步步高　数学　必修第二册(人教A版)　答案精析

学习笔记

第六章　平面向量及其应用

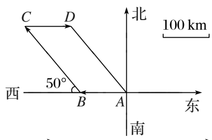
§6.1　平面向量的概念

知识梳理

1.(1)大小　方向　(2)大小　方向

2.(1)方向　起点　方向　长度　$|\overrightarrow{AB}|$　(2)①长度　模　$|\overrightarrow{AB}|$

例1　**解**　(1)向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$ 如图所示.



(2)由题意,可知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向相反,故 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线,

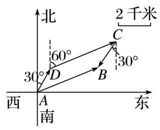
∵$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$,

∴在四边形 $ABCD$ 中,$AB∥CD$ 且 $AB=CD$,

∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

∴$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,∴$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=200$(km).

跟踪训练1　**解**　(1)向量 $\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{AB}$,如图所示.



(2)由题意知 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,∴$AD=BC$,$AD∥BC$,

则四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

∴$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,则 B 地相对于 A 地的位置为"北偏东60°,距离为6千米".

知识梳理

0　**0**　1个单位

例2　ACD　[两个有共同起点,且长度相等的向量,它们的方向不一定相同,终点也不一定相同;零向量的模都是0;单位向量的长度都是1,故A,C,D正确.]

跟踪训练2　C　[零向量的模为0,故A不正确;单位向量的方向可以是任意的,故B不正确;向量的大小即为向量的模,指的是有向线段的长度,与方向无关,故C正确;不管向量的方向如何,它们都不能比较大小,故D不正确.]

知识梳理

相同或相反　平行　相等　相同

例3　**解**　(1)因为 E,F 分别是 AC,AB 的中点,

所以 $EF∥BC$,$EF=\frac{1}{2}BC$.

又因为 D 是 BC 的中点,

所以与 $\overrightarrow{EF}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{FE}$,$\overrightarrow{BD}$,$\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CB}$.

(2)模与 $\overrightarrow{EF}$ 的模相等的向量有 $\overrightarrow{FE}$,$\overrightarrow{BD}$,$\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{CD}$.

(3)与 $\overrightarrow{EF}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{CD}$.

跟踪训练3　(1)$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DC}$　(2)6

解析　(1)在▱$ABCD$ 和▱$ABDE$ 中,

∵$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,∴$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DC}$.

(2)由(1)知,$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DC}$,

∴E,D,C 三点共线,$|\overrightarrow{EC}|=|\overrightarrow{ED}|+|\overrightarrow{DC}|=2|\overrightarrow{AB}|=6$.

随堂演练

1. A

2. A　[因为 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,$ABCD$ 为四边形,
所以 $BA=CD$ 且 $BA∥CD$,
所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.]

3. ABC　[A错,共线的两个单位向量的方向可能相反;B错,相等向量的起点和终点都可能不相同;C错,直线 AB 与 CD 可能重合;D正确,AB 与 BC 平行且有公共点 B,则 A,B,C 三点共线.]

4. ①②③

解析　$\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 方向相同,长度相等,∴①正确;

∵A,O,C 三点在一条直线上,

∴$\overrightarrow{AO}∥\overrightarrow{AC}$,②正确;

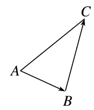
∵$AB∥DC$,∴$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线,③正确;

$\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{BO}$ 方向不同,∴二者不相等,④错误.

§6.2　平面向量的运算

6.2.1　向量的加法运算

问题1　这个质点两次位移 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$ 的结果,与从点 A 直接到点 C 的位移 $\overrightarrow{AC}$ 的结果相同,因此位移 $\overrightarrow{AC}$ 可以看成是位移 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 合成的,即 $\overrightarrow{AC}$ 可以算作是 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的和.



知识梳理

三角形

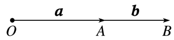
例1　(1)$\boldsymbol{c}$　(2)$\boldsymbol{f}$　(3)$\boldsymbol{f}$　(4)$\boldsymbol{g}$

问题2　$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$　平行四边形法则

知识梳理

1.平行四边形

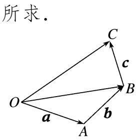
例2　**解**　(1)首先作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,然后作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.如图③所示.



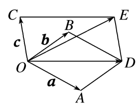
图③

(2)**方法一**　(三角形法则)如图④所示,

首先在平面内任取一点 O,作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,再作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则得向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,然后作向量 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,则向量 $\overrightarrow{OC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 即为所求.



图④



图⑤

方法二　(平行四边形法则)如图⑤所示,

首先在平面内任取一点 O,作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,

以 OA,OB 为邻边作▱$OADB$,连接 OD,

则 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

再以 OD,OC 为邻边作▱$ODEC$,连接 OE,

则 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 即为所求.

跟踪训练1　(1)$\overrightarrow{OB}$　(2)$\overrightarrow{AD}$　(3)$\boldsymbol{0}$

解析　(1)因为四边形 $OABC$ 是以 OA,OC 为邻边的平行四边形,OB 是其对角线,故 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$.

(2)因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$,故 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 方向相同,

长度为 $\overrightarrow{BC}$ 的长度的2倍,

故 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.

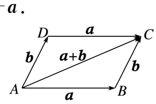
(3)因为 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{FE}$,故 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$.

问题3　(1)当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 方向不同,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

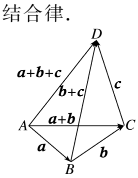
(2)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 同向,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;若 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 相同,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$.

问题4　作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB,AD 为邻边作▱$ABCD$,容易发现 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$,故 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.



借助下图,不难证明满足结合律.



知识梳理

1.$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$　相同

2.$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$

例3　解　(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

(2)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

$=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\mathbf{0}$.

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}$

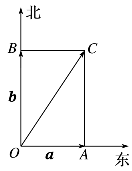
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA}=\mathbf{0}$.

跟踪训练2　$2\sqrt{2}$

解析　$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$.

例4　解　设$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$分别表示水流的速度和小船在静水中的速度,过平面内任意一点O作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,以$OA$,$OB$为邻边作矩形$OACB$,连接$OC$,如图,则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,并且$\overrightarrow{OC}$即为小船的实际航行速度.



$\therefore|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2}$

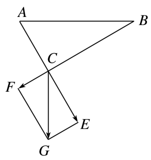
$=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2}=20(\text{km/h})$,

$\because\tan\angle AOC=\dfrac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}$,

$\therefore\angle AOC=60°$,

$\therefore$小船的实际航行速度为20 km/h,沿北偏东30°的方向航行.

跟踪训练3　解　如图所示,设$\overrightarrow{CE}$,$\overrightarrow{CF}$分别表示A,B所受的力,10 N的重力用$\overrightarrow{CG}$表示,则$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CG}$.



由题意可得$\angle ECG=180°-150°=30°$,

$\angle FCG=180°-120°=60°$.

$\therefore|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{CG}|\cos 30°$

$=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}(\text{N})$,

$|\overrightarrow{CF}|=|\overrightarrow{CG}|\cos 60°$

$=10\times\dfrac{1}{2}=5(\text{N})$.

$\therefore A$处所受的力为$5\sqrt{3}$ N,B处所受的力为5 N.

随堂演练

1.C　[根据平面向量的加法运算,得

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.]

2.B　[在正方形$ABCD$中,$AB=1$,易知$AC=\sqrt{2}$,所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|=AC=\sqrt{2}$.]

3.BD　[B错误,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$;D错误,当$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$方向相同时成立,故选B,D.]

4.B　[$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}$.]

6.2.2　向量的减法运算

问题1　减去一个数等于加上这个数的相反数.

知识梳理

1.相等　相反　相反

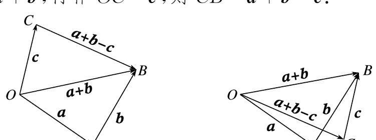
2.相反向量　相反向量　差

例1　BCD　[相反向量的大小相等、方向相反,故A错误.]

跟踪训练1　BCD

问题2　转化为加法来进行,减去一个向量相当于加上这个向量的相反向量.

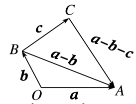
例2　解　方法一　如图①,在平面内任取一点O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,再作$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



①　　②

方法二　如图②,在平面内任取一点O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,再作$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{c}$,连接$OC$,则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

跟踪训练2　解　如图,在平面内任取一点O,作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,再作向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,则向量$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



例3　(1)**解**　①$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

②$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$.

(2)A　[$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{BP}=\mathbf{0}$.]

跟踪训练3　(1)AD

(2)**解**　①$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AP}$.

②$(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BM})+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM})=\overrightarrow{AD}+\mathbf{0}=\overrightarrow{AD}$.

例4　解　$\because$四边形$ACDE$是平行四边形,

$\therefore\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$,

$\therefore\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

跟踪训练4　A　[$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.]

随堂演练

1.D　[$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.]

2.B　[原式$=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ})+(\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SP})=\overrightarrow{OQ}+\mathbf{0}=\overrightarrow{OQ}$.]

3.A　[由$\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$,可得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,

所以四边形$ABCD$一定是平行四边形.]

4.2

解析　$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|=2$.

6.2.3　向量的数乘运算

问题1　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{a}$.

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MN}=(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})=-3\boldsymbol{a}$.

显然$3\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$的方向相同,$3\boldsymbol{a}$的长度是$\boldsymbol{a}$的长度的3倍,$-3\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$的方向相反,$-3\boldsymbol{a}$的长度是$\boldsymbol{a}$的长度的3倍.

知识梳理

向量　数乘　$\lambda\boldsymbol{a}$　(1)$|\lambda||\boldsymbol{a}|$　(2)$\lambda>0$　$\lambda<0$　$\mathbf{0}$

例1　ABD　[根据实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的积$\lambda\boldsymbol{a}$的方向的规定,易知A正确;对于B,当$\lambda=0$时,$\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$,$\mathbf{0}$与$\boldsymbol{a}$是共线向量,故B正确;对于D,由$\lambda\mu>0$可得$\lambda$,$\mu$同为正或同为负,所以$\lambda\boldsymbol{a}$和$\mu\boldsymbol{a}$或者都是与$\boldsymbol{a}$同向,或者都是与$\boldsymbol{a}$反向,所以$\lambda\boldsymbol{a}$与$\mu\boldsymbol{a}$是同向的,故D正确;对于C,$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,C错误.]

知识梳理

1.(1)$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$　(2)$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　(3)$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

2.加　减　数乘　$\lambda\mu_1\boldsymbol{a}\pm\lambda\mu_2\boldsymbol{b}$.

例2　(1)C　[原式$=3\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}$.]

(2)$4\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$

解析　由已知,得$3\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,

所以$\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,

所以$\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$.

跟踪训练1　解　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-8\boldsymbol{a}$

$=(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b})-8\boldsymbol{a}$

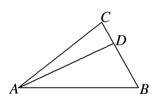
$=-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{a}=-10\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$.

例3　D　[因为E是BC的中点,

所以$\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

所以$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.]

跟踪训练2　D　[示意图如图所示,由题意可得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$



$=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.]

问题2 共线,存在.

知识梳理

$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

例4 (1)**证明** ∵$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,

而 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})=-2\overrightarrow{AB}$,

∴$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线,且有公共点 B,

∴A,B,C 三点共线.

(2)**解** ∵$8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线,

∴存在实数 λ,使得 $8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=\lambda(k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$,

即 $(8-\lambda k)\boldsymbol{a}+(k-2\lambda)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,

∵$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,∴$\begin{cases}8-\lambda k=0,\\ k-2\lambda=0,\end{cases}$

解得 $\lambda=\pm 2$,∴$k=2\lambda=\pm 4$.

跟踪训练3 A,B,D

解析 ∵$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$=-5\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2+7\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=2(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)=2\overrightarrow{AB}$,

∴$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}$ 共线,且有公共点 B,

∴A,B,D 三点共线.

随堂演练

1. ABD [根据向量数乘运算和加减运算规律知A,B,D正确;C中,$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,是零向量,而不是0,所以该运算错误.]

2. C [因为 M 是 BC 的中点,所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.]

3. $10\boldsymbol{a}$

解析 $4(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-6(-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=4\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}+12\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{a}=10\boldsymbol{a}$.

4. $-\frac{9}{4}$

解析 因为 A,B,D 三点共线,

故存在一个实数 λ,使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$,

又 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{CB}=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{e}_1-2k\boldsymbol{e}_2$,

所以 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=3\boldsymbol{e}_1-2k\boldsymbol{e}_2-(k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$

$=(3-k)\boldsymbol{e}_1-(2k+1)\boldsymbol{e}_2$,

所以 $3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=\lambda(3-k)\boldsymbol{e}_1-\lambda(2k+1)\boldsymbol{e}_2$,

所以 $\begin{cases}3=\lambda(3-k),\\ 2=-\lambda(2k+1),\end{cases}$

解得 $k=-\frac{9}{4}$.

6.2.4 向量的数量积(一)

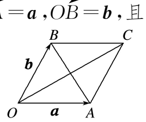
问题1 θ 是向量 $\boldsymbol{F}$ 与向量 $\boldsymbol{s}$ 的夹角.

知识梳理

1. 非零向量 $\angle AOB=\theta$ $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 同向反向

2. $\frac{\pi}{2}$ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

例1 解 如图所示,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,且 $\angle AOB=60°$.



以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$,

则 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$,

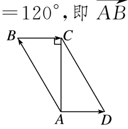
所以平行四边形 $OACB$ 是菱形,

又 $\angle AOB=60°$,

所以 $\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的夹角为 $30°$,$\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的夹角为 $60°$.

即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角是 $30°$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角是 $60°$.

跟踪训练1 C [如图,作向量 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,则 $\angle BAD$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角,在 $\triangle ABC$ 中,因为 $\angle ACB=90°$,$BC=\frac{1}{2}AB$,所以 $\angle ABC=60°$,所以 $\angle BAD=120°$,即 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角是 $120°$.]



问题2 $W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\theta$($\theta$ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角).

知识梳理

1. $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 0

2. (2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ (4)$\leqslant$

例2 解 (1)∵$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 $60°$,

∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)∵$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $120°$,

∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 120°=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

(3)∵$\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 $60°$,

∴$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

跟踪训练2 (1)0 -16 -16

解析 由题意,得 $|\overrightarrow{AB}|=4$,$|\overrightarrow{BC}|=4$,$|\overrightarrow{CA}|=4\sqrt{2}$,

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4\times4\times\cos 90°=0$,$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=4\times4\sqrt{2}\times\cos 135°=-16$,$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=4\sqrt{2}\times4\times\cos 135°=-16$.

(2)$\frac{\pi}{3}$

解析 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$,

∵$\theta\in[0,\pi]$,∴$\theta=\frac{\pi}{3}$.

知识梳理

1. 投影 投影

例3 解 (1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=5\times4\times\cos 120°=-10$.

(2)$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{e}=-\frac{10}{4}\boldsymbol{e}=-\frac{5}{2}\boldsymbol{e}$.

跟踪训练3 1

解析 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=60°$,

故 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的模为 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=2\cos 60°=2\times\frac{1}{2}=1$.

随堂演练

1. B [由数量积的定义,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120°=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$. 故选B.]

2. AB [$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,所以A错误;
向量夹角的范围是 $[0,\pi]$,所以B错误;
由数量积的性质知,C正确;
因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$,
所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$,所以D正确.]

3. B [$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC=2\times\sqrt{2}\times\cos 45°=2$.]

4. $\boldsymbol{e}$

解析 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\boldsymbol{e}=2\times\frac{1}{2}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}$.

6.2.4 向量的数量积(二)

知识梳理

2. $a^2+2a\cdot b+b^2$ $a^2-2a\cdot b+b^2$ a^2-b^2 $a^2+b^2+c^2+2a\cdot b+2b\cdot c+2c\cdot a$

例1 ACD [根据数量积的分配律知A正确;

∵$[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}$

$=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0$,

∴$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直,B错误;

∵$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,∴$|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 组成三角形,

∴$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立,C正确;显然D正确.

故正确结论的选项是ACD.]

跟踪训练1 ②

解析 由向量数量积的性质和运算律知,①③错误,②正确.

例2 (1)$2\sqrt{3}$

解析 方法一 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}$

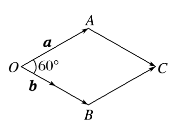
$=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}$

$=\sqrt{2^2+4\times2\times1\times\cos 60°+4\times1^2}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

方法二 (数形结合法)

由 $|\boldsymbol{a}|=|2\boldsymbol{b}|=2$ 知,以 $\boldsymbol{a}$ 与 $2\boldsymbol{b}$ 为邻边可作出边长为2的菱形 $OACB$,如图,



则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{OC}|$.

又 $\angle AOB=60°$,所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$.

(2)**解** ①因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{3}{4}$,

即 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=\frac{3}{4}$,

即$|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=\frac{3}{4}$,

所以$|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$,

故$|\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}$.

②因为$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|2\boldsymbol{b}|^2=1-1+1=1$,
故$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=1$.

又因为$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

所以$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$,

又$\theta\in[0,\pi]$,故$\theta=\frac{\pi}{3}$.

跟踪训练2　**解**　设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,
由题意得$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2=7$,
$\therefore 9|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=7$,

又$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$,

$\therefore|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}$,

即$\cos\theta=\frac{1}{2}$.

又$\theta\in[0,\pi]$,$\therefore\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

例3　B　[由题意知,$\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{\frac{3}{4}|\boldsymbol{n}|^2}=\frac{1}{3}$,

所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{4}|\boldsymbol{n}|^2=\frac{1}{4}\boldsymbol{n}^2$,
因为$\boldsymbol{n}\cdot(t\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=0$,
所以$t\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}^2=0$,
即$\frac{1}{4}t\boldsymbol{n}^2+\boldsymbol{n}^2=0$,
所以$t=-4$.]

跟踪训练3　**解**　设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,
由已知得$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2$
$=3+10\cos\theta-8=0$,

所以$\cos\theta=\frac{1}{2}$,又$0°\leqslant\theta\leqslant180°$,

所以$\theta=60°$,
即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$.

随堂演练

1. B　[因为$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$,$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$,
所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)\cdot(-3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2)=-9|\boldsymbol{e}_1|^2+8|\boldsymbol{e}_2|^2+6\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=-9\times1^2+8\times1^2+6\times0=-1$.]
2. B　[$\because|\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+16\boldsymbol{b}^2$
$=2^2-8\times2\times1\times\cos60°+16\times1^2=12$,
$\therefore|\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$.]
3. C　[由题意知$(3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,
即$3m\boldsymbol{a}^2+(5m-3)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{b}^2=0$,
$3m\times3^2+(5m-3)\times3\times2\cos60°-5\times2^2=0$,
解得$m=\frac{29}{42}$.故选C.]
4. $\frac{\pi}{6}$

解析　$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{3}$,
设向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$,则

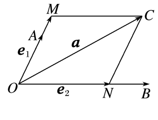
$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{2^2-1}{2\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{\pi}{6}$.

§6.3　平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1　平面向量基本定理

问题1　$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{OM}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{ON}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.



问题2　分解方法唯一.如果$\boldsymbol{a}$还可以表示成$\mu_1\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2$的形式,那么$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\mu_1\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2$,可得$(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{e}_1+(\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$,由此式可推出$\lambda_1-\mu_1$,$\lambda_2-\mu_2$全为0(假设$\lambda_1-\mu_1$,$\lambda_2-\mu_2$不全为0,不妨假设$\lambda_1-\mu_1\neq0$,则$\boldsymbol{e}_1=-\frac{\lambda_2-\mu_2}{\lambda_1-\mu_1}\boldsymbol{e}_2$.由此可得$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$共线,这与$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$不共线矛盾,即$\lambda_1=\mu_1$,$\lambda_2=\mu_2$,因此,分解方法是唯一的.

知识梳理

1. 不共线　任一　有且只有一对
2. 不共线

例1　ACD　[选项B中,$6\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2=2(3\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2)$,
$\therefore 6\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2$与$3\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$共线,$\therefore$不能作为基底,选项A,C,D中两向量均不共线,可以作为基底.]

跟踪训练1　3

解析　因为$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$是一个基底,
所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线,

由平面向量基本定理得$\begin{cases}3x-4y=6,\\2x-3y=3,\end{cases}$所以$\begin{cases}x=6,\\y=3,\end{cases}$

所以$x-y=3$.

例2　**解**　因为$DC/\!/AB$,$AB=2DC$,E,F分别是DC,AB的中点,

所以$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

跟踪训练2　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$

解析　以$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$为基底时,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$;
以$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\}$为基底时,将$\overrightarrow{BD}$平移,使$B$与$A$重合,再由三角形法则或平行四边形法则即得$\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

例3　**解**　设$\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{e}_2$,
则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$,
$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.
$\because A,P,M$和B,P,N分别共线,
$\therefore$存在实数λ,μ使得$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda\boldsymbol{e}_1-3\lambda\boldsymbol{e}_2$,
$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$.
故$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1+(3\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2$.
而$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,
由平面向量基本定理,

得$\begin{cases}\lambda+2\mu=2,\\3\lambda+\mu=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5},\\\mu=\frac{3}{5}.\end{cases}$

$\therefore\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BN}$,

$\therefore AP:PM=4:1$,$BP:PN=3:2$.

跟踪训练3　$\frac{4}{3}$

解析　设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,

则$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

又$\because\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\therefore\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$,

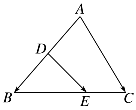
即$\lambda=\mu=\frac{2}{3}$,$\therefore\lambda+\mu=\frac{4}{3}$.

随堂演练

1. CD
2. D　[$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$
$=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$
$=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{5}{12}\boldsymbol{b}$.]
3. A　[由$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AB}$,得$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$,
即$\overrightarrow{OP}=(1+\lambda)\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OB}$.又$2\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,
所以$\begin{cases}x=2+2\lambda,\\y=-2\lambda,\end{cases}$消去$\lambda$得$x+y=2$.]
4. $\frac{1}{2}$

解析　如图,$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,



又∵$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$不共线,

∴$\lambda_1=-\frac{1}{6}$,$\lambda_2=\frac{2}{3}$,$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$.

6.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示

6.3.3 平面向量加、减运算的坐标表示

问题1 该木块受到重力$\boldsymbol{G}$的作用,产生两个效果,一是木块受平行于斜面的力$\boldsymbol{F}_1$的作用沿斜面下滑;二是木块产生垂直于斜面的压力$\boldsymbol{F}_2$,也就是说,重力$\boldsymbol{G}$的效果等价于力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$的合力的效果,即$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$.

问题2 由平面向量基本定理可知,有且只有一对实数x,y,使得$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$.

知识梳理

1.互相垂直

2.单位向量 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ (x,y)

3.(x,y)

4.$(1,0)$ $(0,1)$

例1 A [由题意,得$\boldsymbol{a}=(\sqrt{2}\cos 45°)\boldsymbol{i}+(\sqrt{2}\sin 45°)\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}=(1,1)$.]

跟踪训练1 **解** 设点$A(x,y)$,则$x=|\overrightarrow{OA}|\cos 60°=4\sqrt{3}\cos 60°=2\sqrt{3}$,$y=|\overrightarrow{OA}|\sin 60°=4\sqrt{3}\sin 60°=6$,

即$A(2\sqrt{3},6)$,所以$\overrightarrow{OA}=(2\sqrt{3},6)$.

问题3 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}$,即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.同理可得$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.

问题4 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

知识梳理

x_1+x_2 y_1+y_2 x_1-x_2 y_1-y_2 (x_2-x_1,y_2-y_1)

例2 **解** ∵$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

∴$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-1,-1)$,

∴$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(-3,-5)$.

跟踪训练2 A [**方法一** 设$C(x,y)$,$O(0,0)$,

则$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(x,y-1)=(-4,-3)$,

即$x=-4$,$y=-2$,

故$C(-4,-2)$,则$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-7,-4)$.

方法二 $\overrightarrow{AB}=(3,2)-(0,1)=(3,1)$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-4,-3)-(3,1)$.

$=(-7,-4)$.]

例3 **解** 设点P的坐标为(x,y),

则$\overrightarrow{AP}=(x,y)-(2,3)=(x-2,y-3)$,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(5,4)-(2,3)+(5\lambda,7\lambda)$

$=(3,1)+(5\lambda,7\lambda)=(3+5\lambda,1+7\lambda)$.

∵$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,且$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$不共线,

∴$\begin{cases}x-2=3+5\lambda,\\y-3=1+7\lambda.\end{cases}$则$\begin{cases}x=5+5\lambda,\\y=4+7\lambda.\end{cases}$

(1)若点P在第一、三象限的角平分线上,

则$5+5\lambda=4+7\lambda$,

∴$\lambda=\frac{1}{2}$.

(2)若点P在第三象限内,则$\begin{cases}5+5\lambda<0,\\4+7\lambda<0,\end{cases}$∴$\lambda<-1$.

跟踪训练3 **解** 设点D的坐标为(x,y),

当平行四边形为$ABCD$时,由$\overrightarrow{AB}=(1,2)$,$\overrightarrow{DC}=(3-x,4-y)$,

且$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,得$D(2,2)$;

当平行四边形为$ACDB$时,由$\overrightarrow{AB}=(1,2)$,$\overrightarrow{CD}=(x-3,y-4)$,

且$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$,得$D(4,6)$;

当平行四边形为$ACBD$时,由$\overrightarrow{AC}=(5,3)$,$\overrightarrow{DB}=(-1-x,3-y)$,且$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$,得$D(-6,0)$,

故点D的坐标为$(2,2)$或$(4,6)$或$(-6,0)$.

随堂演练

1.B [由题意得$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(3,1)-(1,2)=(2,-1)$.]

2.C

3.C [$\overrightarrow{BA}=(3,1)-(2,-1)=(1,2)$.]

4.$(0,4)$

解析 设$C(x,y)$,则$\overrightarrow{BC}=(x+2,y-3)$,$\overrightarrow{OA}=(2,1)$.

由$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$,得$x=0$,$y=4$.故点$C$的坐标为$(0,4)$.

6.3.4 平面向量数乘运算的坐标表示

问题1 $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})=\lambda x\boldsymbol{i}+\lambda y\boldsymbol{j}$,即$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y)$.

知识梳理

$(\lambda x,\lambda y)$ 乘原来向量的相应坐标

例1 (1)A [∵$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,

∴$\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=-3(5,2)+2(-4,-3)=(-23,-12)$,

∴$\boldsymbol{c}=(-23,-12)$.]

(2)D [$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{2}(-2,-2)=(-1,-1)$.]

跟踪训练1 **解** (1)$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=2(-1,2)+3(2,1)$

$=(-2,4)+(6,3)=(4,7)$.

(2)$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(-1,2)-3(2,1)$

$=(-1,2)-(6,3)=(-7,-1)$.

(3)$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(-1,2)-\frac{1}{3}(2,1)$

$=\left(-\frac{1}{2},1\right)-\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{7}{6},\frac{2}{3}\right)$.

问题2 设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,其中$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,

由$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$共线的充要条件是存在实数λ,使$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,则有$(x_1,y_1)=\lambda(x_2,y_2)\Rightarrow\begin{cases}x_1=\lambda x_2,\\y_1=\lambda y_2,\end{cases}$消去$\lambda$,得$x_1y_2-x_2y_1=0$.

知识梳理

$x_1y_2-x_2y_1=0$

例2 ABC [能作为平面内的基底,则两向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行,A选项,$(-2)\times6-3\times4=-24\neq0$,∴$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行;

B选项,$2\times2-3\times3=4-9=-5\neq0$,∴$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行;

C选项,$1\times14-(-2)\times7=28\neq0$,∴$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行;

D选项,$(-3)\times(-4)-2\times6=12-12=0$,∴$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.]

跟踪训练2 **解** 因为$\overrightarrow{AB}=(1-(-1),3-(-1))=(2,4)$,

$\overrightarrow{AC}=(2-(-1),5-(-1))=(3,6)$,

因为$2\times6-3\times4=0$,

所以$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$共线.

又$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的方向相同.

例3 (1)$-\frac{1}{3}$

解析 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,-10)$,$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(1+3k,-2+4k)$,

因为$(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$,所以$0-(-10-30k)=0$,

解得$k=-\frac{1}{3}$.

(2)$-\frac{1}{4}$

解析 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1-k,2k-2)$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(1-2k,-3)$,

由题意可知$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$,

所以$(-3)\times(1-k)-(2k-2)(1-2k)=0$,

解得$k=-\frac{1}{4}$($k=1$不合题意,舍去).

跟踪训练3 (1)D [非零向量$\boldsymbol{a}=(m^2-1,m+1)$与向量$\boldsymbol{b}=(1,-2)$平行,

所以$-2(m^2-1)-1\times(m+1)=0$,且$m\neq-1$,

∴$m=\frac{1}{2}$.]

(2)$\frac{\pi}{3}$

解析 ∵$\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},\cos\alpha)$,$\boldsymbol{b}=(3,\sin\alpha)$,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,

∴$\sqrt{3}\sin\alpha-3\cos\alpha=0$,即$\tan\alpha=\sqrt{3}$,

又$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,故$\alpha=\frac{\pi}{3}$.

问题3 中点,当$\lambda=1$时,P点的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

知识梳理

$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$

例4 **解** ∵D是AB的中点,

∴点D的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

∵$\frac{CG}{GD}=2$,∴$\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{GD}$,

设G点坐标为(x,y),由定比分点坐标公式可得

$x=\dfrac{x_3+2\times\dfrac{x_1+x_2}{2}}{1+2}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$,

$y=\dfrac{y_3+2\times\dfrac{y_1+y_2}{2}}{1+2}=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$,

即点 G 的坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

跟踪训练 4　$(6,-9)$

解析　设点 P 的坐标为(x,y),由条件可知 $\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{PB}$,由定比分点坐标公式可知$\begin{cases}x=\dfrac{2+(-2)\times4}{1+(-2)},\\ y=\dfrac{3+(-2)\times(-3)}{1+(-2)},\end{cases}$

即点 P 的坐标为$(6,-9)$.

随堂演练

1. B　[利用平面向量共线的坐标表示可知,只有 B 满足题意.]

2. D　[因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,
所以 $2\times2-(-1)\times(x-1)=0$,得 $x=-3$.]

3. C　[设与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量为 $\boldsymbol{e}=(x,y)$,
则$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\12y-5x=0,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x=\dfrac{12}{13},\\y=\dfrac{5}{13}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{12}{13},\\y=-\dfrac{5}{13}.\end{cases}$]

4. $\dfrac{16}{5}$

解析　$\overrightarrow{AB}=(5,4)$,$\overrightarrow{AC}=(4,a)$,因为 A,B,C 三点共线,
所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$,故 $5a-16=0$,所以 $a=\dfrac{16}{5}$.

6.3.5　平面向量数量积的坐标表示

问题　$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$.
∵$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$,
∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})$
$=x_1x_2\boldsymbol{i}^2+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_2y_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}^2$.
又∵$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0$,
∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

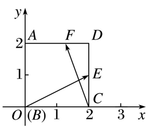
知识梳理

$x_1x_2+y_1y_2$

例 1　(1)B　[$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(4,-3)$,$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(-1,2)$,
所以$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=4\times(-1)+(-3)\times2=-10$.]
(2)C　[由题意可得,$8\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(6,3)$,又$(8\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=30$,$\boldsymbol{c}=(3,x)$,∴$18+3x=30$,解得 $x=4$.]

跟踪训练 1　$\dfrac{2}{3}$

解析　建立平面直角坐标系如图所示,



则 $A(0,2)$,$E(2,1)$,$D(2,2)$,$B(0,0)$,$C(2,0)$,
因为 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FD}$,所以 $F\left(\dfrac{4}{3},2\right)$.
所以 $\overrightarrow{BE}=(2,1)$,$\overrightarrow{CF}=\left(\dfrac{4}{3},2\right)-(2,0)=\left(-\dfrac{2}{3},2\right)$,
所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=(2,1)\cdot\left(-\dfrac{2}{3},2\right)$
$=2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)+1\times2=\dfrac{2}{3}$.

知识梳理

1. x^2+y^2　$\sqrt{x^2+y^2}$
2. $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

例 2　A　[∵$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,∴$1\times y-2\times(-2)=0$,
解得 $y=-4$,从而 $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,2)$,$|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$.]

跟踪训练 2　C　[∵$\boldsymbol{a}=(2,1)$,∴$\boldsymbol{a}^2=5$,
又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$,∴$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=50$,
即 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=50$,
∴$5+2\times10+\boldsymbol{b}^2=50$,∴$\boldsymbol{b}^2=25$,∴$|\boldsymbol{b}|=5$.]

知识梳理

1. $\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
2. $x_1x_2+y_1y_2=0$

例 3　**解**　(1)因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times(-1)+3\times2=2$,
$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$,设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,所以 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2}{5\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$.
(2)因为 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(4+\lambda,3-2\lambda)$,$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(7,8)$,
又$(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,
所以 $7(4+\lambda)+8(3-2\lambda)=0$,解得 $\lambda=\dfrac{52}{9}$.

跟踪训练 3　(1)B　[因为 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{b}=(3,m)$.
所以$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{9+m^2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3+\sqrt{3}m$,
又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$,所以 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\cos\dfrac{\pi}{6}$,即 $\dfrac{3+\sqrt{3}m}{2\sqrt{9+m^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
所以$\sqrt{3}+m=\sqrt{9+m^2}$,解得 $m=\sqrt{3}$.]
(2)7

解析　[∵$\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(m,1)$,
∴$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1+m,2+1)=(m-1,3)$.
又 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,∴$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$,
即$(m-1)\times(-1)+3\times2=0$,
解得 $m=7$.]

随堂演练

1. A　[$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-x+6=3$,故 $x=3$.]

2. A　[$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$.
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times5+4\times12=63$.
设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,所以 $\cos\theta=\dfrac{63}{5\times13}=\dfrac{63}{65}$.]

3. C　[∵$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2$
$=2(-1+n^2)-(1+n^2)=n^2-3=0$,
∴$n^2=3$,∴$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+n^2}=2$.]

4. 7　$\sqrt{13}$

解析　$\overrightarrow{AB}=(1,-3)$,
∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times4+(-3)\times(-1)=7$,
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(4,-1)-(1,-3)=(3,2)$,
∴$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

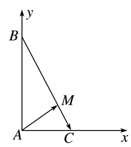
习题课　平面向量数量积的综合应用

例 1　12

解析　因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$,
所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$,
所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
因为 $AB/\!/CD$,$CD=2$,$\angle BAD=\dfrac{\pi}{4}$,
所以 $2|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\dfrac{\pi}{4}$,
化简得$|\overrightarrow{AD}|=2\sqrt{2}$.
故 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=|\overrightarrow{AD}|^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$
$=(2\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\times2\cos\dfrac{\pi}{4}=12$.

跟踪训练 1　$\dfrac{1}{4}$

解析　根据题意,建立如图所示的平面直角坐标系,



则 $A(0,0)$,$B(0,2)$,$C(1,0)$,
所以 $\overrightarrow{AB}=(0,2)$,$\overrightarrow{AC}=(1,0)$,$\overrightarrow{BC}=(1,-2)$.
设 $M(x,y)$,则 $\overrightarrow{AM}=(x,y)$,
所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=(x,y)\cdot(1,-2)=x-2y=0$,
所以 $x=2y$,
又 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,
即$(x,y)=\lambda(0,2)+\mu(1,0)=(\mu,2\lambda)$,
所以 $x=\mu$,$y=2\lambda$,所以 $\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{\frac{1}{2}y}{2y}=\dfrac{1}{4}$.

例 2　2

解析　因为 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$
$=\dfrac{1}{2}(2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,
所以$|\overrightarrow{AD}|^2=4(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4(\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)$
$=4\times\left(3-2\times2\times\sqrt{3}\times\cos\dfrac{\pi}{6}+4\right)=4$,
则$|\overrightarrow{AD}|=2$.

例 3　$-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

解析　因为 $2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}$,

所以 E 为 BC 的中点.
设正方形的边长为 2,则 $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{5}$,$|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{2}$,
$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$
$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\times2^2-2^2=-2$,
所以 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{-2}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

例 4 **解** 假设存在点 M,且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OC}=(6\lambda,3\lambda)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$.
则 $\overrightarrow{MA}=(2-6\lambda,5-3\lambda)$,$\overrightarrow{MB}=(3-6\lambda,1-3\lambda)$,
$\because\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$,
$\therefore(2-6\lambda)(3-6\lambda)+(5-3\lambda)(1-3\lambda)=0$,
即 $45\lambda^2-48\lambda+11=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=\frac{11}{15}$,
$\therefore\overrightarrow{OM}=(2,1)$ 或 $\overrightarrow{OM}=\left(\frac{22}{5},\frac{11}{5}\right)$,
$\therefore$ 存在 $M(2,1)$ 或 $M\left(\frac{22}{5},\frac{11}{5}\right)$ 满足题意.

跟踪训练 2 (1)BD [根据题意知,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,1)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,1)$,
则 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,0)$,
对于 A,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=2$,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 不成立,A 错误;
对于 B,$\boldsymbol{a}=(-1,1)$,$\boldsymbol{c}=(1,1)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$,即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,B 正确;
对于 C,$\boldsymbol{b}=(2,0)$,$\boldsymbol{c}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$ 不成立,C 错误;
对于 D,$\boldsymbol{a}=(-1,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,0)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=2$,
则 $\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\theta=135°$,D 正确.]
(2)AC [将 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(m,1)$ 代入 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3$,得 $(m,1)\cdot(1+m,3)=3$,得 $m^2+m=0$,解得 $m=-1$ 或 $m=0$(舍去),所以 $\boldsymbol{b}=(-1,1)$,所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$,故 A 正确;
因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,5)$,$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-1,4)$,$1\times4-(-1)\times5=9\neq0$,
所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 不平行,故 B 错误;
设向量 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,因为 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,3)$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3,0)$,所以 $\cos\theta=\frac{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})}{|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$,故 C 正确;
向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的模为 $\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 D 错误.]

例 5 **解** $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\cos x,\sin x)\cdot(3,-\sqrt{3})$
$=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.
因为 $x\in[0,\pi]$,所以 $x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,
从而 $-1\leqslant\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.
于是,当 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,即 $x=0$ 时,$f(x)$ 取得最大值 3;
当 $x+\frac{\pi}{6}=\pi$,即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时,$f(x)$ 取得最小值 $-2\sqrt{3}$.

