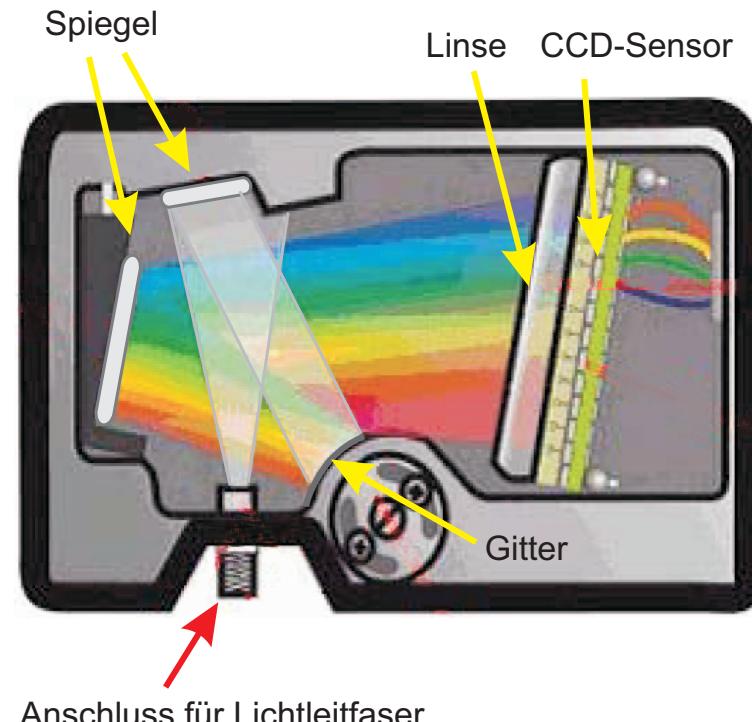


Abbildung 6: Strahlengang im Gitterspektrometer.

das Spektrometersymbol. Sollte das Spektrometer nicht angezeigt werden, dann überprüfen Sie ob der Netzstecker eingesteckt und der USB-Stecker des Spektrometers angeschlossen ist. Anschließend im Menü auf *Spektrometer* und *Nach Geräten suchen* klicken. Falls kein Graph angezeigt wird, müssen Sie auf *Datei → Neu → Spektrum anzeigen* klicken.

VI.1.1 Messung im Scope- Modus

Im Scope- Modus werden kontinuierlich Spektren aufgenommen und grafisch dargestellt. Schalten Sie eine Lichtquelle ein und richten Sie das Objektiv auf die Lichtquelle aus. Bei Bewegung sollten Sie beobachten, wie sich das angezeigte Spektrum ändert. Das Maximum des angezeigten Spektrums sollte bis mindestens

tens 2/3 des Skalenbereichs gehen. Fixieren Sie das Objektiv an der Stativstange. Die Anpassung der gewünschten Intensität erfolgt über den Abstand des Sammellobjektivs von der Lichtquelle, die Irisblende und letzten Endes die Auswahl der Integrationszeit. Reduzieren Sie die Integrationszeit, wenn die Intensität zu hoch ist, d.h. das Spektrum gesättigt ist, vergrößern Sie die Integrationszeit oder verbessern Sie die Lichtsammlung, wenn sie zu klein ist. Sie können das Rauschen des Spektrums verringern, indem Sie über mehrere Einzelmessungen mitteln. Dazu im Feld Scans für Mittelwert die Zahl der Einzelmessungen eintragen. Die Gesamtzeit der Datenaufnahme sollte 4 Sekunden nicht übersteigen.

