Formularium Logica voor Informatici

28 november 2011

Definitie 0.1. Zij A een formule, $\mathfrak{A}$ een structuur met domein D die A interpreteert. We definiëren dat A *waar* is in $\mathfrak{A}$ (notatie $\mathfrak{A} \models A$) door middel van inductie op het aantal symbolen in A:

- $\mathfrak{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)$ asa $(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{A}}$. (Atoom-regel)
- $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2$ asa $t_1^{\mathfrak{A}} = t_2^{\mathfrak{A}}$. (=-regel)
- $\mathfrak{A} \models \neg A$ asa $\mathfrak{A} \not\models A$, of in woorden, als het niet het geval is dat $\mathfrak{A} \models A$. ($\neg$-regel)
- $\mathfrak{A} \models A \wedge B$ asa $\mathfrak{A} \models A$ en $\mathfrak{A} \models B$. ($\wedge$-regel)
- $\mathfrak{A} \models A \vee B$ asa $\mathfrak{A} \models A$ of $\mathfrak{A} \models B$ (of allebei). ($\vee$-regel)
- $\mathfrak{A} \models A \Rightarrow B$ asa $\mathfrak{A} \not\models A$ of $\mathfrak{A} \models B$ (of allebei). ($\Rightarrow$-regel)
- $\mathfrak{A} \models A \Leftrightarrow B$ asa $\mathfrak{A} \models A$ en $\mathfrak{A} \models B$ of als $\mathfrak{A} \not\models A$ en $\mathfrak{A} \not\models B$. M.a.w. als A en B dezelfde waarheidswaarde hebben. ($\Leftrightarrow$-regel)
- $\mathfrak{A} \models (\exists x)A$ asa er een domeinelement $a \in D$ bestaat zodat $\mathfrak{A}[x : a] \models A$. ($\exists$-regel)
- $\mathfrak{A} \models (\forall x)A$ asa er voor elk domeinelement $a \in D, \theta$ geldt dat $\mathfrak{A}[x : a] \models A$. ($\forall$-regel)

Fundamentele equivalenties van de connectieven.

Eigenschap 0.1 (basiswetten van $\wedge$ and $\vee$)**.** Zij P, Q, R propositionele symbolen, dan zijn de volgende propositionele zinnen tautologieën.

1. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ (commutativiteit van $\wedge$ and $\vee$)
   $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
2. $[(P \vee Q) \vee R] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$ (associativiteit van $\wedge$ and $\vee$)
   $[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$
3. $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$ (distributiviteit van $\wedge$ t.o.v. $\vee$)
   $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$ (distributiviteit van $\vee$ t.o.v. $\wedge$)
4. $(P \vee P) \Leftrightarrow P$ (idempotentie)
   $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$

Eigenschap 0.2 (basiswetten van $\neg$)**.** Zij P, Q propositionele symbolen, dan zijn de volgende propositionele zinnen tautologieën.

1. $\neg\neg P \Leftrightarrow P$ (dubbele ontkenning)
2. $P \vee \neg P$ (uitgesloten derde)
3. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ (wetten van De Morgan)
   $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
4. $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ (negatie van de implicatie)

Eigenschap 0.3 (De betekenis van $\Rightarrow, \Leftrightarrow$)**.** Zij P, Q propositionele symbolen, dan zijn de volgende propositionele zinnen tautologieën.

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ ($\Rightarrow$ in termen van $\neg, \vee$)
2. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$ ($\Leftrightarrow$ in termen van implicaties)
3. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)]$ ($\Leftrightarrow$ in termen van $\wedge$ en $\vee$)

Eigenschap 0.4 (Eigenschappen van $\Rightarrow, \Leftrightarrow$)**.** Zij P, Q, R, S propositionele symbolen, dan zijn de volgende propositionele zinnen tautologieën.

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ (contrapositie bij $\Rightarrow$)
2. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (transitiviteit van $\Rightarrow$)
3. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$ (commutativiteit $\Leftrightarrow$)
4. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow \neg Q)$ (contrapositie bij $\Leftrightarrow$)
5. $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ (transitiviteit van $\Leftrightarrow$)
6. $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \Rightarrow R]$
   $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow (R \Rightarrow S))] \Leftrightarrow [(P \wedge Q \wedge R) \Rightarrow S]$
   enzovoort.