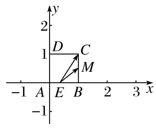
跟踪训练 3 **解** (1)若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$,
即 $-\sin\alpha(\sin\alpha-2)-\cos^2\alpha=0$,
即 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$,可得 $\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$.
(2)若 $|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|=\sqrt{2}$,则 $(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})^2=2$,
即 $(2\sin\alpha-2)^2+(-2\cos\alpha)^2=2$,
即 $4\sin^2\alpha+4-8\sin\alpha+4\cos^2\alpha=2$,
即 $8-8\sin\alpha=2$,可得 $\sin\alpha=\frac{3}{4}$,
所以 $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\frac{9}{16}=-\frac{1}{8}$.

习题课 平面向量中的最值与范围问题

例 1 **解** 因为在直角梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$\angle DAB=90°$,$AD=AB=4$,$CD=1$,
所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,
所以 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$
$=m\overrightarrow{AB}+n\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)$
$=\left(m-\frac{1}{4}n\right)\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$,
由 P,B,C 三点共线得,
$m-\frac{1}{4}n+n=m+\frac{3}{4}n=1(m,n>0)$,
所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\left(m+\frac{3}{4}n\right)$
$=\frac{7}{4}+\frac{3n}{4m}+\frac{m}{n}\geqslant\frac{7}{4}+2\sqrt{\frac{3n}{4m}\cdot\frac{m}{n}}$
$=\frac{7}{4}+\sqrt{3}=\frac{7+4\sqrt{3}}{4}$(当且仅当 $3n^2=4m^2$ 时取等号),
即 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 $\frac{7+4\sqrt{3}}{4}$.

跟踪训练 1 $(-1,0)$
解析 由点 D 是圆 O 外一点,可设 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BA}(\lambda>1)$,
则 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{BA}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$.
又因为 C,O,D 三点共线,令 $\overrightarrow{OD}=-\mu\overrightarrow{OC}(\mu>1)$,
则 $\overrightarrow{OC}=-\frac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{OA}-\frac{1-\lambda}{\mu}\overrightarrow{OB}(\lambda>1,\mu>1)$,
所以 $m=-\frac{\lambda}{\mu}$,$n=-\frac{1-\lambda}{\mu}$,
则 $m+n=-\frac{\lambda}{\mu}-\frac{1-\lambda}{\mu}=-\frac{1}{\mu}\in(-1,0)$.

例 2 C [将正方形放入如图所示的平面直角坐标系中,设 $E(x,0)$,$0\leqslant x\leqslant1$.



则 $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$,$C(1,1)$,
所以 $\overrightarrow{EM}=\left(1-x,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{EC}=(1-x,1)$,
所以 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EC}=\left(1-x,\frac{1}{2}\right)\cdot(1-x,1)=(1-x)^2+\frac{1}{2}$.
因为 $0\leqslant x\leqslant1$,所以 $\frac{1}{2}\leqslant(1-x)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{2}$,
即 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EM}$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.]

跟踪训练 2 $\frac{29}{18}$
解析 根据题意,可知 $DC=1$,$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})=(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC})\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\lambda\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=1+\frac{2}{9\lambda}+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{18}\geqslant1+2\sqrt{\frac{1}{9}}-\frac{1}{18}=\frac{29}{18}$,当且仅当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时,等号成立.

例 3 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
解析 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$
$=1-2\times1\times|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}+|\boldsymbol{b}|^2$
$=|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{b}|+1=\left(|\boldsymbol{b}|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$,
所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,当 $|\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}$ 时取得最小值.

跟踪训练 3 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
解析 将 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$ 两边平方并化简得 $(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=4$,由基本不等式得 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\leqslant\left(\frac{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}{2}\right)^2=\frac{(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2}{4}$,
故 $\frac{3}{4}(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2\leqslant4$,即 $(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2\leqslant\frac{16}{3}$,即 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$,
当且仅当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立,所以 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

例 4 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
解析 $\because|\boldsymbol{a}|=1$,$\therefore$ 设 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(x,y)$,

$\therefore \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(x-1,y)$，

由 $2|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ 得，$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x$，则 $x>0$，

$\therefore 4(x-1)^2+4y^2=x^2$，

$\therefore y^2=-\frac{3}{4}x^2+2x-1$，

$\therefore \cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-\frac{3}{4}x^2+2x-1}}$

$=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2}{x}+\frac{1}{4}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\frac{5}{4}}}$，

$\therefore$ 当 $\frac{1}{x}=1$ 即 $x=1$ 时，$\cos\theta$ 取最小值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

跟踪训练 4　C　[因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$，

$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$

$=\frac{1}{\sqrt{2t^2-4\sqrt{2}t+8}}$，

又因为 $2t^2-4\sqrt{2}t+8=2[(t-\sqrt{2})^2+2]\geqslant 2[(\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+2]=4$，

所以 $0<\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.]

6.4　平面向量的应用

6.4.1　平面几何中的向量方法

例 1　证明　设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{n}$，

由 $\frac{CE}{ED}=\frac{AF}{FB}=\frac{1}{2}$，知 E，F 分别是 CD，AB 的三等分点，

所以 $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{1}{3}\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=\frac{1}{6}\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}$，

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})-\frac{1}{3}\boldsymbol{m}=\frac{1}{6}\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}$.

所以 $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OE}$.

又 O 为 $\overrightarrow{FO}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 的公共点，故点 E，O，F 在同一直线上.

跟踪训练 1　证明　设 $\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ $(\lambda>0$ 且 $\lambda\neq 1)$，

因为 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{AP}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}[(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})]$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(-\lambda+1)\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{PQ}/\!/\overrightarrow{AB}$，又 P，Q，A，B 四点不共线，

所以 $PQ/\!/AB$.

例 2　证明　方法一　设 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，

则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

又 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}$，

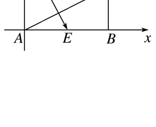
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}$，

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)\cdot\left(-\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)$

$=-\frac{\boldsymbol{a}^2}{2}-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{2}=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2=0$.

故 $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{DE}$，即 $AF\perp DE$.

方法二　如图所示，建立平面直角坐标系，设正方形的边长为 2，则 $A(0,0)$，$D(0,2)$，$E(1,0)$，$F(2,1)$，



则 $\overrightarrow{AF}=(2,1)$，$\overrightarrow{DE}=(1,-2)$.

因为 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=(2,1)\cdot(1,-2)$

$=2-2=0$，

所以 $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{DE}$，即 $AF\perp DE$.

跟踪训练 2　证明　方法一　设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$AE=a(0<a<1)$，

则 $EP=AE=a$，$PF=EB=1-a$，$AP=\sqrt{2}a$，

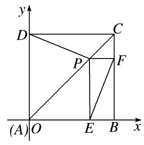
$\therefore \overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PF})$

$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PF}$

$=1\times a\times\cos 180°+1\times(1-a)\times\cos 90°+\sqrt{2}a\times a\times\cos 45°+\sqrt{2}a\times(1-a)\times\cos 45°=-a+a^2+a(1-a)=0$.

$\therefore \overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{EF}$，即 $DP\perp EF$.

方法二　如图，以 A 为原点，AB，AD 所在直线分别为 x 轴，y 轴建立平面直角坐标系.



设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，

$AP=\lambda(0<\lambda<\sqrt{2})$，

则 $D(0,1)$，$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$，

$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,0\right)$，$F\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$.

$\therefore \overrightarrow{DP}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda-1\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$.

$\therefore \overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda=0$，

$\therefore \overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{EF}$，即 $DP\perp EF$.

例 3　解　设 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

而 $|\overrightarrow{BD}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1+4-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$

$=\sqrt{5-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=2$，

$\therefore 5-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，

又 $|\overrightarrow{AC}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

$=1+4+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$，

$\therefore |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6}$，即 $AC=\sqrt{6}$.

跟踪训练 3　B　[$\because BC$ 的中点为 $D\left(\frac{3}{2},6\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{5}{2},5\right)$，

$\therefore |\overrightarrow{AD}|=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.]

例 4　解　(1)设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，

则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

$\therefore |\overrightarrow{AD}|^2=\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)^2$

$=\frac{4}{9}\boldsymbol{a}^2+2\times\frac{2}{9}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{9}\boldsymbol{b}^2$

$=\frac{4}{9}\times 9+2\times\frac{2}{9}\times 3\times 3\times\cos 120°+\frac{1}{9}\times 9=3$.

$\therefore AD=\sqrt{3}$.

(2)设 $\angle DAC=\theta(0°<\theta<120°)$，

则 θ 为 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角.

$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|}$

$=\frac{\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{3}\times 3}$

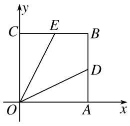
$=\frac{\frac{2}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}^2}{3\sqrt{3}}$

$=\frac{\frac{2}{3}\times 3\times 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\times 9}{3\sqrt{3}}=0$.

$\therefore \theta=90°$，即 $\angle DAC=90°$.

跟踪训练 4　$\frac{4}{5}$

解析　以 OA，OC 所在直线为坐标轴建立平面直角坐标系，如图所示.



由题意知，$\overrightarrow{OD}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OE}=\left(\frac{1}{2},1\right)$，

故 $\cos\angle DOE=\frac{\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OE}|}$

$=\frac{1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{4}{5}$.

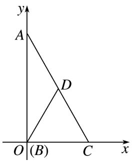
即 $\cos\angle DOE$ 的值为$\frac{4}{5}$.

随堂演练

1. C　[$(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{CA}^2-\overrightarrow{CB}^2=0$，
即$|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|$，∴$CA=CB$，则△$ABC$ 是等腰三角形.]

2. A　[∵$\overrightarrow{AB}=(3,3)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,-2)$，
∴$\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$，∴$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线.
又$|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CD}|$，∴该四边形为梯形.]

3. B　[如图建立平面直角坐标系，



则 $B(0,0)$，$A(0,8)$，$C(6,0)$，$D(3,4)$，
∴$\overrightarrow{DB}=(-3,-4)$，$\overrightarrow{DC}=(3,-4)$.
又∠BDC 为 $\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$ 的夹角，
∴$\cos\angle BDC=\frac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DC}|}=\frac{-9+16}{5\times 5}=\frac{7}{25}$.]

4. 1

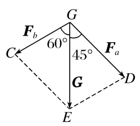
解析　∵$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

∴$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

∴AP 为 Rt△ABC 斜边 BC 的中线. ∴$|\overrightarrow{AP}|=1$.

6.4.2　向量在物理中的应用举例

例 1　**解**　如图，由已知条件可知 AG 与铅垂方向成 45°角，BG 与铅垂方向成 60°角.

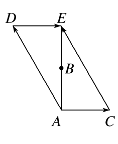


设 A 处所受力为 $\boldsymbol{F}_a$，B 处所受力为 $\boldsymbol{F}_b$，物体的重力为 $\boldsymbol{G}$.
因为∠EGC=60°，∠EGD=45°，
则有$|\boldsymbol{F}_a|\cos 45°+|\boldsymbol{F}_b|\cos 60°=|\boldsymbol{G}|=100$，　①
且$|\boldsymbol{F}_a|\sin 45°=|\boldsymbol{F}_b|\sin 60°$，　②
由①②得$|\boldsymbol{F}_a|=150\sqrt{2}-50\sqrt{6}$，
所以 A 处所受力的大小为$(150\sqrt{2}-50\sqrt{6})$N.

跟踪训练 1　10

解析　设重力为 $\boldsymbol{G}$，每根绳的拉力分别为 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，则由题意得 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 与 $-\boldsymbol{G}$ 都成 60°角，
且$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|$，$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}$.
∴$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{G}|=10$ N，
∴每根绳子的拉力都为 10 N.

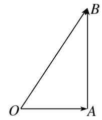
例 2　**解**　如图所示，设 $\overrightarrow{AC}$ 为水流速度，$\overrightarrow{AD}$ 为航行速度，以 AC 和 AD 为邻边作▱$ACED$，且当 AE 与 AB 重合时能最快到达彼岸，根据题意知 $AC\perp AE$，在Rt△ADE 和▱$ACED$ 中，$|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{AC}|=2$，$|\overrightarrow{AD}|=4$，∠$AED$=90°，∴$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{DE}|^2}=2\sqrt{3}$，又 $AB=\sqrt{3}$，∴用时 0.5 h，易知 $\sin\angle EAD=\frac{1}{2}$，



∴∠EAD=30°.
∴该船航行速度大小为 4 km/h，与水流方向成 120°角时能最快到达 B 码头，用时 0.5 h.

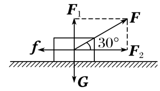
跟踪训练 2　60　30°

解析　如图所示，此人的位移是 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$，且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，



则$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2}=60$(m)，
$\tan\angle BOA=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\sqrt{3}$，
所以∠BOA=60°.
所以 $\overrightarrow{OB}$ 的方向为北偏东 30°.

例 3　**解**　如图所示，设木块的位移为 $\boldsymbol{s}$，



则 $W_{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos 30°=50\times 20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=500\sqrt{3}$(J).
将力 $\boldsymbol{F}$ 分解，它在铅垂方向上的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小为
$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}|\sin 30°=50\times\frac{1}{2}=25$(N)，
所以摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的大小为$|\boldsymbol{f}|=|\mu(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}_1)|=(80-25)\times 0.02=1.1$(N)，
因此 $W_{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos 180°=1.1\times 20\times(-1)=-22$(J).
即 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 所做的功分别为 $500\sqrt{3}$ J 和-22 J.

跟踪训练 3　-40

解析　∵$\boldsymbol{F}_1=(3,-4)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-5)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,1)$，
∴合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(8,-8)$.
又∵$\overrightarrow{AB}=(-1,4)$，
∴$\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=8\times(-1)+(-8)\times 4=-40$，
即三个力的合力做的功等于-40.

随堂演练

1. C　[由向量的加法法则可得逆风行驶的速度为 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$. 人的速度和风速方向相反，故选 C.]

2. D　[两个力的合力的大小为$|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=\sqrt{\boldsymbol{F}_1^2+\boldsymbol{F}_2^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2}=5\sqrt{6}$(N).]

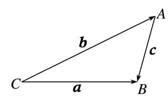
3. D　[$\boldsymbol{F}$ 做的功为 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos 60°=10\times 14\times\frac{1}{2}=70$.]

4. D　[作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{F}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{F}_2$，$\overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{G}$(图略)，
则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，
当$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{G}|$时，△$OAC$ 为正三角形，
所以∠AOC=60°，从而∠AOB=120°.]

6.4.3　余弦定理、正弦定理

第 1 课时　余弦定理

问题 1　如图，设 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，
那么 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，　①



我们的研究目标是用$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$和 C 表示$|\boldsymbol{c}|$，
联想到数量积的性质 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|^2$，
可以考虑用向量 $\boldsymbol{c}$(即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$)与其自身作数量积运算.
由①得$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$
$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$
$=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos C$.
所以 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，
同理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$.

问题 2　$a^2=b^2+c^2$，即勾股定理，勾股定理是余弦定理的一个特例.

知识梳理

1. 平方的和　积的两倍
2. $b^2+c^2-2bc\cos A$　$a^2+c^2-2ac\cos B$　$a^2+b^2-2ab\cos C$

例 1　**解**　(1)由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
$=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times 3\times 2\sqrt{3}\cos 30°=3$，
所以 $a=\sqrt{3}$.
(2)由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，
得$(\sqrt{5})^2=a^2+(\sqrt{15})^2-2a\times\sqrt{15}\times\cos 30°$，

即 $a^2-3\sqrt{5}a+10=0$,解得 $a=\sqrt{5}$ 或 $a=2\sqrt{5}$.

当 $a=\sqrt{5}$ 时,$A=30°$,$C=120°$;

当 $a=2\sqrt{5}$ 时,由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$,

$A=90°$,$C=60°$.

跟踪训练1　(1)2　$\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

解析　根据余弦定理,得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1^2+2^2-2\times1\times2\times\dfrac{1}{4}=4$,解得 $c=2$.由 $a=1$,$b=2$,$c=2$,得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{7}{8}$,所以 $\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.

(2)3

解析　由余弦定理,得 $5=2^2+b^2-2\times2b\cos A$,

因为 $\cos A=\dfrac{2}{3}$,所以 $3b^2-8b-3=0$,

解得 $b=3\left(b=-\dfrac{1}{3}\text{舍去}\right)$.

问题3　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

知识梳理

$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$　$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

例2　解　根据余弦定理,得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{(6+2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times4\sqrt{3}\times(6+2\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because A\in(0,\pi)$,$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$,

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(2\sqrt{6})^2+(6+2\sqrt{3})^2-(4\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{6}\times(6+2\sqrt{3})}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because C\in(0,\pi)$,$\therefore C=\dfrac{\pi}{4}$.

$\therefore B=\pi-A-C=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}$,

$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$,$B=\dfrac{7\pi}{12}$,$C=\dfrac{\pi}{4}$.

跟踪训练2　解　$\because a>c>b$,$\therefore A$ 为最大角.

由余弦定理的推论,得

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}$.

又 $\because 0°<A<180°$,$\therefore A=120°$,

$\therefore$ 最大角 A 为 $120°$.

问题4　A 为直角 $\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$;

A 为锐角 $\Leftrightarrow b^2+c^2>a^2$;

A 为钝角 $\Leftrightarrow b^2+c^2<a^2$.

例3　解　由 $a\cos B+a\cos C=b+c$ 并结合余弦定理,

得 $a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=b+c$,

即 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}=b+c$,

整理,得 $(b+c)(a^2-b^2-c^2)=0$.

因为 $b+c\neq0$,所以 $a^2=b^2+c^2$,

故 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

跟踪训练3　D　[在 $\triangle ABC$ 中,因为 $A=60°$,$a^2=bc$,

所以由余弦定理可得,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$,

所以 $bc=b^2+c^2-bc$,即 $(b-c)^2=0$,

所以 $b=c$,结合 $A=60°$ 可得 $\triangle ABC$ 一定是等边三角形.]

随堂演练

1.B　[设第三条边长为 x,

则 $x^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=52$,

$\therefore x=2\sqrt{13}$.]

2.B　[$\because a>b>c$,$\therefore C$ 为最小角且 C 为锐角,

由余弦定理,得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\dfrac{7^2+(4\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times7\times4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $\because C$ 为锐角,$\therefore C=\dfrac{\pi}{6}$.]

3.A　[$\because a^2-b^2+c^2=\sqrt{3}ac$,

$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

又 B 为 $\triangle ABC$ 的内角,$\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$.]

4.B　[因为 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$,

所以由余弦定理得,$b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a\sin A$,

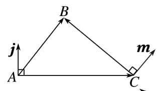
整理,得 $a=a\sin A$,所以 $\sin A=1$.

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\dfrac{\pi}{2}$.

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形.]

第2课时　正弦定理(一)

问题1　在锐角三角形中,



如图,在锐角 $\triangle ABC$ 中,过点 A 作与 $\overrightarrow{AC}$ 垂直的单位向量 $\boldsymbol{j}$,

则 $\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}-A$,$\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}-C$.

因为 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$,

所以 $\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$.

由分配律,得 $\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$,

即 $|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AC}|\cos\dfrac{\pi}{2}+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{CB}|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)$

$=|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)$,

也即 $a\sin C=c\sin A$,

所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$.

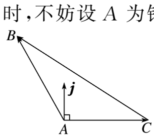
同理,过点 C 作与 $\overrightarrow{CB}$ 垂直的单位向量 $\boldsymbol{m}$,可得

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

因此 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

在钝角三角形中,

当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时,不妨设 A 为钝角(如图所示),



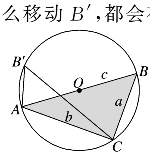
过点 A 作与 $\overrightarrow{AC}$ 垂直的单位向量 $\boldsymbol{j}$,则 $\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 $A-\dfrac{\pi}{2}$,

$\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}-C$,

仿照上述方法,同样可得

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

问题2　观察下图,无论怎么移动 B',都会有角 $B'=B$,



所以在 $\triangle AB'C$ 中,$\dfrac{b}{\sin B'}=\dfrac{b}{\sin B}=c$,

c 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$,$\triangle AB'C$ 外接圆的直径,

所以对任意 $\triangle ABC$,均有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$($R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径).

知识梳理

正弦　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

例1 解 因为 $B=30°,C=105°$，
所以 $A=180°-(B+C)=180°-(30°+105°)=45°$.
由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin 45°}=\frac{4}{\sin 30°}=\frac{c}{\sin 105°}$，
解得 $a=\frac{4\sin 45°}{\sin 30°}=4\sqrt{2}$，$c=\frac{4\sin 105°}{\sin 30°}=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

跟踪训练1 解 $A=180°-(B+C)=180°-(60°+75°)=45°$.
由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{8\times\sin 75°}{\sin 45°}$
$=\frac{8\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4(\sqrt{3}+1)$.
所以 $A=45°$，$c=4(\sqrt{3}+1)$.

例2 解 $\because\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}\sin 45°}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
$\because 0°<C<180°$，$\therefore C=60°$或 $C=120°$.
当 $C=60°$时，$B=75°$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 75°}{\sin 60°}=\sqrt{3}+1$；
当 $C=120°$时，$B=15°$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 15°}{\sin 120°}=\sqrt{3}-1$.
$\therefore b=\sqrt{3}+1,B=75°,C=60°$或 $b=\sqrt{3}-1,B=15°,C=120°$.

跟踪训练2 B [由正弦定理，得 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，
即 $\frac{2}{\sin C}=\frac{3}{\sin 60°}$，解得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，
$\because AB<AC$，$\therefore C<B$，$\therefore\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.]

例3 解 (1) $\sin B=\frac{b}{a}\sin 120°=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，
所以三角形有一解.
(2) $\sin B=\frac{b}{a}\sin 60°=\frac{10}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，而 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{5\sqrt{3}}{9}<1$.
所以当 B 为锐角时，满足 $\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{9}$ 的角 B 的取值范围是 $60°<B<90°$. 满足 $A+B<180°$；
当 B 为钝角时，满足 $\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{9}$ 的角 B 的取值范围是 $90°<B<120°$，也满足 $A+B<180°$. 故三角形有两解.
(3) $\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{72}{50}\sin C>\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
所以 $B>45°$，所以 $B+C>180°$，故三角形无解.

跟踪训练3 ABD [A中，$\because\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，
$\therefore\sin B=\frac{16\times\sin 30°}{8}=1$，
$\therefore B=90°$，即只有一解；B中，$\because\sin C=\frac{20\sin 60°}{18}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，且 $c>b$，
$\therefore C>B$，故有两解；C中，$\because A=90°,a=5,c=2$，$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$，有解；D中，$\because\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore\sin B=\frac{25\times\frac{1}{2}}{30}=\frac{5}{12}$，又 $b<a$，
$\therefore$角 B 只有一解.]

随堂演练

1. A [根据正弦定理，得 $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$.]
2. B [由正弦定理 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，得 $\frac{3\sqrt{2}}{\sin 60°}=\frac{AC}{\sin 45°}$，
所以 $AC=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{3}$.]
3. C [由正弦定理和已知条件，得 $\frac{4\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 30°}$，
$\therefore\sin B=\sqrt{3}>1$，$\therefore$此三角形无解. 故选C.]
4. $60°$或 $120°$

解析 由正弦定理，$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，得 $\sin B=\frac{5\sqrt{3}\sin 30°}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\because b>a$，$\therefore B>A$，且 $0°<B<180°$，$\therefore B=60°$或 $120°$.

第3课时 正弦定理(二)

例1 解 方法一 由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，
得 $3^2=a^2+(3\sqrt{3})^2-2a\times 3\sqrt{3}\times\cos 30°$，
$\therefore a^2-9a+18=0$，解得 $a=3$ 或 $a=6$.
当 $a=3$ 时，$A=30°$，$\therefore C=120°$；
当 $a=6$ 时，由正弦定理，得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{6\times\frac{1}{2}}{3}=1$，
$\therefore A=90°,C=60°$.

方法二 由正弦定理，得 $\frac{3}{\sin 30°}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin C}$，解得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
又 $c>b$，$\therefore 30°<C<180°$，$\therefore C=60°$或 $C=120°$.
当 $C=60°$时，$A=90°$，由勾股定理，得 $a=6$；
当 $C=120°$时，$A=30°=B$，$a=b=3$.

跟踪训练1 解 由正弦定理，得
$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$.
因为 $2R(\sin^2A-\sin^2C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$，
所以 $(2R)^2(\sin^2A-\sin^2C)=2R(\sqrt{2}a-b)\sin B$，
所以 $a^2-c^2=(\sqrt{2}a-b)b$，
即 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.
因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，
所以 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
因为 $0°<C<180°$，所以 $C=45°$.

例2 (1)A [由正弦定理得，$a\cos B=b\cos A\Rightarrow\sin A\cos B=\sin B\cos A\Rightarrow\sin(A-B)=0$，由于 $-\pi<A-B<\pi$，故必有 $A-B=0$，$A=B$，即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.]
(2)**解** 根据正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，
$\because\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$，
$\therefore a^2=b^2+c^2$，$\therefore A$ 是直角.
$\because A=180°-(B+C)$，$\sin A=2\sin B\cos C$，
$\therefore\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\cos C$，
$\therefore\sin(B-C)=0$.
又 $-90°<B-C<90°$，$\therefore B-C=0$，$\therefore B=C$，
$\therefore\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

跟踪训练2 (1)D [由 $3b=2\sqrt{3}a\sin B$，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$，根据正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$，即 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
又角 A 是锐角，所以 $A=60°$. 又 $\cos B=\cos C$，且 B,C 都为三角形的内角，所以 $B=C$. 故 $\triangle ABC$ 为等边三角形，故选D.]
(2)C [在 $\triangle ABC$ 中，由 $a\cos C+c\cos A=b\sin B$，以及正弦定理可知，$\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin^2B$，即 $\sin(A+C)=\sin B=\sin^2B$，$\because 0<B<\pi$，$\sin B\neq 0$，$\therefore\sin B=1$，$B=\frac{\pi}{2}$，所以三角形为直角三角形，故选C.]

例3 解 (1) $\because b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$，
$\therefore$由正弦定理，得 $\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos B$.
在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A\neq 0$，
即得 $\tan B=\sqrt{3}$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.
(2) $\because\sin C=2\sin A$，$\therefore$由正弦定理，得 $c=2a$，
由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，
即 $9=a^2+4a^2-2a\cdot 2a\cos\frac{\pi}{3}$，
解得 $a=\sqrt{3}$，$\therefore c=2a=2\sqrt{3}$.

跟踪训练3 解 (1)由正弦定理，得 $a^2+c^2-\sqrt{2}ac=b^2$.
由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.
故 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0°<B<180°$，因此 $B=45°$.
(2) $\sin A=\sin(30°+45°)$
$=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
故由正弦定理，得 $a=b\cdot\frac{\sin A}{\sin B}=1+\sqrt{3}$.
由已知得，$C=180°-45°-75°=60°$，
故 $c=b\cdot\frac{\sin C}{\sin B}=2\times\frac{\sin 60°}{\sin 45°}=\sqrt{6}$.

随堂演练

1. A　[在$\triangle ABC$中，设内角A，B，C所对的边分别为a，b，c. 则由$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得$13=9+b^2-2\times3b\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，即$b^2+3b-4=0$，解得$b=1$(负值舍去)，即$AC=1$，故选A.]

2. A　[设直角三角形的三边长分别为a，b，c，且$a^2+b^2=c^2$，三边都增加x，则$(a+x)^2+(b+x)^2-(c+x)^2=a^2+b^2+2x^2+2(a+b)x-c^2-2cx-x^2=2(a+b-c)x+x^2>0$，所以新三角形中最大边所对的角是锐角，所以新三角形是锐角三角形.]

3. 1

解析　$\because\sin B=2\sin A$，$\therefore b=2a$，

又$a+c=3$，$\therefore c=3-a$，

$\therefore\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+4a^2-(3-a)^2}{2\cdot a\cdot 2a}=\frac{1}{4}$，

整理，得$a^2+2a-3=0$，解得$a=1$($a=-3$舍去).

4. 等腰或直角

解析　由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$.

又$a\cos A=b\cos B$，所以$\frac{a}{b}=\frac{\cos B}{\cos A}$，

所以$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos B}{\cos A}$，所以$\sin A\cdot\cos A=\sin B\cdot\cos B$，

所以$2\sin A\cdot\cos A=2\sin B\cdot\cos B$，即$\sin 2A=\sin 2B$，

因为A，B为三角形的内角，

所以$2A=2B$或$2A+2B=\pi$，得$A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$，

所以$\triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形.

第4课时　余弦定理、正弦定理应用举例

例1　**解**　在$\triangle BCD$中，$\angle BDC=60^\circ+30^\circ=90^\circ$，$\angle BCD=45^\circ$，

$\therefore\angle CBD=90^\circ-45^\circ=\angle BCD$，

$\therefore BD=CD=40$，$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=40\sqrt{2}$.

在$\triangle ACD$中，$\angle ADC=30^\circ$，$\angle ACD=60^\circ+45^\circ=105^\circ$，

$\therefore\angle CAD=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=45^\circ$.

由正弦定理，得$AC=\frac{CD\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=20\sqrt{2}$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\times\cos\angle BCA=(20\sqrt{2})^2+(40\sqrt{2})^2-2\times20\sqrt{2}\times40\sqrt{2}\cos 60^\circ=2\ 400$，

$\therefore AB=20\sqrt{6}$，

故A，B两点之间的距离为$20\sqrt{6}$ m.

跟踪训练1　(1)$\sqrt{39}$

解析　由余弦定理，得

$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cdot\cos C$

$=7^2+5^2-2\times7\times5\times\frac{1}{2}$

$=39$.

$\therefore AB=\sqrt{39}$.

(2)60

解析　$\tan 30^\circ=\frac{CD}{AD}$，$\tan 75^\circ=\frac{CD}{DB}$，

又$AD+DB=120$，

$\therefore AD\cdot\tan 30^\circ=(120-AD)\cdot\tan 75^\circ$，

$\therefore AD=60\sqrt{3}$，故$CD=60$. 即河的宽度是60 m.

例2　D　[在$\triangle BCD$中，$CD=10$ m，$\angle BDC=45^\circ$，$\angle BCD=15^\circ+90^\circ=105^\circ$，$\angle DBC=30^\circ$，

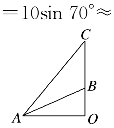
由正弦定理，得$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$，

故$BC=\frac{10\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=10\sqrt{2}$(m).

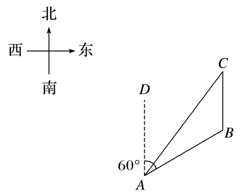
在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\tan 60^\circ=\frac{AB}{BC}$，

故$AB=BC\times\tan 60^\circ=10\sqrt{6}$(m).]

跟踪训练2　C　[根据题意画出如图的模型，则$CB=10$，$\angle OAB=70^\circ$，$\angle OAC=80^\circ$，所以$\angle CAB=10^\circ$，$\angle ACB=10^\circ$，所以$AB=10$，所以在$\mathrm{Rt}\triangle AOB$中，$BO=10\sin 70^\circ\approx9.4$(米).]



例3　**解**　如图所示. 设经过t小时两船在C点相遇，



则在$\triangle ABC$中，$BC=at$(海里)，$AC=\sqrt{3}at$(海里)，

$B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，

由$\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin B}$，得

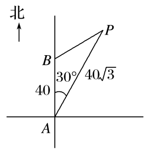
$\sin\angle CAB=\frac{BC\sin B}{AC}=\frac{at\times\sin 120^\circ}{\sqrt{3}at}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，

$\because0^\circ<\angle CAB<60^\circ$，$\therefore\angle CAB=30^\circ$，

$\therefore\angle DAC=60^\circ-30^\circ=30^\circ$，

$\therefore$甲船应沿着北偏东30°的方向前进，才能最快与乙船相遇.

跟踪训练3　**解**　如图，在$\triangle PAB$中，$\angle PAB=30^\circ$，$PA=40\sqrt{3}$(m)，$AB=40$(m).



由余弦定理，得

$PB=\sqrt{AB^2+PA^2-2\cdot AB\cdot PA\cdot\cos\angle PAB}$

$=\sqrt{40^2+(40\sqrt{3})^2-2\times40\times40\sqrt{3}\times\cos 30^\circ}=40$(m).

因为$AB=40$ m，所以$AB=PB$，所以$\angle APB=\angle PAB=30^\circ$，所以$\angle PBA=120^\circ$. 因此测绘人员到达点$B$时，目标参照物$P$在他的北偏东$60^\circ$方向上，且目标参照物$P$与他的距离为40 m.

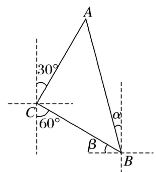
随堂演练

1. B　[如图所示，$\angle ACB=90^\circ$. 又因为$AC=BC$，

所以$\angle CBA=45^\circ$.

因为$\beta=30^\circ$，所以$\alpha=90^\circ-45^\circ-30^\circ=15^\circ$.

所以点A在点B的北偏西15°方向上.]



2. A　[$\angle ABC=180^\circ-45^\circ-105^\circ=30^\circ$，在$\triangle ABC$中，由$\frac{AB}{\sin 45^\circ}=\frac{50}{\sin 30^\circ}$，得$AB=100\times\frac{\sqrt{2}}{2}=50\sqrt{2}$(m).]

3. B　[由题图，可得$B=45^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，故$BC=\frac{AC\cdot\sin\angle BAC}{\sin B}=\frac{60\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=30\sqrt{2}$(m).]

4. C　[在$\triangle ABC$中，由正弦定理，得$\frac{AB}{\sin 30^\circ}=\frac{AC}{\sin 135^\circ}$，

$\therefore AC=100\sqrt{2}$(m).

在$\triangle ADC$中，$\frac{AC}{\sin(\theta+90^\circ)}=\frac{CD}{\sin 15^\circ}$，

$\therefore\cos\theta=\sin(\theta+90^\circ)=\frac{AC\cdot\sin 15^\circ}{CD}=\sqrt{3}-1$.]

第5课时　余弦定理、正弦定理的应用

问题　边b上的高h为$a\sin C$，故面积为$S=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}ab\sin C$.

知识梳理

1. $\frac{1}{2}ab\sin C$　$\frac{1}{2}bc\sin A$　$\frac{1}{2}ca\sin B$

2. (1)180°　$\sin C$　$-\cos C$

例1　(1)$\frac{15\sqrt{3}}{4}$

解析　由余弦定理，得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即 $c^2+5c-24=0$，解得 $c=3$ 或 $c=-8$(舍去).

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times5\times3\sin120°=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

(2)$\frac{1}{4}$

解析 由 $\sin B=2\sin A$，得 $b=2a$，由△ABC 的面积为 $a^2\sin B$，得 $\frac{1}{2}ac\sin B=a^2\sin B$，由 $\sin B\neq0$，知 $c=2a$，

$\therefore\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2}{4a^2}=\frac{1}{4}$.

跟踪训练1 **解** (1)由正弦定理，得 $\sin C\cos A+\frac{1}{2}\sin A=\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

即 $\frac{1}{2}\sin A=\sin A\cos C$，

$\because\sin A\neq0$，$\therefore\cos C=\frac{1}{2}$，又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

即 $7=a^2+b^2-ab$，

$\therefore7=(a+b)^2-3ab=25-3ab$，故 $ab=6$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

故△ABC 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

例2 **解** (1)因为 $\cos\angle ADB=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，

所以 $\sin\angle ADB=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

又因为 $\angle CAD=\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle C=\angle ADB-\frac{\pi}{4}$.

所以 $\sin C=\sin\left(\angle ADB-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\angle ADB\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\angle ADB\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{5}$.

(2)在△ACD 中，由 $\frac{AD}{\sin C}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，

得 $AD=\frac{AC\cdot\sin C}{\sin\angle ADC}=\frac{\frac{7}{2}\times\frac{4}{5}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}=2\sqrt{2}$.

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADB=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times5\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=7$.

跟踪训练2 **解** (1)$\because\angle D=\frac{2\pi}{3}$，$CD=\sqrt{6}$，△ACD 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin D=\frac{1}{2}\times AD\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore AD=\sqrt{6}$，

$\therefore$由余弦定理，得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D=6+6-2\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=18$，

$\therefore AC=3\sqrt{2}$.

(2)由(1)知，在△ACD 中 $AD=\sqrt{6}$，$CD=\sqrt{6}$，$\angle D=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore\angle DAC=\frac{\pi}{6}$，

$\because AB\perp AD$，$\therefore\angle BAC=\frac{\pi}{3}$.

又$\because\angle B=\frac{\pi}{4}$，$AC=3\sqrt{2}$，

$\therefore$在△ABC 中，由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin B}$，

即 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$\therefore BC=3\sqrt{3}$.

例3 **解** (1)在△ABC 中，$\cos A=-\frac{1}{4}$，$\because A\in(0,\pi)$，

$\therefore\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

由△ABC 的面积为 $\sqrt{15}$，可得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{15}$，

可得 $bc=8$.

又 $b-c=2$，解得 $b=4$，$c=2$ 或 $b=-2$，$c=-4$(舍去)，

$\therefore b=4$，$c=2$，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=16+4-2\times8\times\left(-\frac{1}{4}\right)=24$，

$\therefore a=2\sqrt{6}$，

又 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

解得 $\sin C=\frac{\sqrt{10}}{8}$，

$\therefore a=2\sqrt{6}$，$\sin C=\frac{\sqrt{10}}{8}$.

(2)由(1)知，$\sin C=\frac{\sqrt{10}}{8}$，$b>c$，$\therefore C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore\cos C=\sqrt{1-\sin^2C}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$，

$\cos2C=2\cos^2C-1=\frac{11}{16}$，

$\sin2C=2\sin C\cos C=\frac{3\sqrt{15}}{16}$，

$\cos\left(2C+\frac{\pi}{3}\right)=\cos2C\cos\frac{\pi}{3}-\sin2C\sin\frac{\pi}{3}=\frac{11}{16}\times\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{15}}{16}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11-9\sqrt{5}}{32}$.

跟踪训练3 **解** (1)因为 $a=3c$，$b=\sqrt{2}$，$\cos B=\frac{2}{3}$，

由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

得 $\frac{2}{3}=\frac{(3c)^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2\times3c\times c}$，即 $c^2=\frac{1}{3}$.

所以 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)因为 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\frac{\cos B}{2b}=\frac{\sin B}{b}$，

所以 $\cos B=2\sin B$.

从而 $\cos^2B=(2\sin B)^2$，即 $\cos^2B=4(1-\cos^2B)$，

故 $\cos^2B=\frac{4}{5}$.

因为 $\sin B>0$，所以 $\cos B=2\sin B>0$，

从而 $\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此 $\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

随堂演练

1.B [由题意可知，$a=\sqrt{3}$，$b=4$，$C=\frac{\pi}{6}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times4\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$.]