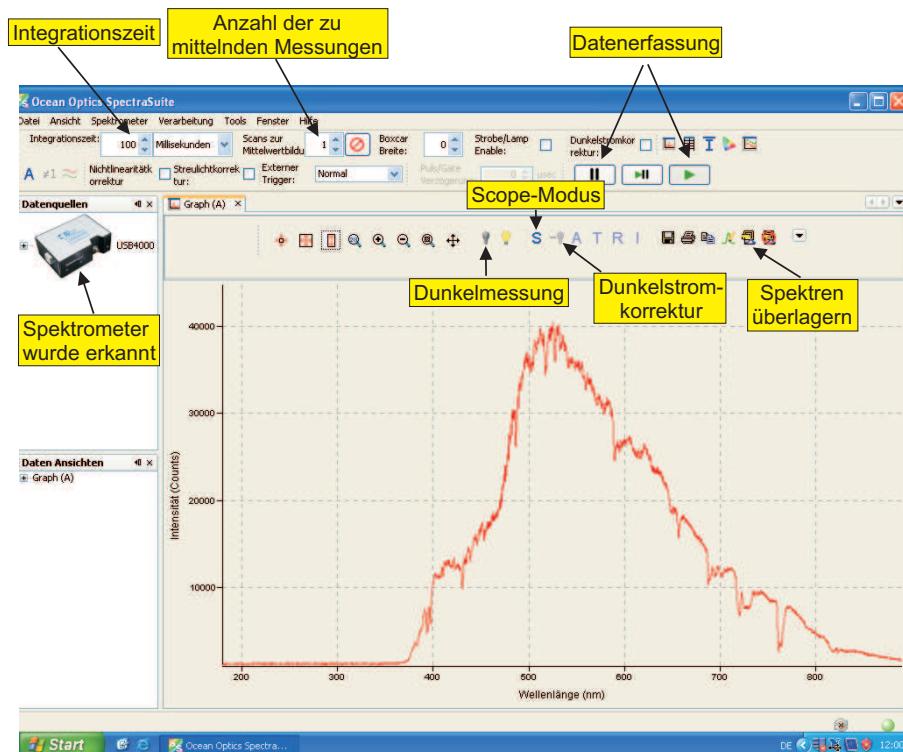


Abbildung 7: Oberfläche des Datenerfassungsprogramms.

VI.1.2 Dunkelmessung

Die CCD- Zeile des Spektrometers liefert auch dann ein von Null verschiedenes Signal, wenn kein Licht einfällt. Daher muss der Dunkelstrom für quantitative Messungen vom Spektrum abgezogen werden. Das Datenerfassungsprogramm hat diese Option integriert:

- **Dunkelstromkorrektur:** Stellen Sie zunächst die gewünschte Integrationszeit und die Anzahl der Messungen zur Mittelwertbildung ein. Lösen Sie vorsichtig den SMA- Stecker der Lichteitfaser am Spektrometereingang und decken Sie die Lichteintrittsöffnung mit dem Daumen ab, so dass kein Licht in das Spektrometer gelangt. Klicken Sie auf das Symbol der Dunkelmessung und anschließend auf .
- **Spektrum aufnehmen und speichern:** Schließen Sie die Lichteitfaser wieder an das Spektrometer an und starten Sie die Aufnahme im Modus *Scope - Dunkelspektrum* . Wenn Sie nun um eine Messung aufzunehmen auf das Symbol klicken, wird automatisch der Dunkelstrom vom aufgenommenen Spektrum abgezogen. Speichern Sie Ihre gemessenen Spektren (auf das Disketten-symbol klicken). Es öffnet sich ein Fenster. Geben Sie eine Zielfdatei ein und einen Namen für das Datenfile. Sie sollten die Messdaten doppelt speichern: Einmal als interne SpectraSuite- Datei mit der Endung *.ProcSpec und einmal als Textdatei (Tab getrennt) mit der Endung *.txt. Diese Datei kann später in der Auswertungssoftware Python importiert werden.

Nehmen Sie so nacheinander alle gewünschten Spektren auf. Falls Sie die Integrationszeit oder die Zahl der Scans zur Mittelbildung ändern, müssen Sie - bevor Sie das neue Spektrum im Modus *Scope - Dunkelspektrum* aufnehmen können - eine neue Dunkelmessung machen und abspeichern!

VII Messungen

VII.1 Sonnenspektrum

Registrieren und speichern Sie nacheinander die auf den Dunkelstrom korrigierten Spektren von:

- Himmelslicht bei geöffneten Fenster. Falls die Sonne scheint richten Sie das Objektiv möglichst zum blauen Himmel aus.
- Himmelslicht hinter Fensterglas.
- Falls die Sonne scheint, nehmen Sie auch noch das direkte Sonnenlicht auf.

VII.2 Qualitativer Vergleich einfacher Lichtquellenspektren

Die folgenden Messungen werden nur qualitativ durchgeführt. Sie können auf die Dunkelstrommessung verzichten, d.h. es reicht, das im Scopemode aufgenommene Bild. Nehmen Sie für folgende Lichtquellen das Spektrum auf und speichern Sie diese als interne SpectraSuite- Datei mit der Endung *.ProcSpec:

- Glühlampe
- Halogenlampe
- Energiesparlampe
- verschiedene LED's
- Laser.

Führen Sie im Anschluss der Messung direkt die Auswertung durch.

VII.3 Natriumspektrum

Schließen Sie die Spektrallampen niemals direkt an die Steckdose an sondern nur an das Vorschaltgerät (Drossel)!

Schließen Sie die Natriumlampe an das Vorschaltgerät (Drossel) an und schalten Sie die Drossel ein. Die Lampe braucht längere Zeit um zu zünden und bis sie stabil brennt. Richten Sie das Objektiv auf die Lichtquelle aus. Es ist sofort klar, dass die gelbe Natriumlinie alle anderen Linien weit überstrahlt. Wählen Sie den Abstand bzw. die Blendenöffnung so, dass die gelbe Linie bei einer Integrationszeit von 5 ms gerade in Sättigung geht.

