

PTP4 Zusammenfassung

Theoretische Quantenmechanik

Professor Matthias Bartelmann

Sommersemester 2017
Heidelberg

Ende des 19. Jahrhunderts beschrieb Physik ueberzeugend die bekannten Wechselwirkungen:

- Gravitation in klassischer Mechanik durch Newton, Lagrange, Hamilton
- Elektromagnetismus durch Maxwell'sche Gleichungen
- Thermodynamik

Ungeklarte Fragen:

- Widerspruch Galilei-Invarianz in kl. Mechanik (Geschwindigkeiten addiert) und Maxwell Elektrodynamik (Lichtgeschwindigkeit Obergrenze) aufgeloeset durch Lorentz Invarianz in Einsteins spezieller Relativitätstheorie
- Stabilitaet der Atome (im Rutherford Modell) nicht erklärbar
- diskrete Spektrallinien nicht erklärbar
- Schwarzkörperstrahlung nicht beschreibbar (UV-Katastrophe)

Hohlraumstrahlung: Stehende Wellen im Hohlraum: Moden

Es sind $\frac{L}{\lambda}$ Wellen auf Strecke L möglich

Anzahl abschätzen:

Kugel ($V_{Kugel} = \frac{4}{3} * \pi * r^3$)

Zwei Polarisationsrichtungen: E und B Feld bringt Faktor zwei

Radius ist $\frac{L}{\lambda}$

$$N(\lambda) = 2 * \frac{4}{3} * \pi * \left(\frac{L}{\lambda}\right)^3$$

- *Relativistische Energie-Impuls-Beziehung:* $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$
- *Dispersionsrelation:* $k = \frac{\omega}{c}$

- *Kreisfrequenz*: $\omega = 2 * \pi * \nu$

- *Wellenlänge*: $\lambda = \frac{2 * \pi}{k}$

Freie Schrödingergleichung: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(t, \vec{x})$

Energieoperator: $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

Kommutator: $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

Einsoperator: $\hat{I} = \sum_n |a_n\rangle \langle a_n| + \int |a\rangle \langle a| da$

Dichteoperator: $\hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|$

Zeitentwicklungsoperator: $\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle$

Zeitentwicklungsoperator: $\hat{U}(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t)$

Heisenberg-Gleichung: $i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H = [\hat{A}_H, \hat{H}_H] + i\hbar \left(\partial_t \hat{A} \right)_H$

Zeitabhängiger Operator: $\hat{A}_H(t) := \hat{U}^{-1}(t, t_0) \hat{A} \hat{U}(t, t_0)$

Translationsoperator: $\hat{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \hat{\vec{p}}\right)$

Dyson Reihe: $\hat{U}(t, t_0) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt'\right)$

Wechselwirkungsbild: $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I |\psi(t)\rangle_I$

Störoperator: $\hat{V}_I(t) := \hat{U}_0^{-1} \hat{V} \hat{U}_0$

6 Axiome

- Zustände werden durch repräsentiert durch Strahlen im Hilbertraum
- Observablen entsprechen linearen selbstadjungierten Operatoren
- Eigenwerte sind mögliche Messwerte
- Entwicklungskoeffizientenquadrate (Zustände auf Basisvektoren projiziert) sind Wahrscheinlichkeiten für Messung
- Zeitentwicklung durch Schrödingergleichung
- Durch den Messprozess wird der Zustandsvektor identisch mit einem der Eigenbasisvektoren des Operators welcher der Messung entspricht

Rabi-Oszillationen

Störmatrix

$$\text{Ortsoperator } \hat{x} = \begin{cases} x & (\text{Ortsdarstellung}) \\ i\hbar \nabla_p & (\text{Impulsdarstellung}) \end{cases}$$

$$\text{Impulsoperator } \hat{p} = \begin{cases} -i\hbar \nabla_x & (\text{Ortsdarstellung}) \\ p & (\text{Impulsdarstellung}) \end{cases}$$

$$\text{Kommulator Ort \& Impuls: } [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = -i\hbar [x_i, \partial_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

$$\text{Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung: } \hat{H}\phi(x) = E\phi(x)$$

Randbedingungen: stetiges Potential: zweimal diffbare WF

$$\text{HOC Absteigeoperator: } \hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2}}(u + \partial_u)$$

$$\text{HOC Aufsteigeoperator: } \hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(u - \partial_u)$$

$$\text{HOC Besetzungszahloperator } \hat{N} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

$$\text{HOC Hamilton: } \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{HOC Energieeigenwerte: } E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{HOC Energieeigenzustände: } |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

Exponentialfunktion hoch Wirkung

Pfadintegral

$$\text{Paritätsoperator: } \hat{P}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$$

Translationsoperator

Kugelflächenfunktionen

$$\text{Zeitumkehroperator } \hat{\mathcal{T}}\psi(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, -t)$$

Wasserstoffatom

Drehimpulse:

- $J^2 |j, j_3\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, j_3\rangle$
- $J_3 |j, j_3\rangle = \hbar j_3 |j, j_3\rangle$

Leiteroperatoren

Radiale Eigenfunktion des Wasserstoffatoms

Hamilton im elektromagnetischen Feld

Aharonov-Bohm-Effekt

Zeeman-Effekt $\Delta E = -\frac{m\hbar\omega_B}{2} = B\mu_B m$

Spinzustände

Spinoren

Spinpräzession $|s(t)\rangle = \exp(i\omega_L t \sigma_3) |s(0)\rangle$

Larmorfrequenz $\omega_L := \frac{g}{2\hbar} \mu_B B$

Paschen-Back-Effekt

Störung

Linearer Stark-Effekt

Legendre Transformation $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = p\dot{q} - H(q, p, t)$

Wirkung $S = \oint \mathcal{L} dt = \oint p dq - Et = S_0 - Et$

Quantisierungsregel: $S_0 = n \cdot h$

Fermis Goldene Regel $\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \psi_m^0 | \hat{H}^{(1)} | \psi_n^{(0)} \rangle \right|^2 \rho(E_n)$

Virialsatz $2 \langle T \rangle = \left\langle \hat{x} \cdot \vec{\nabla} V(\hat{x}) \right\rangle$

Virialsatz für homogenes Potential vom Grad k ist $2 \langle T \rangle = k \langle V \rangle$

Gauss-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Pauliverbot

Variationsverfahren

WKB Näherung

Formfaktor

Optisches Theorem