2.C [将 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 与 $(a+b)^2-c^2=4$ 联立，

解得 $ab=4$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$.]

3.D [由题意，得△ADC 为等边三角形，则 $\angle ADB=120°$，$AC=2$，由余弦定理，得 $AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB$，即 $AB=2\sqrt{7}$，由正弦定理，得 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，则 $\sin B=\frac{AD\cdot\sin\angle ADB}{AB}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.]

4.$\frac{\pi}{3}$　7

解析 由已知及正弦定理可得，

$2\cos A(\sin B\cos C+\sin C\cos B)=\sin A$，

可得 $2\cos A\sin(B+C)=\sin A$，

即 $2\cos A\sin A=\sin A$，又 $\sin A\neq0$，$\therefore\cos A=\frac{1}{2}$，

$\because A\in(0,\pi)$，

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

由面积公式可得，$3\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，

即 $bc=12$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

得 $13=(b+c)^2-3bc=(b+c)^2-36$，

解得 $b+c=7$.

章末复习课

例1　(1)A　[∵$\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，

∴$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(2,1)-(-3,4)=(4,2)-(-3,4)$

$=(4+3,2-4)=(7,-2)$.]

(2)D　[$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.]

跟踪训练1　B　[因为 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BD}$

$=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})+\mu(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$=\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)+\mu(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu\right)\overrightarrow{AD}$，

且 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以 $\begin{cases}\lambda-\mu=1,\\ \frac{1}{2}\lambda+\mu=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{4}{3},\\ \mu=\frac{1}{3},\end{cases}$

所以 $\lambda+\mu=\frac{5}{3}$，故选B.]

例2　(1)CD　[∵$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$，

即 $\cos(\alpha-\beta)=0$，

∵$\alpha,\beta\in(0,\pi)$，∴$\alpha-\beta=\pm\frac{\pi}{2}$，故A，B错误.

又 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=1-1=0$，

∴$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，故C正确.

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=2$，

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=2$，故D正确.]

(2)9

解析　因为 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=\frac{1}{4}(4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD})\times\frac{1}{12}(4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD})$

$=\frac{1}{48}(16\overrightarrow{AB}^2-9\overrightarrow{AD}^2)=\frac{1}{48}(16\times6^2-9\times4^2)=9$.

跟踪训练2　$\frac{7}{12}$

解析　由 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$，知 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

即 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=(\lambda-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2$

$=(\lambda-1)\times3\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\lambda\times9+4=0$，

解得 $\lambda=\frac{7}{12}$.

例3　**解**　(1)由题意及余弦定理，得 $2b^2=2bc\cos A\cdot(1-\tan A)$.

∴$b=c(\cos A-\sin A)$，

由正弦定理可得 $\sin B=\sin C(\cos A-\sin A)$，

∴$\sin(A+C)=\sin C\cos A-\sin C\sin A$，

∴$\sin A\cos C=-\sin C\sin A$，

又 $\sin A\neq0$，

∴$\tan C=-1$，又 $0<C<\pi$，

解得 $C=\frac{3\pi}{4}$.

(2)选择条件②，$\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

∵$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

由正弦定理可得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=2\sqrt{2}$.

在△ABD中，由余弦定理可得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$，

解得 $AD=\sqrt{26}$.

答案不唯一.

跟踪训练3　**解**　(1)∵$B=\frac{\pi}{4}$，$a=2\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，

∴由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

可得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{2}$.

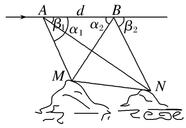
(2)∵$a=2\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，

∴由余弦定理知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geqslant2bc-bc=bc$，

∴$bc\leqslant a^2=12$，当且仅当 $b=c$ 时取"＝"，

∴△ABC面积的最大值为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

例4　**解**　①需要测量的数据有：A观测M，N的俯角 α_1，β_1，B观测M，N的俯角 α_2，β_2；A，B间的距离d(如图所示).



②**方法一**　第一步：计算AM. 在△ABM中，由正弦定理得，$AM=\frac{d\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$；

第二步：计算AN. 在△ABN中，由正弦定理得，

$AN=\frac{d\sin\beta_2}{\sin(\beta_2-\beta_1)}$；

第三步：计算MN. 在△AMN中，由余弦定理得，

$MN=\sqrt{AM^2+AN^2-2AM\times AN\cos(\alpha_1-\beta_1)}$.

方法二　第一步：计算BM. 在△ABM中，由正弦定理得，

$BM=\frac{d\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$；

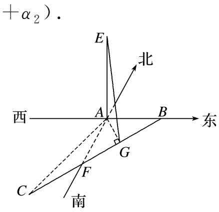
第二步：计算BN. 在△ABN中，由正弦定理得，

$BN=\frac{d\sin\beta_1}{\sin(\beta_2-\beta_1)}$；

第三步：计算MN. 在△BMN中，由余弦定理得，

$MN=\sqrt{BM^2+BN^2+2BM\times BN\cos(\beta_2+\alpha_2)}$.

跟踪训练4　**解**　如图所示，设AE为塔，B为塔正东方向一点，沿南偏西60°的方向前进40 m到达C处，



即 $BC=40$，$\angle CAB=135^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，$\angle ACB=15^\circ$.

在△ABC中，

$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle CAB}$，

即 $\frac{AC}{\sin30^\circ}=\frac{40}{\sin135^\circ}$，∴$AC=20\sqrt{2}$.

过点A作 $AG\perp BC$，垂足为G，此时仰角∠AGE最大，

在△ABC中，由面积公式知

$\frac{1}{2}\times BC\times AG=\frac{1}{2}\times BC\times AC\times\sin\angle ACB$.

∴$AG=\frac{AC\times CB\times\sin\angle ACB}{BC}$

$=AC\times\sin\angle ACB=20\sqrt{2}\sin15^\circ$，

∴$AG=20\sqrt{2}\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=20\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)$

$=10(\sqrt{3}-1)$.

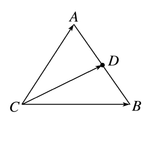
在Rt△AEG中，∵$AE=AG\tan\angle AGE$，

∴$AE=10(\sqrt{3}-1)\times\frac{\sqrt{3}}{3}=10-\frac{10\sqrt{3}}{3}=\frac{10(3-\sqrt{3})}{3}$，

∴塔高为 $\frac{10(3-\sqrt{3})}{3}$ m.

随堂演练

1. A　[如图所示，



∵D为△ABC的边AB的中点，

∴$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CD}$，

∴$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$.]

2. C [因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(1,t-3)$，所以 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1+(t-3)^2}=1$，解得 $t=3$，所以 $\overrightarrow{BC}=(1,0)$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times1+3\times0=2$，故选 C.]

3. $\sqrt{3}$

解析 将 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$ 两边平方，得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1$.

$\because \boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=1$，

$\therefore 1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=1$，即 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$.

$\therefore |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$

$=\sqrt{1-(-1)+1}=\sqrt{3}$.

4. $6\sqrt{3}$

解析 **方法一** 因为 $a=2c,b=6,B=\frac{\pi}{3}$，所以由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $6^2=(2c)^2+c^2-2\times2c\times c\cos\frac{\pi}{3}$，得 $c=2\sqrt{3}$，所以 $a=4\sqrt{3}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$.

方法二 因为 $a=2c,b=6,B=\frac{\pi}{3}$，所以由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $6^2=(2c)^2+c^2-2\times2c\times c\cos\frac{\pi}{3}$，得 $c=2\sqrt{3}$，所以 $a=4\sqrt{3}$，所以 $a^2=b^2+c^2$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times6=6\sqrt{3}$.

第七章 复 数

§7.1 复数的概念

7.1.1 数系的扩充和复数的概念

问题 为了解决 $x^2+1=0$ 这样的方程在实数系中无解的问题，我们设想引入一个新数 i，使得 $x=\mathrm{i}$ 是方程 $x^2+1=0$ 的解，即使 $\mathrm{i}^2=-1$.

知识梳理

1. $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 虚数单位 -1

2. 实部 虚部

3. (1)复数集 (2)$\mathbf{C}$

例 1 D [对于复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时，z 为纯虚数. 对于 A，若 $a=-1$，则 $(a+1)\mathrm{i}$ 不是纯虚数，即 A 错误；两个虚数不能比较大小，则 B 错误；对于 C，若 $x=-2$，则 $x^2-4=0,x^2+3x+2=0$，此时 $(x^2-4)+(x^2+3x+2)\mathrm{i}=0$ 不是纯虚数则 C 错误；显然，D 正确.]

跟踪训练 1 BC [对于 A，当 $b=0$ 时，$a+b\mathrm{i}=0$ 为实数，故 A 错误；

对于 B，若 $a+(b-1)\mathrm{i}=3-2\mathrm{i}$，则 $a=3,b=-1$，故 B 正确；

对于 C，若 $b=0$，则 $a+b\mathrm{i}=a$ 为实数，故 C 正确；

对于 D，i 的平方为 -1，故 D 错误.]

知识梳理

1. 实数 虚数 $a=0$

例 2 **解** (1)当 $\begin{cases}m+3\neq0,\\m^2-2m-15\neq0,\end{cases}$

即 $m\neq5$ 且 $m\neq-3$ 时，z 是虚数.

(2)当 $\begin{cases}\dfrac{m^2-m-6}{m+3}=0,\\m^2-2m-15\neq0,\end{cases}$

即 $m=3$ 或 $m=-2$ 时，z 是纯虚数.

(3)当 $\begin{cases}m+3\neq0,\\m^2-2m-15=0,\end{cases}$ 即 $m=5$ 时，z 是实数.

跟踪训练 2 B [根据复数的分类知，需满足

$\begin{cases}a^2-3a+2=0,\\a-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1\text{ 或 }a=2,\\a\neq1,\end{cases}$

即 $a=2$.]

知识梳理

$a=c$ 且 $b=d$ $a=b=0$

例 3 (1)**解** 由复数相等的充要条件，得

$\begin{cases}x+y=0,\\y=x+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

(2)**解** 设方程的实数根为 $x=m$，

则原方程可变为 $3m^2-\frac{a}{2}m-1=(10-m-2m^2)\mathrm{i}$，

所以 $\begin{cases}3m^2-\dfrac{a}{2}m-1=0,\\10-m-2m^2=0,\end{cases}$

解得 $a=11$ 或 $a=-\frac{71}{5}$.

跟踪训练 3 5

解析 因为 $m\in\mathbf{R},z_1=z_2$，

所以 $(2m+7)+(m^2-2)\mathrm{i}=(m^2-8)+(4m+3)\mathrm{i}$.

由复数相等的充要条件得 $\begin{cases}2m+7=m^2-8,\\m^2-2=4m+3,\end{cases}$

解得 $m=5$.

随堂演练

1. C [$\frac{2}{7}\mathrm{i},(1-\sqrt{3})\mathrm{i}$ 是纯虚数，$2+\sqrt{7}$，0.618 是实数，$8+5\mathrm{i}$ 是虚数. 故纯虚数的个数为 2.]

2. C

3. C [因为复数 $z=m^2-1+(m^2-m-2)\mathrm{i}$ 为纯虚数，

所以 $m^2-m-2\neq0$，且 $m^2-1=0$，

解得 $m=1$.]

4. 1，1

解析 $\because x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=2\mathrm{i}$，

$\therefore \begin{cases}x^2-y^2=0,\\2xy=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1\text{(舍)}.\end{cases}$

7.1.2 复数的几何意义

问题 1 复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 实质上是实数的有序数对 (a,b)，复数可以和坐标平面上的点一一对应.

例 1 **解** 复数 $z=(m^2-2m-8)+(m^2+3m-10)\mathrm{i}$ 的实部为 m^2-2m-8，虚部为 $m^2+3m-10$.

(1)由题意得 $m^2-2m-8=0$.

解得 $m=-2$ 或 $m=4$.

(2)由题意，得 $\begin{cases}m^2-2m-8<0,\\m^2+3m-10>0,\end{cases}$ $\therefore 2<m<4$.

(3)由已知得 $m^2-2m-8=m^2+3m-10$，故 $m=\frac{2}{5}$.

跟踪训练 1 **解** (1)$\because$ 点 Z 在 x 轴上方，

$\therefore m^2-3m+2>0$，解得 $m<1$ 或 $m>2$.

(2)若复数 z 对应的点在实轴负半轴上，

则 $\begin{cases}m^2-m-2<0,\\m^2-3m+2=0,\end{cases}$ 解得 $m=1$.

问题 2 在平面直角坐标系中，每一个平面向量都可以用一个有序实数对来表示，而有序实数对与复数是一一对应的，这样就可以用平面向量来表示复数.

例 2 **解** 记 O 为复平面的原点，

由题意得 $\overrightarrow{OA}=(2,3),\overrightarrow{OB}=(3,2),\overrightarrow{OC}=(-2,-3)$.

设 $\overrightarrow{OD}=(x,y)$，则 $\overrightarrow{AD}=(x-2,y-3),\overrightarrow{BC}=(-5,-5)$.

由题意知，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

所以 $\begin{cases}x-2=-5,\\y-3=-5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2,\end{cases}$

故点 D 对应的复数为 $-3-2\mathrm{i}$.

跟踪训练 2 (1)C [由复数的几何意义，可得

$\overrightarrow{OZ_1}=(5,-4),\overrightarrow{OZ_2}=(-5,4)$，

所以 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=(5,-4)+(-5,4)=(0,0)$，

所以 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数为 0.]

(2)B [向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 对应的复数分别记作 $z_1=2-3\mathrm{i},z_2=-3+2\mathrm{i}$，根据复数与复平面内的点一一对应，可得向量 $\overrightarrow{OA}=(2,-3)$，$\overrightarrow{OB}=(-3,2)$.

由向量减法的坐标运算可得向量 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(5,-5)$，

根据复数与复平面内的点一一对应，可得向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数是 $5-5\mathrm{i}$.]

知识梳理

2. $|z|$ 或 $|a+b\mathrm{i}|$

3. $\sqrt{a^2+b^2}$

例 3 (1)**解** 设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，

代入方程得 $a+b\mathrm{i}+\sqrt{a^2+b^2}=2+8\mathrm{i}$，

$\therefore \begin{cases} a+\sqrt{a^2+b^2}=2, \\ b=8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-15, \\ b=8. \end{cases}$

$\therefore z=-15+8i$.

(2)解　设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,则 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

①由题意知 $\sqrt{x^2+y^2}<3$,$x^2+y^2<9$.
所以复数 z 对应的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心,3 为半径的圆面,不包括边界.

② $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=2$,$x^2+y^2=4$.
所以满足 $|z|=2$ 的点 Z 的集合为以原点 O 为圆心,2 为半径的圆.

跟踪训练 3　A　[$0<a<3$,复数 $z=a+i$(i 是虚数单位),则 $|z|=\sqrt{a^2+1}\in(1,\sqrt{10})$.]

知识梳理

1. 相等　互为相反数　共轭虚数
2. $a-bi$

例 4　A　[$z=3-4i$ 的共轭复数为 $\bar{z}=3+4i$,可知其对应的点在第一象限.]

跟踪训练 4　AD　[由共轭复数的相关知识可知,AD 正确.]

随堂演练

1. C　[$z=-1-2i$ 对应的点 $Z(-1,-2)$位于第三象限.]
2. B　[$\because z=m-1+(m+2)i$ 在复平面内对应的点在第二象限,
$\therefore m-1<0$,$m+2>0$,解得 $-2<m<1$,
则实数 m 的取值范围是$(-2,1)$.]
3. $3-4i$　5
4. $2+4i$

解析　因为复数 $6+5i$,$-2+3i$ 对应的点分别为 A,B,
所以 $A(6,5)$,$B(-2,3)$,
又 C 为线段 AB 的中点,
所以 $C(2,4)$,所以点 C 对应的复数是 $2+4i$.

§7.2　复数的四则运算

7.2.1　复数的加、减运算及其几何意义

知识梳理

1. (1)$(a+c)+(b+d)$　(2)$(a-c)+(b-d)$
2. (1)z_2+z_1　(2)$z_1+(z_2+z_3)$

例 1　解　$\because z_1=\dfrac{m^2+m}{m+2}+(m-15)i$,$z_2=-2+m(m-3)i$,

$\therefore z_1+z_2=\left(\dfrac{m^2+m}{m+2}-2\right)+[(m-15)+m(m-3)]i$

$=\dfrac{m^2-m-4}{m+2}+(m^2-2m-15)i$.

$\because z_1+z_2$ 是虚数,$\therefore m^2-2m-15\neq0$,且 $m+2\neq0$.

$\therefore m\neq5$,且 $m\neq-3$,且 $m\neq-2$,$m\in\mathbf{R}$.

即 m 的取值范围为$(-\infty,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,5)\cup(5,+\infty)$.

跟踪训练 1　A　[复数$(1+2i)+(3-4i)-(-5-3i)=(1+3+5)+(2-4+3)i=9+i$,其对应的点为$(9,1)$,在第一象限.]

问题　设 $\overrightarrow{OZ_1}=(a,b)$,$\overrightarrow{OZ_2}=(c,d)$,则 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$.
几何意义是以 $\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边作平行四边形 OZ_1ZZ_2 的对角线.

知识梳理

z_1+z_2　z_1-z_2

例 2　解　(1)因为 $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$,
所以 $\overrightarrow{AO}$ 对应的复数为 $-3-2i$.
(2)因为 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$,
所以 $\overrightarrow{CA}$ 对应的复数为$(3+2i)-(-2+4i)=5-2i$.
(3)因为 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$,
所以 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为$(3+2i)+(-2+4i)=1+6i$.
所以 $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$.

跟踪训练 2　(1)$\sqrt{10}$

解析　$\because \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$,
$\therefore \overrightarrow{OB}$ 对应的复数为$(-2+i)+(3+2i)=1+3i$,
$\therefore |\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

(2)$(-\infty,2)$

解析　$z_2-z_1=1+(a-2)i$,由题意知 $a-2<0$,即 $a<2$.

例 3　A　[设复数 z,$-i$,i,$-1-i$ 在复平面内对应的点分别为 Z,Z_1,Z_2,Z_3,
因为 $|z+i|+|z-i|=2$,
$|Z_1Z_2|=2$,所以点 Z 的集合为线段 Z_1Z_2.
所以点 Z 在线段 Z_1Z_2 上移动,$|ZZ_3|_{\min}=1$,
所以 $|z+i+1|_{\min}=1$.]

跟踪训练 3　A　[由复数模及复数减法运算的几何意义,结合条件可知复数 z 对应的点 P 到△ABC 的顶点 A,B,C 的距离相等,$\therefore P$ 为△ABC 的外心.]

随堂演练

1. A　[原式$=1-i-2-i+3i=-1+i$.]
2. C　[$z=z_2-z_1=(1-2i)-(2+i)=-1-3i$.
故 z 对应的点为$(-1,-3)$,位于第三象限.]
3. -1

解析　$\because z_1-z_2=(a^2-a-2)+(a-4+a^2-2)i(a\in\mathbf{R})$为纯虚数,$\therefore \begin{cases} a^2-a-2=0, \\ a^2+a-6\neq0, \end{cases}$ 解得 $a=-1$.

4. $5-2i$

解析　由题意知,$\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $3+2i$,$\overrightarrow{AD}$ 对应的复数为 $2-4i$,
又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,
所以 $\overrightarrow{AC}$ 对应的复数为$(3+2i)+(2-4i)=5-2i$,
所以点 C 对应的复数是 $5-2i$.

7.2.2　复数的乘、除运算

问题 1　复数的乘法法则如下:
设 $z_1=a+bi$,$z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$是任意两个复数,那么它们的积$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

问题 2　猜想:
对于任意 $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}$,有:
交换律:$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$;
结合律:$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$;
分配律:$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.
证明:
设 $z_1=a_1+b_1i$,$z_2=a_2+b_2i$,$z_3=a_3+b_3i$.
(1)$\because z_1z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)$
$=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i$,
$z_2z_1=(a_2+b_2i)(a_1+b_1i)$
$=(a_2a_1-b_2b_1)+(b_2a_1+a_2b_1)i$,
又 $a_1a_2-b_1b_2=a_2a_1-b_2b_1$,
$b_1a_2+a_1b_2=b_2a_1+a_2b_1$,
$\therefore z_1z_2=z_2z_1$.
(2)$\because (z_1z_2)z_3=[(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)](a_3+b_3i)$
$=[(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i](a_3+b_3i)$
$=[(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(b_1a_2+a_1b_2)b_3]+[(b_1a_2+a_1b_2)a_3+(a_1a_2-b_1b_2)b_3]i$
$=(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-b_1a_2b_3-a_1b_2b_3)+(b_1a_2a_3+a_1b_2a_3+a_1a_2b_3-b_1b_2b_3)i$,
同理可证:$z_1(z_2z_3)=(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-b_1a_2b_3-a_1b_2b_3)+(b_1a_2a_3+a_1b_2a_3+a_1a_2b_3-b_1b_2b_3)i$,
$\therefore (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$.
(3)$\because z_1(z_2+z_3)=(a_1+b_1i)[(a_2+b_2i)+(a_3+b_3i)]$
$=(a_1+b_1i)[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i]$
$=[a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)]+[b_1(a_2+a_3)+a_1(b_2+b_3)]i$
$=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)i$,
$z_1z_2+z_1z_3=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i)$
$=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i+(a_1a_3-b_1b_3)+(b_1a_3+a_1b_3)i$
$=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+(b_1a_2+a_1b_2+b_1a_3+a_1b_3)i$
$=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)i$,
$\therefore z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

知识梳理

1. $(ac-bd)+(ad+bc)$
2. z_2z_1　$z_1(z_2z_3)$　$z_1z_2+z_1z_3$

例 1　解　(1)$(1-i)(1+i)+(2+i)^2$
$=1-i^2+4+4i+i^2$
$=5+4i$.
(2)$(2-i)(-1+5i)(3-4i)+2i$
$=(-2+10i+i-5i^2)(3-4i)+2i$
$=(3+11i)(3-4i)+2i$
$=(9-12i+33i-44i^2)+2i$
$=53+21i+2i=53+23i$.

跟踪训练1 (1)D [$(1-i)^2-(2-3i)(2+3i)=1-2i+i^2-(4-9i^2)=-13-2i$.]

(2)B [因为 $z=(1-i)(a+i)=a+1+(1-a)i$,

所以它在复平面内对应的点为 $(a+1,1-a)$,

又此点在第二象限,所以 $\begin{cases}a+1<0,\\1-a>0,\end{cases}$ 解得 $a<-1$.]

问题3 复数除法的法则:

$(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i(a,b,c,d\in\mathbf{R}$,且 $c+di\neq0)$.

求解过程:

①设复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 除以 $c+di(c,d\in\mathbf{R})$,其商为 $x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,即 $(a+bi)\div(c+di)=x+yi$.

$\because(x+yi)(c+di)=(cx-dy)+(dx+cy)i$,

$\therefore(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi$.

由复数相等,可知 $\begin{cases}cx-dy=a,\\dx+cy=b,\end{cases}$

解这个方程组,得 $\begin{cases}x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\\y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.\end{cases}$

于是有 $(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

实际过程中一般采用下面过程:

②利用 $(c+di)(c-di)=c^2+d^2$.于是将 $\frac{a+bi}{c+di}$ 的分母实数化得:

原式 $=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$=\frac{[ac+bi\cdot(-di)]+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

$\therefore(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

例2 (1)A [$\because z(2-i)=11+7i$,

$\therefore z=\frac{11+7i}{2-i}=\frac{(11+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{15+25i}{5}=3+5i$.]

(2) $-2+i$

解析 **方法一** $\frac{(1+i)(4+3i)}{(2-i)(1-i)}=\frac{1+7i}{1-3i}=\frac{(1+7i)(1+3i)}{10}$

$=-2+i$.

方法二 $\frac{(1+i)(4+3i)}{(2-i)(1-i)}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\left(\frac{4+3i}{2-i}\right)$

$=\frac{i(4+3i)(2+i)}{5}=\frac{(-3+4i)(2+i)}{5}$

$=\frac{-10+5i}{5}=-2+i$.

跟踪训练2 A [由 $\frac{1+z}{1-z}=i$ 得 $1+z=i(1-z)$,

即 $z=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-(1-i)^2}{2}=i,|z|=1$.]

例3 **解** **方法一** 因为 $x^2+6x+10=x^2+6x+9+1=(x+3)^2+1=0$,

所以 $(x+3)^2=-1$,

又因为 $i^2=-1$,所以 $(x+3)^2=i^2$,

所以 $x+3=\pm i$,即 $x=-3\pm i$.

方法二 因为 $\Delta=6^2-4\times10\times1=-4<0$,

所以方程的根为 $x=\frac{-6\pm\sqrt4 i}{2}=-3\pm i$.

跟踪训练3 **解** (1)$\because 1+i$ 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的根,

且 b,c 为实数,

$\therefore(1+i)^2+b(1+i)+c=0$,即 $b+c+(b+2)i=0$,

$\therefore\begin{cases}b+c=0,\\2+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\c=2.\end{cases}$

(2)由(1)知方程为 $x^2-2x+2=0$,

把 $1-i$ 代入方程左边得 $(1-i)^2-2(1-i)+2=0=$ 右边,

即方程成立.

$\therefore 1-i$ 是方程的根.

随堂演练

1. D [$\because(a+i)i=ai-1=b+i$,$\therefore a=1,b=-1$.]

2. B [$\frac{i}{1+i}+(1+\sqrt3 i)^2=\frac12 i+\frac12+1-3+2\sqrt3 i$

$=-\frac32+\left(\frac12+2\sqrt3\right)i$,

故复数对应的点在第二象限.]

3. $\pm\sqrt3 i$

4. (1) $-2+4i$ (2) 0

解析 (1)原式 $=\left[\left(\frac{1-i}{\sqrt2}\right)^2\right]^8+(-3+4i)$

$=\left(\frac{-2i}{2}\right)^8-3+4i=(-i)^8-3+4i=-2+4i$.

(2)$\because\frac1i=-i,\frac1{i^3}=i,\frac1{i^5}=-i,\frac1{i^7}=i$,

$\therefore$ 原式 $=-i+i-i+i=0$.

章末复习课

例1 **解** (1)由 $\begin{cases}\lg(m^2-2m-2)=0,\\m^2+3m+2\neq0,\end{cases}$ 得 $m=3$.

$\therefore$ 当 $m=3$ 时,z 是纯虚数.

(2)由 $\begin{cases}m^2-2m-2>0,\\m^2+3m+2=0,\end{cases}$ 得 $m=-1$ 或 $m=-2$.

$\therefore$ 当 $m=-1$ 或 $m=-2$ 时,z 是实数.

(3)由 $\begin{cases}\lg(m^2-2m-2)<0,\\m^2+3m+2>0,\end{cases}$

得 $-1<m<1-\sqrt3$ 或 $1+\sqrt3<m<3$.

$\therefore$ 当 $-1<m<1-\sqrt3$ 或 $1+\sqrt3<m<3$ 时,复数 z 在复平面内对应的点位于第二象限.

跟踪训练1 (1)A [因为 $z=1+i$,所以 $\bar z=1-i$,

所以 $z^2+\bar z^2=(1+i)^2+(1-i)^2=2i+(-2i)=0$.]

(2)B [由题意可得 $z_1=z_2$,

即 $m^2-3m+m^2i=4+(5m+6)i$,

根据两个复数相等的充要条件可得 $\begin{cases}m^2-3m=4,\\m^2=5m+6,\end{cases}$

解得 $m=-1$.]

例2 (1)D [因为 $z_1=\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i,z_2=-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$,

所以 $z=\frac{\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}{-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}=\frac{1+\sqrt3 i}{-1+\sqrt3 i}=\frac{(1+\sqrt3 i)(-1-\sqrt3 i)}{(-1+\sqrt3 i)(-1-\sqrt3 i)}$

$=\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i$,

所以复数 z 在复平面内对应的点为 $\left(\frac12,-\frac{\sqrt3}{2}\right)$,

在第四象限.故选 D.]

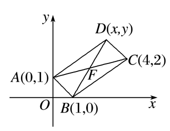
(2) -3 -10

解析 $\because\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,

$\therefore 1-4i=2(2+3i)+(a+bi)$,

即 $\begin{cases}1=4+a,\\-4=6+b,\end{cases}\therefore\begin{cases}a=-3,\\b=-10.\end{cases}$

跟踪训练2 **解** 如图,设 $D(x,y)$,F 为▱$ABCD$ 的对角线的交点,则点 F 的坐标为 $\left(2,\frac32\right)$,



所以 $\begin{cases}x+1=4,\\y+0=3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=3,\\y=3.\end{cases}$

所以点 D 对应的复数为 $z=3+3i$,

因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}$,

所以 $\overrightarrow{BD}$ 表示的复数为 $3+3i-1=2+3i$,

所以 $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{13}$.

例3 **解** (1)$\frac{2+2i}{(1-i)^2}+\left(\frac{\sqrt2}{1+i}\right)^{2\,020}=\frac{2+2i}{-2i}+\left(\frac{2}{2i}\right)^{1\,010}$

$=i(1+i)+\left(\frac1i\right)^{1\,010}=-1+i+(-i)^{1\,010}$

$=-1+i-1=-2+i$.

(2)原式$=(4-i)(6-2i)+(7-i)(4-3i)$
$=22-14i+25-25i=47-39i$.

跟踪训练 3　(1)C　[设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,
由 $z(\bar{z}+1)=1+i$,得 $a^2+b^2+a+bi=1+i$,
所以 $b=1,a^2+a+1=1$,所以 $a=0$ 或 $a=-1$.
故 $z=i$ 或 $z=-1+i$.]

(2)B　[因为$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$,
所以 $z^{100}+z^{50}+1=\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}+\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}+1$
$=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{100}(1-i)^{100}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{50}(1-i)^{50}+1$
$=\frac{1}{2^{50}}(-2i)^{50}+\frac{1}{2^{25}}(-2i)^{25}+1$
$=i^{50}-i^{25}+1=i^2-i+1=-i$.]

随堂演练

1. D　[$\frac{2-i}{1+2i}=\frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{-5i}{5}=-i$.]
2. C　[A 项,$i(1+i)^2=i(1+2i+i^2)=i\times 2i=-2$,不是纯虚数;
B 项,$i^2(1-i)=-(1-i)=-1+i$,不是纯虚数;
C 项,$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$,是纯虚数;
D 项,$i(1+i)=i+i^2=-1+i$,不是纯虚数.]
3. C　[$\because z$ 在复平面内对应的点为(x,y),
$\therefore z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.
$\because |z-i|=1,\therefore |x+(y-1)i|=1,\therefore x^2+(y-1)^2=1$.]
4. D　[**方法一**　$z^2-2z=(1+i)^2-2(1+i)=-2$,
$|z^2-2z|=|-2|=2$.
方法二　$|z^2-2z|=|(1+i)^2-2(1+i)|$
$=|(1+i)(-1+i)|=|1+i|\cdot|-1+i|=2$.]

第八章　立体几何初步

§8.1　基本立体图形

第 1 课时　棱柱、棱锥、棱台

问题 1　长方体,正方体,棱锥,多面体,球,圆柱,圆锥,圆台;前四个几何体都是由平面围成的,后四个不全是平面围成的,有些面是曲面.

知识梳理

1. 形状　大小
2. 平面多边形　一条定直线　旋转面　多边形　公共边

知识梳理

1. 平行　四边形　平行　平行　公共边　公共顶点
2. (1)侧棱垂直于底面　(2)侧棱不垂直于底面　(3)直棱柱　(4)平行四边形

例 1　(1)CD　[A 错误,棱柱的底面不一定是平行四边形;
B 错误,棱柱的底面可以是三角形;
C 正确,由棱柱的定义易知;
D 正确,棱柱可以被平行于底面的平面截成两个棱柱.]

(2)**解**　①是棱柱,并且是四棱柱,因为以长方体相对的两个面作底面,是互相平行的,其余各面都是矩形,且四条侧棱互相平行,符合棱柱的定义.
②截面 $BCNM$ 右上方部分是三棱柱 BB_1M-CC_1N,左下方部分是四棱柱 $ABMA_1-DCND_1$.

跟踪训练 1　D

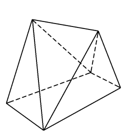
问题 2　通过观察图形我们可以发现,共同特点是均由平面图形围成,其中一个面为多边形,其他各面都是三角形,这些三角形有一个公共顶点.

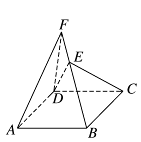
知识梳理

多边形　三角形　多边形　三角形　公共边　公共顶点　正多边形　垂直于

例 2　AB　[由棱锥的定义,知棱锥的各个侧面都是三角形,故 A 正确;四面体就是由四个三角形所围成的几何体,因此四面体的任何一个面都可以作为三棱锥的底面,故 B 正确;棱锥的侧棱交于一点,不平行,故 C 错.棱锥的侧面是有一个公共顶点的三角形,故 D 错.]

跟踪训练 2　**解**　不一定.如图所示的几何体均满足条件,但都不是棱锥.



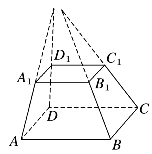


问题 3　上部分是棱锥,下部分是棱台.

知识梳理

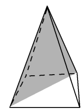
平行于棱锥底面　截面　底面

例 3　ABC　[A 中的平面不一定平行于底面,故 A 错;由棱台的定义知,D 正确;B,C 可用反例去检验,如图所示,侧棱延长线不能相交于一点,故 B,C 错.]



跟踪训练 3　①②

解析　①正确,棱台的侧面一定是梯形,而不是平行四边形;
②正确,由四个平面围成的封闭图形是四面体也就是三棱锥;
③错误,如图所示的四棱锥被平面截成的两部分都是棱锥.



随堂演练

1. D　[根据棱柱的定义进行判定知,这 4 个图都满足.]
2. B　[根据棱锥的定义可知该几何体是四棱锥.]
3. BCD　[由棱台的定义知 A 正确,B,C 不正确;棱柱的侧棱都相等且相互平行,且侧面是平行四边形,但侧面并不一定全等,D 不正确.]
4. 12

解析　棱柱有 10 个顶点,则该棱柱为五棱柱,共有 5 条侧棱,且侧棱长都相等,故侧棱长为$\frac{60}{5}=12$(cm).

第 2 课时　圆柱、圆锥、圆台、球、简单组合体

知识梳理

1. 矩形的一边　旋转轴　垂直于轴　平行于轴　平行于轴
2. 一条直角边
3. 平行于圆锥底面　底面与截面
4. 半圆以它的直径　圆心　球心　线段　两点　线段

例 1　CD　[A 中,以直角梯形垂直于底边的一腰所在直线为轴旋转一周可得到圆台;B 中,它们的底面为圆面;C,D 正确.]

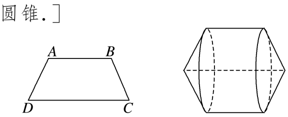
跟踪训练 1　BD　[由圆柱、圆锥、圆台的定义及母线的性质可知 BD 正确,AC 错误.]

知识梳理

简单组合体　拼接　截去或挖去

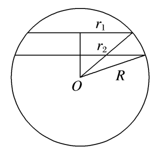
例 2　**解**　①是由一个圆锥和一个圆台拼接而成的组合体;②是由一个长方体截去一个三棱锥后得到的几何体;③是由一个圆柱挖去一个三棱锥后得到的几何体.

跟踪训练 2　(1)B
(2)D　[图①是一个等腰梯形,CD 为较长的底边,以 CD 边所在直线为旋转轴旋转一周所得几何体为一个组合体,如图②,包括一个圆柱、两个圆锥.]



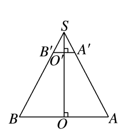
①　　②

例 3　**解**　如图,设这两个截面圆的半径分别为 r_1,r_2,球心到截面的距离分别为 d_1,d_2,球的半径为 R,



则 $\pi r_1^2=5\pi,\pi r_2^2=8\pi$,
$\therefore r_1^2=5,r_2^2=8$,
又$\because R^2=r_1^2+d_1^2=r_2^2+d_2^2$,
$\therefore d_1^2-d_2^2=8-5=3$,
即$(d_1-d_2)(d_1+d_2)=3$,
又 $d_1-d_2=1$,
$\therefore \begin{cases}d_1+d_2=3,\\ d_1-d_2=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}d_1=2,\\ d_2=1.\end{cases}$
$\therefore R=\sqrt{r_1^2+d_1^2}=\sqrt{5+4}=3$,
即球的半径等于 3.

跟踪训练 3　**解**　设圆台的母线长为 l cm,由截得的圆台上、下底面面积之比为 1∶16,可设截得的圆台的上、下底面的半径分别为 r cm,$4r$ cm.过轴 SO 作截面,如图所示.



则$\triangle SO'A'\backsim\triangle SOA$,$SA'=3$ cm.
所以$\frac{SA'}{SA}=\frac{O'A'}{OA}$.
所以$\frac{3}{3+l}=\frac{r}{4r}=\frac{1}{4}$.
解得 $l=9$,即圆台的母线长为 9 cm.

随堂演练

1.ABD ［将正方形绕其一边所在直线旋转可以形成圆柱，所以A错误；B中没有说明这两个平行截面的位置关系，当这两个平行截面与底面平行时正确，其他情况下结论不一定正确，所以B错误；通过圆台侧面上一点，只有一条母线，所以D错误.］

2.B ［由题意知，该几何体是组合体，上、下各一圆锥，显然B正确.］

3.①②

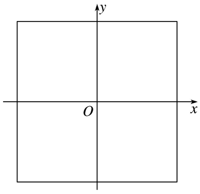
4.16π或9π

解析 当以3 cm长的一边所在直线为轴旋转时，得到的圆柱的底面半径为4 cm，底面积为$16\pi\ cm^2$；

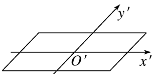
当以4 cm长的一边所在直线为轴旋转时，得到的圆柱的底面半径为3 cm，底面积为$9\pi\ cm^2$.

§8.2 立体图形的直观图

问题1 在乒乓球台上建立平面直角坐标系，如图所示，



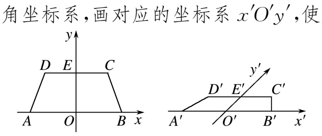
当将两坐标轴的夹角变为45°或135°时，台面看起来就是平行四边形了.