VII.3.1 Aufnahme der Linien kleiner Intensität

Versuchen Sie zunächst im Scope- Modus möglichst viele schwache Linien des Natriums zu registrieren, die nach Abbildung 5 überwiegend im Bereich zwischen 400 nm und 540 nm liegen.

Wählen Sie mit dem Zoomwerkzeug  daher diesen Wellenlängenbereich zur Darstellung aus indem Sie ein Rechteck um den gewünschten Bereich ziehen. Klicken Sie danach auf  um die Intensität auf den vollen Bereich zu skalieren. Drehen Sie jetzt vorsichtig das Objektiv, so dass dieses den „Fuss“ der Gasentladung abbildet. Sie sollten sehen, wie eine Schar von Linien zwischen 400 nm und 540 nm erscheint. Falls diese nicht sehr deutlich sind, erhöhen Sie die Integrationszeit, so dass noch keine Linie in Sättigung ist. Maximieren Sie die Intensität der Linien durch vorsichtiges Drehen des Objektivs. Wählen Sie zum Schluss die Zahl der Scans zur Mittelwertbildung so, dass eine Gesamtaufnahmezeit von etwa 4 Sekunden entsteht.

Registrieren Sie nun ein auf den Dunkelstrom korrigiertes Spektrum. Achten Sie darauf, dass bei der Dunkelstrommessung nicht aus Versehen das Objektiv bewegt wird! Wenn das Spektrum auf dem Bildschirm vernünftig aussieht, dann speichern Sie es im SpectraSuite- Format und als Textfile.

Es wird immer der gesamte Spektralbereich aufgezeichnet. Wenn Sie sich daher zum Schluss den gesamten Spektralbereich anschauen (Klick auf ), dann werden Sie feststellen, dass die intensiven Linien, insbesondere die Na-D Linie, in Sättigung sind. Es ist daher notwendig das Spektrum der intensiven Linien nochmals aufzunehmen.

VII.3.2 Aufnahme des Spektrums der intensiven Linien

Schauen Sie sich das gesamte Spektrum im Scopemode an und reduzieren Sie die „Intensität“ durch kurze Integrationszeit und Schließen der Irisblende so weit, dass die Na-D Linie nicht mehr in Sättigung ist. Nehmen Sie dann ein auf den Dunkelstrom korrigiertes Spektrum mit diesen Einstellungen auf.

Überzeugen Sie sich, dass Sie in der unmittelbaren Umgebung der Na-D Linie zwei Linien bei ca. 620 nm und 570 nm beobachten, die vorher überdeckt waren.

Beginnen Sie nach Beendigung der Messung unmittelbar mit der Auswertung der Daten.

VIII Auswertung

VIII.1 Auswertung der unterschiedlichen Lichtquellen

Erstellen Sie ein Diagramm in dem die verschiedenen Lichtquellen miteinander verglichen werden. Hierzu ist es am einfachsten, in **SectraSuite** dem letzten gemessenen Spektrum (z.B. dem LED-Spektrum) die anderen Spektren zu überlagern. Hierzu auf das Symbol klicken und das zu überlagernde Spektrum auswählen. Für jedes Spektrum wird automatisch eine andere Farbe gewählt. Direkt ausdrucken (farbig) und von Hand beschriften. Schätzen Sie für jedes Spektrum die mittlere Wellenlänge ab und diskutieren Sie die Ergebnisse. Nach welchem Prinzip wird das Licht der weißen LED erzeugt? Welche Lampen sind warm, kalt?

IX Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm Jupyter vom Desktop aus.

IX.1 Auswertung des Sonnenspektrums

Glasabsorption: Kopieren Sie alle Ihre Messung (Textdateien) in den Ordner **data** auf dem Desktop. Schauen Sie sich die Messung des Himmellichts an. Die Datei besitzt 17 Headerzeilen und besteht aus 2 Spalten. Als Dezimaltrennzeichen werden Kommas verwendet. Die letzte Zeile ist eine Kommentarzeile die mit dem Zeichen > beginnt. Um die Daten zu importieren müssen wir alle Header- und Kommentarzeilen ausblenden und alle Kommas durch Punkte er-

setzen. Das können Sie entweder direkt in der Datei machen oder von Python aus.

Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Das Ersetzen der Kommas geht mit folgender Funktion:

```
def comma_to_float(valstr):
    return float(valstr.decode("utf-8").replace(',', '.'))
```

Zum Importieren verwenden wir die Numpy-Funktion `loadtxt()`. Wir müssen den Pfad/Dateiname der Messung des Himmellichs ohne Glas angeben. Des Weiteren wird die erste Zeile übersprungen und nur die letzten drei Spalten ausgeleren. Der converter ersetzt alle Kommas durch Dezimalpunkte. Mit der Option `unpack=True` wird jede Spalte getrennt in die Arrays `lamb_og`, `inten_og` geschrieben, `comments=>` blendet die letzte Kommentarzeile aus:

```
lamb_og, inten_og=np.loadtxt('data/himmel_o_g.txt', skiprows=17,
                             converters= {0:comma_to_float, 1:comma_to_float},
                             comments='>', unpack=True)
```

Analog importieren Sie die Messung des Himmellichs mit Glas.

```
lamb_og, inten_og=np.loadtxt('data/himmel_m_g.txt', skiprows=17,
                             converters= {0:comma_to_float, 1:comma_to_float},
                             comments='>', unpack=True)
```

Tragen Sie beide Spektren mit und ohne Fensterglas in ein gemeinsames Diagramm ein (Abbildung 8).

```
plt.plot(lamb_og, inten_og, label='ohne Fenster')
plt.plot(lamb_mg, inten_mg, label='mit Fenster')
plt.title('Gemessenes Sonnenspektrum mit und ohne Fenster')
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.legend()
plt.grid()
plt.ylim((0,60000))
plt.xlim((250,900))
plt.savefig("figures/Himmel_m_o_G.pdf", format="pdf")
```

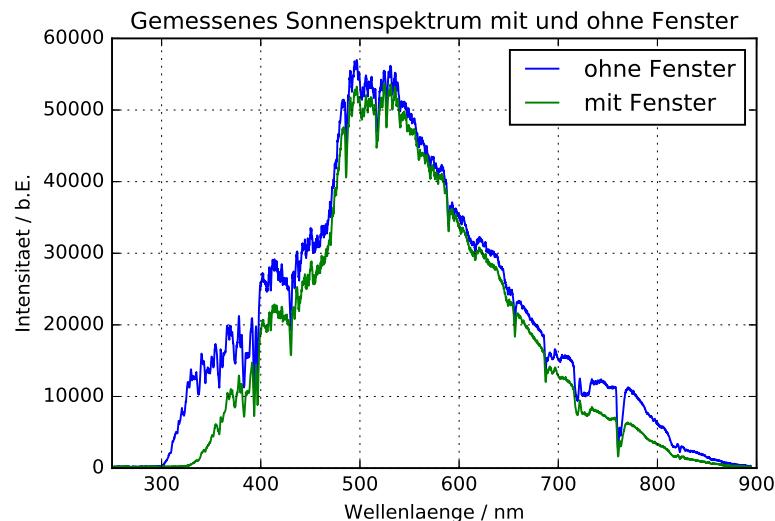


Abbildung 8: Himmelsspektrum gemessen einmal durch ein Glasfenster und einmal direkt ohne ein Glasfenster.

Berechnen Sie die Absorption von Glas:

$$A_{Glas} = 1 - \frac{I_{mG}(\lambda)}{I_{oG}(\lambda)}, \quad (6)$$

wobei I_{mG} die gemessene Intensität mit und I_{oG} ohne Fensterglas darstellen. Zeichnen Sie das Diagramm nur für Wellenlängen größer als 320 nm (Abbildung 9).

```
A=1-inten_mg/inten_og
```

```
plt.plot(lamb_mg, A)
plt.title('Absorptio von Glas')
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Absorption / b.E.')
plt.ylim((0,1))
```

```
plt.xlim((320,800))
plt.savefig("figures/Absorption_Glas.pdf", format="pdf")
```

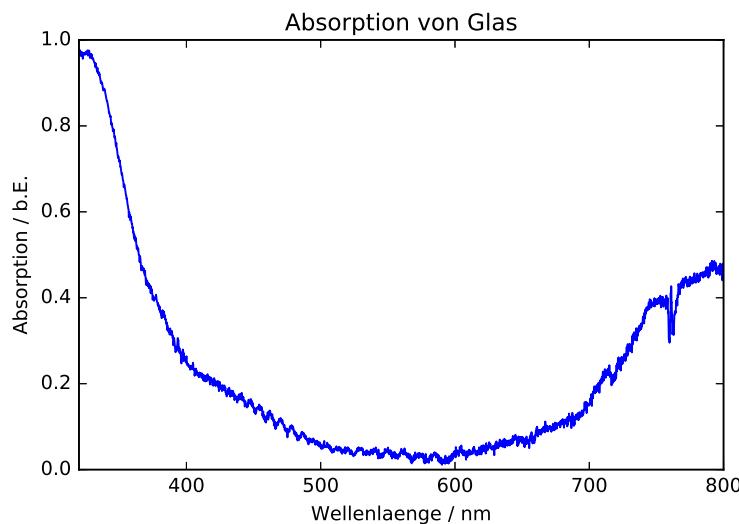


Abbildung 9: Wellenlängenabhängigkeit der Absorption von Fensterglas.

