Sprawozdanie Metody 1

Wojciech Kowalik

Kwiecień 2020

1 Problem 1

Problem pierwszy polegał na rozwiązywaniu liniowych układów równań o rozmiarze n, gdzie n było parametrem. Zagadnienie wyglądało następująco:

$$\min c^T x,$$

przy warunkach

$$Ax = b, x \geqslant 0,$$

gdzie A jest macierzą Hilberta i $c = b$.

Celem zadania było określenie dla jakiego n błąd będzie sięgał dwóch cyfr po przecinku.

1.1 Opis rozwiązania

Zmiennymi decyzyjnymi były części składowe wektora x, które były nieujemnymi zmiennymi ciągłymi.

Następujące ograniczenie zostało nałożone na wektor rozwiązań:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

Funkcja celu:

$$c(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_a$$

Danymi używanymi w modelu jest

1.2 Wyniki i wnioski

Do określenia błędu bezwzględnego uzyskanego rozwiązania była użyta następująca formuła:

$$||x - \hat{x}||_2 / ||x||_2,$$

gdzie x - rozwiązanie dokładne, $\hat{x}$ - rozwiązanie wyliczone, a norma wektora obliczona była z następującego wzoru:

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_a^2}.$$

Wyniki pokazały, że już dla $n = 8$ wektor, jaki został uzyskany w wyniku ewaluacji modelu przez *glpsol* okazał się znaczący. Dla wszystkich poprzednich prób błąd był bliski 0. Potwierdza to tezę zawartą w poleceniu, że ten problem jest trudny do dokładnego wyliczenia nawet dla małych n przy użyciu programowania liniowego.

2 Problem 2

Drugi z problemów dotyczył minimalizacji kosztów transportu camperów dla pewnej firmy. Firma ta ma punkty wypożyczania camperów w różnych miastach. Firma chce jak najmniejszym kosztem zaspokoić niedobory camperów w każdym przemieszczając je z miast, w których jest ich nadmiar, do tych w których jest niedobór. Są dwa typy camperów: normalne i VIP. Koszt transportu zwykłego campera jest wprost proporcjonalny do odległości między miastami. Koszt transportu campera VIP jest o 20 % droższy od transporty zwykłego campera. Dodatkowo camper zwykły można zastąpić camperem VIP, ale nie na odwrót.

2.1 Opis rozwiązania

Dane modelu stanowi lista etykiet miast rozmiaru n:

$$S = s_1, s_2, \ldots, s_n$$

Drugą daną jest macierz A składająca się z czterech kolumn i n wierszy obrazująca zapotrzebowanie oraz podaż na dźwigi danego typu w miastach z S. Kolumny opisują kolejno: zapotrzebowanie na camper zwykły, zapotrzebowanie na camper VIP, nadmiar zwykłych camperów, nadmiar camperów VIP.

Kolejną daną jest macierz kwadratowa d o wymiarach $n \times n$ obrazująca odległości między miastami. Taką macierz można by przedstawić jako macierz trójkątna jednak zadanie nie zakładało tego, że z miasta s_i do s_j jest identyczna jak z s_j do s_i.

Zmiennymi decyzyjnymi były macierze X_a, X_b, X_c o wymiarach $n \times n$ każda. $X_a[i, j]$ odpowiada liczbie wysłanych zwykłych camperów z miasta i do miasta j. Podobnie zachowuje się macierz X_b, ale dla camperów VIP. Macierz $X_c[i, j]$ przechowuje liczbę camperów VIP, które zostały przetransportowane z miasta i do miasta j, ale służą jako campery zwykłe.

Następujące ograniczenia wyszły z zadania:

$$\forall_{s \in S}(A[1, s] = \sum_{t \in S}(X_a[t, s] + X_c[t, s]))$$

$$\forall_{s\in S}(A[2,s] = \sum_{t\in S} X_a[t,s])$$

$$\forall_{s\in S}(A[3,s] \leqslant \sum_{t\in S}(X_a[s,t]))$$

$$\forall_{s\in S}(A[4,s] \leqslant \sum_{t\in S}(X_b[s,t] + X_c[s,t]))$$

Pierwsze dwa ograniczenia oznaczają, że dane miasto otrzyma dokładnie tyle camperów danego typu ile potrzebuje. Kolejne dwa ograniczenia ograniczają możliwości wysłania większej ilości camperów danego typu, niż było nadmiarowych w mieście.