知识梳理

45° 135° 水平面 x'轴或y'轴的线段 保持原长度不变 一半

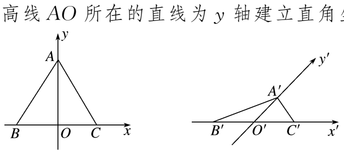
例1 解 画法：(1)如图所示，取AB所在直线为x轴，AB中点O为原点，建立直角坐标系，画对应的坐标系$x'O'y'$，使$\angle x'O'y'=45°$.



(2)以O'为中点在x'轴上取$A'B'=AB$，在y'轴上取$O'E'=\frac{1}{2}OE$，以E'为中点画$C'D'/\!/x'$轴，并使$C'D'=CD$.

(3)连接$B'C'$，$D'A'$，所得的四边形$A'B'C'D'$就是水平放置的等腰梯形$ABCD$的直观图.

跟踪训练1 解 (1)如图①所示，以BC边所在的直线为x轴，以BC边上的高线AO所在的直线为y轴建立直角坐标系.



① ②

(2)画对应的x'轴、y'轴，使$\angle x'O'y'=45°$.

在x'轴上截取$O'B'=O'C'=2$ cm，在y'轴上截取$O'A'=\frac{1}{2}OA$.

连接$A'B'$，$A'C'$，则$\triangle A'B'C'$即为正$\triangle ABC$的直观图，如图②所示.

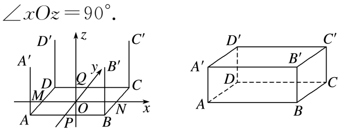
问题2 先作出底面的直观图，然后找一个与底面垂直的方向，将底面平移，就形成了长方体.

知识梳理

(1)z z' (2)$x'O'y'$ $y'O'z'$ $x'O'z'$ (3)平行性 长度

(4)虚线

例2 解 (1)画轴.如图，画x轴、y轴、z轴，三轴相交于点O，使$\angle xOy=45°$，$\angle xOz=90°$.



(2)画底面.以点O为中点，在x轴上取线段MN，使$MN=4$ cm；在y轴上取线段PQ，使$PQ=\frac{3}{2}$ cm.分别过点M和N作y轴的平行线，过点P和Q作x轴的平行线，设它们的交点分别为A，B，C，D，四边形$ABCD$就是长方体的底面$ABCD$.

(3)画侧棱.过A，B，C，D各点分别作z轴的平行线，并在这些平行线上分别截取2 cm长的线段AA'，BB'，CC'，DD'.

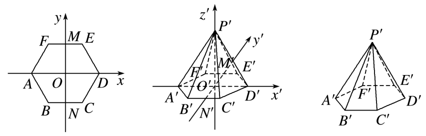
(4)成图.顺次连接A'，B'，C'，D'(去掉辅助线，将被遮挡的部分改为虚线)，就得到长方体的直观图.

跟踪训练2 解 画法：

(1)画出六棱锥$P-ABCDEF$的底面.①在正六边形$ABCDEF$中，取AD所在的直线为x轴，对称轴MN所在的直线为y轴，两轴相交于点O，如图(1)；画出相应的x'轴、y'轴、z'轴，三轴相交于O'，使$\angle x'O'y'=45°$，$\angle x'O'z'=90°$，如图(2)；②在图(2)中，以O'为中点，在x'轴上取$A'D'=AD$，在y'轴上取$M'N'=\frac{1}{2}MN$，以点N'为中点，画出$B'C'$平行于x'轴，并且长度等于BC，再以M'为中点，画出$E'F'$平行于x'轴，并且长度等于EF；③连接$A'B'$，$C'D'$，$D'E'$，$F'A'$得到正六边形$ABCDEF$水平放置的直观图$A'B'C'D'E'F'$.

(2)画出正六棱锥$P-ABCDEF$的顶点，在z'轴正半轴上截取点P'，点P'异于点O'.

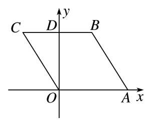
(3)成图.连接$P'A'$，$P'B'$，$P'C'$，$P'D'$，$P'E'$，$P'F'$，并擦去x'轴、y'轴和z'轴，便可得到六棱锥$P-ABCDEF$的直观图$P'-A'B'C'D'E'F'$，如图(3).



(1) (2) (3)

例3 菱形 $24\sqrt{2}\ cm^2$

解析 如图，在原图形$OABC$中，



应有$OD=2O'D'=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$(cm)，

$CD=C'D'=2$ cm，

所以$OC=\sqrt{OD^2+CD^2}$

$=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+2^2}=6$(cm)，

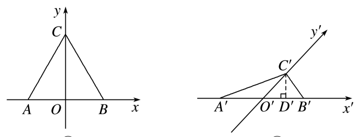
所以$OA=OC=BC=AB$，

故四边形$OABC$是菱形.

$S_{四边形OABC}=OA\times OD=6\times4\sqrt{2}=24\sqrt{2}$ (cm^2).

跟踪训练3 (1)D ［因为水平放置的$\triangle ABC$的直观图中，$\angle x'O'y'=45°$，$A'B'=A'C'$，且$A'B'/\!/x'$轴，$A'C'/\!/y'$轴，所以$AB\perp AC$，$AB\neq AC$，所以$\triangle ABC$是直角三角形.］

(2)D ［**方法一** 建立如图①所示的平面直角坐标系xOy.



① ②

如图②所示，建立坐标系$x'O'y'$，使$\angle x'O'y'=45°$，由直观图画法，知$A'B'=AB=a$，$O'C'=\frac{1}{2}OC=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

过点C'作$C'D'\perp O'x'$于点D'，则$C'D'=\frac{\sqrt{2}}{2}O'C'=\frac{\sqrt{6}}{8}a$.

所以$\triangle A'B'C'$的面积是$S=\frac{1}{2}\cdot A'B'\cdot C'D'$

$=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{6}}{8}a=\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$.

方法二 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，

又$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{\sqrt{2}}{4}S_{\triangle ABC}$，

$\therefore S_{\triangle A'B'C'}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$.］

随堂演练

1.AB ［斜二测画法得到的图形与原图形中的线线相交、线线平行关系不会改变，因此三角形的直观图是三角形，平行四边形的直观图是平行四边形.］

2.A ［平行于z轴(或在z轴上)的线段，在直观图中的方向和长度都与原来保持一致.］

3.2.5

解析 由直观图知，原平面图形为直角三角形，且$AC=A'C'=3$，$BC=2B'C'=4$，计算得$AB=5$，所求中线长为2.5.

4.16

解析 由图可知$O'B'=4$，则对应$\triangle AOB$中，$OB=4$.

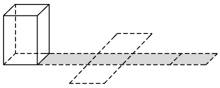
又和 y' 轴平行的线段的长度为4,则对应$\triangle AOB$的高为8.

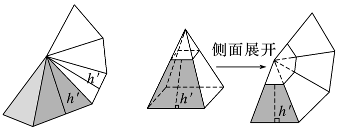
所以$\triangle AOB$的面积为$\frac{1}{2}\times4\times8=16$.

§8.3　简单几何体的表面积与体积

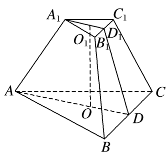
8.3.1　棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

问题





例1　**解**　如图所示,画出正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$,其中 O_1,O 为正三棱台上、下底面的中心,D,D_1 分别为 BC,B_1C_1 的中点,则 OO_1 为正三棱台的高,DD_1 为侧面梯形 BCC_1B_1 的高,四边形 ODD_1O_1 为直角梯形,



所以 $DD_1=\sqrt{OO_1^2+(OD-O_1D_1)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$,所以此三棱台的表面积 $S_{表}=S_{侧}+S_{底}=3\times\frac{1}{2}\times(3+6)\times\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times3^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=\frac{99\sqrt{3}}{4}$ (cm²).

跟踪训练1　**解**　∵四棱锥 $S-ABCD$ 的各棱长均为5,

∴各侧面都是全等的正三角形.

设 E 为 AB 的中点,连接 SE(图略),则 $SE\perp AB$,

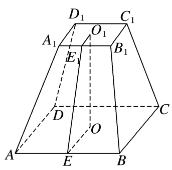
$\therefore S_{侧}=4S_{\triangle SAB}=4\times\frac{1}{2}AB\times SE=2\times5\times\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=25\sqrt{3}$,$S_{表}=S_{侧}+S_{底}=25\sqrt{3}+25=25(\sqrt{3}+1)$.

知识梳理

底面积　高　底面积　高　上、下底面面积　高

例2　(1)D　[设三棱锥 B_1-ABC 的高为 h,则 $V_{三棱锥B_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times3=\frac{\sqrt{3}}{4}$.]

(2)**解**　正四棱台的大致图形如图所示,其中 $A_1B_1=10$ cm,$AB=20$ cm,取 A_1B_1 的中点 E_1,AB 的中点 E,则 E_1E 为斜高.



设 O_1,O 分别是上、下底面的中心,则四边形 EOO_1E_1 为直角梯形.

$\because S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times(10+20)\times EE_1=780$(cm²),

$\therefore EE_1=13$ cm.

在直角梯形 EOO_1E_1 中,

$O_1E_1=\frac{1}{2}A_1B_1=5$ cm,$OE=\frac{1}{2}AB=10$ cm,

$\therefore O_1O=\sqrt{13^2-(10-5)^2}=12$(cm).

故该正四棱台的体积为

$V=\frac{1}{3}\times12\times(10^2+20^2+10\times20)=2\ 800$(cm³).

跟踪训练2　$\frac{1}{3}$

解析　由题意可知四棱锥 $A_1-BB_1D_1D$ 的底面是矩形,边长为1和$\sqrt{2}$,四棱锥的高为$\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则四棱锥 $A_1-BB_1D_1D$ 的体积为

$V=\frac{1}{3}\times1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}$.

例3　**解**　由 $PO_1=2$ m,知 $O_1O=4PO_1=8$ m.

因为 $A_1B_1=AB=6$ m,

所以正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V_{锥}=\frac{1}{3}\cdot A_1B_1^2\cdot PO_1=\frac{1}{3}\times6^2\times2=24$ (m³),正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V_{柱}=AB^2\cdot O_1O=6^2\times8=288$ (m³),所以仓库的容积 $V=V_{锥}+V_{柱}=24+288=312$ (m³),

故仓库的容积是312 m³.

跟踪训练3　**解**　由图可知$\triangle A_1BD$是边长为$\sqrt{2}a$的等边三角形,其面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$,

故所求几何体 $A_1B_1C_1D_1-DBC$ 的表面积 $S=S_{\triangle A_1BD}+3S_{\triangle DBC}+3S_{正方形A_1B_1C_1D_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2+3\times\frac{1}{2}\times a^2+3a^2=\frac{\sqrt{3}+9}{2}a^2$.

几何体 $A_1B_1C_1D_1-DBC$ 的体积 $V=V_{正方体ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{三棱锥A_1-ABD}=a^3-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a\times a\times a=\frac{5}{6}a^3$.

随堂演练

1.B　[$V_{长方体}=3\times4\times5=60$(cm³).]

2.B　[令正方体棱长为 a,则 $V_{正方体}=a^3$,

$V_{S-ABCD}=\frac{1}{3}\times a^2\times a=\frac{1}{3}a^3$,

$\therefore V_{四棱锥S-ABCD}=\frac{1}{3}V_{正方体}$.]

3.C

4.$6+2\sqrt{2}$

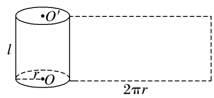
解析　$V_{棱台}=\frac{1}{3}\times(2+4+\sqrt{2\times4})\times3$

$=\frac{1}{3}\times3\times(6+2\sqrt{2})$

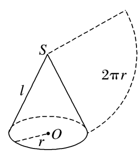
$=6+2\sqrt{2}$.

8.3.2　圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

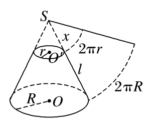
问题1　圆柱的侧面展开图是矩形,长是圆柱底面圆的周长,宽是圆柱的高(母线).设圆柱的底面半径为 r,母线长为 l,则 $S_{圆柱侧}=2\pi rl$,$S_{圆柱表}=2\pi r(r+l)$,其中 r 为圆柱底面半径,l 为母线长.



问题2　圆锥的侧面展开图为一个扇形,半径是圆锥的母线长,弧长等于圆锥底面圆的周长,侧面展开图扇形的面积为$\frac{1}{2}\times2\pi rl=\pi rl$,$\therefore S_{圆锥侧}=\pi rl$,$S_{圆锥表}=\pi r(r+l)$,其中 r 为圆锥底面半径,l 为母线长.



问题3　圆台的侧面展开图是一个扇环,内弧长等于圆台上底面圆的周长,外弧长等于圆台下底面圆的周长,如图,$\frac{x}{x+l}=\frac{r}{R}$,解得 $x=\frac{r}{R-r}l$,$S_{扇环}=S_{大扇形}-S_{小扇形}=\frac{1}{2}(x+l)\times2\pi R-\frac{1}{2}x\cdot2\pi r=\pi[(R-r)x+Rl]=\pi(r+R)l$,所以 $S_{圆台侧}=\pi(r+R)l$,$S_{圆台表}=\pi(r^2+rl+Rl+R^2)$.



知识梳理

$2\pi r^2$　$2\pi rl$　$2\pi r(r+l)$　πr^2　πrl　$\pi r(r+l)$　$\pi r'^2$　πr^2

$\pi(r'l+rl)$　$\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$

例1　(1)C　[设圆锥底面半径为 r,则高 $h=2r$,∴其母线长 $l=\sqrt{5}r$,$\therefore S_{侧}=\pi rl=\sqrt{5}\pi r^2$,$S_{底}=\pi r^2$,$S_{底}:S_{侧}=1:\sqrt{5}$.]

(2)D　[设圆台较小底面的半径为 r,则另一底面的半径为 $3r$.由 $S_{侧}=7\pi(r+3r)=84\pi$,解得 $r=3$.]

跟踪训练1　A　[设底面半径为 r,则 $\pi r^2=S$,

$\therefore r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$,

∴底面周长为 $2\pi r=2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}$,

又侧面展开图为一个正方形，

$\therefore$ 侧面积是 $\left(2\pi\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}\right)^2=4\pi S$.]

问题 4 $V_{圆台}=\dfrac{1}{3}\pi h(r'^2+r'r+r^2)$.

知识梳理

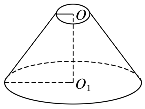
πr^2h $\quad \dfrac{1}{3}\pi r^2h$ $\quad \dfrac{1}{3}\pi(r^2+rr'+r'^2)h$

例 2 (1)AB [当圆柱的高为 8 cm 时，$V=\pi\times\left(\dfrac{12}{2\pi}\right)^2\times8=\dfrac{288}{\pi}(\text{cm}^3)$，

当圆柱的高为 12 cm 时，$V=\pi\times\left(\dfrac{8}{2\pi}\right)^2\times12=\dfrac{192}{\pi}(\text{cm}^3)$.]

(2)224π

解析 设上底面半径为 r，则下底面半径为 $4r$，高为 $4r$，如图.

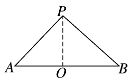


$\because$ 母线长为 10，$\therefore 10^2=(4r)^2+(4r-r)^2$，解得 $r=2$.

$\therefore$ 下底面半径 $R=8$，高 $h=8$，

$\therefore V_{圆台}=\dfrac{1}{3}\pi(r^2+rR+R^2)h=224\pi$.

跟踪训练 2 A [作圆锥的轴截面，如图所示，



由题意知，在 $\triangle PAB$ 中，$\angle APB=90°$，$PA=PB$.

设圆锥的高为 h，底面半径为 r，

则 $h=r$，$PB=\sqrt{2}r$.

由 $S_{侧}=\pi\cdot r\cdot PB=16\sqrt{2}\pi$，

得 $\sqrt{2}\pi r^2=16\sqrt{2}\pi$，所以 $r=4$. 则 $h=4$.

故圆锥的体积 $V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{64\pi}{3}$.]

问题 5 分割、求近似和，再由近似和转化为准确和，得出球的体积公式.

知识梳理

1. $4\pi R^2$

2. $\dfrac{4}{3}\pi R^3$

例 3 (1)B [设球的半径为 R，$\therefore \dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32}{3}\pi$，$\therefore R=2$，

$\therefore S_{球}=4\pi R^2=16\pi$.]

(2)B [该长方体的体对角线长为 $\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{3}$，外接球的半径为 R，

$\therefore 2R=2\sqrt{3}$，$\therefore R=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{球}=4\pi R^2=12\pi$.]

跟踪训练 3 (1)A [设正方体的棱长为 a，其内切球的半径为 R，则 $a=2R$，

又 $\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$，$\therefore R^3=2\sqrt{2}$，$\therefore R=\sqrt{2}$，$\therefore a=2\sqrt{2}$.]

(2)$\sqrt[3]{2}$

解析 $V_{小球}=\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot1^3=\dfrac{4}{3}\pi$，

$V_{大球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，

依题意 $\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times2=\dfrac{8}{3}\pi$，

$\therefore R^3=2$，$\therefore R=\sqrt[3]{2}$.

随堂演练

1. C [设圆锥的母线长为 l，则 $l=\sqrt{3+1}=2$，所以圆锥的表面积为 $S=\pi\times1\times(1+2)=3\pi$.]

2. A [设圆台的高为 h，由题意知 $V=\dfrac{1}{3}\pi(1^2+1\times2+2^2)h=7\pi$，故 $h=3$.]

3. A [设圆柱的底面圆半径为 r，

$\therefore 2\pi r=2$，$\therefore r=\dfrac{1}{\pi}$，

$\therefore S_{侧}=4$，$S_{底}=\pi r^2=\dfrac{1}{\pi}$，

$\therefore \dfrac{S_{表}}{S_{侧}}=\dfrac{4+2\times\dfrac{1}{\pi}}{4}=\dfrac{1+2\pi}{2\pi}$.]

4. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

解析 依题意 $\dfrac{4}{3}\pi r^3=\pi R^2\cdot r$，

$\therefore \dfrac{R}{r}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

习题课 与球有关的内切、外接问题

例 1 $\dfrac{4\pi}{3}$

解析 设正六棱柱的底面边长为 x，高为 h，

则有 $\begin{cases}6x=3,\\ \dfrac{9}{8}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2h,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ h=\sqrt{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 正六棱柱的底面外接圆的半径 $r=\dfrac{1}{2}$，

球心到底面的距离 $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ 外接球的半径 $R=\sqrt{r^2+d^2}=1$. $\therefore V_{球}=\dfrac{4\pi}{3}$.

跟踪训练 1 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ $\quad \dfrac{a}{2}$

解析 设该正方体的外接球半径为 R，内切球半径为 r，

正方体的体对角线长即为外接球直径，棱长即为内切球的直径，

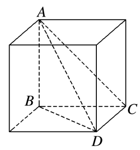
即 $2R=\sqrt{3}a$，$2r=a$，

$\therefore R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$r=\dfrac{a}{2}$.

例 2 $4\sqrt{3}\pi$

解析 因为 $AB\perp BC$，$BC\perp CD$，

构造如图所示的长方体，



则 AD 为三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的直径. 设外接球的半径为 R.

$\because V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times BC\times CD\times AB$

$=\dfrac{1}{6}\times2\times CD\times2=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore CD=2$，$\therefore$ 该长方体为正方体，$\therefore AD=2\sqrt{3}$，$\therefore R=\sqrt{3}$，

外接球体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$.

跟踪训练 2 6π

解析 根据题意可知，该三棱锥的三条侧棱两两垂直，

$\therefore$ 把这个三棱锥可以补成一个同一顶点处三条棱长分别为 $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$ 的长方体，于是长方体的外接球就是三棱锥的外接球.

设其外接球的半径为 R，

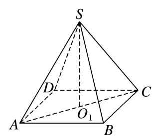
则有 $(2R)^2=1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=6$.

$\therefore R^2=\dfrac{3}{2}$.

故其外接球的表面积 $S=4\pi R^2=6\pi$.

例 3 $\dfrac{4\pi}{3}$

解析 如图，设正四棱锥的底面中心为 O_1，



$\therefore SO_1$ 垂直于底面 $ABCD$，令外接球球心为 O，

$\therefore \triangle ASC$ 的外接圆就是外接球的一个轴截面圆，外接圆的半径就是外接球的半径.

在 $\triangle ASC$ 中，由 $SA=SC=\sqrt{2}$，$AC=2$，

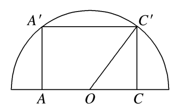
得 $SA^2+SC^2=AC^2$.

$\therefore \triangle ASC$ 是以 AC 为斜边的直角三角形.

$\therefore \dfrac{AC}{2}=1$ 是外接圆的半径，也是外接球的半径.

故 $V_{球}=\dfrac{4\pi}{3}$.

跟踪训练 3 **解** 作正方体对角面的截面，如图所示，设半球的半径为 R，正方体的棱长为 a，那么 $CC'=a$，$OC=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.



在 $\text{Rt}\triangle C'CO$ 中，由勾股定理，得 CC'^2+OC^2

$=OC'^2$,

即 $a^2+\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2=R^2$,$\therefore R=\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

从而 $V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3$,$V_{正方体}=a^3$.

因此 $V_{半球}:V_{正方体}=\frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3:a^3=\sqrt{6}\pi:2$.

例 4　$\frac{125}{6}\pi$

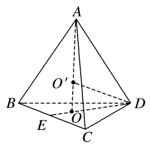
解析　如图所示,该三棱锥为正三棱锥,O 为底面 BCD 的中心且 AO 垂直于底面 BCD,O' 在线段 AO 上,O' 为外接球球心,令 $O'A=O'D=R$,$OD=\frac{2}{3}DE=\frac{2}{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2$,$AD=2\sqrt{5}$,

$\therefore AO=\sqrt{AD^2-OD^2}=4$,$\therefore OO'=4-R$,

又 $OO'^2+OD^2=O'D^2$,

$\therefore(4-R)^2+4=R^2$,解得 $R=\frac{5}{2}$,

$\therefore V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{125}{6}\pi$.



跟踪训练 4　16π

解析　取 PC 的中点 O,

$\because\triangle PAC$ 为直角三角形且 $\angle PAC=90°$,

$\therefore OA=\frac{1}{2}PC$,同理 $OB=\frac{1}{2}PC$,

即 $OA=OB=OP=OC$,即点 O 到点 P,A,B,C 四点的距离相等,

$\therefore O$ 为外接球的球心,

$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=4$,$\therefore R=\frac{1}{2}PC=2$,

$\therefore S_{球}=4\pi R^2=16\pi$.

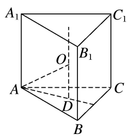
随堂演练

1.C　[由题可知,正方体的体积为 a^3,所以正方体的棱长为 a,则可知,该正方体的外接球的半径为 $r=\frac{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$,所以该正方体的外接球的表面积为 $S=4\pi r^2=3\pi a^2$.]

2.B　[长方体的外接球直径即为长方体的体对角线,由题意,得体对角线长为 $\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}$,外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$,$S=4\pi R^2=17\pi$.]

3.D　[由圆锥的底面半径为$\sqrt{3}$,母线长为 2,可求得其轴截面的顶角为$\frac{2\pi}{3}$.设该圆锥的底面圆心为 O_1,其半径为 r,球 O 的半径为 R,则 $O_1O=|R-1|$,$R^2=O_1O^2+r^2=(R-1)^2+(\sqrt{3})^2$,解得 $R=2$,所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=16\pi$.]

4.C　[设三棱柱外接球的球心为 O,球半径为 r,三棱柱的底面$\triangle ABC$ 的中心为 D,如图,则 $OA=r$,因为三棱柱的高为 2,$\therefore OD=1$,又在正$\triangle ABC$ 中,$AB=3$,可得 $AD=\sqrt{3}$,



$\therefore$在 Rt$\triangle ADO$ 中,$OA^2=OD^2+AD^2$,有 $r^2=1^2+(\sqrt{3})^2$,$\therefore r=2$,则这个三棱柱的外接球的体积为 $V=\frac{4\pi}{3}\times r^3=\frac{32\pi}{3}$.]

§8.4　空间点、直线、平面之间的位置关系

8.4.1　平　面

问题 1　无限延展、不计大小、不计厚薄、没有质量等.

知识梳理

$ABCD$　AC　BD　α　β

例 1　AB　[平面是无限延展的,但是没有大小、形状、厚薄,AB 两种说法是正确的;CD 两种说法是错误的.]

跟踪训练 1　D　[A 不正确,我们用平行四边形来表示平面,但不能说平行四边形是一个平面,平行四边形仅是平面上四条线段构成的图形,它是不能无限延展的;

B 不正确,平面图形和平面是完全不同的两个概念,平面图形是有大小的,它是不可以无限延展的;

C 不正确,太平洋再大也会有边际,也不可能是绝对平面;

D 正确,平面是无限延展的,它将空间分成两部分.]

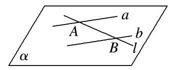
问题 2　三条腿的凳子稳定;直尺的边缘上的其余点在桌面上;两张纸面相交有一条交线.

知识梳理

1.有且只有　两个点　这个平面内　$l\subset\alpha$

公共直线

例 2　**证明**　如图所示,$\because a/\!/b$,



$\therefore$过 a,b 有且只有一个平面 α.

设 $a\cap l=A$,$b\cap l=B$,

$\therefore A\in\alpha$,$B\in\alpha$,且 $A\in l$,$B\in l$,

$\therefore l\subset\alpha$,即过 a,b,l 有且只有一个平面.

跟踪训练 2　**证明**　**方法一**　(纳入法)

$\because l_1\cap l_2=A$,$\therefore l_1$ 和 l_2 确定一个平面 α.

$\because l_2\cap l_3=B$,$\therefore B\in l_2$.

又$\because l_2\subset\alpha$,$\therefore B\in\alpha$.同理可证 $C\in\alpha$.

$\because B\in l_3$,$C\in l_3$,$\therefore l_3\subset\alpha$.

$\therefore$直线 l_1,l_2,l_3 在同一平面内.

方法二　(同一法)

$\because l_1\cap l_2=A$,$\therefore l_1$ 和 l_2 确定一个平面 α.

$\because l_2\cap l_3=B$,$\therefore l_2$ 和 l_3 确定一个平面 β.

$\because A\in l_2$,$l_2\subset\alpha$,$\therefore A\in\alpha$.$\because A\in l_2$,$l_2\subset\beta$,$\therefore A\in\beta$.

同理可证 $B\in\alpha$,$B\in\beta$,$C\in\alpha$,$C\in\beta$.

$\therefore$不共线的三个点 A,B,C 既在平面 α 内,又在平面 β 内,

$\therefore$平面 α 和 β 重合,即直线 l_1,l_2,l_3 在同一平面内.

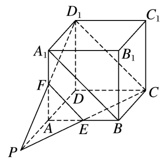
例 3　**证明**　如图,连接 EF,D_1C,A_1B,

因为 E 为 AB 的中点,F 为 AA_1 的中点,

所以 $EF\underline{\parallel}\frac{1}{2}A_1B$.

又因为 $A_1B\underline{\parallel}D_1C$,

所以 $EF\underline{\parallel}\frac{1}{2}D_1C$,



所以 E,F,D_1,C 四点共面,

可设 $D_1F\cap CE=P$.

又 $D_1F\subset$平面 A_1D_1DA,$CE\subset$平面 $ABCD$,

所以点 P 为平面 A_1D_1DA 与平面 $ABCD$ 的公共点.

又因为平面 $A_1D_1DA\cap$平面 $ABCD=DA$,

所以由基本事实 3 可得 $P\in DA$,

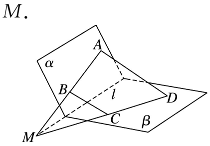
即 CE,D_1F,DA 三线交于一点.

跟踪训练 3　**证明**　因为梯形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,

所以 AB,CD 是梯形 $ABCD$ 的两腰,

所以 AB,CD 必定相交于一点,

如图,设 $AB\cap CD=M$.



又因为 $AB\subset\alpha$,$CD\subset\beta$,

所以 $M\in\alpha$,且 $M\in\beta$,

又因为 $\alpha\cap\beta=l$,

所以 $M\in l$.即 AB,CD,l 共点.

随堂演练

1.A　[表示平面不能用一条线段的两个端点表示,但可以表示为平面 MP.]

2.A　[B 中直线 a 不应超出平面 α;C 中直线 a 不在平面 α 内;D 中直线 a 与平面 α 相交.]

3.B

4.D　[A 项,三个点可能共线;B 项,点可能在直线上;C 项,无数个点也可能在同一条直线上.]

8.4.2　空间点、直线、平面之间的位置关系

知识梳理

相交直线　一个公共点　平行直线　没有公共点　没有公共点

例 1　(1)平行　(2)异面　(3)相交　(4)异面

解析　(1)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$A_1D_1/\!/BC$,$A_1D_1=BC$,$\therefore$四边形 A_1BCD_1 为平行四边形,

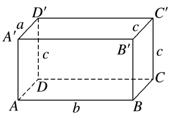
$\therefore A_1B/\!/D_1C$.

(2)直线 A_1B 与直线 B_1C 不同在任何一个平面内.

(3)直线 D_1D 与直线 D_1C 相交于点 D_1.

(4)直线 AB 与直线 B_1C 不同在任何一个平面内.

跟踪训练 1 D [可借助长方体来判断.



如图,在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,$A'D'$ 所在直线为 a,AB 所在直线为 b,已知 a 和 b 是异面直线,b 和 c 是异面直线,则 c 可以是长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中的 $B'C'$,CC',DD'.故 a 和 c 可以平行、相交或异面.]

问题 1 (1)直线在平面内——有无数个公共点.

(2)直线与平面相交——有且只有一个公共点.

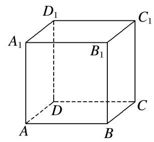
(3)直线与平面平行——没有公共点.

知识梳理

无数个 有且只有一个 没有

例 2 (1)B [直线上有一点在平面外,则直线不在平面内,故直线上有无数多个点在平面外.]

(2)ABC [如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,



$A_1B_1/\!/AB$,$AB\subset$平面 ABB_1A_1,

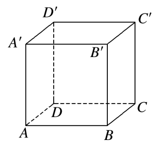
$A_1B_1\subset$平面 ABB_1A_1,故 A 错误;$A_1B_1/\!/$平面 $ABCD$,$B_1C_1/\!/$平面 $ABCD$,

但 A_1B_1 与 B_1C_1 相交,故 B 错误;

$AB/\!/CD$,$CD/\!/$平面 ABB_1A_1,$AB\subset$平面 ABB_1A_1,故 C 错误;

因为 $a/\!/\alpha$,所以 a 与 α 无公共点,又 b 在 α 内,所以 a 与 b 无公共点,所以 $a/\!/b$ 或 a 与 b 异面.]

跟踪训练 2 B [如图,在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,$AA'/\!/BB'$,AA' 在过 BB' 的平面 $ABB'A'$ 内,故命题①不正确;$AA'/\!/$平面 $BCC'B'$,$BC\subset$平面 $BCC'B'$,但 AA' 不平行于 BC,故命题②不正确;假设 b 与 α 相交,因为 $a/\!/b$,所以 a 与 α 相交,这与 $a/\!/\alpha$ 矛盾,故 $b/\!/\alpha$,即命题③正确.故选 B.]



问题 2 有两种.平行、相交.

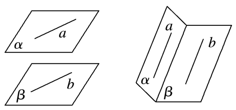
特点:两个平面平行时,两者没有公共点;两个平面相交时,两者有一条公共直线.

知识梳理

没有 无数 $\alpha/\!/\beta$ $\alpha\cap\beta=l$

例 3 CD [当两个平面相交时,一个平面内有无数条直线平行于它们的交线,即平行另一个平面,所以 AB 错误.]

跟踪训练 3 C [根据题意作图,把自然语言转化为图形语言,即可得出两平面的位置关系,如图所示.]



随堂演练

1. D [若直线 a 和 b 共面,则由题意可知 $a/\!/b$;若 a 和 b 不共面,则由题意可知 a 与 b 是异面直线.]
2. D [若直线 $l/\!/$平面 α,直线 $a\subset\alpha$,则 $l/\!/a$ 或 l 与 a 异面,故 l 与 a 没有公共点,故选 D.]
3. BD [α 不是与 β 内的所有直线平行,而是与 β 内的无数条直线平行,有一些是异面,A 错误,B 正确;根据定义,α 与 β 没有公共点,C 错误,D 正确.]
4. 4 3

解析 与 AA_1 异面的棱有 CD,BC,C_1D_1,B_1C_1,共 4 条;

与 AA_1 平行的面有平面 BCC_1B_1,平面 CC_1D_1D,平面 BB_1D_1D,共 3 个.

§8.5 空间直线、平面的平行

8.5.1 直线与直线平行

问题 1 平行.得到事实:平行于同一条直线的两条直线平行.

知识梳理

平行 $a/\!/c$ 传递性

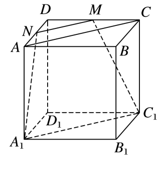
例 1 **证明** 因为在空间四边形 $ABCD$ 中,E,F,G,H 分别为 AB,BC,CD,DA 的中点,

所以 $EF/\!/AC,HG/\!/AC,EF=HG=\dfrac{1}{2}AC$,

所以 $EF/\!/HG,EF=HG$,

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

跟踪训练 1 **证明** 如图,连接 AC,在$\triangle ACD$ 中,



$\because M,N$ 分别是 CD,AD 的中点,

$\therefore MN$ 是$\triangle ACD$ 的中位线,

$\therefore MN/\!/AC$,且 $MN=\dfrac{1}{2}AC$.

由正方体的性质,得

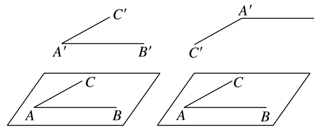
$AC/\!/A_1C_1$,且 $AC=A_1C_1$.

$\therefore MN/\!/A_1C_1$,且 $MN=\dfrac{1}{2}A_1C_1$,

即 $MN\neq A_1C_1$,

$\therefore$四边形 MNA_1C_1 是梯形.

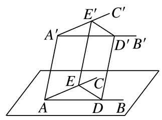
问题 2 当空间中两个角的两条边分别对应平行时,这两个角有如图所示的两种位置.



(1) (2)

对于图(1),我们可以构造两个全等三角形,使$\angle BAC$ 和$\angle B'A'C'$是它们的对应角,从而证明$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

如图,分别在$\angle BAC$ 和$\angle B'A'C'$的两边上截取 AD,AE 和 $A'D'$,$A'E'$,使得 $AD=A'D',AE=A'E'$,连接 $AA',DD',EE',DE,D'E'$.



$\because AD\underline{\underline{/\!/}}A'D'$,

$\therefore$四边形 $ADD'A'$是平行四边形,

$\therefore AA'\underline{\underline{/\!/}}DD'$.

同理可证 $AA'\underline{\underline{/\!/}}EE'$,

$\therefore DD'\underline{\underline{/\!/}}EE'$,

$\therefore$四边形 $DD'E'E$ 是平行四边形,

$\therefore DE=D'E'$.

$\therefore\triangle ADE\cong\triangle A'D'E'$,

$\therefore\angle BAC=\angle B'A'C'$.

对于图(2),同理可证.

知识梳理

1. 相等或互补

例 2 (1)$\dfrac{4}{9}$

解析 $\because AA'\cap BB'=O$,且$\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{OB}{OB'}=\dfrac{2}{3}$,

$\therefore AB/\!/A'B'$,同理 $AC/\!/A'C',BC/\!/B'C'$.

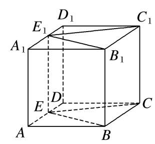
$\because A'B'/\!/AB,A'C'/\!/AC,\therefore\angle BAC=\angle B'A'C'$,

同理$\angle ABC=\angle A'B'C'$,

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$且$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{2}{3}$,

$\therefore\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

(2)**证明** 如图,连接 EE_1.



$\because E_1,E$ 分别为 A_1D_1,AD 的中点,

$\therefore A_1E_1\underline{\underline{/\!/}}AE$,

$\therefore$四边形 A_1E_1EA 为平行四边形,

$\therefore A_1A\underline{\underline{/\!/}}E_1E$,

又 $A_1A\underline{\underline{/\!/}}B_1B,\therefore E_1E\underline{\underline{/\!/}}B_1B$,

$\therefore$四边形 E_1EBB_1 是平行四边形.

$\therefore E_1B_1/\!/EB$.同理 $E_1C_1/\!/EC$.

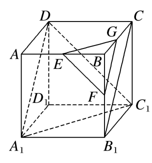
又$\angle B_1E_1C_1$ 与$\angle BEC$ 的两边分别对应平行,

$\therefore\angle B_1E_1C_1=\angle BEC$.

跟踪训练 2 **证明** 如图所示,连接 B_1C.

因为 G,F 分别为 BC,BB_1 的中点,

所以 $GF/\!/B_1C$.



又 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体,

所以 $CD\underline{\underline{/\!/}}AB,A_1B_1\underline{\underline{/\!/}}AB$,

由基本事实 4 知 $CD\underline{\underline{/\!/}}A_1B_1$,

所以四边形 A_1B_1CD 为平行四边形,

所以 $A_1D\underline{\underline{/\!/}}B_1C$.

又 $B_1C/\!/FG$,由基本事实 4 知 $A_1D/\!/FG$.

同理可证 $A_1C_1/\!/EG,DC_1/\!/EF$.

又$\angle DA_1C_1$ 与$\angle EGF$,$\angle A_1DC_1$ 与$\angle EFG$,$\angle DC_1A_1$ 与$\angle GEF$的两条边分别对应平行且均为锐角,

所以$\angle DA_1C_1=\angle EGF$,$\angle A_1DC_1=\angle EFG$,$\angle DC_1A_1=\angle GEF$.

所以$\triangle EFG\backsim\triangle C_1DA_1$.

随堂演练

1.A ［在$\triangle MPN$中,$\because H,G$分别为MP,MN的中点,

$\therefore GH/\!/PN$,

同理$EF/\!/PN$,$\therefore GH/\!/EF$.］

2.B ［$EF/\!/B_1C_1/\!/BC/\!/AD/\!/A_1D_1$.］

3.D ［由等角定理知,这两个三角形的三个角分别对应相等,故选D.］

4.60°或120°

解析 $\because$空间两角α,β的两边对应平行,

$\therefore$这两个角相等或互补.

$\because \alpha=60°$,$\therefore \beta=60°$或120°.

8.5.2　直线与平面平行

问题1 AB平行于桌面所在平面,由翻动过程中,封面另一边缘始终在桌面所在平面内,故可知:如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行,那么该直线与此平面平行.