Drucken Sie beide Diagramme aus. Was können Sie über die Absorption von Glas sagen? **Fraunhoferlinien:** Zeichnen Sie ein neues Diagramm des Sonnenspektrums (Direktlicht oder Himmelslicht ohne Glas) um die wichtigsten Fraunhoferlinien zu identifizieren. Schalten Sie mit %matplotlib qt in den interaktiven Modus von Matplotlib. Die Diagramme werden dann in einem externen Fenster dargestellt und Sie haben die Möglichkeit zu zoomen und die Daten mit einem Cursor auszumessen. Falls die Ausgabe nicht in einem externen Fenster erfolgt, müssen Sie den Kernel neu starten (Menu → Kernel → Restart), %matplotlib inline durch %matplotlib qt ersetzen und alle Zellen nochmals ausführen (Menu → Cell → Run All).

```
%matplotlib qt
plt.plot(lamb_og, inten_og)
plt.title('Sonnenspektrum')
```

```
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.ylim((0,60000))
plt.xlim((350,800))
plt.savefig("figures/Fraunhofer.pdf", format="pdf")
```

Zeichnen Sie nur den Wellenlängenbereich von 350 nm bis 800 nm. Suchen Sie zuerst die bekannten Linien der Balmerserie von Wasserstoff und markieren Sie diese mit Pfeilen. Eine Übersicht der wichtigsten Fraunhoferlinien und die Balmerserie finden Sie im Anhang. Wo erwarten Sie die gelbe Heliumlinie? Markieren Sie die gefundenen Fraunhoferlinien von Hand auf einem Ausdruck und heften Sie diesen in Ihr Protokollbuch ein. Vergleichen Sie Ihre gemessenen Werte mit den Literaturwerten. **Direktes Licht und Streulicht:** Erstellen Sie ein Diagramm in dem die Spektren des direkten Sonnenlichts und des Streulichts (blauer Himmel) verglichen werden. Warum ist das gestreute Licht zu kurzen Wellenlängen verschoben? Warum ist der Himmel blau? Zeichnen Sie das Verhältnis der Intensitäten von Streulicht und direktem Sonnenlicht im sichtbaren Bereich des Spektrums in einem zusätzlichen Diagramm und diskutieren Sie das Ergebnis.

IX.2 Auswertung des Natriumspektrums

Kopieren Sie Ihre Messung des Natriumspektrums kleiner Intensität in den Ordner `data` auf dem Desktop und importieren diese in Ihr Notebook. Tragen Sie die Daten in ein interaktives Diagramm ein.

```
lamb_og, inten_og=np.loadtxt('data/Na1.txt', skiprows=17,
                           converters= {0:comma_to_float, 1:comma_to_float},
                           comments='>', unpack=True)
```

```
plt.plot(lamb, inten)
plt.title('Natriumspektrum geringer Intensitaet')
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.yscale('log')
plt.ylim((0,60000))
plt.xlim((350,800))
```

- Starke Linien:

- Schauen Sie sich zuerst das Gesamtspektrum für die Linien hoher Intensität zwischen 300 nm und 850 nm mit logarithmischer Intensitätsskala an.
- Drucken Sie das Spektrum aus.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Zoomfunktion und dem Cursor die Wellenlängen der intensiven, klar erkennbaren Linien und tragen Sie diese von Hand in das Diagramm ein. Schätzen Sie den Fehler der Wellenlänge aus der Halbwertsbreite der jeweiligen Linie ab.

- Schwache Linien:

- Importieren Sie die entsprechende Messung wie zuvor und tragen Sie diese in ein interaktives Diagramm ein.
- Zeichnen Sie das Spektrum im Bereich 300 nm bis 540 nm mit logarithmischer Intensitätsskala und bestimmen Sie die Wellenlängen mit Fehlern der beobachteten Linien (Abbildung 10). Drucken Sie das Diagramm aus und tragen Sie die gefundenen Werte in das Diagramm ein.
- Zeichnen und drucken Sie das Spektrum im Bereich 600 nm bis 850 nm und bestimmen Sie die Wellenlängen mit Fehlern.

IX.3 Zuordnung der gefundenen Linien zu Serien

Die gefundenen Linien müssen zunächst den drei Serien des Natriums zugeordnet werden. Berechnen Sie hierzu die ungefähren Wellenlängen der Linien für jede Serie und vergleichen Sie diese mit den beobachteten Linien.