Eigenschap 0.5 (Bewijsprincipes)**.** Zij P, Q propositionele symbolen, dan zijn de volgende propositionele zinnen tautologieën.

1. $(P \wedge \neg P) \Rightarrow Q$ (uit een contradictie volgt alles)
2. $[\neg P \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)] \Rightarrow P$ (bewijs uit het ongerijmde)
3. $P \Leftrightarrow [(Q \Rightarrow P) \wedge (\neg Q \Rightarrow P)]$ (bewijs door gevallenonderscheid)

Generaliseren van logische waarheden.

Propositie 0.1 (Generalisatiepropositie)**.** *Zij A een logisch ware propositionele zin, en voor elk symbool P in A bestaat er een logische formule B_P . We construeren de formule A' door elk symbool P in A te vervangen door B_P. Dan is A' logisch waar.*

Propositie 0.2. *Zij A een formule met vrije constante-symbolen $v_0, \ldots, v_n$. Dan is A logisch waar asa $(\forall v_0) \ldots (\forall v_n)A$ logisch waar is.*

Propositie 0.3 (Vervangpropositie)**.** *Zij A, B logisch equivalente formules. Zij C een formule waarin A één of meerdere keren als deelformule voorkomt. Veronderstel dat de formule C' kan bekomen worden door één of meerdere voorkomens van A te vervangen door B. Dan geldt dat C en C' logisch equivalent zijn.*

Wetten van de kwantificatie.

Eigenschap 0.6. Zij A een formule zonder vrije variabele x.

1. $(\forall x)A \Leftrightarrow A$ is logisch waar.
2. $(\exists x)A \Leftrightarrow A$ is logisch waar.

Eigenschap 0.7 (negatie van een kwantor)**.** Zij A een formule en x een variabele. De volgende equivalenties zijn logisch waar.

1. $\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$
2. $\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A$
3. $(\exists x)A \Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg A$
4. $(\forall x)A \Leftrightarrow \neg(\exists x)\neg A$

Eigenschap 0.8 (Doorschuiven van kwantoren)**.** Zij A en B formules, en x een variabele, dan geldt:

1. $\models (\exists x)(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A \vee (\exists x)B$ — $\exists$ schuift door $\vee$

2. $\models (\forall x)(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A \wedge (\forall x)B$ — $\forall$ schuift door $\wedge$

3. $\models (\exists x)(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x)A \wedge (\exists x)B$ maar
   $\not\models (\exists x)(A \wedge B) \Leftarrow (\exists x)A \wedge (\exists x)B$ tenzij
   $\models (\exists x)(A \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)A \wedge B$ als x geen vrije variabele is van B.

4. $\models (\forall x)(A \vee B) \Leftarrow (\forall x)A \vee (\forall x)B$ maar
   $\not\models (\forall x)(A \vee B) \Rightarrow (\forall x)A \vee (\forall x)B$ tenzij
   $\models (\forall x)(A \vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A \vee B$ als x geen vrije variabele is van B

5. $\models (\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\exists x)A \Rightarrow (\exists x)B)$ maar
   $\not\models (\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftarrow ((\exists x)A \Rightarrow (\exists x)B)$

6. $\models (\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B)$ maar
   $\not\models (\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B)$

Eigenschap 0.9 (verwisselen van kwantoren)**.** Zij A een formule en zij x, y variabelen, dan

1. $\models (\forall x)(\forall y)A \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A$
2. $\models (\exists x)(\exists y)A \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A$
3. $\models (\exists x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A$ maar
   $\not\models (\exists x)(\forall y)A \Leftarrow (\forall y)(\exists x)A$

Propositie 0.4 (Een gebonden variabele van naam veranderen)**.** *Zij $A[x]$ een formule waarin o.a. x vrij mag voorkomen. Zij $A[y]$ de formule die men bekomt door in $A[x]$, op elke plaats waar x vrij voorkomt, x te vervangen door y.*

Als y niet voorkomt in de formule $A[x]$ dan hebben we:

$$\models (\exists x)A[x] \Leftrightarrow (\exists y)A[y]$$
$$\models (\forall x)A[x] \Leftrightarrow (\forall y)A[y]$$

KE-bewijzen

Hypothesen-regel. Elke zin van T mag toegevoegd worden onderaan een tak.