知识梳理

此平面内的一条直线平行

例1 **证明** 连接BC_1(图略),

在$\triangle BCC_1$中,

$\because E,F$分别为BC,CC_1的中点,$\therefore EF/\!/BC_1$,

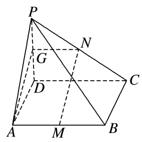
又$\because AB/\!/A_1B_1/\!/D_1C_1$,且$AB=A_1B_1=D_1C_1$,

$\therefore$四边形ABC_1D_1是平行四边形,

$\therefore BC_1/\!/AD_1$,$\therefore EF/\!/AD_1$,又$EF\not\subset$平面AD_1G,

$AD_1\subset$平面AD_1G,$\therefore EF/\!/$平面AD_1G.

跟踪训练1 **证明** 如图,取PD的中点G,连接GA,GN.



$\because G,N$分别是$\triangle PDC$的边PD,PC的中点,

$\therefore GN/\!/DC,GN=\dfrac{1}{2}DC$.

$\because M$为平行四边形$ABCD$的边AB的中点,

$\therefore AM=\dfrac{1}{2}DC,AM/\!/DC$,

$\therefore AM/\!/GN,AM=GN$,

$\therefore$四边形$AMNG$为平行四边形,

$\therefore MN/\!/AG$.

又$MN\not\subset$平面PAD,$AG\subset$平面PAD,

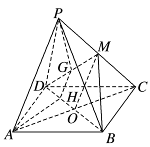
$\therefore MN/\!/$平面PAD.

问题2 平行或异面.当a与b不异面,即在同一个平面内时平行.

知识梳理

平行　交线平行　$a\subset\beta,\alpha\cap\beta=b$

例2 **证明** 如图,连接MO.



$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,

$\therefore O$是AC的中点.

又$\because M$是PC的中点,$\therefore AP/\!/OM$.

又$\because AP\not\subset$平面BDM,

$OM\subset$平面BDM,

$\therefore AP/\!/$平面BDM.

又$\because AP\subset$平面$APGH$,平面$APGH\cap$平面$BDM=GH$,$\therefore AP/\!/GH$.

跟踪训练2 **证明** 因为$AB/\!/$平面$MNPQ$,平面$ABC\cap$平面$MNPQ=MN$,且$AB\subset$平面ABC,

所以由线面平行的性质定理,知$AB/\!/MN$.

同理$AB/\!/PQ$,所以$MN/\!/PQ$.

同理可得$MQ/\!/NP$.

所以截面$MNPQ$是平行四边形.

随堂演练

1.ACD

2.B ［不在平面内的直线还可与平面相交,故A错误;一条直线与平面平行,那么这条直线与平面内的直线平行或异面,故C错误;直线也可能在平面内,故D错误.］

3.D ［由题图知正方体的前、后、左、右四个面都与EF平行.］

4.5

解析 因为$AB/\!/$平面α,$AB\subset$平面$ABCD$,平面$ABCD\cap$平面$\alpha=MN$,

所以$AB/\!/MN$,

又点M是AD的中点,$AB/\!/CD$,

所以MN是梯形$ABCD$的中位线,故$MN=5$.

8.5.3　平面与平面平行

问题1 三角尺和桌面一定平行,硬纸片不一定平行.

即如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行,那么这两个平面平行.

知识梳理

两条相交直线

例1 **证明** (1)$\because GH$是$\triangle A_1B_1C_1$的中位线,$\therefore GH/\!/B_1C_1$.

又$B_1C_1/\!/BC$,$\therefore GH/\!/BC$,

$\therefore B,C,H,G$四点共面.

(2)$\because E,F$分别为AB,AC的中点,

$\therefore EF/\!/BC$.

$\because EF\not\subset$平面$BCHG$,$BC\subset$平面$BCHG$,

$\therefore EF/\!/$平面$BCHG$.

$\because A_1G/\!/EB$且$A_1G=EB$,

$\therefore$四边形A_1EBG是平行四边形,$\therefore A_1E/\!/GB$.

$\because A_1E\not\subset$平面$BCHG$,$GB\subset$平面$BCHG$,

$\therefore A_1E/\!/$平面$BCHG$.

$\because A_1E\cap EF=E$,$A_1E,EF\subset$平面EFA_1,

$\therefore$平面$EFA_1/\!/$平面$BCHG$.

跟踪训练1 **证明** $\because E,G$分别是PC,BC的中点,

$\therefore EG/\!/PB$,

又$\because EG\not\subset$平面PAB,$PB\subset$平面PAB,

$\therefore EG/\!/$平面PAB,

$\because E,F$分别是PC,PD的中点,

$\therefore EF/\!/CD$,又$\because AB/\!/CD$,

$\therefore EF/\!/AB$,$\because EF\not\subset$平面PAB,$AB\subset$平面PAB,

$\therefore EF/\!/$平面PAB,又$EF\cap EG=E$,$EF,EG\subset$平面EFG,

$\therefore$平面$EFG/\!/$平面PAB.

问题2 直线a与平面β平行.直线a与平面β内的直线b平行或异面.

当a与b不异面,即在同一个平面内时,平行.即两个平面平行,如果另一个平面与这两个平面相交,那么两条交线平行.

知识梳理

平行　$a/\!/b$

例2 **证明** 因为D,E分别是PA,PB的中点,

所以$DE/\!/AB$.

又$DE\not\subset$平面ABC,$AB\subset$平面ABC,

所以$DE/\!/$平面ABC,

同理$DF/\!/$平面ABC,且$DE\cap DF=D$,$DE,DF\subset$平面DEF,

所以平面$DEF/\!/$平面ABC.

又平面$PCM\cap$平面$DEF=NF$,

平面$PCM\cap$平面$ABC=CM$,

所以$NF/\!/CM$.

跟踪训练2 (1)**证明** 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,平面$ABB_1A_1/\!/$平面DCC_1D_1,

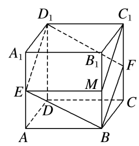
且平面$BFD_1E\cap$平面$ABB_1A_1=BE$,平面$BFD_1E\cap$平面$DCC_1D_1=FD_1$,

由面面平行的性质定理知$BE/\!/FD_1$,

同理$BF/\!/D_1E$,

$\therefore$四边形BFD_1E为平行四边形.

(2)**解** 取BB_1的中点M,



连接MC_1,ME,如图,

$\because M,E$为棱的中点,

$\therefore ME\underline{/\!/}A_1B_1$,

又$A_1B_1\underline{/\!/}C_1D_1$,

$\therefore ME\underline{/\!/}C_1D_1$,

$\therefore$四边形D_1EMC_1为平行四边形,

$\therefore D_1E/\!/MC_1$,

又$D_1E/\!/BF$,

$\therefore MC_1/\!/BF$,又$C_1F/\!/BM$,

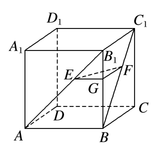
$\therefore$四边形$MBFC_1$为平行四边形,

$\therefore BM\underline{/\!/}C_1F$,

$\therefore F$为棱CC_1的中点.

例3 **证明** 过点E作$EG/\!/AB$交BB_1于点G,连接GF,如图,

则$\dfrac{B_1E}{B_1A}=\dfrac{B_1G}{B_1B}$.



$\because B_1E=C_1F,B_1A=C_1B$,

$\therefore \dfrac{C_1F}{C_1B}=\dfrac{B_1G}{B_1B}$,$\therefore FG/\!/B_1C_1$,

又$B_1C_1/\!/BC$,$\therefore FG/\!/BC$,

又$FG\not\subset$平面$ABCD$,$BC\subset$平面$ABCD$,

$\therefore FG/\!/$平面$ABCD$,

又$EG/\!/AB$且$EG\not\subset$平面$ABCD$,$AB\subset$平面$ABCD$,

$\therefore EG/\!/$平面$ABCD$,

$\because FG\cap EG=G$,$FG,EG\subset$平面EFG,

$\therefore$平面$EFG/\!/$平面$ABCD$.

$\because EF\subset$平面EFG,$\therefore EF/\!/$平面$ABCD$.

跟踪训练3 解 $\because \alpha /\!/ \beta$，平面 $PCD\cap\alpha=AB$，平面 $PCD\cap\beta=CD$，

$\therefore AB/\!/CD$，可得 $\frac{PA}{AC}=\frac{PB}{BD}$.

$\because PA=6, AC=9, PD=8$，

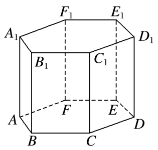
$\therefore \frac{6}{9}=\frac{8-BD}{BD}$，解得 $BD=\frac{24}{5}$.

随堂演练

1. B ［如果一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面，即两个平面没有公共点，则两平面平行.］

2. D ［$\because \alpha/\!/\beta$，$\therefore \alpha$ 与 β 无公共点，
又 $m\subset\alpha, n\subset\beta$，
$\therefore m$ 与 n 无公共点，$\therefore m$ 与 n 平行或异面.］

3. D ［如图所示，平面 ABB_1A_1 // 平面 EDD_1E_1，
平面 BCC_1B_1//平面 FEE_1F_1，
平面 AFF_1A_1//平面 CDD_1C_1，
平面 $ABCDEF$//平面 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，
$\therefore$此六棱柱的面中互相平行的有 4 对.］



4. $\frac{4}{25}$

解析 $\because$平面 α//平面 ABC，平面 PAB 与它们的交线分别为 $A'B'$，AB，
$\therefore AB/\!/A'B'$，同理 $B'C'/\!/BC$，
易得 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，

$S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=\left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2=\left(\frac{PA'}{PA}\right)^2=\frac{4}{25}$.

§8.6 空间直线、平面的垂直

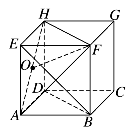
8.6.1 直线与直线垂直

问题 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

知识梳理

1. 任一点 a'与b'

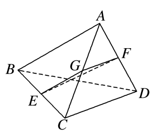
例1 解 (1)$\because CG/\!/FB$，
$\therefore\angle EBF$ 是异面直线 BE 与 CG 所成的角.
在 $\mathrm{Rt}\triangle EFB$ 中，$EF=FB$，
$\therefore \angle EBF=45°$，
$\therefore BE$ 与 CG 所成的角为 $45°$.
(2)如图，连接 FH，
$\because FB/\!/AE, FB=AE, AE/\!/HD, AE=HD$，
$\therefore FB=HD, FB/\!/HD$，
$\therefore$四边形 $FBDH$ 是平行四边形，
$\therefore BD/\!/FH$，
$\therefore\angle HFO$ 或其补角是 FO 与 BD 所成的角，连接 HA, AF，
则$\triangle AFH$ 是等边三角形，
又 O 是 AH 的中点，$\therefore\angle HFO=30°$，
$\therefore FO$ 与 BD 所成的角为 $30°$.



跟踪训练1 解 如图所示，取 AC 的中点 G，连接 EG, FG，

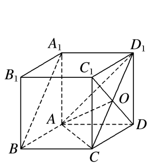
则 $EG/\!/AB$ 且 $EG=\frac{1}{2}AB$，

$GF/\!/CD$ 且 $GF=\frac{1}{2}CD$.

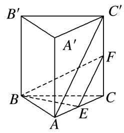


由 $AB=CD$ 知 $EG=FG$，从而可知$\angle GEF$ 为 EF 与 AB 所成的角，$\angle EGF$ 或其补角为 AB 与 CD 所成的角.
$\because AB$ 与 CD 所成的角为 $30°$，
$\therefore\angle EGF=30°$或 $150°$，
由 $EG=FG$ 知$\triangle EFG$ 为等腰三角形，
当$\angle EGF=30°$时，$\angle GEF=75°$；
当$\angle EGF=150°$时，$\angle GEF=15°$，
故 EF 与 AB 所成角的大小为 $15°$或 $75°$.

例2 证明 $\because ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，
$\therefore A_1D_1 \underline{/\!/} BC$，
$\therefore$四边形 A_1D_1CB 是平行四边形，$\therefore A_1B/\!/D_1C$，
$\therefore$直线 AO 与 A_1B 所成角即为直线 AO 与 D_1C 所成角，
如图，连接 AC, AD_1，易证 $AC=AD_1$，
又 O 为 CD_1 的中点，$\therefore AO\perp D_1C$，
$\therefore AO\perp A_1B$.



跟踪训练2 证明 如图，取 CC'的中点 F，连接 EF, BF，
$\because E$ 为 AC 的中点，F 为 CC'的中点，
$\therefore EF/\!/AC'$，$\therefore BE$ 和 EF 所成角为$\angle BEF$，
即为异面直线 BE 与 AC'所成角，且 $EF=\frac{1}{2}AC'$.
在正三棱柱 $ABC-A'B'C'$中，
$AC'=2\sqrt{2}$，$\therefore EF=\sqrt{2}$.
在等边三角形 ABC 中，$BE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，
在 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 中，$BF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.
在$\triangle BEF$ 中 $BE^2+EF^2=BF^2$，
$\therefore BE\perp EF$，即 $BE\perp AC'$.



随堂演练

1. D

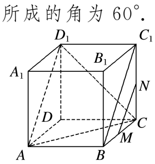
2. B ［和 AC 垂直且异面的直线有 A_1B_1 和 BB_1，故选 B.］

3. $60°$

解析 依题意知，$EG/\!/BD$，$EF/\!/AC$，所以$\angle GEF$ 或其补角即为异面直线 AC 与 BD 所成的角，又$\angle GEF=120°$，所以异面直线 BD 与 AC 所成的角为 $60°$.

4. $60°$

解析 如图所示，连接 BC_1，AD_1，
$\because MN/\!/BC_1/\!/AD_1$，
$\therefore\angle D_1AC$ 或其补角是异面直线 AC 和 MN 所成的角，连接 CD_1.
$\because\triangle ACD_1$ 是等边三角形，$\therefore\angle D_1AC=60°$.
即异面直线 AC 和 MN 所成的角为 $60°$.



8.6.2 直线与平面垂直

问题1 始终保持垂直.

问题2 可以发现，过一点垂直于已知平面的直线有且只有一条.

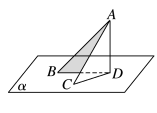
知识梳理

1. 任意一条 $l\perp\alpha$ 垂线 垂面 垂足

例1 ABD ［当 l 与 α 内的一条直线垂直时，不能保证 l 与平面 α 垂直，所以 A 不正确；当 l 与 α 不垂直时，l 可能与 α 内的无数条平行直线垂直，所以 B 不正确，C 正确；若 l 在 α 内，l 也可以和 α 内的无数条直线垂直，故 D 错误.］

跟踪训练1 AC ［由线面垂直的定义知，A 正确；当 $l\perp\alpha$ 时，l 与 α 内的直线相交或异面，但不会平行，故 B 错；C 显然是正确的；而 D 中，a 可能在 α 内，所以 D 错误.］

问题3 折痕 AD 是 BC 边上的高时，AD 与桌面垂直. 这时，由于翻折之后垂直关系不变，所以直线 AD 与平面 α 内的两条相交直线 BD，CD 都垂直.



知识梳理

两条相交直线 $a\cap b$

例2 证明 $\because$四边形 $ABCD$ 为正方形，
$\therefore BD\perp AC$，
又 $AA_1\perp$平面 $ABCD$，
$\therefore AA_1\perp BD$ 且 $AA_1\cap AC=A$，
$\therefore BD\perp$平面 AA_1O，
$\therefore BD\perp A_1O$，
令正方体的棱长为 2，连接 OM，A_1M(图略)，
则 $A_1O=\sqrt{6}$，$OM=\sqrt{3}$，$A_1M=3$，
$\therefore A_1O^2+OM^2=A_1M^2$，
$\therefore A_1O\perp OM$，
又 $OM\cap BD=O$，
$\therefore A_1O\perp$平面 MBD.

跟踪训练2 证明 (1)$\because AB$ 为$\odot O$ 的直径，$\therefore AM\perp BM$.
又 $PA\perp$平面 ABM，$BM\subset$平面 ABM，$\therefore PA\perp BM$.
又$\because PA\cap AM=A$，PA，$AM\subset$平面 PAM，
$\therefore BM\perp$平面 PAM.
又 $AN\subset$平面 PAM，$\therefore BM\perp AN$.
又 $AN\perp PM$，且 $BM\cap PM=M$，BM，$PM\subset$平面 PBM，
$\therefore AN\perp$平面 PBM.
(2)由(1)知 $AN\perp$平面 PBM，
$PB\subset$平面 PBM，$\therefore AN\perp PB$.
又$\because AQ\perp PB$，$AN\cap AQ=A$，AN，$AQ\subset$平面 ANQ，

$\therefore PB\perp$平面ANQ.

又$NQ\subset$平面ANQ,$\therefore PB\perp NQ$.

问题4　铅笔和它在桌面上的射影所成的角.

知识梳理

相交　垂直　直线PA　交点　点A　垂线　垂足　斜足　直线AO　$\angle PAO$　90°　0°　$0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ$

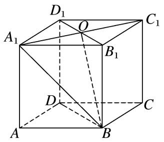
例3　**解**　(1)$\because AB\perp$平面AA_1D_1D,

$\therefore\angle AA_1B$就是A_1B与平面AA_1D_1D所成的角,

在$Rt\triangle AA_1B$中,$\angle BAA_1=90^\circ$,$AB=AA_1$,

$\therefore\angle AA_1B=45^\circ$,

$\therefore A_1B$与平面AA_1D_1D所成的角是45°.



(2)连接A_1C_1交B_1D_1于点O,连接BO.

$\because A_1O\perp B_1D_1$,$BB_1\perp A_1O$,$BB_1\cap B_1D_1=B_1$,$BB_1$,$B_1D_1\subset$平面$BB_1D_1D$,

$\therefore A_1O\perp$平面BB_1D_1D,

$\therefore\angle A_1BO$就是A_1B与平面BB_1D_1D所成的角.

设正方体的棱长为1,则$A_1B=\sqrt{2}$,$A_1O=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

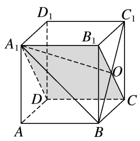
又$\because\angle A_1OB=90^\circ$,

$\therefore\sin\angle A_1BO=\dfrac{A_1O}{A_1B}=\dfrac{1}{2}$,又$0^\circ\leqslant\angle A_1BO\leqslant 90^\circ$,

$\therefore\angle A_1BO=30^\circ$,

$\therefore A_1B$与平面BB_1D_1D所成的角是30°.

跟踪训练3　**解**　连接BC_1,BC_1与B_1C相交于点O,连接A_1O.



设正方体的棱长为a.

因为$A_1B_1\perp B_1C_1$,$A_1B_1\perp B_1B$,$B_1C_1\cap B_1B=B_1$,B_1C_1,$B_1B\subset$平面BCC_1B_1,

所以$A_1B_1\perp$平面BCC_1B_1,

所以$A_1B_1\perp BC_1$.

又因为$BC_1\perp B_1C$,$A_1B_1\cap B_1C=B_1$,A_1B_1,$B_1C\subset$平面A_1DCB_1,

所以$BC_1\perp$平面A_1DCB_1,

所以A_1O为斜线A_1B在平面A_1DCB_1上的射影,$\angle BA_1O$为A_1B和平面A_1DCB_1所成的角.

在$Rt\triangle A_1BO$中,$A_1B=\sqrt{2}a$,$BO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以$BO=\dfrac{1}{2}A_1B$.

所以$\angle BA_1O=30^\circ$,

所以直线A_1B和平面A_1DCB_1所成的角为30°.

问题5　在空间中,垂直于同一直线的两直线不一定平行,但是垂直于同一平面的两直线一定平行.

知识梳理

平行

例4　**证明**　$\because AB\perp$平面PAD,$AE\subset$平面PAD,

$\therefore AE\perp AB$,

又$AB/\!/CD$,$\therefore AE\perp CD$.

$\because AD=AP$,E是PD的中点,$\therefore AE\perp PD$.

又$CD\cap PD=D$,CD,$PD\subset$平面PCD,

$\therefore AE\perp$平面PCD.

$\because MN\perp AB$,$AB/\!/CD$,$\therefore MN\perp CD$.

又$\because MN\perp PC$,$PC\cap CD=C$,PC,$CD\subset$平面PCD,

$\therefore MN\perp$平面PCD,$\therefore AE/\!/MN$.

跟踪训练4　**证明**　$\because PA\perp\alpha$,$l\subset\alpha$,$\therefore PA\perp l$.

同理$PB\perp l$.

$\because PA\cap PB=P$,PA,$PB\subset$平面PAB,$\therefore l\perp$平面PAB.

又$\because PA\perp\alpha$,$a\subset\alpha$,$\therefore PA\perp a$.

$\because a\perp AB$,$PA\cap AB=A$,PA,$AB\subset$平面PAB,

$\therefore a\perp$平面PAB.

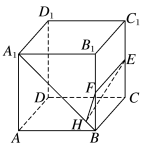
$\therefore a/\!/l$.

随堂演练

1.C　[①错误,②③正确.]

2.ACD

3.D　[如图,取BB_1的中点F,过点F作$FH\perp A_1B$于点H,连接EF,EH.在正方形BCC_1B_1中,E,F分别是CC_1,BB_1的中点,$\therefore EF/\!/BC$,又$BC\perp$平面ABB_1A_1,$\therefore EF\perp$平面ABB_1A_1,$\therefore EF\perp A_1B$,又$FH\perp A_1B$,$FH\cap EF=F$,$\therefore A_1B\perp$平面EFH,$\therefore A_1B\perp EH$,故EH为点E到直线A_1B的垂线段.在$Rt\triangle FHB$中,$FB=\dfrac{a}{2}$,$\angle FBH=\dfrac{\pi}{4}$,故$FH=FB\cdot\sin\angle FBH=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$,在$Rt\triangle FEH$中,$EF=a$,$EH=\sqrt{EF^2+FH^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$,$\therefore E$到$A_1B$的距离等于$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$.]

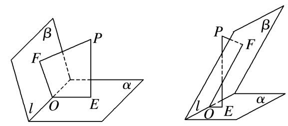


4.45°

解析　因为$PA\perp$平面ABC,所以斜线PB在平面ABC上的射影为AB,所以$\angle PBA$即为直线PB与平面ABC所成的角.在$\triangle PAB$中,$\angle BAP=90^\circ$,$PA=AB$,所以$\angle PBA=45^\circ$,即直线PB与平面ABC所成的角等于45°.

8.6.3　平面与平面垂直

例1　(1)C　[如图所示,过PE,PF作一个平面γ与二面角$\alpha-l-\beta$的棱交于点O,连接OE,OF.



因为$PE\perp\alpha$,$PF\perp\beta$,所以$PE\perp l$,$PF\perp l$,

所以$l\perp$平面γ,所以$l\perp OE$,$l\perp OF$,

则$\angle EOF$为$\alpha-l-\beta$的平面角,且它与$\angle EPF$相等或互补,

故二面角$\alpha-l-\beta$的平面角的大小为60°或120°,故选C.]

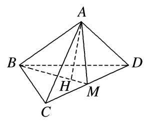
(2)**解**　如图,取CD的中点M,连接AM,BM,

则$AM\perp CD$,$BM\perp CD$.

由二面角的定义可知$\angle AMB$为二面角$A-CD-B$的平面角.

设点H是$\triangle BCD$的中心,连接AH,

则$AH\perp$平面BCD,且点H在线段BM上.



在$Rt\triangle AMH$中,$AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$,$HM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

则$\cos\angle AMB=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$,

即所求二面角的平面角的余弦值为$\dfrac{1}{3}$.

跟踪训练1　**解**　由已知$PA\perp$平面ABC,$BC\subset$平面ABC,

$\therefore PA\perp BC$.

$\because AB$是$\odot O$的直径,且点C在圆周上,

$\therefore AC\perp BC$.

又$\because PA\cap AC=A$,PA,$AC\subset$平面PAC,

$\therefore BC\perp$平面PAC.

又$PC\subset$平面PAC,$\therefore PC\perp BC$.

又$\because BC$是二面角$P-BC-A$的棱,

$\therefore\angle PCA$是二面角$P-BC-A$的平面角.

由$PA=AC$知$\triangle PAC$是等腰直角三角形,

$\therefore\angle PCA=45^\circ$,即二面角$P-BC-A$的大小是$45^\circ$.

例2　**证明**　$\because PC\perp$平面$ABCD$,$BD\subset$平面$ABCD$,$\therefore PC\perp BD$.

$\because$四边形$ABCD$为菱形,

$\therefore AC\perp BD$,

又$PC\cap AC=C$,PC,$AC\subset$平面PAC,

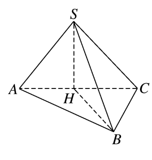
$\therefore BD\perp$平面PAC.

$\because BD\subset$平面PDB,$\therefore$平面$PDB\perp$平面PAC.

跟踪训练2　**证明**　作$SH\perp AC$交AC于点H,连接BH,

$\because SA=SC$,$\therefore AH=HC$.

在$Rt\triangle ABC$中,H是AC的中点,



$\therefore BH=\frac{1}{2}AC=AH$,

又 $SH=SH$, $SA=SB$,

$\therefore \triangle SAH\cong\triangle SBH$(SSS),

$\therefore SH\perp BH$,

又 $AC\cap BH=H$, $AC, BH\subset$ 平面 ABC,

$\therefore SH\perp$ 平面 ABC,

又 $SH\subset$ 平面 ASC, $\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 ASC.

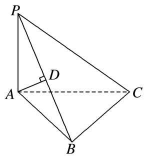
问题 找到黑板所在平面与地面所在平面的交线,在黑板上画出和该交线垂直的直线,即垂直于地面.

知识梳理

交线 垂直 $a\subset\alpha$ $a\perp l$

例 3 证明 如图,在平面 PAB 内,

作 $AD\perp PB$ 于点 D.



$\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC,

且平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$,

$AD\subset$ 平面 PAB,

$\therefore AD\perp$ 平面 PBC.

又 $BC\subset$ 平面 PBC, $\therefore AD\perp BC$.

又 $\because PA\perp$ 平面 ABC, $BC\subset$ 平面 ABC, $\therefore PA\perp BC$,

又 $\because PA\cap AD=A$, $\therefore BC\perp$ 平面 PAB.

又 $AB\subset$ 平面 PAB, $\therefore BC\perp AB$.

跟踪训练 3 证明 如题图(1),在梯形 $ABCD$ 中, $AD=CD=2$, $\angle ADC=90°$,

过 C 作 $CE\perp AB$, E 为垂足,

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为正方形, $\therefore CE=AE=EB=2$,

$\therefore \angle ACE=\angle BCE=45°$,

$\therefore \angle ACB=90°$,即 $BC\perp AC$,

如题图(2),平面 $ACD\perp$ 平面 ABC,

平面 $ACD\cap$ 平面 $ABC=AC$,

又 $BC\subset$ 平面 ABC 且 $BC\perp AC$,

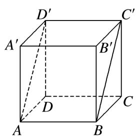
$\therefore BC\perp$ 平面 ACD.

随堂演练

1. C [由面面垂直的判定定理知,凡过 l 的平面都垂直于平面 α,这样的平面有无数个.]

2. C [$\because n\perp\beta$, $m/\!/n$, $\therefore m\perp\beta$,又 $m\subset\alpha$,由面面垂直的判定定理,得 $\alpha\perp\beta$.]

3. B [如图,由正方体的性质易知 $AB\perp$ 平面 $ADD'A'$,则 $AB\perp AD$, $AB\perp AD'$,
则 $\angle D'AD$ 为二面角 $D'-AB-D$ 的平面角,
又因为四边形 $ADD'A'$ 为正方形,
所以 $\angle D'AD=45°$,即二面角 $D'-AB-D$ 的大小是 $45°$,故选 B.]



4. $\sqrt{5}$

解析 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC,

平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$,

$\angle PAC=90°$,

$\therefore PA\perp$ 平面 ABC, $\therefore PA\perp AB$,

$\therefore PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

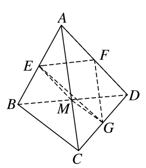
习题课 异面直线所成的角及直线与平面所成的角的解法

例 1 解 取 AB, AD, DC, BD 的中点分别为 E, F, G, M,连接 EF, FG, GM, ME, EG.

则 $MG \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}BC$, $EM \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AD$.

因为 $AD\perp BC$,所以 $EM\perp MG$.

在 Rt$\triangle EMG$ 中,有 $EG=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$.



由作图可知, $\angle EFG$ 为异面直线 AC 与 BD 所成的角(或补角).

在 $\triangle EFG$ 中,因为 $EF=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{13}}{4}$,

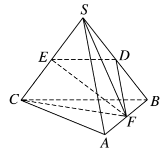
$FG=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以 $EF^2+FG^2=EG^2$,

所以 $EF\perp FG$,即 $AC\perp BD$.

所以异面直线 AC 与 BD 所成的角等于 $90°$.

跟踪训练 1 解 如图,连接 CF, SF,设四面体 $S-ABC$ 的棱长为 a,则 $SF=CF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.



因为 E 为 SC 的中点,

所以 $EF\perp SC$.

在 Rt$\triangle SEF$ 中, $SE=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}a$,

所以 $EF=\sqrt{SF^2-SE^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

取 SB 的中点为 D,连接 ED, FD.

则 $\angle DFE$ 为异面直线 EF 与 SA 所成的角(或补角).

因为 $BC=SA=a$,

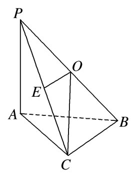
而 $FD/\!/SA$,且 $FD=\frac{1}{2}SA$, $ED/\!/CB$,且 $ED=\frac{1}{2}CB$,

所以 $FD=ED=\frac{1}{2}a$,所以 $FD^2+ED^2=EF^2$.

故 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形,可得 $\angle EFD=45°$,

即异面直线 EF 与 SA 所成的角是 $45°$.

例 2 解 如图,取 PC 的中点为 E,连接 EO,则 $OE/\!/BC$.



$\because PA\perp$ 平面 ABC, $BC\subset$ 平面 ABC,

$\therefore PA\perp BC$.又 $AC\perp BC$, $AC\cap PA=A$,

$\therefore BC\perp$ 平面 PAC.又 $OE/\!/BC$,

$\therefore OE\perp$ 平面 PAC,

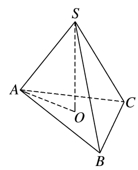
$\therefore \angle OCE$ 为直线 CO 与平面 PAC 所成的角.

设 $PA=AC=BC=2$,则 $OE=1$, $CE=\sqrt{2}$, $OC=\sqrt{3}$,

$\therefore \cos\angle OCE=\frac{CE}{OC}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore$ 直线 CO 与平面 PAC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

跟踪训练 2 解 如图,设正三棱锥 $S-ABC$ 的底面边长为 a,则侧棱长为 $2a$.



设 O 为底面 $\triangle ABC$ 的中心,

则 $\angle SAO$ 为 SA 和平面 ABC 所成的角.

在 Rt$\triangle SOA$ 中,

因为 $AO=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,

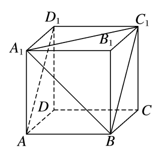
所以 $\cos\angle SAO=\frac{AO}{SA}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,

即侧棱和底面所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

随堂演练

1. A

2. C [如图,连接 BC_1, A_1C_1.因为 $BC_1/\!/AD_1$,所以异面直线 A_1B 与 AD_1 所成的角即为直线 A_1B 与 BC_1 所成的角.在 $\triangle A_1BC_1$ 中, $A_1B=BC_1=A_1C_1$,所以 $\angle A_1BC_1=60°$,故异面直线 A_1B 与 AD_1 所成的角为 $60°$.]

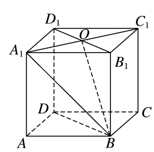


3. 2

解析 因为 $PA\perp$ 平面 ABC,所以 AC 为斜线 PC 在平面 ABC 上的射影,所以 $\angle PCA$ 即为 PC 和平面 ABC 所成的角.在 $\triangle PAC$ 中,因为 $AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}PA$,所以 $\tan\angle PCA=\frac{PA}{AC}=2$.

4. $\frac{\pi}{6}$

解析 如图,连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 O,连接 BO.



因为 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $A_1O\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

所以 $BB_1\perp A_1O$.

又因为 $A_1O\perp B_1D_1$, $BB_1\cap B_1D_1=B_1$, $BB_1\subset$ 平面 BB_1D_1D, $B_1D_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,

所以 $A_1O\perp$ 平面 BB_1D_1D,

所以 $\angle A_1BO$ 就是 A_1B 和平面 BB_1D_1D 所成的角.

设正方体的棱长为 a,

则 $A_1B=\sqrt{2}a$, $A_1O=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

又因为$\angle A_1OB=90°$,所以$\sin\angle A_1BO=\dfrac{A_1O}{A_1B}=\dfrac{1}{2}$,

又$\angle A_1BO\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以$\angle A_1BO=\dfrac{\pi}{6}$,

所以A_1B和平面BB_1D_1D所成的角是$\dfrac{\pi}{6}$.

习题课　二面角的平面角的常见解法

例 1　(1)**解**　取AB的中点D,连接VD,CD,

∵在$\triangle VAB$中,$VA=VB=AB=2$,

∴$\triangle VAB$为等边三角形,

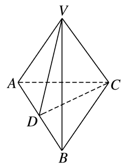
∴$VD\perp AB$且$VD=\sqrt{3}$,

同理$CD\perp AB$,$CD=\sqrt{3}$,

∴$\angle VDC$为二面角$V-AB-C$的平面角,

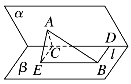
而$\triangle VDC$是等边三角形,$\angle VDC=60°$,

∴二面角$V-AB-C$的大小为$60°$.



(2)**解**　如图,作$AC\perp l$,$BD\perp l$,C,D为垂足,

则$AC=2$,$BD=4$,$AB=10$.



在β内过C作$CE// DB$,且$CE=DB$,连接BE,AE,

∴四边形$CEBD$为平行四边形,

∴$BE// l$,

∴$\angle ABE$为AB与棱l所成的角,

∵$BD// CE$,∴$l\perp AC$,$l\perp CE$,

∴$\angle ACE$为$\alpha-l-\beta$的平面角,

∴$\angle ACE=60°$,$AC=2$,$BD=4$,

∴$AE=\sqrt{2^2+4^2-2\times 2\times 4\times\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{3}$.

又$BE// l$,$l\perp$平面ACE,

∴$BE\perp AE$,

∴$\sin\angle ABE=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{2\sqrt{3}}{10}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

例 2　**解**　∵$SB=BC$且E是SC的中点,

∴BE是等腰三角形SBC底边SC的中线,∴$SC\perp BE$.

又已知$SC\perp DE$,$BE\cap DE=E$,BE,$DE\subset$平面BDE,

∴$SC\perp$平面BDE,∴$SC\perp BD$.

又$SA\perp$平面ABC,$BD\subset$平面ABC,

∴$SA\perp BD$,而$SC\cap SA=S$,SC,$SA\subset$平面SAC,

∴$BD\perp$平面SAC.

∵平面$SAC\cap$平面$BDE=DE$,

平面$SAC\cap$平面$BDC=DC$,

∴$BD\perp DE$,$BD\perp DC$,

∴$\angle EDC$是所求二面角的平面角.

∵$SA\perp$底面ABC,∴$SA\perp AB$,$SA\perp AC$.

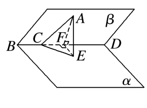
设$SA=2$,则$AB=2$,$BC=SB=2\sqrt{2}$.

∵$AB\perp BC$,∴$AC=2\sqrt{3}$,∴$\angle ACS=30°$.

又已知$DE\perp SC$,∴$\angle EDC=60°$.

即所求的二面角等于$60°$.

例 3　**解**　如图,过A作$AF\perp BD$,F为垂足,作$AE\perp$平面α,E为垂足,连接EF,CE,



∴由三垂线定理知$BD\perp EF$,

∴$\angle AFE$为二面角$\alpha-BD-\beta$的平面角.

依题意$\angle ACF=45°$,$\angle ACE=30°$,设$AC=2$,

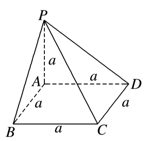
∴$AF=CF=\sqrt{2}$,$AE=1$,

∴$\sin\angle AFE=\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

∴$\angle AFE=45°$.

∴二面角$\alpha-BD-\beta$的大小为$45°$.

例 4　**解**　如图,



∵$PA\perp$平面$ABCD$,$AD\subset$平面$ABCD$,

∴$PA\perp AD$,

又$AD\perp AB$,

且$PA\cap AB=A$,PA,$AB\subset$平面PAB,

∴$AD\perp$平面PAB.

同理$BC\perp$平面PAB.

∴$\triangle PCD$在平面PBA上的射影为$\triangle PAB$,

设平面PBA与平面PCD所成的二面角为θ,

∴$\cos\theta=\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCD}}=\dfrac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

∴$\theta=45°$.

故平面PBA与平面PCD所成的二面角的大小为$45°$.

随堂演练

1.B　[∵$PA\perp$底面$ABCD$,$CD\subset$平面$ABCD$,

∴$CD\perp PA$,

又底面$ABCD$是正方形,∴$CD\perp AD$,

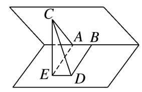
又$PA\cap AD=A$,∴$CD\perp$平面PAD,∴$CD\perp PD$,

可知$\angle PDA$为侧面PCD与底面$ABCD$所成的二面角的平面角.

在$\mathrm{Rt}\triangle PAD$中,由$PA=AD=1$,可得$\angle PDA=45°$.

即侧面PAD与底面$ABCD$所成的二面角的大小是$45°$.]

2.B　[如图,过点A作$AE// BD$且$AE=BD$,连接CE,DE,则$AE\perp AB$,即$\angle CAE$为二面角的平面角,由题意,得$AE=BD=8\ \mathrm{cm}$,$AC=6\ \mathrm{cm}$,∵$DE// AB$,∴$DE\perp CE$,∴$CE^2=CD^2-ED^2=52$,由余弦定理,



得$\cos\angle CAE=\dfrac{AE^2+AC^2-CE^2}{2AE\cdot AC}=\dfrac{64+36-52}{2\times 8\times 6}=\dfrac{1}{2}$,

则$\angle CAE=60°$,即这个二面角的度数为$60°$.]

3.$60°$

解析　正四棱锥的体积为12,底面对角线的长为$2\sqrt{6}$,

则底面边长为$2\sqrt{3}$,底面积为12,所以正四棱锥的高为3,

所以侧面与底面所成的二面角的正切值为$\sqrt{3}$,故所求的二面角为$60°$.