IX.3.1 Erwartete Linien für die 1. Nebenserie: $md \rightarrow 3p$

Bei diesen Übergängen können Sie in erster Näherung annehmen, dass der Korrekturterm für die d-Energieniveaus Null ist. Dann gilt für die Wellenlänge λ_m der einzelnen Übergänge:

$$\frac{hc}{\lambda_m} = E_{Ry}[\text{eV}] / m^2 - E_{3p}[\text{eV}], \quad (7)$$

bzw.

$$\lambda_m[\text{nm}] \approx \frac{1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}]}{-13,605 \text{ eV}/m^2 - E_{3p}[\text{eV}]} \quad (8)$$

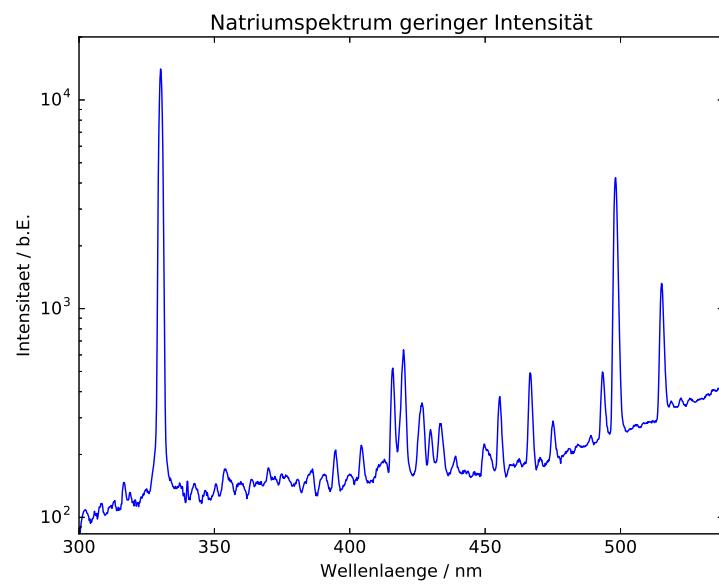


Abbildung 10: Natriumspektrum im Bereich 300 nm bis 540 nm.

Hier beschreiben h das Planck'sche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit und $E_{Ry} = -13,605 \text{ eV}$ die Rydbergenergie. m ist die Hauptquantenzahl des d-Niveaus und E_{3p} die Energie des 3p Zustandes in Elektronenvolt. Der Vorfaktor hc berechnet sich zu $hc = 1,2398 \times 10^3 \text{ [nm eV]}$.

Ordnen Sie der gemessenen Linie im Bereich von 819 nm den Wert $m = 3$ zu und berechnen Sie damit E_{3p} . Benutzen Sie immer die gemessenen Wellenlängen auf eine Stelle nach dem Komma. Berechnen Sie die erwarteten Wellenlängen für die Nebenserien bis $m = 12$ und versuchen Sie die gefundenen Linien zuzuordnen.

```
for m in range(3,13):
    l=1.2398E3/(-13.605/m**2-E_3p)
    print('m={m:2d}, lambda={l:6.2f}'.format(m=m,l=l))
```

Legen Sie im Protokollbuch eine Tabelle für diese Serie an und tragen Sie die gemessenen Wellenlängen als Funktion von m ein. Achtung: Wenn Sie sich nicht

sicher sind, ob eine Linie zugeordnet werden kann, dann lassen Sie es. Falsche Zuordnungen sind viel schlimmer als eine Linie weniger! Falls eine Wellenlänge in einer Serie fehlt, schauen Sie nach, ob Sie diese übersehen haben.

IX.3.2 Erwartete Linien für die 2. Nebenserie: $ms \rightarrow 3p$

Nutzen Sie aus, dass die gelbe D-Linie des Natriums bei $\lambda = 589 \text{ nm}$ dem Übergang $3p \rightarrow 3s$ entspricht und berechnen Sie die Bindungsenergie (in eV) des Grundzustands:

$$E_{3s} = E_{3p} - 1,2398 \times 10^3 \text{ [nm eV]} / \lambda \quad (9)$$

und berechnen Sie aus E_{3s} den Korrekturfaktor Δ_s gemäß

$$E_{3s} = -13.605 \text{ eV} / (3 - \Delta_s)^2. \quad (10)$$

Berechnen Sie damit die Wellenlängen der zweiten Nebenserie für $m = 4$ bis 9:

$$\lambda_m \text{ [nm]} \approx \frac{1,2398 \times 10^3 \text{ [nm eV]}}{-13,605 \text{ eV} / (m - \Delta_s)^2 - E_{3p} \text{ [eV]}} \quad (11)$$

Ordnen Sie wie zuvor die gemessenen Linien dieser Serie zu und tragen Sie diese in eine Tabelle ein.