Funkcja kosztu prezentuje się następująco:

$$\min \sum_{s\in S}\sum_{t\in S}(X_a[s,t]d[s,t] + 1.2X_b[s,t]d[s,t] + 1.2X_c[s,t]d[s,t])$$

2.2 Wyniki i wnioski

glpsol dla danych z zestawu i macierzy d odpowiadającej realistycznym odległością między miastami zwrócił całkowity koszt równy: 15259.35. Dodatkowo zostały przeprowadzone testy dla, kilku różnych macierzy d i wyspecyfikowaniu typu zmiennych decyzyjnych, czyli czy są całkowitoliczbowe, czy ciągłe. W żadnym stopniu nie wpłynęło to na wyniki. Stąd można wywnioskować, że założenie całkowitoliczbowości zmiennych decyzyjnych jest niepotrzebne.

3 Problem 3

Trzeci problem opisuje wytwarzanie czterech typów produktów końcowych przez pewne przedsiębiorstwo. Kupuje ono 3 rodzaje surowców, z których potem wytwarza te produkty końcowe. Z tych surowców wytwarza ono dwa główne produkty końcowe: A i B. Przy wytwarzaniu tych produktów wytwarzane pewne stałe odpody, które następnie firma przeznacza dalej do wytwarzania produktów podrzędnych C i D, lub na własny koszt się ich pozbywa. Przedsiębiorstwo chce się dowiedzieć ile musi zakupić surowców, jaką ich część przeznaczyć na wytwarzanie jakich produktów końcowych oraz jaką część odpadów przeznaczyć do wytwarzania produktów podrzędnych, a jaką się pozbyć. W tym zadaniu szukany jest maksymalny zysk przedsiębiorstwa, przy założeniu, że sprzeda ono wszystkie wytworzone produkty. Dodatkowo przedsiębiorstwo musi zakupić określoną ilość poszczególnych surowców oraz nie może zakupić, więcej niż są w stanie przetworzyć maszyny.

3.1 Opis rozwiązania

Wszystkie wymienione poniżej zmienne decyzyjne są dodatnie:

- A, B, C, D - całkowita ilość surowców przeznaczonych do wytworzenia danego produktu,
- s_1, s_2, s_3 - ilość zakupionych surowców 1, 2, 3,
- s_{1A}, s_{2A}, s_{3A} - ilość surowców 1, 2, 3 wykorzystanych do produkcji produktu A,
- s_{1B}, s_{2B}, s_{3B} - ilość surowców 1, 2, 3 wykorzystanych do produkcji produktu B,
- s_{1C}, s_{2D} - ilość surowców 1, 2 wykorzystanych do produkcji produktu C i D,
- x_{1A}, x_{2A}, x_{3A} - ilość odpadów wytworzonych przy produkcji A przeznaczona do likwidacji,
- x_{1B}, x_{2B}, x_{3B} - ilość odpadów wytworzonych przy produkcji B przeznaczona do likwidacji,
- y_{1A}, y_{2A}, y_{3A} - ilość odpadów wytworzonych przy produkcji A przeznaczona do wytworzenia C,
- y_{1B}, y_{2B}, y_{3B} - ilość odpadów wytworzonych przy produkcji B przeznaczona do wytworzenia D.

Ograniczenia surowców:

$$2000 \leqslant s_1 \leqslant 6000$$

$$3000 \leqslant s_2 \leqslant 4000$$

$$4000 \leqslant s_3 \leqslant 7000$$

$$s_1 = s_{1A} + s_{1B} + s_{1C}$$

$$s_2 = s_{2A} + s_{2B} + s_{2D}$$

$$s_3 = s_{3A} + s_{3B}$$

Zawartości surowców w mieszankach:

$$s_{1A} \geqslant 0.2A$$

$$s_{2A} \geqslant 0.4A$$

$$s_{3A} \leqslant 0.1A$$

$$s_{1B} \geqslant 0.1B$$

$$s_{3B} \leqslant 0.3B$$

$$s_{1C} = 0.2C$$

$$s_{2D} = 0.3D$$

Straty w produkcji:

$$0.1s_{1A} = x_{1A} + y_{1A}$$
$$0.2s_{2A} = x_{2A} + y_{2A}$$
$$0.4s_{3A} = x_{3A} + y_{3A}$$
$$0.2s_{1B} = x_{1B} + y_{1B}$$
$$0.2s_{2B} = x_{2B} + y_{2B}$$
$$0.5s_{3B} = x_{3B} + y_{3B}$$