4.1

解析　∵$AB\perp$平面BCD,$CD\subset$平面BCD,∴$AB\perp CD$,又$BC\perp CD$,∴$CD\perp$平面ABC,

∴$CD\perp AC$,∴$\angle ACB$为二面角$B-CD-A$的平面角.∵$BC\perp CD$,∴$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{2}$.∵$AB\perp$平面$BCD$,∴$AB\perp BC$,$AB\perp BD$,∴$AB=\sqrt{AD^2-BD^2}=1$,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\tan\angle ACB=\dfrac{AB}{BC}=1$.

习题课　空间中距离问题的解法

问题 1　无数条.仅有1条.两异面直线的距离即为公垂线段的长度.

例 1　**解**　(1)由$BC\perp A_1B$,$CC_1\perp BC$得,BC即为异面直线A_1B与C_1C的公垂线,

所以A_1B与C_1C的距离为a.

(2)连接B_1A交BA_1于O点(图略),则$B_1O\perp A_1B$且$B_1C_1\perp B_1O$,

所以B_1O即为异面直线A_1B与B_1C_1的公垂线,

所以异面直线A_1B与B_1C_1的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

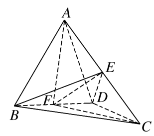
跟踪训练 1　(1)**证明**　连接AF,FC.

∵空间四边形$ABCD$的边长都为10,AF,CF是$\triangle ABD$和$\triangle CBD$对应边上的中线,

∴$AF=CF$,∴$\triangle AFC$是等腰三角形.

∵EF是底边上的中线,∴$EF\perp AC$.

同理$EF\perp BD$,∴EF是AC,BD的公垂线段.



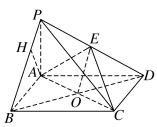
(2)**解**　在$\triangle ABC$中,$AB=BC=10$,$AC=16$,E为AC的中点,

∴$BE=6$,

在$\mathrm{Rt}\triangle BEF$中,$BF=4$,

∴异面直线AC,BD的距离为$EF=2\sqrt{5}$.

例 2　(1)**证明**　如图,设BD与AC的交点为O,连接EO.



因为四边形$ABCD$为矩形,所以点O为BD的中点.

又点E为PD的中点,

所以$EO// PB$.

因为$EO\subset$平面AEC,$PB\not\subset$平面AEC,

所以$PB//$平面AEC.

(2)**解**　**方法一**　$V=\dfrac{1}{6}AP\cdot AB\cdot AD=\dfrac{\sqrt{3}}{6}AB$.

由$V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,可得$AB=\dfrac{3}{2}$.

作$AH\perp PB$于点H.

由题设知$BC\perp$平面PAB,所以$BC\perp AH$,故$AH\perp$平面PBC,即AH的长就是点A到平面PBC的距离.

因为$PB=\sqrt{AP^2+AB^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$,

所以$AH=\dfrac{AP\cdot AB}{PB}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$,

所以点A到平面PBC的距离为$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

方法二 $V=\frac{1}{6}AP\cdot AB\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{6}AB$.

由 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}$，可得 $AB=\frac{3}{2}$.

易得 $V_{三棱锥P-ABC}=V_{三棱锥P-ABD}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

设 A 到平面 PBC 的距离为 h.

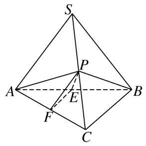
由 $CB\perp AB$，$CB\perp PA$，得 $CB\perp$ 平面 PAB，

所以 $CB\perp PB$，$PB=\sqrt{AP^2+AB^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，

因为 $CB=\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}CB\cdot PB=\frac{\sqrt{39}}{4}$，

$V_{三棱锥P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以 $h=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

跟踪训练 2 **解** **方法一** 如图，连接 PA，PB，



易知 $SA\perp AC$，$BC\perp AC$.

分别取 AB，AC 的中点 E，F，连接 PE，EF，PF，

则 $EF/\!/BC$，$PF/\!/SA$.

所以 $EF\perp AC$，$PF\perp AC$.

因为 $PF\cap EF=F$，所以 $AC\perp$ 平面 PEF，

所以 $PE\perp AC$.

易证 $\triangle SAC\cong\triangle SBC$，所以 $PA=PB$.

又 E 是 AB 的中点，所以 $PE\perp AB$.

因为 $AB\cap AC=A$，所以 $PE\perp$ 平面 ABC.

从而 PE 的长就是点 P 到平面 ABC 的距离.

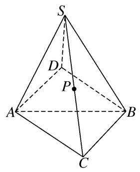
因为 P 是 SC 的中点，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle APE$ 中，

$AP=\frac{1}{2}SC=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $PE=\sqrt{AP^2-AE^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即点 P 到平面 ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

方法二 如图，过点 A 作 BC 的平行线，过点 B 作 AC 的平行线，两直线交于点 D.



因为 $AC=BC=1$，$AB=\sqrt{2}$，所以 $AC\perp BC$. 所以四边形 $ADBC$ 为正方形，连接 SD.

易知 $AC\perp SA$，又 $AC\perp AD$，$SA\cap AD=A$，

所以 $AC\perp$ 平面 SDA，所以 $AC\perp SD$.

易知 $BC\perp SB$，又 $BC\perp BD$，$SB\cap BD=B$，

所以 $BC\perp$ 平面 SDB，所以 $BC\perp SD$.

因为 $BC\cap AC=C$，所以 $SD\perp$ 平面 $ADBC$.

所以 SD 的长即点 S 到平面 ABC 的距离，

在 $\mathrm{Rt}\triangle SAD$ 中，易得 $SD=\sqrt{3}$.

因为点 P 为 SC 的中点，

故点 P 到平面 ABC 的距离为 $\frac{1}{2}SD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

问题 2 一条直线与一个平面平行时，这条直线上任意一点到这个平面的距离，叫做这条直线到这个平面的距离.

如果两个平面平行，那么其中一个平面内的任意一点到另一个平面的距离都相等，我们把它叫做这两个平行平面间的距离.

例 3 (1)**证明** 连接 B_1D_1（图略）.

$\because M$，N，E，F 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1，B_1C_1，C_1D_1 的中点，

$\therefore MN/\!/B_1D_1$，$EF/\!/B_1D_1$，

$\therefore MN/\!/EF$，

$\therefore MN/\!/$ 平面 $EFDB$.

连接 MF，$\because ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，

则 $MF/\!/A_1D_1$ 且 $MF=A_1D_1$，

又 $A_1D_1=AD$ 且 $A_1D_1/\!/AD$，

$\therefore MF/\!/AD$ 且 $MF=AD$，

$\therefore$ 四边形 $MFDA$ 是平行四边形，

$\therefore AM/\!/DF$，

$\therefore AM/\!/$ 平面 $EFDB$.

由 $MN/\!/$ 平面 $EFDB$，$MN\cap AM=M$，

$\therefore$ 平面 $AMN/\!/$ 平面 $EFDB$.

(2)**解** 平面 AMN 与平面 $EFDB$ 之间的距离即为 D 到平面 AMN 的距离 h，

由 $V_{三棱锥M-ADN}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADN}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{12}$，

由 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{3\sqrt{2}}{4}a=\frac{3}{8}a^2$，

由 $V_{三棱锥D-AMN}=\frac{1}{3}S_{\triangle AMN}\cdot h$，

$\therefore h=\frac{2}{3}a$，

即平面 AMN 与平面 $EFDB$ 之间的距离为 $\frac{2}{3}a$.

跟踪训练 3 **解** $AC/\!/A_1C_1$，$AB_1/\!/DC_1$，$AC\cap AB_1=A$，$A_1C_1\cap DC_1=C_1$，

故平面 $ACB_1/\!/$ 平面 A_1C_1D，

取平面 ACB_1 上一点 B_1，

则点 B_1 到平面 A_1C_1D 的距离就是两平行平面间的距离，

设点 B_1 到平面 A_1C_1D 的距离为 h，

$\therefore V_{三棱锥D-A_1C_1B_1}=S_{\triangle A_1B_1C_1}\times\frac{1}{3}DD_1=\frac{1}{6}$，

$\because A_1C_1$，DC_1，A_1D 都是正方形的对角线，长为 $\sqrt{2}$，

$\therefore\triangle A_1DC_1$ 是正三角形，

则 $S_{\triangle A_1DC_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $\because V_{三棱锥B_1-A_1C_1D}=V_{三棱锥D-A_1B_1C_1}$，

$\therefore S_{\triangle A_1DC_1}\times\frac{h}{3}=\frac{1}{6}$，

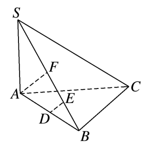
即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{h}{3}=\frac{1}{6}$，

解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

随堂演练

1. B
2. D
3. C ［如图，过 D 作 $DE\perp SB$ 于 E，过 A 作 $AF\perp SB$ 于 F，$SA\perp$ 底面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $SA\perp BC$，$AB\perp BC$，所以 $BC\perp$ 平面 SAB，平面 $SAB\cap$ 平面 $SBC=SB$，$DE\perp SB$，所以 $DE\perp$ 平面 SBC，$AF\perp SB$，所以 $DE=\frac{AF}{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABS$ 中，$AF=\frac{SA\cdot AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$，所以 $DE=\frac{6}{5}$.］



4. 8

解析 由体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，得 $96=\frac{1}{3}\times36h$，$\therefore h=8$，即点 P 到平面 $ABCD$ 的距离是 8.

章末复习课

例 1 **解** 由题意知，所求几何体的表面积由三部分组成：圆台下底面、侧面和一半球面，

$S_{半球}=8\pi\ \mathrm{cm}^2$，$S_{圆台侧}=35\pi\ \mathrm{cm}^2$，$S_{圆台底}=25\pi\ \mathrm{cm}^2$，

故所求几何体的表面积为 $68\pi\ \mathrm{cm}^2$.

由 $V_{圆台}=\frac{1}{3}\times[\pi\times2^2+\sqrt{(\pi\times2^2)\times(\pi\times5^2)}+\pi\times5^2]\times4=52\pi(\mathrm{cm}^3)$，

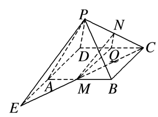
$V_{半球}=\frac{4}{3}\pi\times2^3\times\frac{1}{2}=\frac{16}{3}\pi(\mathrm{cm}^3)$，

所以所求几何体的体积为

$V_{圆台}-V_{半球}=52\pi-\frac{16}{3}\pi=\frac{140}{3}\pi(\mathrm{cm}^3)$.

跟踪训练 1 A ［$V_{三棱锥B_1-ABC_1}=V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}-V_{三棱锥A-A_1B_1C_1}-V_{三棱锥C_1-ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}-\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{12}$.］

例 2 **证明** (1)如图，取 DC 的中点 Q，连接 MQ，NQ.



$\because NQ$ 是 $\triangle PDC$ 的中位线，

$\therefore NQ/\!/PD$.

$\because NQ\not\subset$ 平面 PAD，$PD\subset$ 平面 PAD，

$\therefore NQ/\!/$ 平面 PAD.

$\because M$ 是 AB 的中点，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore MQ/\!/AD$.

$\because MQ\not\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，

$\therefore MQ/\!/$ 平面 PAD.

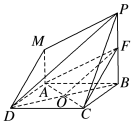
$\because MQ\cap NQ=Q$，$\therefore$ 平面 $MNQ/\!/$ 平面 PAD.

$\because MN\subset$ 平面 MNQ，$\therefore MN/\!/$ 平面 PAD.

(2)$\because$ 平面 $MNQ/\!/$ 平面 PAD，平面 $PEC\cap$ 平面 $MNQ=MN$，平面 $PEC\cap$ 平面 $PAD=PE$，

$\therefore MN/\!/PE$.

跟踪训练 2　**解**　当点 F 是 PB 的中点时,平面 AFC∥平面 PMD,证明如下:如图,连接 BD 与 AC 交于点 O,连接 FO,则 $PF=\frac{1}{2}PB$.

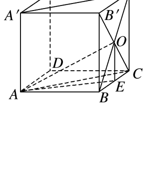


∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
∴O 是 BD 的中点,∴OF∥PD.
又 $OF\not\subset$平面 PMD,$PD\subset$平面 PMD,
∴OF∥平面 PMD.
又 MA∥PB 且 $MA=\frac{1}{2}PB$,
∴PF∥MA 且 $PF=MA$,
∴四边形 $AFPM$ 是平行四边形,∴AF∥PM.
又 $AF\not\subset$平面 PMD,$PM\subset$平面 PMD,
∴AF∥平面 PMD.
又 $AF\cap OF=F$,$AF\subset$平面 AFC,$OF\subset$平面 AFC,
∴平面 AFC∥平面 PMD.

例 3　**证明**　(1)因为平面 $PAD\perp$底面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$底面 $ABCD=AD$,$PA\subset$平面 PAD,$PA\perp AD$,
所以 $PA\perp$底面 $ABCD$.
(2)因为 AB∥CD,$CD=2AB$,E 为 CD 的中点,
所以 AB∥DE,且 $AB=DE$.
所以四边形 $ABED$ 为平行四边形,所以 BE∥AD.
又因为 $BE\not\subset$平面 PAD,$AD\subset$平面 PAD,
所以 BE∥平面 PAD.
(3)因为 $AB\perp AD$,且四边形 $ABED$ 为平行四边形,
所以 $BE\perp CD$,$AD\perp CD$.
由(1)知 $PA\perp$底面 $ABCD$,所以 $AP\perp CD$.
又因为 $AP\cap AD=A$,AP,$AD\subset$平面 PAD,
所以 $CD\perp$平面 PAD,所以 $CD\perp PD$.
因为 E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点,
所以 PD∥EF,所以 $CD\perp EF$.
又因为 $CD\perp BE$,$EF\cap BE=E$,EF,$BE\subset$平面 BEF,
所以 $CD\perp$平面 BEF. 又 $CD\subset$平面 PCD,
所以平面 $BEF\perp$平面 PCD.

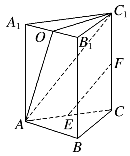
跟踪训练 3　**证明**　(1)在直角梯形 $ABCD$ 中,$AD=CD=2$,$AB=4$,
所以 $AC=BC=2\sqrt{2}$,
所以 $AC^2+BC^2=AB^2$,所以 $AC\perp BC$.
因为 $AF\perp$平面 $ABCD$,AF∥BE,
所以 $BE\perp$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,
所以 $BE\perp AC$.
又 $BE\subset$平面 BCE,$BC\subset$平面 BCE,$BE\cap BC=B$,
所以 $AC\perp$平面 BCE.
(2)因为 $AF\perp$平面 $ABCD$,$AD\subset$平面 $ABCD$,
所以 $AF\perp AD$.
又$\angle DAB=90°$,所以 $AB\perp AD$.
又 $AF\subset$平面 $ABEF$,$AB\subset$平面 $ABEF$,$AF\cap AB=A$,
所以 $AD\perp$平面 $ABEF$.
又 $AE\subset$平面 $ABEF$,所以 $AD\perp AE$.

例 4　**解**　(1)∵$A'C'$∥AC,
∴AO 与 $A'C'$所成的角就是$\angle OAC$(或其补角).
∵$AB\perp$平面 BC',$OC\subset$平面 BC',
∴$OC\perp AB$,
又 $OC\perp BO$,$AB\cap BO=B$,AB,$BO\subset$平面 ABO,
∴$OC\perp$平面 ABO.
又 $OA\subset$平面 ABO,∴$OC\perp OA$.
在 Rt△AOC 中,$OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$AC=\sqrt{2}$,
$\sin\angle OAC=\frac{OC}{AC}=\frac{1}{2}$,
∴$\angle OAC=30°$.
即 AO 与 $A'C'$所成的角为 $30°$.
(2)如图,作 $OE\perp BC$ 于点 E,连接 AE.



∵平面 $BC'\perp$平面 $ABCD$,平面 $BC'\cap$平面 $ABCD=BC$,$OE\subset$平面 BC',
∴$OE\perp$平面 $ABCD$,
∴$\angle OAE$ 为 OA 与平面 $ABCD$ 所成的角.
在 Rt△OAE 中,$OE=\frac{1}{2}$,
$AE=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,
∴$\tan\angle OAE=\frac{OE}{AE}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.
即 AO 与平面 $ABCD$ 所成的角的正切值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.
(3)由(1)可知 $OC\perp$平面 AOB.
又∵$OC\subset$平面 AOC,∴平面 $AOB\perp$平面 AOC.
即二面角 $B-AO-C$ 的大小为 $90°$.

跟踪训练 4　(1)A　[如图,连接 AC_1,取 A_1B_1 的中点记为 O,连接 C_1O,AO,



∵$C_1A_1=C_1B_1$,O 为中点,
∴$C_1O\perp A_1B_1$,
又 $AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$,
∴$AA_1\perp C_1O$,
又 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$,
∴$C_1O\perp$平面 AA_1B_1B,
又 EF∥AC_1,
∴EF 与平面 AA_1B_1B 所成的角即为$\angle C_1AO$,
在 Rt△C_1AO 中,$\angle C_1OA=90°$,
$C_1O=\sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2}=3$,$AC_1=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$,
$\sin\angle C_1AO=\frac{C_1O}{AC_1}=\frac{1}{2}$,
∴$\angle C_1AO=30°$.]
(2)**解**　∵$AB\perp AD$,CD∥AB,
∴$CD\perp AD$,
又 $PA\perp$底面 $ABCD$,$CD\subset$平面 $ABCD$,∴$PA\perp CD$.
又 $PA\cap AD=A$,PA,$AD\subset$平面 PAD,
∴$CD\perp$平面 PAD,
又 $PD\subset$平面 PAD,∴$CD\perp PD$,
∴$\angle PDA$ 是二面角 $P-CD-B$ 的平面角.
又直线 PB 与 CD 所成的角为 $45°$,
∴$\angle PBA=45°$,$PA=AB$.
∴在 Rt△PAD 中,$PA=AD$,∴$\angle PDA=45°$,
即二面角 $P-CD-B$ 的大小为 $45°$.

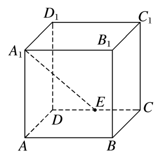
随堂演练

1.B　[对于 A,α 内有无数条直线与β平行,当这无数条直线互相平行时,α 与 β 可能相交,所以 A 不正确;对于 B,根据两平面平行的判定定理与性质知,B 正确;对于 C,平行于同一条直线的两个平面可能相交,也可能平行,所以 C 不正确;对于 D,垂直于同一平面的两个平面可能相交,也可能平行,如长方体的相邻两个侧面都垂直于底面,但它们是相交的,所以 D 不正确,综上可知选 B.]

2.B　[设圆锥中水的底面半径为 r cm,
由题意知$\frac{1}{3}\pi r^2\times\sqrt{3}r=\pi\times2^2\times6$,得 $r=2\sqrt{3}$,
∴水面的高度是$\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6$(cm).]

3.C　[过点 P 分别作 BD,AB 的平行线,这两条直线都符合题意.]

4.C　[如图,由题意知,$A_1B_1\perp$平面 BCC_1B_1,从而 $A_1B_1\perp BC_1$,又 $B_1C\perp BC_1$,且 $A_1B_1\cap B_1C=B_1$,所以 $BC_1\perp$平面 A_1B_1CD,又 $A_1E\subset$平面 A_1B_1CD,所以 $A_1E\perp BC_1$.]



第九章　统　计

§9.1　随机抽样

9.1.1　简单随机抽样

问题 1　普查;不好;抽样调查.

知识梳理

每一个　一部分　估计　推断　全体　那部分　个体数

例 1　C　[了解玉米种子的发芽情况,是具有破坏性的调查,因而适合抽样调查;了解全班同学是否给父母洗过脚,调查的对象比较少,容易调查,因而适合全面调查;了解某批东风导弹的射程是具有破坏性的调查,因而适合抽样调查;了解全国中学生安全自救知识的掌握情况,人数太多,不适合全面调查,应用抽样调查.故四位同学所列举的事例的调查方式错误的是小夏.]

跟踪训练 1　A　[A 选项,了解北京每天的流动人口数,采用抽样调查方式,故正确;
B 选项,旅客上飞机前的安检,应采用全面调查方式,故错误;
C 选项,了解北京居民"建党百年庆祝大会"期间的出行方式,应采用抽样调查方式,故错误;
D 选项,日光灯管厂要检测一批灯管的使用寿命,由于调查带有破坏性,故应采用抽样调查方式,故错误.]

问题 2　我们可以从袋中随机地摸出一个球,记录颜色后放回,摇匀后再摸出一个球,如此重复,即可用红球出现的频率估计出红球的比例.也可以采用不放回的摸球去估计红球的比例.

知识梳理

逐个　相等　未进入样本的各个个体　放回　不放回

例 2　(1)AB　[根据简单随机抽样的特点逐个判断. A 项不是简单随机抽样,因为简单随机抽样要求被抽取的样本总体的个数是有限的;B 项不是简单随机抽样,虽然"一次性抽取"和"逐个抽取"不影响个体被抽到的可能性,但简单随机抽样要求的是"逐个抽取";C 项是简单随机抽样,因为总体中的个体数是有限的,并且是从总体中逐个进行抽取的,是不放回、等可能的抽样;D 项是简单随机抽样,因为它是有放回抽样.]

(2)B　[在简单随机抽样中,每一个个体被抽到的可能性都相等,与第几次抽样无关,故 A,C,D 不正确,B 正确.]

跟踪训练 2　(1)C　[由题意可知在此简单随机抽样中,总体是 500 名学生的体重,A 错误;个体是每个学生的体重,B 错误;样本量为 60,D 错误.]

(2)A　[因为从含有 N 个个体的总体中通过简单随机抽样抽取一个容量为 30 的样本时,每个个体被抽到的可能性为 $\frac{30}{N}$,所以 $\frac{30}{N}=0.25$,从而有 $N=120$.]

问题 3　抽签.不可以,人数太多.

例 3　**解**　(1)将 50 名志愿者编号,号码分别是 1,2,…,50.

(2)将号码分别写在外观、质地等无差别的小纸片上作为号签.

(3)将小纸片放入一个不透明的盒里,充分搅匀.

(4)从盒中不放回地逐个抽取 8 个号签,使与号签上编号相同的志愿者进入样本,组成志愿服务小组.

跟踪训练 3　(1)B　[若样本具有很好的代表性,则每一个个体被抽取的机会相等,故需要对号签搅拌均匀.]

(2)B　[由于总体相对较大,样本量较小,故采用随机数法较为合适.]

知识梳理

$\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_N}{N}$　$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i$

$\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$

例 4　**解**　样本的平均数为 $\overline{y}=\frac{6\times5+8\times8+10\times4+12\times1+15\times2}{20}=8.8$,

样本中消费不低于 10 元的比例为 $\frac{4+1+2}{20}=0.35$,

所以估计该校高一全体学生每天午餐的平均费用为 8.8 元,在全体学生中,午餐费用不低于 10 元的比例约为 0.35.

跟踪训练 4　D

随堂演练

1. D　[选项 A 中,平面直角坐标系中有无数个点,这与要求总体中的个体数有限不相符,故错误;选项 B 中,一次性抽取不符合简单随机抽样逐个抽取的特点,故错误;选项 C 中,50 名战士是最优秀的,不符合简单随机抽样的等可能性,故错误.]
2. B　[个体数和样本容量较小时适合用抽签法,排除 A,D;C 中,甲、乙两厂生产的两箱产品质量可能差别较大,也不适合,故选 B.]
3. $\frac{1}{20}$

解析　因为是简单随机抽样,故每个个体被抽到的机会相等,所以指定的某个个体被抽到的可能性为 $\frac{1}{20}$.

4. 0.6

解析　10 名学员投中的平均次数为 $\frac{4\times5+3\times6+2\times7+1\times8}{10}=6$,所以投中的比例约为 $\frac{6}{10}=0.6$.

9.1.2　分层随机抽样

问题 1　不可以直接使用简单随机抽样.可以将男生和女生看作两个群体,分别进行简单随机抽样,然后汇总作为总体的一个样本,即采用分层随机抽样的方法.

$n_{男}=\frac{326}{712}\times50\approx23$,$n_{女}=\frac{386}{712}\times50\approx27$.

知识梳理

简单随机抽样　分层随机抽样　层

例 1　C　[由于老年教师、中年教师和青年教师的身体情况会有明显的差异,所以要用分层随机抽样.]

跟踪训练 1　C　[保证每个个体等可能的被抽取是两种基本抽样方式的共同特征,为了保证这一点,分层随机抽样时必须在所有层都按同一抽样比等可能抽样.]

问题 2　分层随机抽样的实施步骤:

第一步,按某种特征将总体分成若干部分(层);

第二步,计算各层所占比例.所占比例$=\frac{各层总的个体数}{总体中的个体数}$;

第三步,计算各层抽取的个体数,各层抽取的个体数=样本量×各层所占比例;

第四步,按简单随机抽样从各层抽取样本;

第五步,综合每层抽样,组成样本.

例 2　B　[甲、乙、丙三所学校抽样比为 3∶4∶5,∴应在乙学校抽取 $120\times\frac{4}{3+4+5}=40$(份).]

跟踪训练 2　A　[由题意知,老年职工与中年职工的人数之和为 170,又老年职工与中年职工的人数之比为 7∶10,

故老年职工人数为 70,中年职工人数为 100,按比例分配的比为 $\frac{30}{150}=\frac{1}{5}$,

则抽取的老年职工的人数为 $\frac{1}{5}\times70=14$.]

问题 3　$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_M}{M}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i$,

$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i$,

$\overline{Y}=\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_N}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i$,

$\overline{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$.

知识梳理

$\frac{M}{M+N}\overline{X}+\frac{N}{M+N}\overline{Y}$　$\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}$

例 3　**解**　初中部人数为 $60\times\frac{850}{1\,500}=34$,

高中部人数为 $60\times\frac{650}{1\,500}=26$,

学校平均视力为 $\frac{34}{60}\times1.0+\frac{26}{60}\times0.8\approx0.91$,

所以在初中部、高中部各抽 34,26 人,学校平均视力约为 0.91.

跟踪训练 3　D　[总体数学成绩平均值为 $\frac{20\times125+40\times95}{60}=105$.]

随堂演练

1. A　[从男生 500 人中抽取 25 人,从女生 400 人中抽取 20 人,抽取的比例相同,因此用的是分层随机抽样.]
2. D　[$\because\frac{3}{60}=\frac{n}{120+80+60}$,$\therefore n=13$.]
3. ABD　[由于各年级的年龄段不一样,因此应采用分层随机抽样.由于比例为 $\frac{235}{20\times50+30\times45}=\frac{1}{10}$,因此高一年级 1 000 人中应抽取 100 人,高二年级 1 350 人中应抽取 135 人,甲、乙被抽到的可能性都是 $\frac{1}{10}$,因此只有 C 不正确,故应选 ABD.]
4. 108

解析　样本中 40 名学生的平均分为 $\frac{20}{40}\times110+\frac{20}{40}\times106=108$(分),所以该组合学生的平均成绩约为 108 分.

9.1.3　获取数据的途径

问题　通过调查获取数据,通过试验获取数据,通过观察获取数据,通过查询获取数据等.

例 1　D　[因为近年来我国大学生入学人数的相关数据有所存储,所以小明获取这些数据的途径最好是通过查询获得数据.]

跟踪训练 1　C　["中国天眼"主要是通过观察获取数据.]

例 2　**解**　(1)一个城市的交通状况的好坏将直接影响着生活在这个城市中的每个人,关系到每个人的利益.为了调查这个问题,在抽样时应当关注到各种人群,既要抽到拥有私家车的市民,也要抽到没有私家车的市民.

(2)调查时,如果只对拥有私家车的市民进行调查,结果一定是片面的,不能代表所有市民的意愿.因此,在调查时,要对生活在该城市的所有市民进行随机地抽样调查,不要只关注到拥有私家车的市民.

跟踪训练 2　**解**　由于一个学校的电灯电路数目不算大,属于有限总体问题,所以应该通过调查获取数据,并且对创建"和谐平安"校园来说,必须排除任一潜在或已存在的安全隐患,故必须用普查的方法.

随堂演练

1.C　[该地的气象记录和本次的降雨量数据都是通过观察获取的.]

2.D　[根据抽样调查与普查的概念可知A,B,C一般采用普查的方法,D采用抽样调查的方法.]

3.D　[某种特效中成药的配方的数据一般通过试验获取.]

4.4.6

解析　由于编号为5的数据为4.6,明显高于其他数据,所以这个数据是不准确的.

§9.2　用样本估计总体

9.2.1　总体取值规律的估计

第1课时　总体取值规律的估计

问题1　为了制定一个较为合理的标准a,必须先了解全市居民日常用水量的分布情况,比如月均用水量在哪个范围的居民最多,他们占全市居民的百分比情况等.

问题2　采用抽样调查的方式,通过分析样本数据来估计全市居民用水量的分布情况.

问题3　最大值是28.0,最小值是1.3,样本观测数据的变化范围为26.7 t.

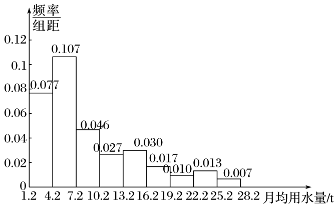
问题4　$26.7\div 3=8.9$.因此可以将数据分为9组.

问题5　[1.2,4.2),[4.2,7.2),…,[25.2,28.2].

问题6

分组	频数累计	频数	频率
[1.2,4.2)	正正正正下	23	0.23
[4.2,7.2)	正正正正正正丅	32	0.32
[7.2,10.2)	正正下	14	0.14
[10.2,13.2)	正𠃊	8	0.08
[13.2,16.2)	正𠃊	9	0.09
[16.2,19.2)	正	5	0.05
[19.2,22.2)	下	3	0.03
[22.2,25.2)	𠃊	4	0.04
[25.2,28.2)	丅	2	0.02
合计		100	1.00

问题7



知识梳理

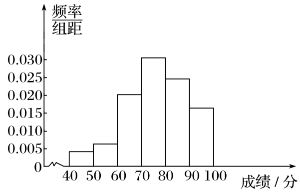
(1)极差　组距　组数　(4)频率分布表

(5)频率分布直方图

例1　解　(1)频率分布表如下:

成绩分组	频数	频率	累积频率
[40,50)	2	0.04	0.04
[50,60)	3	0.06	0.1
[60,70)	10	0.2	0.3
[70,80)	15	0.3	0.6
[80,90)	12	0.24	0.84
[90,100]	8	0.16	1.00
合计	50	1.00	

(2)频率分布直方图如图所示.



(3)学生成绩在[60,90)分的频率为$0.2+0.3+0.24=0.74=74\%$,所以估计成绩在[60,90)分的学生比例为74%.

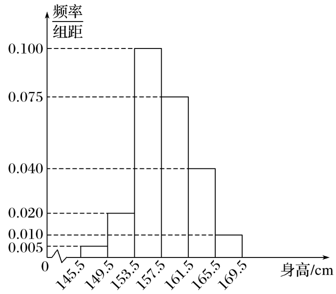
跟踪训练1　解　(1)**方法一**　$N=1.00$,$n=1-(0.02+0.08+0.40+0.30+0.16)=0.04$,$\dfrac{m}{0.04}=\dfrac{8}{0.16}$,

$\therefore m=2$,$M=1+4+20+15+8+2=50$.

方法二　$M=\dfrac{1}{0.02}=50$,$m=50-(1+4+20+15+8)=2$,

$N=1.00$,$n=\dfrac{m}{M}=\dfrac{2}{50}=0.04$.

(2)作出直角坐标系,组距为4,纵轴表示$\dfrac{频率}{组距}$,横轴表示身高,画出频率分布直方图如图所示.



(3)由频率分布直方图可知,样本中身高在[153.5,157.5)范围内的人数最多,且身高在161.5 cm以上的频率为$0.16+0.04=0.20$,由此可估计全体女生中身高在[153.5,157.5)范围内的人数最多,九年级学生中女生的身高在161.5 cm以上的频率为0.20.

例2　解　(1)频率分布直方图是以面积的形式来反映数据落在各小组内的频率大小的,

因此第二小组的频率为$\dfrac{4}{2+4+17+15+9+3}=0.08$.

因为第二小组的频率$=\dfrac{第二小组的频数}{样本容量}$,

所以样本容量$=\dfrac{第二小组的频数}{第二小组的频率}=\dfrac{12}{0.08}=150$.

(2)由频率分布直方图可知该校高一年级全体学生的达标率约为$\dfrac{17+15+9+3}{2+4+17+15+9+3}\times 100\%=88\%$.

跟踪训练2　解　(1)根据频率分布直方图可知,样本中分数不小于70的频率为$(0.02+0.04)\times 10=0.6$,

所以样本中分数小于70的频率为$1-0.6=0.4$,

所以从总体的400名学生中随机抽取一人,其分数小于70的概率估计为0.4.

(2)根据题意,得样本中分数不小于50的频率为$(0.01+0.02+0.04+0.02)\times 10=0.9$,

分数在区间[40,50)内的人数为$100-100\times 0.9-5=5$,

所以总体中分数在区间[40,50)内的人数估计为$400\times\dfrac{5}{100}=20$.

(3)由题意可知,样本中分数不小于70的学生人数为$(0.02+0.04)\times 10\times 100=60$,

所以样本中分数不小于70的男生人数为$60\times\dfrac{1}{2}=30$,

所以样本中的男生人数为$30\times 2=60$,

女生人数为$100-60=40$,

所以样本中男生和女生人数的比例为$60:40=3:2$,

所以根据分层随机抽样原理,估计总体中男生和女生人数的比例为$3:2$.

随堂演练

1.C　[用样本的频率分布估计总体的频率分布时,在总体一定时,样本的容量越大,估计就越精确.]

2.D　[因为样本在[10,50)内的频数为$2+3+4+5=14$,样本容量为20,所以在[10,50)内的频率为$\dfrac{14}{20}=0.7$.]

3.15

解析 月工资落在区间[30,35)内的频率为 $1-(0.02+0.04+0.05+0.05+0.01)\times5=0.15$，

所以月工资在区间[30,35)内的工薪阶层应抽出 $100\times0.15=15$(人).

4.48

解析 设报考飞行员的总人数为 n，

设第 1 小组的频率为 a，则有 $a+2a+3a+(0.013+0.037)\times5=1$，解得 $a=0.125$，

所以第 2 小组的频率为 0.25.

又第 2 小组的频数为 12，则有 $0.25=\frac{12}{n}$，所以 $n=48$.

第 2 课时 统计图表的识别

问题 条形图能直观的显示每组中的具体数据；

扇形图能直观显示各部分所占总体的百分比；

折线图能直观显示数据的变化趋势；

直方图能直观显示数据的分布情况.

例 1 B [条形图易于比较数据之间的差异，故①与(a)；

扇形图易于显示每组数据相对于总数所占的比例，故②与(d)；

折线图易于显示数据的变化趋势，故③与(c)；

直方图易于显示各组之间的频数的差别，故④与(b).

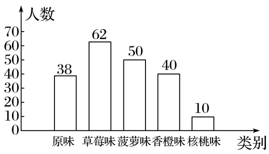
故正确的有 2 个.]

跟踪训练 1 D

例 2 **解** (1)根据喜好核桃味的学生数，得本次被调查的学生数(样本容量)为 $10\div5\%=200$(名).

(2)喜好香橙味牛奶的学生数是 $200-38-62-50-10=40$，

补全条形图如图，



喜好菠萝味牛奶的学生人数为 50，

在扇形统计图中所占圆心角的度数为 $\frac{50}{200}\times360^\circ=90^\circ$.

(3)草莓味要比原味多送的盒数是 $\frac{1\,200}{200}\times(62-38)=144$(盒).

跟踪训练 2 C [根据统计图，对比每年 1 月份的数据，销售量增长显著，A 正确；

2017 年 11 月到 2018 年 2 月的销量最多，B 正确；

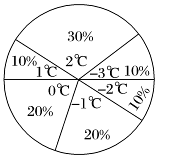
2017 年该商品总销量超过 6 000 台，C 错误；

2018 年 2 月比 2017 年 2 月的总销量少，D 正确.]

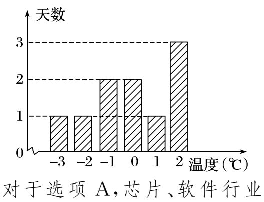
例 3 **解** 该城市 3 月 1 日至 10 日的最低气温(单位:℃)情况如下表：

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最低气温(℃)	-3	-2	0	-1	1	2	0	-1	2	2

其中最低气温为 -3 ℃的有 1 天，占 10%，最低气温为 -2 ℃的有 1 天，占 10%，最低气温为 -1 ℃的有 2 天，占 20%，最低气温为 0 ℃的有 2 天，占 20%，最低气温为 1 ℃的有 1 天，占 10%，最低气温为 2 ℃的有 3 天，占 30%，扇形统计图如图所示.



条形统计图如图所示，



跟踪训练 3 C [对于选项 A，芯片、软件行业从业者中“90 后”占总人数的 55%，故选项 A 正确；

对于选项 B，芯片、软件行业中从事技术、设计岗位的“90 后”占总人数的 $(37\%+13\%)\times55\%=27.5\%$，故选项 B 正确；

对于选项 C，芯片、软件行业中从事技术岗位的“90 后”占总人数的 $37\%\times55\%=20.35\%$，“80 后”占总人数的 40%，但从事技术的“80 后”占总人数的百分比不知道，无法确定二者人数多少，故选项 C 错误；

对于选项 D，芯片、软件行业中从事市场岗位的“90 后”占总人数的 $14\%\times55\%=7.7\%$，“80 前”占总人数的 5%，故选项 D 正确.]

随堂演练

1.B [折线统计图的一个显著特点就是能反映统计量的变化趋势，所以既要反映一周内每天销售金额的多少，又能反映一周内每天销售金额的变化情况和趋势，则最好选用的统计图表为折线统计图.]

2.D [估计该校高一学生参加活动次数不低于 4 场的学生约为 $1000\times(0.18+0.12+0.04+0.02)=360$ 人.]

3.A [小张刚参加工作时月工资为 5 000 元，各种用途占比统计由条形图可得，小张就医费为 $5\,000\times15\%=750$(元)，又已知目前的月就医费比刚参加工作时少 200 元，即 550 元，则目前小张的月工资为 $\frac{550}{0.1}=5\,500$(元).]

4.C [由题图(1)所示，食品开支占总开支的 30%，由题图(2)所示，鸡蛋开支占食品开支的 $\frac{30}{30+40+100+80+50}=\frac{1}{10}$，所以鸡蛋开支占总开支的百分比为 $30\%\times\frac{1}{10}=3\%$.]

