PTP4 Zusammenfassung
Theoretische Quantenmechanik
Professor Matthias Bartelmann

Sommersemester 2017
Heidelberg

Ende des 19. Jahrhunderts beschrieb Physik ueberzeugend die bekannten Wechselwirkungen:

- Graviation in klassischer Mechanik durch Newton, Lagrange, Hamilton
- Elektromagnetismus durch Maxwell'sche Gleichungen
- Thermodynamik

Ungeklaerte Fragen:

- Widerspruch Galilei-Invarianz in kl. Mechanik (Geschwindigkeiten addiert) und Maxwell Elektrodynamik (Lichtgeschwindigkeit Obergrenze) aufgeloest durch Lorentz Invarianz in Einsteins spezieller Relativitätstheorie
- Stabilitaet der Atome (im Rutherford Modell) nicht erklärbar
- diskrete Spektrallinien nicht erklärbar
- Schwarzkörperstrahlung nicht beschreibbar (UV-Katastrophe)

Hohlraumstrahlung: Stehende Wellen im Hohlraum: Moden
Es sind $\frac{L}{\lambda}$ Wellen auf Strecke L möglich
Anzahl abschätzen:
Kugel ($V_{Kugel} = \frac{4}{3} * \pi * r^3$)
Zwei Polarisationsrichtungen: E und B Feld bringt Faktor zwei
Radius ist $\frac{L}{\lambda}$
$N(\lambda) = 2 * \frac{4}{3} * \pi * (\frac{L}{\lambda})^3$

- *Relativistische Energie-Impuls-Beziehung:* $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$
- *Dispersionsrelation:* $k = \frac{\omega}{c}$

- *Kreisfrequenz:* $\omega = 2 * \pi * \nu$
- *Wellenlänge:* $\lambda = \frac{2*\pi}{k}$

Freie Schrödingergleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(t,\vec{x})$

Energieoperator: $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

Kommutator: $[\hat{A},\hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

Einsoperator: $\hat{I} = \sum_n |a_n\rangle\langle a_n| + \int |a\rangle\langle a|da$

Dichteoperator: $\hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|$

Zeitentwicklungsoperator: $\hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle$

Zeitentwicklungsoperator: $\hat{U}(t) = exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)$

Heisenberg-Gleichung: $i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_H = \left[\hat{A}_H,\hat{H}_H\right] + i\hbar\left(\partial_t\hat{A}\right)_H$

Zeitabhängiger Operator: $\hat{A}_H(t) := \hat{U}^{-1}(t,t_0)\hat{A}\hat{U}(t,t_0)$

Translationsoperator: $\hat{T}_{\vec{a}} = exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}\right)$

Dyson Reihe: $\hat{U}(t,t_0) = Texp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{H}(t')dt'\right)$

Wechselwirkungsbild: $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I|\psi(t)\rangle_I$

Störoperator: $\hat{V}_I(t) := \hat{U}_0^{-1}\hat{V}\hat{U}_0$

6 Axiome

- Zustände werden durch repräsentiert durch Strahlen im Hilbertraum
- Observablen entsprechen linearen selbstadjungierten Operatoren
- Eigenwerte sind mögliche Messwerte
- Entwicklungskoeffizientenquadrate (Zustände auf Basisvektoren projiziert) sind Wahrscheinlichkeiten für Messung
- Zeitentwicklung durch Schrödingergleichung
- Durch den Messprozess wird der Zustandsvektor identisch mit einem der Eigenbasisvektoren des Operators welcher der Messung entspricht

Rabi-Oszillationen

Störmatrix

$$Ortsoperator\ \hat{x} = \begin{cases} x & (Ortsdarstellung) \\ i\hbar\nabla_p & (Impulsdarstellung) \end{cases}$$

$$Impulsoperator\ \hat{p} = \begin{cases} -i\hbar\nabla_x & (Ortsdarstellung) \\ p & (Impulsdarstellung) \end{cases}$$

Kommutator Ort & Impuls: $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = -i\hbar\,[x_i, \partial_j] = i\hbar\delta_{ij}$

Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung: $\hat{H}\phi(x) = E\phi(x)$

Randbedingungen: stetiges Potential: zweimal diffbare WF

HOC Absteigeoperator: $\hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2}}(u + \partial_u)$

HOC Aufsteigeoperator: $\hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(u - \partial_u)$

HOC Besetzungszahloperator $\hat{N} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$

HOC Hamilton: $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$

HOC Energieeigenwerte: $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

HOC Energieeigenzustände: $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n\,|0\rangle$

Exponentialfunktion hoch Wirkung

Pfadintegral

Paritätsoperator: $\hat{P}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$

Translationsoperator

Kugelflächenfunktionen

Zeitumkehroperator $\hat{\mathcal{T}}\psi(\vec{x},t) = \psi^*(\vec{x},-t)$

Wasserstoffatom

Drehimpulse:

- $J^2\,|j, j_3\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|j, j_3\rangle$
- $J_3\,|j, j_3\rangle = \hbar j_3\,|j, j_3\rangle$

- $J_\pm |j, j_3\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - j_3(j_3 \pm 1)}\,|j, j_3 \pm 1\rangle$

Leiteroperatoren

Radiale Eigenfunktion des Wasserstoffatoms

Hamilton im elektromagnetischen Feld

Ahanorov-Bohm-Effekt

Zeeman-Effekt $\Delta E = -\frac{m\hbar\omega_B}{2} = B\mu_B m$

Spinzustände

Spinoren

Spinpräzession $|s(t)\rangle = exp(i\omega_L t\sigma_3)\,|s(0)\rangle$

Larmorfrequenz $\omega_L := \frac{g}{2\hbar}\mu_B B$

Paschen-Back-Effekt

Störung

Linearer Stark-Effekt

Legendre Transformation $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = p\dot{q} - H(q, p, t)$

Wirkung $S = \oint \mathcal{L}dt = \oint pdq - Et = S_0 - Et$

Quantisierungsregel: $S_0 = n \cdot h$

Fermis Goldene Regel $\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\psi_m^0|\,\hat{H}^{(1)}\,|\psi_n^{(0)}\rangle\right|^2 \rho(E_n)$

Virialsatz $2\langle T\rangle = \left\langle \hat{x} \cdot \vec{\nabla}V(\hat{x})\right\rangle$

Virialsatz für homogenes Potential vom Grad k ist $2\langle T\rangle = k\langle V\rangle$

Gauss-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Pauliverbot

Variationsverfahren

WKB Näherung

Formfaktor

Optisches Theorem