IX.3.3 Erwartete Linien für die 3. Nebenserie: $mp \rightarrow 3s$

Berechnen Sie aus E_{3p} den Korrekturfaktor Δ_p :

$$E_{3p} = -13,605 \text{ eV} / (3 - \Delta_p)^2 \quad (12)$$

und bestimmen Sie wieder die Wellenlängen für $m = 4$ bis 5:

$$\lambda_m \text{ [nm]} \approx \frac{1,2398 \times 10^3 \text{ [nm eV]}}{-13,605 \text{ eV} / (m - \Delta_p)^2 - E_{3s} \text{ [eV]}}. \quad (13)$$

Vergleichen Sie diese mit den gemessenen Linien (falls vorhanden).

Es bleiben Linien sichtbar, die keiner der drei Serien zugeordnet werden können insbesondere bei Wellenlängen über 700 nm. Diese kommen z.T. von Krypton. Ignorieren Sie diese Linien.

IX.4 Bestimmung der Serienenergien und der l-abhängigen Korrekturfaktoren

Benutzen Sie die gemessenen Wellenlängen der Serien um die Rydbergenergie E_{Ry} , E_{3p} und die Korrekturterme Δ_d und Δ_s zu bestimmen. Tragen Sie Ihre gefundenen Linien mit Fehlern und die dazugehörigen Quantenzahlen in Arrays ein. Die folgenden Zahlenwerte sind nur Beispiele und entsprechen nicht den wahren Werten!

```
wellenl=np.array([819.1,569.9,499.5,468.3,451.3,
                  441,434.8,431.6,428.3,421.4])
fehler=np.array([2,1,1,1,1,1,1,1,1,2])
quantenz=np.arange(3,13)
```

Tragen Sie Ihre Messerte in ein Diagramm ein.

```
plt.errorbar(quantenz,wellenl,fehler, fmt=".")
plt.xlabel('Quantenzahl')
plt.ylabel('Wellenlaenge / nm')
plt.title('1. Nebenserie des Na-Atoms')
```

Für die erste Nebenserie wählen Sie die Funktion

$$\lambda_m [\text{nm}] \approx 1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}] / [E_{Ry}/(m - \Delta_d)^2 - E_{3p}] \quad (14)$$

mit E_{Ry} , E_{3p} und Δ_d als freie Parameter.

```
from scipy.optimize import curve_fit
def fit_func(m,E_Ry,E_3p,D_d):
    return 1.2398E3/(E_Ry/(m-D_d)**2-E_3p)
```

Mit $\text{para} = [-13.6, -3, -0.02]$ werden die Startparameter in der Reihenfolge wie sie in der Funktion definiert wurden initialisiert. Mit der Funktion `curve_fit()` wird die Anpassung durchgeführt. Das Ergebnis, d.h. die Parameter werden im Array `popt` gespeichert und deren Varianzen befinden sich auf der Diagonalen der Kovarianzmatrix `pcov`. Falls der Fit nicht konvergiert, müssen Sie Startparameter ändern.

```
para = [-13.6,-3,-0.02]
popt, pcov = curve_fit(fit_func, quantenz, wellenl,
                       sigma=fehler ,p0=para)
```

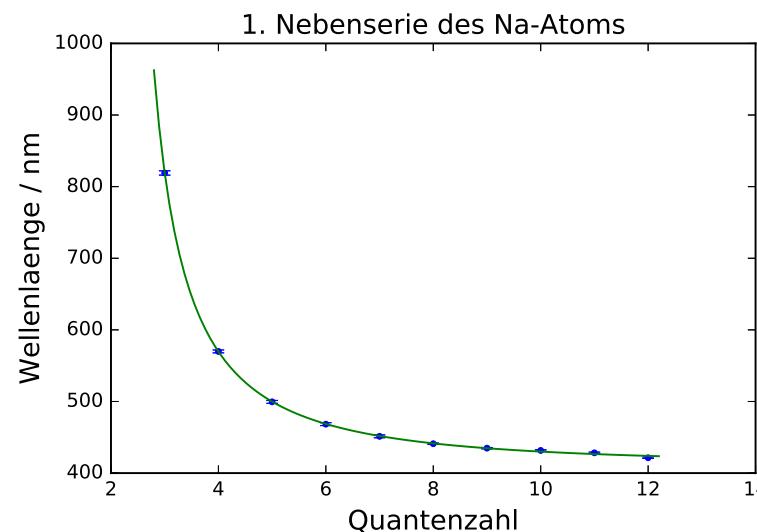


Abbildung 11: 1. Nebenserie des Na-Atoms.

