

Bewijzen en Redeneren voor Informatici

2019 - 2020

Contents

1	Verzamelingen	1
1.1	Operaties op verzamelingen	2
1.2	De Morgan	2
1.3	Machtsverzamelingen	2
2	Precieze uitspraken	2
3	Opbouw van theorieën	4
4	Bewijzen	4
5	Oefeningen	5

1 Verzamelingen

Aantal verschillende elementen behandeld als 1 ding: $K = \{a, b, \dots\}$ Geschreven als opsomming : $\{a, b, c\}$, of omschrijving : $\{x \mid x \text{ is een klinker}\}$ met x een variabele.

- \emptyset : *leeg*, $\{a\}$: *singleton*, $\{a, b\}$: *paar*, \mathbb{N} : *oneindigeverzameling*
- Intervallen:
 - $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} =]0, 1[$: open
 - $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$: gesloten
 - $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} =]-\infty, a]$: oneindig
- Deelverzamelingen:
 - $A \subseteq B$: A is een deelverzameling van $B \Rightarrow \forall x \in A \text{ geldt: } x \in B$
 - $A \subset B$: A is een strikte deelverzameling van $B \Rightarrow A \neq B$

1.1 Operaties op verzamelingen

- doorsnede: $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ en } x \in B \}$
- unie: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ of } x \in B \}$
- verschil: $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ en } x \notin B \}$
- complement: $A^C = \{ x \mid x \notin A \} = U \setminus A$ (U = universum)
- symmetrisch verschil: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

A en B zijn disjunct: $A \cap B = \emptyset$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$$

associatief: volgorde operaties maakt niet uit

commutatief: volgorde verzamelingen maakt niet uit: $A \cup B = B \cup A$

distributief: operatie te verdelen binnen haakjes: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\Rightarrow A \cap B \cap A^C = B \cap (A \cap A^C) = B \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \text{unies } A_1 \text{ tot } A_n \text{ (zelfde met } \bigcap \text{)}$$

1.2 De Morgan

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
- $A \cup A = A = A \cap A$
- $A \setminus A = \emptyset$

1.3 Machtsverzamelingen

De machtsverzameling van A: $P(A)$, is de verzameling van alle deelverzamelingen van A.

$$A = \{1, 2\} \Rightarrow P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$$

$$\text{aantal elementen van } A = |A| = \#A = 2, \#P(A) = 4$$

2 Precieze uitspraken

Doel: dubbelzinnigheden vermijden \Rightarrow wiskundige notatie gebruiken

- Conjunctie: $P \wedge Q$: en
- Disjunctie: $P \vee Q$: of (inclusief)
- Negatie: $\neg P$: niet
- Implicatie: $P \Rightarrow Q$: P dan Q

- Equivalentie: $P \iff Q$: P asa Q

Prioriteit: "¬" > "∧" > "∨" > "⇒" / "⇔", of haakjes zetten

Logische equivalentie: \equiv : heel de waarheidstabel: alle lijnen moeten hetzelfde zijn

- Tautologie: altijd waar: $\forall x P \vee \neg P$
- Contradictie: altijd onwaar: $\forall x P \wedge \neg P$
- $\neg(\forall x \in A : P(x)) = \exists x \in A : \neg P(x)$
- $\neg(\exists x \in A : P(x)) = \forall x \in A : \neg P(x)$

predikaat P, P(x) is bewering

Stel: S is een verzameling, B(x) beweert $x \in S$, P(x) is willekeurige bewering voor x:

$$\forall x \in S : P(x) \longrightarrow \forall x : B(x) \Rightarrow P(x)$$

$$\exists x \in S : P(x) \longrightarrow \exists x : B(x) \wedge P(x)$$

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

logisch	verzameling
\vee	\cup
\wedge	\cap
\neg	c

Hieruit volgt dat de logische ook commutatief en associatief zijn en de regels van De Morgan volgen, want:

- $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x | \neg(x \in A)\}$

dus De Morgan:

- $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

3 Opbouw van theorieën

Opgebouwt met:

- definities
- notatie-afspraken
- eigenschappen
- axiomas: definiërende eigenschappen
- stellingen: niet bewezen
- bewijzen
- lemmas = hulpstellingen

4 Bewijzen

Context/nut:

- correctheid van algoritmen
- eindigheid van algoritmen
- efficiënte oplosbaarheid/complexiteit van problemen

Soorten

- per Vaststelling: $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$: waarheidstabellen uitschrijven: zijn gelijk
- per Constructie (speciale soort Vaststelling) : $\exists x : P(x)$: vind een x waarvoor het klopt
- per Tekening (speciale soort Vaststelling) : teken beide zijden van equivalentie

Bewijsschappen (1 stap):

- substitutie:
 - voor een universeel gekwantificeerde variabele ("voor alle verzamelingen X ") 1 waarde invullen: $\forall \rightarrow \exists$
 - een uitdrukking vervangen door een equivalente uitdrukking
- gebruik de definities: vervormen naar iets dat al bewezen is/onmogelijk is
- modus ponens: als P waar is en P impliceert Q waar, dan is Q waar

Bewijstrategieën:

- ketens van gelijkheden/ongelijkheden/equivalenties/implicaties: op basis van transitiviteit
- wederzijdse implicaties : $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P \rightarrow P \iff Q$
variant: wederzijdse inclusie: $A = B$ via $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- herhaalde gevolgstrekking: meerdere modus ponens
- gevalsonderscheiding: verschillende mogelijkheden apart beschouwen
- in het ongerijmde: als niet waar dan is iets wat niet waar is waar \Rightarrow waar
- door inductie

5 Oefeningen

Google Spreadsheet