

# Bewijzen en Redeneren voor Informatici

2019 - 2020

## 1 Verzamelingen

Aantal verschillende elementen behandeld als 1 ding:  $K = \{a, b, \dots\}$  Geschreven als opsomming :  $\{a, b, c\}$ , of omschrijving :  $\{x \mid x \text{ is een klinker}\}$  met  $x$  een variabele.

- $\emptyset$  : leeg,  $\{a\}$  : singleton,  $\{a, b\}$  : paar,  $\mathbb{N}$  : oneindigeverzameling
- Intervallen:
  - $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} = ]0, 1[$  : open
  - $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$  : gesloten
  - $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} = ]-\infty, a]$  : oneindig
- Deelverzamelingen:
  - $A \subseteq B$  :  $A$  is een deelverzameling van  $B \Rightarrow \forall x \in A \text{ geldt: } x \in B$
  - $A \subset B$  :  $A$  is een strikte deelverzameling van  $B \Rightarrow A \neq B$

### 1.1 Operaties op verzamelingen

- doorsnede:  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$
- unie:  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$
- verschil:  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$
- complement:  $A^C = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$  ( $U$  = universum)
- symmetrisch verschil:  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$A$  en  $B$  zijn disjunct:  $A \cap B = \emptyset$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^C$$

associatief: volgorde operaties maakt niet uit

commutatief: volgorde verzamelingen maakt niet uit:  $A \cup B = B \cup A$

distributief: operatie te verdelen binnen haakjes:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\Rightarrow A \cap B \cap A^C = B \cap (A \cap A^C) = B \cap \emptyset = \emptyset$$

$\bigcup_{i=1}^n A_i$  = unies  $A_1$  tot  $A_n$  (zelfde met  $\bigcap$ )

## 1.2 De Morgan

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
- $A \cup A = A = A \cap A$
- $A \setminus A = \emptyset$

## 1.3 Machtsverzamelingen

De machtsverzameling van A:  $P(A)$ , is de verzameling van alle deelverzamelingen van A.

$$A = \{1, 2\} \Rightarrow P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$$

$$\text{aantal elementen van } A = |A| = \#A = 2, \#P(A) = 4$$

## 2 Precieze uitspraken

Doel: dubbelzinnigheden vermijden  $\Rightarrow$  wiskundige notatie gebruiken

- Conjunctie:  $P \wedge Q$  : en
- Disjunctie:  $P \vee Q$  : of (inclusief)
- Negatie:  $\neg P$  : niet
- Implicatie:  $P \Rightarrow Q$  : P dan Q
- Equivalentie:  $P \iff Q$  : P asa Q

Prioriteit: " $\neg$ " > " $\wedge$ " > " $\vee$ " > " $\Rightarrow$ " / " $\iff$ ", of haakjes zetten

Logische equivalentie:  $\equiv$  : heel de waarheidstabel: alle lijnen moeten hetzelfde zijn

- Tautologie: altijd waar:  $\forall x P \vee \neg P$
- Contradictie: altijd onwaar:  $\forall x P \wedge \neg P$
- $\neg(\forall x \in A : P(x)) = \exists x \in A : \neg P(x)$
- $\neg(\exists x \in A : P(x)) = \forall x \in A : \neg P(x)$

predikaat P,  $P(x)$  is bewering

Stel: S is een verzameling, B(x) beweert  $x \in S$ , P(x) is willekeurige bewering voor x:

$$\forall x \in S : P(x) \longrightarrow \forall x : B(x) \Rightarrow P(x)$$

$$\exists x \in S : P(x) \longrightarrow \exists x : B(x) \wedge P(x)$$

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

logisch	verzameling
$\vee$	$\cup$
$\wedge$	$\cap$
$\neg$	$c$

Hieruit volgt dat de logische ook commutatief en associatief zijn en de regels van De Morgan volgen, want:

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x \mid \neg(x \in A)\}$

dus De Morgan:

- $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

### 3 Opbouw van theorieën

Opgebouwt met:

- definities
- notatie-afspraken
- eigenschappen
- axiomas: definiërende eigenschappen
- stellingen: niet bewezen
- bewijzen
- lemmas = hulpstellingen