9.2.2 总体百分位数的估计

问题 把 100 个样本数据按从小到大排序，得到第 80 个和第 81 个数据分别为 13.6 和 13.8. 可以发现，区间(13.6,13.8)内的任意一个数，都能把样本数据分成符合要求的两部分. 一般地，我们取这两个数的平均数 $\frac{13.6+13.8}{2}=13.7$，并称此数为这组数据的第 80 百分位数，或 80%分位数.

知识梳理

1.从小到大 $n\times p\%$ i 平均数

2.$p\%$ 小于或等于

例 1 C [一个总体的 25%分位数，50%分位数，75%分位数是总体的四分位数，有 3 个，所以 C 错误.]

跟踪训练 1 B [根据第 p 百分位数的定义可知 B 正确.]

例 2 **解** 将所有数据从小到大排列，得

7.8,7.9,8.0,8.3,8.4,8.5,8.5,8.5,8.6,8.9,9.0,9.9，

因为共有 12 个数据，

所以 $12\times25\%=3$，$12\times75\%=9$，$12\times95\%=11.4$，

则 25%分位数是 $\frac{8.0+8.3}{2}=8.15$，

75%分位数是 $\frac{8.6+8.9}{2}=8.75$，

95%分位数是第 12 个数据为 9.9.

跟踪训练 2 8.5

解析 ∵$7\times50\%=3.5$，

∴其 50%分位数是第 4 个数据为 8.5.

例 3 **解** (1)由已知可得，抽样比 $k=\frac{100}{1\,000}=\frac{1}{10}$，

故从 A 类工人中应抽查 $250\times\frac{1}{10}=25$(人)，

从 B 类工人中应抽查 $750\times\frac{1}{10}=75$(人).

(2)由题意知 $4+8+x+5+3=25$，得 $x=5$，

$6+y+36+18=75$，得 $y=15$.

A 类工人生产能力频率分布表为

生产能力分组	[100,110)	[110,120)	[120,130)	[130,140)	[140,150]
频率	0.16	0.32	0.20	0.20	0.12

由频率分布表可知，A 类工人生产能力在 120 以下的所占比例为 $16\%+32\%=48\%$.

A 类工人生产能力在 130 以下的所占比例为 $48\%+20\%=68\%$.

因此，60%分位数一定位于[120,130)内.

由 $120+10\times\frac{0.60-0.48}{0.68-0.48}=126$，

可以估计 A 类工人生产能力的样本数据的 60%分位数为 126.

B 类工人生产能力频率分布表为

生产能力分组	[110,120)	[120,130)	[130,140)	[140,150]
频率	0.08	0.20	0.48	0.24

由频率分布表可知,B类工人生产能力在130以下的所占比例为$8\%+20\%=28\%$.
B类工人生产能力在140以下的所占比例为
$28\%+48\%=76\%$.
因此,60%分位数一定位于[130,140)内.
由$130+10\times\frac{0.60-0.28}{0.76-0.28}\approx136.67$,
可以估计B类工人生产能力的样本数据的60%分位数约为136.67.

跟踪训练3　解　(1)$a=0.06\times100=6$,$b=\frac{17}{100}=0.17$.
(2)阅读时间小于6小时的所占比例是$0.06+0.08+0.17=0.31$,
阅读时间小于8小时的所占比例是$0.06+0.08+0.17+0.22=0.53$,
所以50%分位数在[6,8)内,
所以50%分位数约为$6+2\times\frac{0.50-0.31}{0.53-0.31}\approx7.73$.
因为$7.73>7.68$,
所以估计有50%的学生的阅读时间达到7.68.

例4　解　(1)第一组频率为$0.01\times5=0.05$,
所以$x=\frac{5}{0.05}=100$.
(2)由题图可知年龄低于30岁的所占比例为40%,年龄低于35岁的所占比例为70%,所以抽取的x人的年龄的50%分位数在[30,35)内,由$30+5\times\frac{0.50-0.40}{0.70-0.40}=\frac{95}{3}\approx32$,所以抽取的$x$人的年龄的50%分位数为32.
(3)把参赛的10人的成绩按从小到大的顺序排列:
88,90,92,92,95,96,96,97,98,99,
计算$10\times20\%=2$,所以这10人成绩的20%分位数为$\frac{90+92}{2}=91$,这10人成绩的平均数为
$\frac{1}{10}\times(88+90+92+92+95+96+96+97+98+99)=94.3$.
评价:从第20百分位数和平均数来看,参赛人员的认知程度很高.
感想:结合本题和实际,符合社会主义核心价值观即可.

跟踪训练4　解　由题意知分别落在各区间上的频数
在[80,90)上为$60\times0.15=9$,
在[90,100)上为$60\times0.25=15$,
在[100,110)上为$60\times0.3=18$,
在[110,120)上为$60\times0.2=12$,
在[120,130]上为$60\times0.1=6$.
从以上数据可知第50百分位数一定落在区间[100,110)上,
由$100+10\times\frac{0.5-0.4}{0.7-0.4}=100+\frac{10}{3}\approx103.3$;
第75百分位数一定落在区间[110,120)上,
由$110+10\times\frac{0.75-0.7}{0.9-0.7}=110+\frac{5}{2}=112.5$.
综上可知,第50百分位数和第75百分位数分别估计为103.3 cm,112.5 cm.

随堂演练
1. ABD　[因为$100\times75\%=75$为整数,所以第75个数据和76个数据的平均数为75%分位数,是9.3,则C正确,其它选项均不正确,故选ABD.]
2. D　[因为$8\times70\%=5.6$,故第70百分位数是第六项数据23.]
3. A　[把该组数据按照由小到大排列,可得
2.1,3.0,3.2,3.4,3.8,4.0,4.2,4.4,5.3,5.6,
由$i=10\times25\%=2.5$,不是整数,则第3个数据3.2是第25百分位数.]
4. $\frac{100}{9}$

解析　样本数据低于10的比例为$(0.08+0.02)\times4=0.40$,样本数据低于14的比例为$0.40+0.09\times4=0.76$,所以此样本数据的第50百分位数在[10,14)内,估计此样本数据的第50百分位数为$10+\frac{0.1}{0.36}\times4=\frac{100}{9}$.

9.2.3　总体集中趋势的估计

知识梳理
1. 次数
2. 中间　平均数
3. $\frac{1}{n}(x_1+\ x_2+\cdots+x_n)$

例1　解　在这17个数据中,1.75出现了4次,出现的次数最多,即这组数据的众数是1.75.上面表里的17个数据可看成是按从小到大的顺序排列的,其中第9个数据1.70是最中间的一个数据,即这组数据的中位数是1.70.这组数据的平均数是$\overline{x}=\frac{1}{17}(1.50\times2+1.60\times3+1.65\times2+1.70\times3+1.75\times4+1.80\times1+1.85\times1+1.90\times1)=\frac{28.75}{17}\approx1.69$.
故17名运动员成绩的众数、中位数、平均数依次为1.75 m,1.70 m,1.69 m.

跟踪训练1　C　[平均数为$\frac{100+95+90\times2+85\times4+80+75}{10}=87$,众数为85,中位数为85.]

问题1　总结:一般来说,对一个单峰的频率分布直方图来说,如果直方图的形状是对称的(图(1)),那么平均数和中位数应该大体上差不多;如果直方图在右边“拖尾”(图(2)),那么平均数大于中位数.如果直方图在左边拖尾(图(3)),那么平均数小于中位数.也就是说,和中位数相比,平均数总是在“长尾巴”那边.

问题2　一般地,对数值型的数据(如用水量、身高、收入、产量等)集中趋势的描述,可以用平均数、中位数;而对分类型数据(如校服规格、性别、产品质量等级等)集中趋势的描述,可以用众数.

例2　解　(1)甲群市民年龄的平均数为
$\frac{13+13+14+15+15+15+15+16+17+17}{10}=15$(岁),
中位数为15岁,众数为15岁.平均数、中位数和众数相等,因此它们都能较好地反映甲群市民的年龄特征.
(2)乙群市民年龄的平均数为
$\frac{54+3+4+4+5+5+6+6+6+57}{10}=15$(岁),
中位数为5.5岁,众数为6岁.
由于乙群市民大多数是儿童,所以中位数和众数能较好地反映乙群市民的年龄特征,而平均数的可靠性较差.

跟踪训练2　解　(1)在这10天中,该公司用水量的平均数是$\overline{x}=\frac{1}{10}\times(22+38+40+2\times41+2\times44+50+2\times95)=51$(t).
每天用水量的中位数是$\frac{41+44}{2}=42.5$(t).
(2)平均数受数据中的极端值(2个95)影响较大,使平均数在估计总体时可靠性降低,10天的用水量有8天都在平均值以下,故用中位数描述每天的用水量更合适.

例3　解　(1)众数是频率分布直方图中最高小矩形底边中点的横坐标,所以众数为$m=75.0$.
前3个小矩形面积和为$0.01\times10+0.015\times10+0.015\times10=0.4<0.5$,
前4个小矩形面积和为$0.4+0.03\times10=0.7>0.5$,
所以中位数$n=70+\frac{0.5-0.4}{0.03}\approx73.3$.
(2)依题意,60及60以上的分数在第三、四、五、六组,频率和为$(0.015+0.03+0.025+0.005)\times10=0.75$,
所以估计这次考试的物理成绩的及格率是75%.
利用组中值估算抽样学生的平均分为$45\times f_1+55\times f_2+65\times f_3+75\times f_4+85\times f_5+95\times f_6=45\times0.1+55\times0.15+65\times0.15+75\times0.3+85\times0.25+95\times0.05=71$.
估计这次考试物理成绩的平均分是71分.

跟踪训练3　解　由$(0.08+0.16+a+0.42+0.50+a+0.12+0.08+0.04)\times0.5=1$,解得$a=0.30$.
因为前5组的频率之和为$0.04+0.08+0.15+0.21+0.25=0.73>0.5$.
而前4组的频率之和为$0.04+0.08+0.15+0.21=0.48<0.5$.

设中位数为 x 吨.

由 $0.50\times(x-2)=0.5-0.48$,解得 $x=2.04$.

故可估计居民月均用水量的中位数为 2.04 吨.

随堂演练

1.D [由于 83 出现的次数最多,所以众数是 83,故 A 说法正确;把数据 66,83,87,83,77,96 按从小到大排列为 66,77,83,83,87,96,中间两个数为 83,83,所以中位数是 83,故 B 说法正确;极差是 $96-66=30$,故 C 说法正确;由于平均数为$(66+83+87+83+77+96)\div 6=82$,故 D 说法错误,故选 D.]

2.ABC

3.3

解析 ∵数据 $0,2,x,4,5$ 的众数是 4,∴$x=4$,

∴这组数据的平均数是 $\frac{1}{5}\times(0+2+4+4+5)=3$.

4.68

解析 平均成绩就是频率分布直方图中每个小矩形的面积乘以小矩形底边中点的横坐标再求和,即 $0.005\times20\times30+0.010\times20\times50+0.020\times20\times70+0.015\times20\times90=68$(分).

9.2.4 总体离散程度的估计

问题 1 经计算得:$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{10}(7+8+7+9+5+4+9+10+7+4)=7$,同理可得 $\overline{x}_{乙}=7$.

问题 2 直观上看,还是有差异的.如:甲成绩比较分散,乙成绩相对集中.

问题 3 还经常用甲乙的极差与平均数一起比较说明数据的分散程度.甲的环数极差$=10-4=6$,乙的环数极差$=9-5=4$.它们在一定程度上表明了样本数据的分散程度,与平均数一起,可以给我们许多关于样本数据的信息.显然,极差对极端值非常敏感,注意到这一点,我们可以得到一种"去掉一个最高分,去掉一个最低分"的统计策略.

知识梳理

1.$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ $\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$

2.$\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2$ $\sqrt{S^2}$ $\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{k}f_i(Y_i-\overline{Y})^2$

例 1 解 (1)甲组:最高分为 95,最低分为 60,极差为 $95-60=35$,

平均数为 $\overline{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(60+90+85+75+65+70+80+90+95+80)=79$,

方差为 $s_{甲}^2=\frac{1}{10}\times[(60-79)^2+(90-79)^2+(85-79)^2+(75-79)^2+(65-79)^2+(70-79)^2+(80-79)^2+(90-79)^2+(95-79)^2+(80-79)^2]=119$,

标准差为 $s_{甲}=\sqrt{s_{甲}^2}=\sqrt{119}\approx10.91$.

乙组:最高分为 95,最低分为 65,极差为 $95-65=30$,

平均数为 $\overline{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(85+95+75+70+85+80+85+65+90+85)=81.5$,

方差为 $s_{乙}^2=\frac{1}{10}\times[(85-81.5)^2+(95-81.5)^2+(75-81.5)^2+(70-81.5)^2+(85-81.5)^2+(80-81.5)^2+(85-81.5)^2+(65-81.5)^2+(90-81.5)^2+(85-81.5)^2]=75.25$,

标准差为 $s_{乙}=\sqrt{s_{乙}^2}=\sqrt{75.25}\approx8.67$.

(2)由于乙组的方差(标准差)小于甲组的方差(标准差),因此乙组的成绩较稳定.

从(1)中得到的极差也可看出乙组的成绩比较稳定.

跟踪训练 1 解 (1)$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(25+41+40+37+22+14+19+39+21+42)=30$,

同理可计算得 $\overline{x}_{乙}=31$,

∴$\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$,即乙种玉米苗长得高.

(2)$s_{甲}^2=\frac{1}{10}\times[(25-30)^2+(41-30)^2+(40-30)^2+(37-30)^2+(22-30)^2+(14-30)^2+(19-30)^2+(39-30)^2+(21-30)^2+(42-30)^2]=104.2$,

同理可计算得 $s_{乙}^2=128.8$,

∵$s_{甲}^2<s_{乙}^2$,∴甲种玉米苗长得齐.

例 2 解 (1)由题图可得,甲、乙两人五次测试的成绩分别为

甲:10,13,12,14,16;

乙:13,14,12,12,14.

$\overline{x}_{甲}=\frac{10+13+12+14+16}{5}=13$,

$\overline{x}_{乙}=\frac{13+14+12+12+14}{5}=13$,

$s_{甲}^2=\frac{1}{5}\times[(10-13)^2+(13-13)^2+(12-13)^2+(14-13)^2+(16-13)^2]=4$,

$s_{乙}^2=\frac{1}{5}\times[(13-13)^2+(14-13)^2+(12-13)^2+(12-13)^2+(14-13)^2]=0.8$.

(2)由 $s_{甲}^2>s_{乙}^2$可知乙的成绩较稳定.

从折线图看,甲的成绩基本呈上升状态,而乙的成绩上下波动,可知甲的成绩在不断提高,而乙的成绩则无明显提高.

跟踪训练 2 B [比较三个频率分布直方图知,甲为"双峰"直方图,两端数据最多,最分散,方差最大;乙为"单峰"直方图,数据最集中,方差最小;丙为"单峰"直方图,但数据分布相对均匀,方差介于甲、乙之间.综上可知 $s_1>s_3>s_2$.]

问题 4 把男生样本记为 $x_1,x_2,\cdots,x_{23}$,其平均数记为 $\overline{x}$,方差记为 s_x^2;把女生样本记为 $y_1,y_2,\cdots,y_{27}$,其平均数记为 $\overline{y}$,方差记为 s_y^2;把总样本数据的平均数记为 $\overline{z}$,方差记为 s^2.

根据方差的定义,总样本方差为

$s^2=\frac{1}{50}[\sum\limits_{i=1}^{23}(x_i-\overline{z})^2+\sum\limits_{j=1}^{27}(y_j-\overline{z})^2]$

$=\frac{1}{50}[\sum\limits_{i=1}^{23}(x_i-\overline{x}+\overline{x}-\overline{z})^2+\sum\limits_{j=1}^{27}(y_j-\overline{y}+\overline{y}-\overline{z})^2]$.

由 $\sum\limits_{i=1}^{23}(x_i-\overline{x})=\sum\limits_{i=1}^{23}x_i-23\overline{x}=0$,可得

$\sum\limits_{i=1}^{23}2(x_i-\overline{x})(\overline{x}-\overline{z})=2(\overline{x}-\overline{z})\sum\limits_{i=1}^{23}(x_i-\overline{x})=0$.

同理可得

$\sum\limits_{j=1}^{27}2(y_j-\overline{y})(\overline{y}-\overline{z})=0$.

因此,

$s^2=\frac{1}{50}[\sum\limits_{i=1}^{23}(x_i-\overline{x})^2+\sum\limits_{i=1}^{23}(\overline{x}-\overline{z})^2+\sum\limits_{j=1}^{27}(y_j-\overline{y})^2+\sum\limits_{j=1}^{27}(\overline{y}-\overline{z})^2]$

$=\frac{1}{50}\{23[s_x^2+(\overline{x}-\overline{z})^2]+27[s_y^2+(\overline{y}-\overline{z})^2]\}$. ①

由 $\overline{x}=170.6$,$\overline{y}=160.6$,根据按比例分配分层随机抽样总样本平均数与各层样本平均数的关系,可得总样本平均数为

$\overline{z}=\frac{23}{23+27}\overline{x}+\frac{27}{23+27}\overline{y}$

$=\frac{23\times170.6+27\times160.6}{50}=165.2$.

把已知男生、女生样本平均数和方差的取值代入①,可得

$s^2=\frac{1}{50}\{23\times[12.59+(170.6-165.2)^2]+27\times[38.62+(160.6-165.2)^2]\}=51.486\ 2$.

故总样本的方差为 51.486 2,据此估计高一年级全体学生身高的总体方差为 51.486 2.

例 3 解 由题意可知 $\overline{x}_{甲}=60$,甲队队员在所有队员中所占权重为 $w_{甲}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$,

$\overline{x}_{乙}=70$,乙队队员在所有队员中所占权重为 $w_{乙}=\frac{4}{1+4}=\frac{4}{5}$,

则甲、乙两队全部队员的平均体重为

$\overline{x}=w_{甲}\overline{x}_{甲}+w_{乙}\overline{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times60+\frac{4}{5}\times70=68$(kg),

甲、乙两队全部队员的体重的方差为

$s^2=w_{甲}[s_{甲}^2+(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2]+w_{乙}[s_{乙}^2+(\overline{x}_{乙}-\overline{x})^2]$

$=\frac{1}{5}[200+(60-68)^2]+\frac{4}{5}[300+(70-68)^2]=296$.

随堂演练

1.B

2.B [∵$\overline{x}=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3$,

∴$s=\sqrt{\frac{1}{5}[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]}=\sqrt{2}$.]

3.ABC [甲、乙两班学生成绩的平均数都是 135,故两班成绩的平均数相同,所以 A 正确;

$s_{甲}^2=191>110=s_{乙}^2$,所以甲班成绩不如乙班稳定,即甲班的成绩波动较大,所以 B 正确;

甲、乙两班人数相同，但甲班的中位数为149，乙班的中位数为151，从而易知乙班每分钟输入汉字数不少于150个的人数要多于甲班，所以C正确；
由题表看不出两班学生成绩的众数，所以D错误.]

4. 2

解析　由题意知 $\overline{x}=4$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=200$，

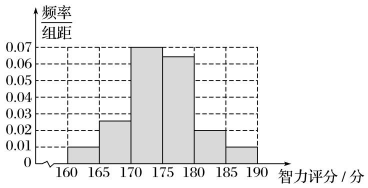
$$s=\sqrt{\frac{1}{10}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2]}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{10}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2-10\overline{x}^2)}$$
$$=\sqrt{\frac{200-160}{10}}=2.$$

章末复习课

例1　D　[由题意知，各种职称的人数比为160∶320∶200∶120=4∶8∶5∶3，所以抽取的具有高、中、初级职称的人数和其他人员的人数分别为 $40\times\frac{4}{20}=8$，$40\times\frac{8}{20}=16$，$40\times\frac{5}{20}=10$，$40\times\frac{3}{20}=6$.]

跟踪训练1　D　[选项A，B不是简单随机抽样，因为抽取的个体间的间隔是固定的；选项C不是简单随机抽样，因为总体的个体有明显的层次；选项D是简单随机抽样.]

例2　**解**　(1)样本中男生人数是40，由抽样比例是1∶10可得高一年级男生人数是400，
男生"智力评分"的频率分布直方图如图所示.



(2)样本中"智力评分"在[165，175)内的频数为28，所以估计该校高一年级学生"智力评分"在[165，175)内的学生人数为28×10=280.

跟踪训练2　(1)3　(2)6 000

解析　(1)由0.1×1.5+0.1×2.5+0.1a+0.1×2.0+0.1×0.8+0.1×0.2=1，解得 $a=3$.
(2)消费金额在区间[0.3，0.5)内的频率为0.1×1.5+0.1×2.5=0.4，故在[0.5，0.9]内的频率为1−0.4=0.6.
因此，消费金额在区间[0.5，0.9]内的购物者的人数为0.6×10 000=6 000.

例3　**解**　把这20个国家和地区的人均二氧化碳排放量按从小到大的顺序排列为
1.7，2.0，2.6，3.9，5.3，5.7，6.2，6.4，7.3，7.4，7.5，8.5，10.2，10.7，12.6，12.7，15.7，16.6，16.6，16.9.

所以这20个数的25%分位数为 $\frac{5.3+5.7}{2}=5.5$.

50%分位数为 $\frac{7.4+7.5}{2}=7.45$.

75%分位数为 $\frac{12.6+12.7}{2}=12.65$.

所以这20个国家和地区的人均二氧化碳排放量的四分位数为

25%分位数	50%分位数	75%分位数
5.5	7.45	12.65

跟踪训练3　(1)44.5

解析　把这组数据从小到大排序：25，28，38，39，42，47，48，53，56，63，因为10×50%=5.

所以50%分位数为 $\frac{42+47}{2}=\frac{89}{2}=44.5$.

(2)**解**　考生中成绩在130分以下的频率为
(0.016+0.004+0.012+0.016+0.024)×10=0.72，
考生中成绩在140分以下的频率为
0.72+0.020×10=0.92，
∴成绩的第80百分位数一定在[130，140)之间.

由 $130+\frac{0.8-0.72}{0.92-0.72}\times10=134$.

估计考生成绩的第80百分位数为134分.

例4　**解**　(1)由平均数公式知，$\overline{x}=\frac{44+40+\cdots+37}{9}=40$，

由方差公式知，$s^2=\frac{1}{9}\times[(44-40)^2+(40-40)^2+\cdots+(37-40)^2]=\frac{100}{9}$.

(2)因为 $s^2=\frac{100}{9}$，$s=\frac{10}{3}$，

所以36名工人中年龄在 $\overline{x}-s$ 和 $\overline{x}+s$ 之间的人数等于年龄在区间[37，43]内的人数，
即40，40，41，…，39，共23人.

所以36名工人中年龄在 $\overline{x}-s$ 和 $\overline{x}+s$ 之间的人数所占的百分比为 $\frac{23}{36}\times100\%\approx63.89\%$.

跟踪训练4　**解**　(1)由数据的离散程度，可以看出 B 型汽车在某个星期内出租天数的方差较大.
(2)50辆 A 型汽车出租天数的平均数为

$$\overline{x}_A=\frac{3\times3+4\times30+5\times5+6\times7+7\times5}{50}=4.62,$$

50辆 B 型汽车出租天数的平均数为

$$\overline{x}_B=\frac{3\times10+4\times10+5\times15+6\times10+7\times5}{50}=4.8,$$

答案一：A 型汽车在某个星期内出租天数的平均数为4.62，B 型汽车在某个星期内出租天数的平均数为4.8，选择 B 型汽车的出租车的利润较大，应该购买 B 型汽车.
答案二：A 型汽车在某个星期内出租天数的平均数为4.62，B 型汽车在某个星期内出租天数的平均数为4.8，而 B 型汽车出租天数的方差较大，所以应该购买 A 型汽车.

随堂演练

1. C　[对于A，了解春节联欢晚会的收视率，操作性不强，采用抽查的方式是合适的；
对于B，了解某渔场中青鱼的平均重量，操作性不强，工作量大，因此采用抽查的方式合适；
对于C，了解手机的寿命过程会有破坏性，因此没有必要对所有型号的手机进行调查，因此采用普查的方式不合适；
对于D，了解汽车的刹车性能，因为涉及人身安全，且对汽车没有破坏性，因此，应采用普查的方式.]

2. D　[由频率分布直方图得，9时至10时的销售额所占频率为0.1，9时至10时的销售额为3万元，所以9时至14时的销售总额为 $\frac{3}{0.1}=30$(万元).]

3. 30

解析　由题意知，$\frac{12}{45+15}=\frac{30}{120+a}$，解得 $a=30$.

4. 8.5　9

解析　把该组数据从小到大排列，得6，7，7，8，8，9，9，9，9，10，
又10×50%=5，10×75%=7.5，

所以50%分位数为 $\frac{8+9}{2}=8.5$，

75%分位数为第8个数据9.

第十章　概　率

§10.1　随机事件与概率

10.1.1　有限样本空间与随机事件

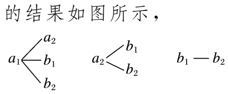
问题1　(1)试验可以在相同条件下重复进行；
(2)试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个；
(3)每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但事先不能确定出现哪一个结果.

问题2　样本点可看作元素，样本空间可看作集合.
列举样本点可用列举法，有限样本空间就是有限个样本点组成的集合.

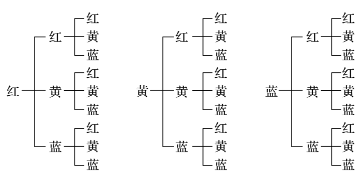
知识梳理

每个可能的基本结果　ω　全体　Ω　有限样本空间

例1　**解**　(1)该试验的样本空间 $\Omega_1=\{3,4,5,\cdots,18\}$.
(2)该试验所有可能的结果如图所示，

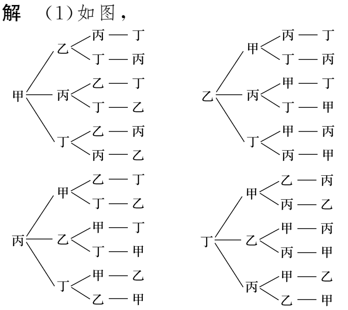


因此，该试验的样本空间为
$\Omega_2=\{a_1a_2,a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2,b_1b_2\}$.
(3)如图，



用 1,2,3 分别表示红色、黄色与蓝色三种颜色，则此试验的样本空间为 $\Omega_3=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3),(2,1,1),(2,1,2),(2,1,3),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,1),(2,3,2),(2,3,3),(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3),(3,2,1),(3,2,2),(3,2,3),(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3)\}$.

跟踪训练 1 解 (1)如图，



设甲、乙、丙、丁分别为 1,2,3,4，

所以样本空间 $\Omega_1=\{(1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,3,2,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3),(1,4,3,2),(2,1,3,4),(2,1,4,3),(2,3,1,4),(2,3,4,1),(2,4,1,3),(2,4,3,1),(3,1,2,4),(3,1,4,2),(3,2,1,4),(3,2,4,1),(3,4,1,2),(3,4,2,1),(4,1,2,3),(4,1,3,2),(4,2,1,3),(4,2,3,1),(4,3,1,2),(4,3,2,1)\}$.

(2)设正品为 H，次品为 T，

样本空间 $\Omega_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,TTH,THT,TTT\}$.

问题 3 “转出的数字是 5”可能发生，也可能不发生，故事件 A 是随机事件. “转出的数字是 0”，即 $B=\{0\}$，不是样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$ 的子集，故事件 B 是不可能事件. $C=\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$，故事件 C 是必然事件.

问题 4 $M=\{1,3,5,7,9\}$.

知识梳理

子集　随机事件　一个　基本事件　事件 A 发生　必然事件　不可能事件

例 2 解 设石头为 w_1，剪刀为 w_2，布为 w_3，用 (i,j) 表示游戏的结果，其中 i 表示甲出的拳，j 表示乙出的拳，则样本空间 $E=\{(w_1,w_1),(w_1,w_2),(w_1,w_3),(w_2,w_1),(w_2,w_2),(w_2,w_3),(w_3,w_1),(w_3,w_2),(w_3,w_3)\}$.

因为事件 A 表示随机事件“甲乙平局”，

则满足要求的样本点共有 3 个：$(w_1,w_1),(w_2,w_2),(w_3,w_3)$，

所以事件 $A=\{(w_1,w_1),(w_2,w_2),(w_3,w_3)\}$.

事件 B 表示“甲赢得游戏”，

则满足要求的样本点共有 3 个：$(w_1,w_2),(w_2,w_3),(w_3,w_1)$，

所以事件 $B=\{(w_1,w_2),(w_2,w_3),(w_3,w_1)\}$.

因为事件 C 表示“乙不输”，

则满足要求的样本点共有 6 个，

$(w_1,w_1),(w_2,w_2),(w_3,w_3),(w_2,w_1),(w_1,w_3),(w_3,w_2)$，

所以事件 $C=\{(w_1,w_1),(w_2,w_2),(w_3,w_3),(w_1,w_3),(w_2,w_1),(w_3,w_2)\}$.

跟踪训练 2 解 $M=\{AB,AO,AD,BC,BO,CD,CO,DO\}$.

例 3 解 (1)事件 A 中所含的样本点中的第二个数为 3，根据样本空间知第二个数为 3 的样本点都在事件 A 中，故事件 A 的含义为连续抛掷一枚均匀的骰子 2 次，第二次掷出的点数为 3.

(2)事件 B 中所含的样本点中两个数的和均为 6，且样本空间中两数和为 6 的样本点都在事件 B 中，故事件 B 的含义为连续抛掷一枚均匀的骰子 2 次，2 次掷出的点数之和为 6.

(3)事件 C 中所含样本点中两个数的差的绝对值为 2，且样本空间中两个数的差的绝对值为 2 的样本点都在事件 C 中，故事件 C 的含义为连续抛掷一枚均匀的骰子 2 次，两次掷出的点数之差的绝对值为 2.

跟踪训练 3 解 (1)事件 M 的含义是“从 3 双不同的鞋中随机抽取 2 只，取出的 2 只鞋不成双”.

(2)事件 N 的含义是“从 3 双不同的鞋中，随机抽取 2 只，取出的 2 只鞋都是左脚的”.

(3)事件 P 的含义是“从 3 双不同的鞋中，随机抽取 2 只，取到的鞋一只是左脚的，一只是右脚的，且不成双”.

随堂演练

1. C ［A 是随机事件，5 张标签都可能被取到；B 是随机事件，当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 为增函数，当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 为减函数；C 是必然事件；D 是不可能事件，根据指数函数 $y=2^x$ 的图象可得，对任意实数 x，$2^x>0$.］

2. D ［从 A，B 中各任意取一个数，可构成 12,21,22,24,42,13,31,23,32,34,43，共 11 个样本点.］

3. {(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,反,反),(反,正,反),(反,反,正)}

解析 试验的样本空间为 $\Omega=\{$(正,正,正),(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,反,反),(反,正,反),(反,反,正),(反,反,反)$\}$，则 $M=\{$(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,反,反),(反,正,反),(反,反,正)$\}$.

4. 抛掷一枚质地均匀的骰子两次，向上点数之和为 8

10.1.2 事件的关系和运算

问题 1 $C_1=\{1\}$ 和 $G=\{1,3,5\}$，$\{1\}\subseteq\{1,3,5\}$

知识梳理

一定　包含　$\supseteq$　$\supseteq$　$A=B$

例 1 (1)$\subseteq$　(2)$\subseteq$　(3)$\subseteq$　(4)$=$

解析 因为出现的点数小于 5 包含出现 1 点，出现 2 点，出现 3 点，出现 4 点四种情况，所以事件 B 发生时，事件 H 必然发生，故 $B\subseteq H$；同理 $D\subseteq J$，$E\subseteq I$；又易知事件 A 与事件 G 相等，即 $A=G$.

跟踪训练 1 解 当事件 A 发生时，事件 C 一定发生，当事件 B 发生时，事件 C 一定发生，因此有 $A\subseteq C$，$B\subseteq C$；当事件 A 发生时，事件 B 一定不发生，当事件 B 发生时，事件 A 一定不发生，因此事件 A 与事件 B 之间不存在包含关系.

综上，事件 A，B，C 之间的包含关系为 $A\subseteq C$，$B\subseteq C$.

问题 2 $D_1=\{1,2,3\}$，$E_1=\{1,2\}$ 和 $E_2=\{2,3\}$. $\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$，即 $E_1\cup E_2=D_1$.

问题 3 $\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}$，即 $E_1\cap E_2=C_2$.

知识梳理

至少　同时　$A\cap B$(或 AB)

例 2 解 (1)对于事件 D，可能的结果为：1 个红球、2 个白球或 2 个红球、1 个白球，故 $D=A\cup B$.

(2)对于事件 C，可能的结果为 1 个红球、2 个白球或 2 个红球、1 个白球或 3 个均为红球，故 $C\cap A=A$.

跟踪训练 2 解 (1)因为事件 C_1，C_2，C_3，C_4 发生，则事件 D_3 必发生，所以 $C_1\subseteq D_3$，$C_2\subseteq D_3$，$C_3\subseteq D_3$，$C_4\subseteq D_3$.

同理可得，事件 E 包含事件 C_1，C_2，C_3，C_4，C_5，C_6；事件 D_2 包含事件 C_4，C_5，C_6；事件 F 包含事件 C_2，C_4，C_6；事件 G 包含事件 C_1，C_3，C_5.

且易知事件 C_1 与事件 D_1 相等，即 $C_1=D_1$.

(2)因为事件 $D_2=\{$出现的点数大于 3$\}=\{$出现 4 点或出现 5 点或出现 6 点$\}$，

所以 $D_2=C_4\cup C_5\cup C_6$(或 $D_2=C_4+C_5+C_6$).

同理可得，$D_3=C_1+C_2+C_3+C_4$，$E=C_1+C_2+C_3+C_4+C_5+C_6$，$F=C_2+C_4+C_6$，$G=C_1+C_3+C_5$.

问题 4 $C_3=\{3\}$，$C_4=\{4\}$，$C_3\cap C_4=\varnothing$.

问题 5 $F=\{2,4,6\}$，$G=\{1,3,5\}$. $F\cup G=\Omega$，$F\cap G=\varnothing$.

知识梳理

1. 不能同时　$A\cap B$　$A\cap B=\varnothing$　$A\cap B=\varnothing$

2. $A\cap B=\varnothing$　$A\cap B=\varnothing$　$A\cup B=\Omega$

例 3 解 (1)由于事件 C“至多订一种报纸”中包括“只订甲报”，即事件 A 与事件 C 有可能同时发生，故 A 与 C 不是互斥事件.

(2)事件 B“至少订一种报纸”与事件 E“一种报纸也不订”是不可能同时发生的，故 B 与 E 是互斥事件；由于事件 B 与事件 E 必有一个发生，故 B 与 E 是对立事件.

(3)事件 B“至少订一种报纸”中包括“只订乙报”，即有可能“不订甲报”，也就是说事件 B 和事件 D 有可能同时发生，故 B 与 D 不是互斥事件.

(4)事件 B“至少订一种报纸”中的可能情况为“只订甲报”“只订乙报”“订甲、乙两种报”. 事件 C“至多订一种报纸”中的可能情况为“一种报纸也不订”“只订甲报”“只订乙报”，也就是说事件 B 与事件 C 可能同时发生，故 B 与 C 不是互斥事件.

(5)由(4)的分析，事件 E“一种报纸也不订”是事件 C 中的一种可能情况，所以事件 C 与事件 E 可能同时发生，故 C 与 E 不是互斥事件.

跟踪训练 3 D ［由题意得事件 E 与事件 F 不可能同时发生，是互斥事件；事件 E 与事件 G 不可能同时发生，是互斥事件；当事件 F 发生时，事件 G 一定发生，所以事件 F 与事件 G 不是互斥事件，故 A，C 不正确；事件 E 与事件 G 中必有一个发生，所以事件 E 与事件 G 对立，所以 B 不正确，D 正确.］

随堂演练

1. D

2. B ［至少有 2 件次品包含 2,3,4,5,6,7,8,9,10 件次品. 共 9 种结果，故它的对立事件为含有 1 或 0 件次品，即至多有 1 件次品.］

3. 只有一人破译密码　$\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup AB$
4. $\{10,20,30,40,50,32,42,52,54\}$

10.1.3　古典概型(一)

问题1　样本空间的样本点是有限个,每个样本点发生的可能性相等.

知识梳理

(1)样本点　(2)相等

例1　解　(1)不是古典概型,因为区间[1,10]中有无限多个实数,取出的实数有无限多种结果,与古典概型定义中"所有可能结果只有有限个"矛盾.

(2)不是古典概型,因为硬币不均匀导致"正面朝上"与"反面朝上"发生的可能性不相等,与古典概型定义中"每一个试验结果出现的可能性相同"矛盾.

(3)是古典概型,因为在试验中所有可能出现的结果是有限的,而且每个整数被抽到的可能性相等.

跟踪训练1　D　[A,B两项中的样本点的出现不是等可能的;C项中样本点的个数是无限多个;D项中样本点的出现是等可能的,且是有限个.故选D.]

问题2　$A=\{2,4,6\}$.

对于抛掷骰子试验,出现各个点的可能性相同,记出现1点,2点,…,6点的事件分别为$A_1,A_2,\cdots,A_6$,记事件"出现偶数点"为B,则$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_6)$,又$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_6)=P$(必然事件)$=1$,所以$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_6)=\frac{1}{6}$,$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

知识梳理

$\frac{k}{n}$　$\frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

例2　解　由于4个球的大小相等,摸出每个球的可能性是均等的,所以是古典概型.

(1)将黑球编号为黑$_1$,黑$_2$,黑$_3$,从装有4个球的口袋内摸出2个球,样本空间$\Omega=\{$(黑$_1$,黑$_2$),(黑$_1$,黑$_3$),(黑$_1$,白),(黑$_2$,黑$_3$),(黑$_2$,白),(黑$_3$,白)$\}$,共有6个样本点,所以$n=6$.

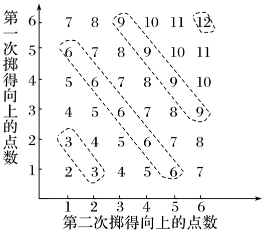
(2)事件"摸出2个黑球"$=\{$(黑$_1$,黑$_2$),(黑$_2$,黑$_3$),(黑$_1$,黑$_3$)$\}$,共有3个样本点.

(3)样本点总数$n=6$,事件"摸出两个黑球"包含的样本点个数$m=3$,故$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,即摸出2个黑球的概率为$\frac{1}{2}$.