Lassen Sie sich die Fitergebnisse ausgeben:

```
print("E_Ry=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("E_3p=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
print("D_d=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
```

Diskutieren Sie die Güte des Fits. Berechnen Sie die χ^2 -Summe:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{\text{Funktionswert}_i - \text{Messwert}_i}{\text{Fehler}_i} \right)^2 \quad (15)$$

und $\chi^2_{red} = \chi^2 / \text{Freiheitsgrad}$. Der Freiheitsgrad berechnet sich aus der Anzahl der Messwerte abzüglich der Zahl der Fitparameter.

```
chi2_=np.sum((fit_func(quantenz,*popt)-wellenl)**2/fehler**2)
dof=len(quantenz)-3 #dof: degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red=chi2_/dof
print("chi2=", chi2_)
print("chi2_red=",chi2_red)
```

Berechnen Sie noch die „Fitwahrscheinlichkeit“, das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einer Wiederholungsmessung ein χ^2 - Wert erhalten, der größer oder gleich Ihrem χ^2 - Wert ist.

```
from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chi2_,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit:", prob,"%")
```

Vergleichen Sie die Fitergebnisse mit den zuvor berechneten Werten. Hinweis: Δ_d ist eine empirische Näherungsformel. In Wirklichkeit hängt diese Größe auch noch schwach von der Hauptquantenzahl n ab. Wundern Sie sich daher nicht, wenn die Wahrscheinlichkeit des Fits nicht so gut ist.

Zeichnen Sie die erhaltene Funktion mit Parametern in das Diagramm mit Ihren Messwerten. Mit *popt werden die gefundenen Parameter automatisch in Ihre Funktion entpackt. Die Abszissenwerte für die Funktion generieren wir mit `linspace()`.

```
plt.errorbar(quantenz,wellenl,fehler, fmt=". ")
plt.xlabel('Quantenzahl')
plt.ylabel('Wellenlaenge / nm')
plt.title('1. Nebenserie des Na-Atoms')
x=np.linspace(2.8,12.2, 100)
plt.plot(x, fit_func(x,*popt))
plt.savefig("figures/1_Nebenserie.pdf", format="pdf")
```

Ihr Diagramm sollte so ähnlich wie Abbildung 11 aussehen.

Wiederholen Sie die Anpassung für die zweite Nebenserie. Hier müssen Sie die Funktion

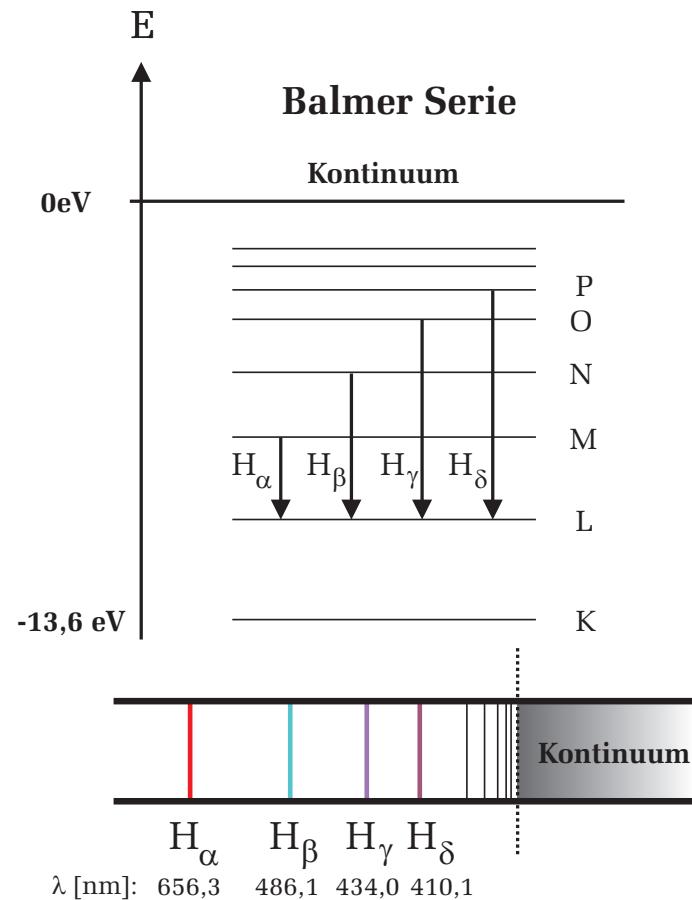
$$\lambda_m [\text{nm}] \approx 1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}] / [E_{Ry}/(m - \Delta_s)^2 - E_{3p}] \quad (16)$$

anfitten.

X Anhang

Symbol	Wellenlänge (nm)	Element/Molekül
A	759,4	telluric oxygen
B	686,7	telluric oxygen
C	656,3	hydrogen
D ₁	589,6	sodium
D ₂	589,0	sodium
D ₃	587,6	helium
E	527,0	iron and calcium
b ₁	518,4	magnesium
F	486,1	hydrogen
G	430,8	iron and calcium
H	396,8	calcium
K	393,4	calcium

Tabelle 1: Fraunhoferlinien.

Abbildung 12: *Balmerserie des Wasserstoffatoms.*