Produkty końcowe:

$$A = s_{1A} + s_{2A} + s_{3A}$$
$$B = s_{1B} + s_{2B} + s_{3B}$$
$$C = s_{1C} + y_{1A} + y_{2A} + y_{3A}$$
$$D = s_{2D} + y_{1B} + y_{2B} + y_{3B}$$

Funkcja celu prezentuje się następująco:

$$\max z - l - k,$$

gdzie:
$z = 3(0.9s_{1A} + 0.8s_{2A} + 0.6s_{3A}) + 2.5(0.8s_{1B} + 0.8s_{2B} + 0.5s_{3B}) + 0.6C + 0.5D$
$l = 0.1x_{1A} + 0.2x_{2A} + 0.3x_{3A} + 0.05x_{1B} + 0.05x_{2B} + 0.4x_{3B}$
$k = 2.1s_1 + 1.6s_2 + 1s_3$

3.2 Wyniki

Po uruchomieniu modelu w *glpsol* wyliczył on maksymalny zysk równy 2986.886 \$. Przedsiębiorstwo powinno zakupić 6000 kg surowca 1, 5000 kg surowca 2 oraz 4000 kg surowca 3. Z zakupionych surowców:

- 1175 kg surowca 1, powinno zostać wykorzystanych do produkcji A,
- 940 kg surowca 2, powinno zostać wykorzystanych do produkcji A,
- 235 kg surowca 3, powinno zostać wykorzystanych do produkcji A,
- 4725 kg surowca 1, powinno zostać wykorzystanych do produkcji B,
- 4060 kg surowca 2, powinno zostać wykorzystanych do produkcji B,
- 3765 kg surowca 3, powinno zostać wykorzystanych do produkcji B,
- 100 kg surowca 1, powinno zostać wykorzystanych do produkcji C,
- 0 kg surowca 2, powinno zostać wykorzystanych do produkcji D,

Przedsiębiorstwo powinno przeznaczyć wszystkie odpady z produkcji A do mieszanki C, natomiast pozbyć się całości odpadów z produkcji mieszanki D.

4 Problem 4

Problem 4 dotyczył układania planu. Celem było tak ułożyć plan, aby zajęcia nie nachodziły na siebie i aby zmaksymalizować preferencje studenta. Student miał zapisać się na 5 różnych przedmiotów $P = \{Alg, Ana, Fiz, Chm, Cho\}$, gdzie każdy miał 4 różne grupy zajęciowe. Zajęcia mogły odbywać się w jednym z pięciu dni tygodnia $D = \{Pn, Wt, Sr, Cz, Pt\}$. Informacje o tych zajęciach zostały zapisane w 4 macierzach:

- A_s - przechowującą godzinę rozpoczęcia zajęć,
- A_e - przechowującą godzinę zakończenia zajęć,
- A_d - przechowującą dzień w który dane zajęcia się rozpoczynają,
- A_p - przechowującą preferencje na temat danej grupy zajęciowej.

Każde zajęcia trwają przynajmniej półtorej godziny. Każda grupa zajęciowa jest rozpoznawalna przez parę (p, i), gdzie $p \in P$ i $t \in T$.

W tym wypadku zmienne decyzyjne są binarne i zawarte w macierzy C, która oznacza, czy dana grupa została wybrana. Dodatkowo muszą być spełnione warunki :

$$\forall_{p \in P} \sum_{i \in 1...4} c_{p,i} = 1`$$

Ponieważ zajęcia nie mogą zachodzić na siebie i mogą rozpocząć się, lub zakończyć co 30 min czas został podzielony na 48 slotów czasowych. Sloty indeksowane są od 0 z krokiem o 0.5 oznaczone T. Niech $D_{d,t}$ oznacza wszystkie zajęcia trwające w dniu $d \in D$ i slocie czasowym $t \in T$. W takim razie rozwiązanie dopuszczalne musi spełniać następujące warunki:

$$\forall_{Z \in D_{d,t}} \sum_{(p,i) \in Z} c_{p,i} \leqslant 1$$

Były również zadane dodatkowe ograniczenia. Pierwszym z nich jest godzinna przerwa każdego dnia między 12, a 14. Teraz niech $E_{d,t}$ oznacza zajęcia odbywające się w dniu $d \in D$ i $t \in T$ trwające jeszcze przynajmniej godzinę. Stąd rozwiązanie dopuszczalne musi spełniać następujące warunki:

$$\forall_{d \in D} \sum_{t \in [12..13], (p,i) \in E_{d,t}} c_{p,i} \leqslant 1$$

Te warunki oznaczają, że każdego dnia nie może odbywać więcej niż jedne godzinne zajęcia w godzinach 12-14.

Kolejnym było wymaganie, że nie student nie może zapisać się na więcej niż 4 godziny ćwiczeń dzienne. Niech $A_x[p, i]$ oznacza element macierzy A_x dla przedmiotu p i grupy i. Niech D_d oznacza wszystkie zajęcia odbywające się dnia d:

$$\forall_{d \in D} \sum_{(p,i) \in D_d} (A_e[p, i] - A_s[p, i]) \leqslant 4$$

Ostatnim warunkiem było to, aby student miał możliwość ćwiczyć swoją ulubioną dyscyplinę sportu przynajmniej raz w tygodniu. Te zajęcia odbywają się 3 razy w tygodniu. Stąd zostały wprowadzone trzy dodatkowe binarne zmienne decyzyjne s_1, s_2, s_3 oznaczające, która grupa sportowa została wybrana. Z tego pojawiły się dodatkowe warunki:

$$s_1 + s_2 + s_3 \geqslant 1$$

$$\forall_{t \in [13...14.5]} \forall_{Z \in D_{Pn,t}} s_1 + sum_{(p,i) \in Z} c_{p,i} \leqslant 1$$

$$\forall_{t \in [11...12.5]} \forall_{Z \in D_{Sr,t}} s_2 + sum_{(p,i) \in Z} c_{p,i} \leqslant 1$$

$$\forall_{t \in [13...14.5]} \forall_{Z \in D_{Sr,t}} s_3 + sum_{(p,i) \in Z} c_{p,i} \leqslant 1$$

Dodatkowo sprawiło to, że warunki związane z przerwą dla Pn i Sr muszą zostać zmodyfikowane w następujący sposób:

$$s_1 + \sum_{t \in [12..13], (p,i) \in E_{Pn,t}} c_{p,i} \leqslant 1$$

$$s_2 + s_3 + \sum_{t \in [12..13], (p,i) \in E_{Sr,t}} c_{p,i} \leqslant 1$$

Funkcją celu dla zadanego problemu jest:

$$\max \sum_{p \in P, i \in 1...4} c_{p,i} A_p[p, i]$$

4.1 Wyniki

Po zapisaniu tych warunków w *glpsol* solver znalazł optymalne rozwiązanie, w którym:

- funkcja celu osiągnęła wartość 37,
- zostały wybrane następujące grupy: Alg_{III}, Ana_{II}, Fiz_{IV}, Chm_I, Cho_{II},
- student chodzi na zajęcia sportowe w grupie s_1.

4.2 Dodatkowe założenia

Problem 4 miał dodatkowe zadanie. Polegało ono na sprawdzeniu, czy jest możliwość zapisu spełniającego wszystkie wcześniejsze założenia oraz ćwiczenia nie odbywają się w Sr i Pt, oraz wszystkie grupy mają preferencje $\geqslant 5$. Stąd dodatkowe warunki w zadaniu. Niech X oznacza wszystkie grupy mające preferencje mniejsze niż 5. Niech F_d oznacza wszystkie grupy mające zajęcia w dniu d. Wtedy następujące warunki muszą zostać spełnione:

$$\sum_{(p,i) \in X} c_{p,i} = 0$$

$$\sum_{(p,i)\in F_{Sr}} c_{p,i} = 0$$

$$\sum_{(p,i)\in F_{Pt}} c_{p,i} = 0$$

Po zapisaniu tych warunków solver zwrócił brak rozwiązań osiągalnych.