Propagatieregels van KE-bewijzen

$\neg$	$\neg\neg A$	$\longrightarrow$	A	$\neg\neg$-prop
$\wedge$	$A \wedge B$	$\longrightarrow$	$A,\ B$	$\wedge$-prop
	$\neg(A \wedge B), \quad B$	$\longrightarrow$	$\neg A$	$\neg\wedge$-prop
	$\neg(A \wedge B), \quad A$	$\longrightarrow$	$\neg B$	$\neg\wedge$-prop
$\vee$	$A \vee B\ , \quad \neg A$	$\longrightarrow$	B	$\vee$-prop
	$A \vee B, \quad \neg B$	$\longrightarrow$	A	$\vee$-prop
	$\neg(A \vee B)$	$\longrightarrow$	$\neg A,\ \neg B$	$\neg\vee$-prop
$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B, \quad A$	$\longrightarrow$	B	$\Rightarrow$-prop
	$A \Rightarrow B, \quad \neg B$	$\longrightarrow$	$\neg A$	$\Rightarrow$-prop
	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\longrightarrow$	$A, \neg B$	$\neg\Rightarrow$-prop
$\Leftrightarrow$	$A \Leftrightarrow B, \quad A$	$\longrightarrow$	B	$\Leftrightarrow$-prop
	$A \Leftrightarrow B, \quad B$	$\longrightarrow$	A	$\Leftrightarrow$-prop
	$A \Leftrightarrow B, \quad \neg A$	$\longrightarrow$	$\neg B$	$\Leftrightarrow$-prop
	$A \Leftrightarrow B, \quad \neg B$	$\longrightarrow$	$\neg A$	$\Leftrightarrow$-prop
	$\neg(A \Leftrightarrow B), \quad A$	$\longrightarrow$	$\neg B$	$\neg\Leftrightarrow$-prop
	$\neg(A \Leftrightarrow B), \quad B$	$\longrightarrow$	$\neg A$	$\neg\Leftrightarrow$-prop
	$\neg(A \Leftrightarrow B), \quad \neg A$	$\longrightarrow$	B	$\neg\Leftrightarrow$-prop
	$\neg(A \Leftrightarrow B), \quad \neg B$	$\longrightarrow$	A	$\neg\Leftrightarrow$-prop

ERule : $\exists$-regel.

- Indien $(\exists x)A[x]$ voorkomt in een tak, dan mag men $A[c]$ toevoegen aan die tak, met c een nieuwe constante die nog niet voorkomt in deze tak noch in T.
- Indien $\neg(\forall x)A[x]$ voorkomt in een tak, dan mag men $\neg A[c]$ toevoegen aan die tak voor c opnieuw zo'n nieuwe constante.

ARule: $\forall$-regel.

- Indien $(\forall x)A[x]$ voorkomt in een tak, dan mag men $A[t]$ toevoegen aan die tak.
- Indien $\neg(\exists x)A[x]$ voorkomt, dan mag men $\neg A[t]$ toevoegen aan die tak. Hierbij is t een willekeurige term zonder variabelen.

Gelijkheid-regels.

- Zij t een term zonder variabelen. Dan mag men $t = t$ toevoegen.
- Zij t_1, t_2 termen zonder variabelen. Indien de zinnen $t_1 = t_2$ en A_1 voorkomen in een tak waarbij A_1 een voorkomen van t_1 bevat, dan mag men A_2 toevoegen aan die tak. Hierbij is A_2 bekomen door het vervangen van één of meerdere voorkomens van t_1 door t_2 in A_1.

Gevalsonderscheiding-regel Een gevalsonderscheiding maken we door onderaan een tak twee nieuwe deelrijen te openen, één beginnend met een formule A, de andere met $\neg A$.