Bewijzen en Redeneren voor Informatici

2019 - 2020

1 Verzamelingen

Aantal veschillende elementen behandeld als 1 ding: K = {a,b,...} Geschreven als opsomming : {a,b,c}, of omschrijving : { x $\mid$ x is een klinker } met x een variabele.

- $\emptyset : leeg, \{a\} : singleton, \{a,b\} : paar, \mathbb{N} : oneindigeverzameling$
- Intervallen:
  { x $\in$ $\mathbb{R}$ $\mid 0 < x < 1\} =]0, 1[$: open
  { x $\in$ $\mathbb{R}$ $\mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$: gesloten
  { x $\in$ $\mathbb{R}$ $\mid x \leq a\} =]-\infty, a]$: oneindig
- Deelverzamelingen:
  A $\subseteq$ B : A is een deelverzameling van B $\Rightarrow$ "$\forall x \in A$ geldt: $x \in B$"
  A $\subset$ B : A is een strikte deelverzameling van B $\Rightarrow$ A $\neq$ B

1.1 Operaties op verzamelingen

- doorsnede: A $\cap$ B = { x $\mid$ x $\in$ A en x $\in$ B }
- unie: A $\cup$ B = { x $\mid$ x $\in$ A of x $\in$ B }
- verschil: A $\setminus$ B = { x $\mid$ x $\in$ A en x $\notin$ B }
- complement: A$^{\mathrm{C}}$ = { x $\mid$ x $\notin$ A} = U $\setminus$ A (U = universum)
- symmetrisch verschil: A $\triangle$ B = (A $\setminus$ B) $\cup$ (B $\setminus$ A)

A en B zijn disjunct: A $\cap$ B = $\emptyset$
A $\setminus$ B = A$\setminus(A \cap B) = A \cap B^{\mathrm{C}}$
associatief: volgorde operaties maakt niet uit
commutatief: volgorde verzamelingen maakt niet uit: $A \cup B = B \cup A$
distributief: operatie te verdelen binnen haakjes: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$\Rightarrow A \cap B \cap A^{\mathrm{C}} = B \cap (A \cap A^{\mathrm{C}}) = B \cap \emptyset = \emptyset$
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ = unies A_1 tot A_n (zelfde met $\bigcap$)

1.2 De Morgan

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
- $A \cup A = A = A \cap A$
- $A \setminus A = \emptyset$

1.3 Machtsverzamelingen

De machtsverzameling van A: P(A), is de verzameling van alle deelverzamelingen van A.
$A = \{1, 2\} \Rightarrow P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$
aantal elementen van A = $|A|$ = #A = 2, #P(A) = 4

2 Precieze uitspraken

Doel: dubbelzinnigheden vermijden $\Rightarrow$ wiskundige notatie gebruiken

- Conjunctie: $P \wedge Q$: en
- Disjunctie: $P \vee Q$: of (inclusief)
- Negatie: $\neg P$: niet
- Implicatie: $P \Rightarrow Q$: P dan Q
- Equivalentie: $P \iff Q$: P asa Q

Prioriteit: "$\neg$" > "$\wedge$" > "$\vee$" > "$\Rightarrow / \iff$", of haakjes zetten
Logische equivalentie: $\equiv$: heel de waarheidstabel: alle lijnen moeten hetzelfde zijn

- Tautologie: altijd waar: vb $P \vee \neg P$
- Contradictie: altijd onwaar: vb $P \wedge \neg P$
- $\neg(\forall x \in A : P(x)) = \exists x \in A : \neg P(x)$
- $\neg(\exists x \in A : P(x)) = \forall x \in A : \neg P(x)$

predikaat P, P(x) is bewering

Stel: S is een verzameling, B(x) beweert $x \in S$, P(x) is willekeurige bewering voor x:

$$\forall x \in S : P(x) \longrightarrow \forall x : B(x) \Rightarrow P(x)$$

$$\exists x \in S : P(x) \longrightarrow \exists x : B(x) \wedge P(x)$$

$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

logisch	verzameling
$\vee$	$\cup$
$\wedge$	$\cap$
$\neg$	$^{\mathrm{C}}$

Hieruit volgt dat de logische ook commutatief en associatief zijn en de regels van De Morgan volgen, want:

- $A \cup B = \{x \big| x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \big| x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^{\mathrm{C}} = \{x \big| \neg(x \in A)\}$

dus De Morgan:

- $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

3 Opbouw van theorieën

Opgebouwt met:

- definities
- notatie-afspraken
- eigenschappen
- axiomas: definiërende eigenschappen
- stellingen: niet bewezen
- bewijzen
- lemmas = hulpstellingen