跟踪训练2　$\frac{2}{3}$

解析　从4种颜色的花中任选2种颜色的花种在一个花坛中,余下2种颜色的花种在另一花坛的种数有:红黄—白紫、红白—黄紫、红紫—白黄、黄白—红紫、黄紫—红白、白紫—红黄,共6种,其中红色和紫色的花不在同一花坛的种数有红黄—白紫、红白—黄紫、黄紫—红白、白紫—红黄,共4种,故所求概率为$P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

例3　解　如图所示,从图中容易看出样本点与所描点一一对应,共36个,且每个样本点出现的可能性相等.



(1)记"点数之和为7"为事件A,从图中可以看出,事件A包含的样本点共有6个:(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6).

故$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

(2)记"掷出两个4点"为事件B,从图中可以看出,事件B包含的样本点只有1个,即(4,4).

故$P(B)=\frac{1}{36}$.

(3)记"点数之和能被3整除"为事件C,则事件C包含的样本点共12个:(1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(6,6).

故$P(C)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

跟踪训练3　解　(1)由题意知,从6个国家中任选2个国家,其一切可能的结果有(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_2,A_3),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_3,B_3),(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_2,B_3),共15个.

所选2个国家都是亚洲国家的事件所包含的样本点有(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_2,A_3),共3个,

则所求事件的概率为$P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

(2)从亚洲国家和欧洲国家中各任选1个,其一切可能的结果有(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_3,B_3),共9个.

包括A_1但不包括B_1的事件所包含的样本点有(A_1,B_2),(A_1,B_3),共2个,

则所求事件的概率为$P=\frac{2}{9}$.

随堂演练

1. BD　[A不是等可能事件,C不满足有限性.]
2. C　[由题意知,该题是一个古典概型,因为在50瓶牛奶中任取1瓶有50种不同的取法,取到已过保质期的牛奶有5种不同的取法,根据古典概型公式求得概率是$\frac{5}{50}=0.1$.故选C.]
3. $\frac{7}{36}$

解析　将一枚骰子投掷两次,样本点个数为36,且每个样本点出现的可能性相等,其中"将一枚骰子投掷两次,两次向上点数之和为5的倍数"所包含的样本点有(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(5,5),(6,4),(4,6),共7个,故"将一枚骰子先后投掷两次,两次向上点数之和为5的倍数"的概率为$\frac{7}{36}$.

4. 0.2

解析　两数之和等于5有两种情况(1,4)和(2,3),总的样本点有:(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5),共10个,且每个样本点出现的可能性相等,所以$P=\frac{2}{10}=0.2$.

10.1.3 古典概型(二)

例1　解　(1)将灯泡中2只正品记为a_1,a_2,1只次品记为b,第一次取灯泡时有3种等可能的结果,第二次取灯泡时也有3种等可能的结果.

故该试验的样本空间$\Omega=\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_1,b),(a_2,a_1),(a_2,a_2),(a_2,b),(b,a_1),(b,a_2),(b,b)\}$,共有9个样本点,连续两次取得正品的样本点个数为4,

所以所求概率为$P=\frac{4}{9}$.

(2)"从中一次任取2只"得到的样本空间包含的样本点的个数是3,即(a_1,a_2),(a_1,b),(a_2,b)(其中(a_1,a_2)表示一次取出(a_1,a_2)),"2只都是正品"的事件包含的样本点的个数是1,即(a_1,a_2),所以所求概率$P=\frac{1}{3}$.

跟踪训练1　$\frac{1}{2}$

解析　记女领诵分别为m_1,m_2,男领诵分别为b_1,b_2,则样本空间$\Omega=\{(m_1,m_2,b_1,b_2),(m_1,m_2,b_2,b_1),(m_1,b_1,m_2,b_2),(m_1,b_1,b_2,m_2),(m_1,b_2,b_1,m_2),(m_1,b_2,m_2,b_1),(m_2,m_1,b_1,b_2),(m_2,m_1,b_2,b_1),(m_2,b_1,m_1,b_2),(m_2,b_1,b_2,m_1),(m_2,b_2,b_1,m_1),(m_2,b_2,m_1,b_1),(b_1,b_2,m_1,m_2),(b_1,b_2,m_2,m_1),(b_1,m_1,b_2,m_2),(b_1,m_1,m_2,b_2),(b_1,m_2,m_1,b_2),(b_1,m_2,b_2,m_1),(b_2,b_1,m_1,m_2),(b_2,b_1,m_2,m_1),(b_2,m_1,b_1,m_2),(b_2,m_1,m_2,b_1),(b_2,m_2,b_1,m_1),(b_2,m_2,m_1,b_1)\}$,共有24个样本点,

其中,两名女领诵相邻$=\{(m_1,m_2,b_1,b_2),(m_1,m_2,b_2,b_1),(m_2,m_1,b_1,b_2),(m_2,m_1,b_2,b_1),(b_1,b_2,m_1,m_2),(b_1,b_2,m_2,m_1),(b_1,m_1,m_2,b_2),(b_1,m_2,m_1,b_2),(b_2,b_1,m_1,m_2),(b_2,b_1,m_2,m_1),(b_2,m_1,m_2,b_1),(b_2,m_2,m_1,b_1)\}$,

故所求的概率$P=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

例2　解　(1)因为这6位同学的平均成绩为75分,

所以$\frac{1}{6}(70+76+72+70+72+x_6)=75$,

解得$x_6=90$,

这6位同学成绩的方差$s^2=\frac{1}{6}\times[(70-75)^2+(76-75)^2+(72-75)^2+(70-75)^2+(72-75)^2+(90-75)^2]=49$,

所以标准差$s=7$.

(2)从前5位同学中,随机地选出2位同学的成绩的样本点有:

(70,76),(70,72),(70,70),(70,72),(76,72),(76,70),(76,72),(72,70),(72,72),(70,72),共10种.
恰有1位同学成绩在区间(68,75)中的有:
(70,76),(76,72),(76,70),(76,72),共4种,
故所求的概率为$\frac{4}{10}=0.4$.
即恰有1位同学成绩在区间(68,75)中的概率为0.4.

跟踪训练2 **解** (1)因为$(0.004+a+0.018+0.022\times2+0.028)\times10=1$,
所以$a=0.006$.
(2)由所给频率分布直方图知,50名受访职工评分不低于80的频率为$(0.022+0.018)\times10=0.4$,
所以估计该企业的职工对该部门评分不低于80的概率为0.4.
(3)受访职工评分在[50,60)的有$50\times0.006\times10=3$(人),记为A_1,A_2,A_3;
受访职工中评分在[40,50)的有$50\times0.004\times10=2$(人),记为B_1,B_2.
从这5名受访职工中随机抽取2人,
包含的样本点有:
$(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,A_3),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(B_1,B_2)$,共10个.
因为所抽取2人的评分都在[40,50)包含的样本点有1个,
即(B_1,B_2),故所求的概率为$\frac{1}{10}$.

例3 **解** 用数对(x,y)表示儿童参加活动先后记录的数,
则样本空间$\Omega=\{(x,y)|x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N},1\leqslant x\leqslant4,1\leqslant y\leqslant4\}$.
其中共有16个样本点.
(1)记"$xy\leqslant3$"为事件A,
则事件A包含的样本点个数为5个,
即(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1).
所以$P(A)=\frac{5}{16}$,
即小亮获得玩具的概率为$\frac{5}{16}$.
(2)记"$xy\geqslant8$"为事件B,"$3<xy<8$"为事件C,
则事件B包含的样本点个数为6,
即(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4),
所以$P(B)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.
事件C包含的样本点个数为5,
即(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(4,1),
所以$P(C)=\frac{5}{16}$.
因为$\frac{3}{8}>\frac{5}{16}$,
所以小亮获得水杯的概率大于获得饮料的概率.

跟踪训练3 **解** (1)所有样本点是$(A_1,a_1),(A_1,a_2),(A_1,b_1),(A_1,b_2),(A_2,a_1),(A_2,a_2),(A_2,b_1),(A_2,b_2),(B,a_1),(B,a_2),(B,b_1),(B,b_2)$.
(2)不正确,理由如下:
由(1)知,所有样本点共12个,
其中摸出的2个球都是红球的样本点有$(A_1,a_1),(A_1,a_2),(A_2,a_1),(A_2,a_2)$,共4个,
所以中奖的概率为$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,
不中奖的概率为$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,
故不中奖的概率比较大.

随堂演练

1.D [一枚质地均匀的硬币连掷2次,样本点有(正,正),(正,反),(反,正),(反,反),而只有一次正面朝上的样本点有(正,反),(反,正),故其概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.]

2.B [记3件合格品分别为A_1,A_2,A_3,2件次品分别为B_1,B_2,从5件产品中任取2件,有$(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,A_3),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(B_1,B_2)$,共10个样本点,其中恰有一件次品有6个样本点,由古典概型得所求事件概率为$\frac{6}{10}=0.6$.]

3.$\frac{1}{3}$
解析 从1,2,3,6这4个数中一次随机地取两个数,样本空间$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,6),(2,3),(2,6),(3,6)\}$,共6个样本点,"所取两个数的乘积为6"包含的样本点有(1,6),(2,3),共2个,故所求概率$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

4.$\frac{1}{3}$
解析 样本空间的样本点有(红,红),(红,白),(红,蓝),(白,红),(白,白),(白,蓝),(蓝,红),(蓝,白),(蓝,蓝),共9个,其中颜色相同的有(红,红),(白,白),(蓝,蓝),共3个,故所求的概率$P=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

10.1.4 概率的基本性质

问题1 $P(R\cup G)=P(R)+P(G)$.
问题2 $P(R_1\cup R_2)\neq P(R_1)+P(R_2)$,事件$R_1$和$R_2$不互斥.因为$n(\Omega)=12,n(R_1)=n(R_2)=6,n(R_1\cup R_2)=10$,所以$P(R_1)+P(R_2)=\frac{6}{12}+\frac{6}{12}=1,P(R_1\cup R_2)=\frac{10}{12}$,而$P(R_1\cap R_2)=\frac{2}{12}$,因此$P(R_1\cup R_2)=P(R_1)+P(R_2)-P(R_1\cap R_2)$.

知识梳理

性质1 $\geqslant$
性质2 1 0 1 0
性质3 $P(A)+P(B)$
性质4 $1-P(A)$ $1-P(B)$
性质5 $P(A)\leqslant P(B)$
性质6 $P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

例1 (1)C [①必然事件的概率等于1,此命题正确,必然事件一定发生,故其概率是1;
②某事件的概率等于1.1,必然事件的概率是1,故概率为1.1的事件不存在,此命题不正确;
③不可能事件的概率就是0,故命题正确.]
(2)A [因为$n(A)=3,n(B)=1$,所以$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{6}$,故$P(A)>P(B)$.]

跟踪训练1 D [因为A,B为互斥事件,所以$A\cup B$是随机事件或必然事件,则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\leqslant1$,当$A,B$为对立事件时,$P(A)+P(B)=1$.]

例2 (1)**解** 设事件C为"出现1点或2点",因为事件A,B是互斥事件,由$C=A\cup B$可得$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$,所以出现1点或出现2点的概率是$\frac{1}{3}$.
(2)**解** 因为A,B是互斥事件,所以$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{1}{2}=\frac{4}{5}$,所以这3只球中既有红球又有白球的概率是$\frac{4}{5}$.

跟踪训练2 **解** 记该河流这一处的年最高水位(单位:m)在[8,10),[10,12),[12,14),[14,16),[16,18]分别为事件A,B,C,D,E,且彼此互斥.
(1)$P(B\cup C\cup D)=P(B)+P(C)+P(D)=0.28+0.38+0.16=0.82$.
(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.1+0.28=0.38$.
(3)$P(D\cup E)=P(D)+P(E)=0.16+0.08=0.24$.

例3 **解** (1)"甲获胜"和"和棋或乙获胜"是对立事件,所以"甲获胜"的概率$P=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.
即甲获胜的概率是$\frac{1}{6}$.
(2)**方法一** 设事件A为"甲不输",可看成是"甲获胜""和棋"这两个互斥事件的并事件,所以$P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.
方法二 设事件A为"甲不输",可看成是"乙获胜"的对立事件,所以$P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.
即甲不输的概率是$\frac{2}{3}$.

跟踪训练3 **解** 某战士射击一次,要么中靶,要么未中靶,因此设某战士射击一次,"中靶"为事件A,则其对立事件B为"未中靶",于是$P(A)=1-P(B)=1-0.05=0.95$.
所以某战士射击一次,中靶的概率是0.95.

例4 **解** (1)从袋中任取一球,记事件"得到红球""得到黑球""得到黄球""得到绿球"分别为A,B,C,D,

则 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{5}{12}$，$P(C\cup D)=P(C)+P(D)=\frac{5}{12}$，$P(B\cup C\cup D)=P(B)+P(C)+P(D)=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

联立 $\begin{cases}P(B)+P(C)=\frac{5}{12},\\ P(C)+P(D)=\frac{5}{12},\\ P(B)+P(C)+P(D)=\frac{2}{3},\end{cases}$

解得 $P(B)=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{1}{6}$，$P(D)=\frac{1}{4}$，

故得到黑球、黄球、绿球的概率分别为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{4}$.

(2)事件“得到红球或绿球”可表示为事件 $A\cup D$，由(1)及互斥事件的概率加法公式得 $P(A\cup D)=P(A)+P(D)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$，

故得到的不是红球也不是绿球的概率 $P=1-P(A\cup D)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$.

跟踪训练4　解　(1)记“他乘火车”为事件 A，“他乘轮船”为事件 B，“他乘汽车”为事件 C，“他乘飞机”为事件 D. 这四个事件两两不可能同时发生，故它们彼此互斥，所以 $P(A\cup D)=P(A)+P(D)=0.3+0.4=0.7$.

即他乘火车或乘飞机去的概率为0.7.

(2)设他不乘轮船去的概率为 P，则

$P=1-P(B)=1-0.2=0.8$，

所以他不乘轮船去的概率为0.8.

(3)由于 $P(A)+P(B)=0.3+0.2=0.5$，

$P(C)+P(D)=0.1+0.4=0.5$，

故他可能乘火车或乘轮船去，也有可能乘汽车或乘飞机去.

随堂演练

1. C

2. C　[∵摸出黑球是摸出红球或摸出白球的对立事件，∴摸出黑球的概率是 $1-0.42-0.28=0.3$，故选C.]

3. $\frac{5}{6}$

解析　由题意知摸出的2只球的颜色相同的概率为 $\frac{1}{6}$，故所求概率 $P=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

4. 0.2

解析　设“命中9环以上(含9环)”为事件 A，“命中8环”为事件 B，“命中7环”为事件 C，“命中6环以下(含6环)”为事件 D，则 D 与 $A\cup B\cup C$ 互为对立事件. 因为 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.2$，$P(C)=0.1$，且 A，B，C 三个事件互斥，所以 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=0.8$，所以 $P(D)=1-0.8=0.2$.

习题课　古典概型的应用

例1　解　设事件 A：两个小球上的数字为相邻整数.

则事件 A 包括的样本点有(1,2)，(2,3)，(3,4)，(4,5)，(5,6)，(6,7)，(7,8)，(8,9)，(9,10)，(10,9)，(9,8)，(8,7)，(7,6)，(6,5)，(5,4)，(4,3)，(3,2)，(2,1)，共18个.

(1)不放回取球时，总的样本点数为90，故 $P(A)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$.

(2)有放回取球时，总的样本点数为100，故 $P(A)=\frac{18}{100}=\frac{9}{50}$.

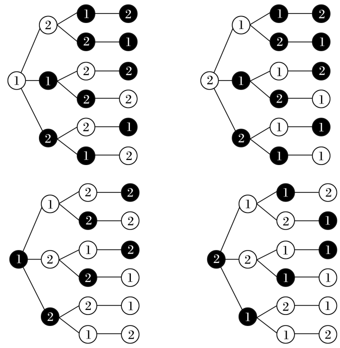
跟踪训练1　$\frac{1}{2}$　$\frac{2}{3}$

解析　有放回地取数的样本空间包括{(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，(4,4)}，共16个样本点，和为奇数的包括{(1,2)，(1,4)，(2,1)，(2,3)，(3,2)，(3,4)，(4,1)，(4,3)}，共8个样本点，故所求概率 $P=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

不放回地取数的样本空间包括{(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,3)，(2,4)，(3,4)}，共6个样本点，和为奇数的包括{(1,2)，(1,4)，(2,3)，(3,4)}，共4个样本点，故所求概率 $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

例2　解　方法一　需要找出4个人按顺序依次摸球的样本点总数和第二个人摸到白球的样本点数.

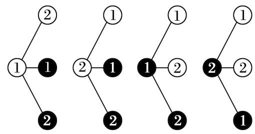
解题过程如下：用 A 表示事件“第二个人摸到白球”，把2个白球编上序号1，2；2个黑球也编上序号1，2. 于是，4个人按顺序依次从袋中摸出一个球的所有样本点，可用树状图直观地表示出来，如图所示：



由上图可知，试验的样本点总数是24，由于口袋内的4个球除颜色外完全相同，所以，这24个样本点出现的可能性相同，其中，第二个人摸到白球的样本点有12个，

故第二个人摸到白球的概率 $P(A)=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

方法二　把2个白球编上序号1，2，两个黑球也编上序号1，2，4个人按顺序依次从袋中摸出一球，前两人摸出的球的所有样本点如图所示：



由图可知，试验的样本点总数是12，由于口袋内的4个球除颜色外完全相同，所以这12个样本点出现的可能性相同，其中，第二个人摸到白球的样本点有6个，

故第二个人摸到白球的概率 $P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

跟踪训练2　解　(1)设事件 A 为“顾客中三等奖”，所有样本点包括{(0,0)，(0,1)，(0,2)，(0,3)，(1,0)，(1,1)，(1,2)，(1,3)，(2,0)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(3,0)，(3,1)，(3,2)，(3,3)}，共16个.

事件 A 包含的样本点有{(0,3)，(1,2)，(2,1)，(3,0)}，共4个，

所以 $P(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

所以顾客中三等奖的概率为 $\frac{1}{4}$.

(2)设事件 B 为“顾客未中奖”，

“两个小球号码相加之和等于5”这一事件包括样本点{(2,3)，(3,2)}，共2个，

“两个小球号码相加之和等于4”这一事件包括样本点{(1,3)，(2,2)，(3,1)}，共3个，

所以 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\left(\frac{2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{4}{16}\right)=\frac{7}{16}$.

所以顾客未中奖的概率为 $\frac{7}{16}$.

例3　解　a，b，c 三个小球随机放入甲、乙两个盒子的所有情况为：

甲盒	a,b,c	a,b	a	a,c	b,c	b	c	空
乙盒	空	c	b,c	b	a	c,a	a,b	a,b,c

两个盒子都不空的对立事件是至少有一个盒子为空，所包含样本点为：甲盒子 a,b,c，乙盒子空；甲盒子空，乙盒子 a,b,c，共2个，

故 $P=1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$.

跟踪训练3　解　由题意知，(a,b,c) 的样本空间 $\Omega=\{(1,1,1)$，$(1,1,2)$，$(1,1,3)$，$(1,2,1)$，$(1,2,2)$，$(1,2,3)$，$(1,3,1)$，$(1,3,2)$，$(1,3,3)$，$(2,1,1)$，$(2,1,2)$，$(2,1,3)$，$(2,2,1)$，$(2,2,2)$，$(2,2,3)$，$(2,3,1)$，$(2,3,2)$，$(2,3,3)$，$(3,1,1)$，$(3,1,2)$，$(3,1,3)$，$(3,2,1)$，$(3,2,2)$，$(3,2,3)$，$(3,3,1)$，$(3,3,2)$，$(3,3,3)\}$，共27个样本点.

(1)设“抽取的卡片上的数字满足 $a+b=c$”为事件 A，

则事件 A 包含的样本点有(1,1,2)，(1,2,3)，(2,1,3)，共3个.

所以 $P(A)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$.

即“抽取的卡片上的数字满足 $a+b=c$”的概率为$\frac{1}{9}$.

(2)设“抽取的卡片上的数字 a,b,c 不完全相同”为事件 B,则事件 B 的对立事件 $\overline{B}$ 包括的样本点有(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),共 3 种.

$\therefore P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{3}{27}=\frac{8}{9}$.

即“抽取的卡片上的数字 a,b,c 不完全相同”的概率为$\frac{8}{9}$.

随堂演练

1.B [从中任取三条线段共有 4 种取法,能构成三角形的只有长度为 2,3,4 的线段,所以 $P=\frac{1}{4}$,故选 B.]

2.B [由题意,此人从小区 A 前往小区 H 的所有最短路径包含的样本点有 $A\to B\to C\to E\to H$,$A\to B\to O\to E\to H$,$A\to B\to O\to G\to H$,$A\to D\to O\to E\to H$,$A\to D\to O\to G\to H$,$A\to D\to F\to G\to H$,共 6 个.记“此人经过市中心 O”为事件 M,则 M 包含的样本点有 $A\to B\to O\to E\to H$,$A\to B\to O\to G\to H$,$A\to D\to O\to E\to H$,$A\to D\to O\to G\to H$,共 4 个,所以 $P(M)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,即他经过市中心 O 的概率为$\frac{2}{3}$.]

3.$\frac{2}{3}$

解析 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行,所以总的样本点共 6 个.记两本数学书为数学 1,数学 2,则 2 本数学书相邻的样本点有(数学 1,数学 2,语文),(数学 2,数学 1,语文),(语文,数学 1,数学 2),(语文,数学 2,数学 1),共 4 个.故 2 本数学书相邻的概率 $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

4.$\frac{1}{9}$

解析 掷骰子共有 $6\times6=36$(种)可能情况,而落在以原点为圆心,3 为半径的圆内的有{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)},共 4 种,

故所求概率 $P=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

§10.2 事件的相互独立性(一)

问题 1 用 1 表示硬币“正面朝上”,用 0 表示硬币“反面朝上”,则样本空间为 $\Omega=\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$,包含 4 个等可能的样本点.而 $A=\{(1,1),(1,0)\}$,$B=\{(1,0),(0,0)\}$,所以 $AB=\{(1,0)\}$.由古典概型概率公式,得

$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$,$P(AB)=\frac{1}{4}$.

于是 $P(AB)=P(A)P(B)$.

例 1 解 (1)“从甲组中选出 1 名男生”这一事件是否发生,对“从乙组中选出 1 名女生”这一事件是否发生没有影响,所以它们是相互独立事件.

(2)“从 8 个球中任意取出 1 个,取出的是白球”的概率为$\frac{5}{8}$,若这一事件发生了,则“从剩下的 7 个球中任意取出 1 个,取出的仍是白球”的概率为$\frac{4}{7}$;若前一事件没有发生,则后一事件发生的概率为$\frac{5}{7}$,可见,前一事件是否发生,对后一事件发生的概率有影响,所以二者不是相互独立事件.

跟踪训练 1 ①②③

解析 根据事件相互独立性的定义判断,只要 $P(AB)=P(A)P(B)$,$P(AC)=P(A)P(C)$,$P(BC)=P(B)P(C)$成立即可.

利用古典概型概率公式计算可得 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.5$,$P(C)=0.5$,$P(AB)=0.25$,$P(AC)=0.25$,$P(BC)=0.25$.

可以验证 $P(AB)=P(A)P(B)$,$P(AC)=P(A)P(C)$,$P(BC)=P(B)P(C)$.

所以根据事件相互独立的定义,事件 A 与 B 相互独立,事件 B 与 C 相互独立,事件 A 与 C 相互独立.

问题 2 对于 A 与 $\overline{B}$,因为 $A=AB\cup A\overline{B}$,而且 AB 与 $A\overline{B}$ 互斥,所以 $P(A)=P(AB\cup A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)P(B)+P(A\overline{B})$,所以 $P(A\overline{B})=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$.由事件的独立性定义,知 A 与 $\overline{B}$ 相互独立.类似地,可以证明事件 $\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

例 2 A [由题意可得 $\overline{A}_2$ 表示“第二次摸到的不是白球”,即 $\overline{A}_2$ 表示“第二次摸到的是黄球”,由于采用有放回地摸球,故每次是否摸到黄球或白球互不影响,故事件 A_1 与 $\overline{A}_2$ 是相互独立事件.]

跟踪训练 2 C [因为 $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$,所以 $P(A)=\frac{1}{3}$,又 $P(B)=\frac{1}{3}$,$P(AB)=\frac{1}{9}$,所以有 $P(AB)=P(A)P(B)$,所以事件 A 与 B 相互独立但不一定互斥.]

例 3 解 记 A 表示事件“购买甲种保险”,B 表示事件“购买乙种保险”,则由题意得 A 与 B,A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{B}$ 与 $\overline{A}$ 都是相互独立事件,且 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.6$.

(1)记 C 表示事件“同时购买甲、乙两种保险”,

则 $C=AB$,所以 $P(C)=P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0.5\times0.6=0.3$.

(2)记 D 表示事件“购买乙种保险但不购买甲种保险”,

则 $D=\overline{A}B$,所以 $P(D)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=(1-0.5)\times0.6=0.3$.

跟踪训练 3 解 记事件 A 为“甲独立地破译出密码”,事件 B 为“乙独立地破译出密码”.

(1)两个人都破译出密码的概率为

$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

(2)恰有一人破译出密码分为两类:甲破译出乙破译不出,乙破译出甲破译不出,即 $A\overline{B}+\overline{A}B$,

$\therefore P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$

$=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$.

(3)至多有一人破译出密码的对立事件是两人都破译出密码,

$\therefore$ 其概率为 $1-P(AB)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$.

随堂演练

1.D [互斥事件和对立事件是同一次试验的两个不同时发生的事件,故选项 A,C 错.而事件 A_1 的发生对事件 A_2 发生的概率有影响,故两者不是相互独立事件.]

2.B [设“甲保险丝熔断”为事件 A,“乙保险丝熔断”为事件 B,

则 $P(A)=0.85$,$P(B)=0.74$,

由事件 A 与 B 相互独立,

得“两根保险丝都熔断”为事件 AB,

$\therefore P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0.85\times0.74=0.629$.]

3.0.009

解析 3 人向目标各发 1 枪,由相互独立事件的概率计算公式,得目标没有被击中的概率 $P=(1-0.7)\times(1-0.8)\times(1-0.85)=0.3\times0.2\times0.15=0.009$.

4.$\frac{3}{70}$

解析 加工出来的零件的正品率是 $\left(1-\frac{1}{70}\right)\times\left(1-\frac{1}{69}\right)\times\left(1-\frac{1}{68}\right)=\frac{67}{70}$,因此加工出来的零件的次品率为 $1-\frac{67}{70}=\frac{3}{70}$.

§10.2 事件的相互独立性(二)

例 1 解 (1)分别设甲、乙、丙三人各自做对这道题分别为事件 A,B,C,

则 $P(A)=\frac{1}{2}$,由题意得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot P(B)P(C)=\frac{1}{24},\\ \left(1-\frac{1}{2}\right)(1-P(B))(1-P(C))=\frac{1}{4},\end{cases}$$

解得 $P(B)=\frac{1}{3}$,$P(C)=\frac{1}{4}$或 $P(B)=\frac{1}{4}$,$P(C)=\frac{1}{3}$.

所以乙、丙两人各自做对这道题的概率分别为$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$或$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{3}$.

(2)设“甲、乙、丙三人中恰有一人做对这道题”为事件 D,

则 $P(D)=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{11}{24}$.

所以甲、乙、丙三人中恰有一人做对这道题的概率为$\frac{11}{24}$.

跟踪训练1 解 记事件A表示"甲击中目标",事件B表示"乙击中目标",
依题意知事件A和事件B相互独立,
因此甲、乙各射击一次均击中目标的概率为$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$.
(2)记事件A_i表示"甲第i次射击击中目标"(其中$i=1,2,3,4$),并记"甲4次射击恰有3次连续击中目标"为事件C,
则$C=A_1A_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2A_3A_4$,且$A_1A_2A_3\overline{A}_4$与$\overline{A}_1A_2A_3A_4$是互斥事件,
由于A_1,A_2,A_3,A_4之间相互独立,
所以A_i与$\overline{A}_j(i,j=1,2,3,4$,且$i\neq j)$之间也相互独立.
由于$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{2}{3}$,
故$P(C)=P(A_1A_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2A_3A_4)$
$=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$
$=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{81}$.

例2 解 记"三个元件T_1,T_2,T_3正常工作"分别为事件A_1,A_2,A_3,
则$P(A_1)=\frac{1}{2},P(A_2)=\frac{3}{4},P(A_3)=\frac{3}{4}$,
不发生故障的事件为$(A_2\cup A_3)A_1$,
所以不发生故障的概率为
$P=P[(A_2\cup A_3)A_1]=P(A_2\cup A_3)\cdot P(A_1)$
$=[1-P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)]\cdot P(A_1)$
$=\left(1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{15}{32}$.

跟踪训练2 解 由题意知,这段时间内3个开关是否能够闭合相互之间没有影响,根据相互独立事件的概率公式得,这段时间内3个开关都不能闭合的概率是
$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$
$=[1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]$
$=(1-0.7)(1-0.7)(1-0.7)=0.027$.
所以这段时间内至少有1个开关能够闭合,从而使线路能够正常工作的概率是
$1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-0.027=0.973$.
即这段时间内线路正常工作的概率是0.973.

例3 解 (1)记"甲获得合格证书"为事件A,"乙获得合格证书"为事件B,"丙获得合格证书"为事件C,则
$P(A)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$,
$P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$,
$P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{9}$.
因为$P(C)>P(B)>P(A)$,所以丙获得合格证书的可能性最大.
(2)设"三人考试后恰有两人获得合格证书"为事件D,
由题易知三人是否获得合格证书相互独立,则
$P(D)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$
$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}=\frac{11}{30}$.

跟踪训练3 解 记事件A,B,C分别为甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品.

由题设知$\begin{cases}P(A)\cdot[1-P(B)]=\frac{1}{4},\\P(B)\cdot[1-P(C)]=\frac{1}{12},\\P(A)\cdot P(C)=\frac{2}{9},\end{cases}$

解方程组并舍去不合题意的根,得
$P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{4},P(C)=\frac{2}{3}$.
即甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的概率分别是$\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3}$.

随堂演练

1.B [由题意知三项标准互不影响,
$\therefore P=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{90}$.]

2.D [由相互独立性质知A与$\overline{B}$也相互独立,
所以$P(A\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=0.18$.]

3.C [因为2道工序相互独立,所以产品的正品率为$(1-a)(1-b)$.]

4.$\frac{3}{5}$

解析 用A,B,C分别表示甲、乙、丙三人破译出密码,则$P(A)=\frac{1}{5},P(B)=\frac{1}{3},P(C)=\frac{1}{4}$,且$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$,所以此密码被破译出的概率为$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

§10.3 频率与概率

问题1 (1)试验次数n相同,频率$f_n(A)$可能不同,这说明随机事件发生的频率具有随机性.
(2)从整体来看,频率在概率0.5附近波动.当试验次数较少时,波动幅度较大;当试验次数较大时,波动幅度较小,但试验次数多的波动幅度并不全都比次数少的小,只是波动幅度小的可能性更大.

.知识梳理

1.稳定 稳定 估计

例1 (1)D [A错误,概率小不代表一定不发生;B错误,概率不等同于频率;C错误,概率是预测,不必然出现;D正确,随机事件发生的概率是频率的稳定值,与试验次数无关.]
(2)解 ①抽到优等品的频率分别为0.8,0.92,0.96,0.95,0.956,0.954.
②由表中数据可估计优等品的概率约为0.95.

跟踪训练1 解 (1)表中依次填入的数据为:0.80,0.95,0.88,0.92,0.89,0.91.
(2)由于频率稳定在常数0.9附近,所以这个射手射击一次,击中靶心的概率约是0.9.

例2 解 该方案是公平的,理由如下:
各种情况如下表所示:

和	4	5	6	7
1	5	6	7	8
2	6	7	8	9
3	7	8	9	10

由上表可知该游戏可能出现的情况共有12种,其中两数字之和为偶数的有6种,为奇数的也有6种,所以(1)班代表获胜的概率$P_1=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$,(2)班代表获胜的概率$P_2=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$,即$P_1=P_2$,机会是均等的,所以该方案对双方是公平的.

跟踪训练2 解 (1)A方案中,"是奇数"和"是偶数"的概率都为0.5;B方案中,"是4的整数倍数"的概率为0.2,"不是4的整数倍数"的概率为0.8;C方案中,"是大于4的数"的概率为0.6,"不是大于4的数"的概率为0.4.故选择B方案,猜"不是4的整数倍数"获胜的概率最大.
(2)为了保证游戏的公平性,应当选择方案A.因为方案A猜"是奇数"或"是偶数"的概率均为0.5,从而保证了该游戏是公平的.
(3)可以设计为:猜"是大于5的数"或"不是大于5的数",也可以保证游戏的公平性.

问题2 利用计算器或计算机软件可以产生随机数.实际上,我们也可以根据不同的随机试验构建相应的随机数模拟试验,这样就可以快速地进行大量重复试验了.

问题3 (1)建立概率模型;
(2)进行模拟试验(可用计算器或计算机进行);
(3)统计试验结果.

例3 解 用1,2,3,4,5,6表示白球,7表示红球,利用计算器或计算机产生1到7之间(包括1和7)取整数值的随机数,因为要求恰好第三次摸到红球的概率,所以每三个随机数作为一组,如下,产生30组随机数:

666 743 671 464 571 561 156 567 732 375
716 116 614 445 117 573 552 274 114 662
237 456 732 353 156 632 171 243 547 721

就相当于做了30次试验,在这些数组中,前两个数字不是7,第三个数字恰好是7就表示第一次、第二次摸到的是白球,第三次摸到的是红球,它们分别是567,117,237和547,共4组,因此恰好第三次摸到红球的概率约为$\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$.

跟踪训练3 **解** 利用计算机或计算器产生0到9之间取整数值的随机数,用1,2,3,4,5,6表示投中,用7,8,9,0表示未投中,这样可以体现投中的概率是60%,因为投篮4次,所以以每4个随机数作为1组,例如5727,7895,0123,…,4560,4581,4698,共100组这样的随机数,若所有数组中没有7,8,9,0或只有7,8,9,0中的一个数的数组的个数为n,则至少投中3次的概率近似值为$\frac{n}{100}$.

随堂演练

1.D

2.B [随机数容量越大,所估计的概率越接近实际值.]

3.500

解析 设进行了n次试验,则有$\frac{10}{n}=0.02$,得$n=500$,故进行了500次试验.

4.0.52

解析 $\frac{100-48}{100}=0.52$.

章末复习课

例1 **解** (1)在容量为30的样本中,不下雨的天数是26,以频率估计概率,4月份任选一天,该市不下雨的概率为$P=\frac{26}{30}=\frac{13}{15}$.

(2)称相邻的两个日期为"互邻日期对"(如,1日与2日,2日与3日等),这样,在4月份中,前一天为晴天的互邻日期对有16个,其中后一天不下雨的有14个,所以晴天的次日不下雨的频率为$\frac{7}{8}$,

以频率估计概率,运动会期间不下雨的概率为$\frac{7}{8}$.

跟踪训练1 **解** (1)由题意知,样本中电影的总部数是$140+50+300+200+800+510=2\ 000$,

第四类电影中获得好评的电影部数是$200\times0.25=50$.

故所求概率为$\frac{50}{2\ 000}=0.025$.

(2)由题意知,样本中获得好评的电影部数是

$140\times0.4+50\times0.2+300\times0.15+200\times0.25+800\times0.2+510\times0.1$

$=56+10+45+50+160+51$

$=372$.

故所求概率估计为$1-\frac{372}{2\ 000}=0.814$.

(3)增加第五类电影的好评率,减少第二类电影的好评率.

例2 B [事件E_1与E_2互斥且对立;E_1与E_3是互斥而不对立事件,E_2与E_3既不互斥也不对立.]

跟踪训练2 (1)A [由互斥事件的定义可得,"甲站排头"与"乙站排头"为互斥事件.]

(2)③

解析 在①中,掷一枚骰子一次,事件M:"出现的点数为奇数",事件N:"出现的点数为偶数",事件M发生与否和事件N有关,故M和N不是相互独立事件;

在②中,袋中有3白、2黑,5个大小相同的小球,依次不放回地摸出2个球,事件M:"第1次摸到白球",事件N:"第2次摸到白球",事件M发生与否和事件N有关,故M和N不是相互独立事件;

在③中,分别抛掷2枚相同的硬币,事件M:"第1枚正面",事件N:"2枚结果相同",事件M发生与否与事件N无关,事件N发生与否与事件M无关,故M和N是相互独立事件.

例3 **解** 设4个白球的编号为1,2,3,4,2个红球的编号为5,6.从袋中的6个球中任取2个球,样本空间$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$,共15个样本点,且每个样本点出现的可能性相同.

(1)"从袋中的6个球中任取2球,所取的2球全是白球"为事件A,则$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$,共含有6个样本点.所以$P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

(2)"从袋中的6个球中任取2球,其中一个是白球,另一个是红球"为事件B,则$B=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$,共含有8个样本点,所以$P(B)=\frac{8}{15}$.

跟踪训练3 **解** (1)由调查数据可知,既未参加书法社团又未参加演讲社团的有30人,

故至少参加上述一个社团的共有$45-30=15$(人),

所以从该班随机选1名同学,该同学至少参加上述一个社团的概率为$P=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

(2)从这5名男同学和3名女同学中各随机选1人,其一切可能的结果组成的样本空间$\Omega=\{A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3,A_2B_1,A_2B_2,A_2B_3,A_3B_1,A_3B_2,A_3B_3,A_4B_1,A_4B_2,A_4B_3,A_5B_1,A_5B_2,A_5B_3\}$,共含15个样本点.

根据题意这些样本点出现的可能性相等.事件"A_1被选中且B_1未被选中"所包含的样本点有A_1B_2,A_1B_3,共2个.

所以其概率为$P=\frac{2}{15}$.

例4 **解** 记"该选手正确回答第i轮问题"为事件$A_i(i=1,2,3)$,

则$P(A_1)=\frac{4}{5},P(A_2)=\frac{3}{5},P(A_3)=\frac{2}{5}$.

(1)该选手进入第三轮才被淘汰的概率为

$P(A_1A_2\overline{A_3})=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{36}{125}$.

(2)该选手至多进入第二轮考核的概率为

$P(\overline{A_1}+A_1\overline{A_2})=P(\overline{A_1})+P(A_1)P(\overline{A_2})=\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{13}{25}$.

跟踪训练4 **解** 记甲、乙、丙三台机器在某一小时内需要照顾分别为事件A,B,C,则A,B,C两两相互独立.

(1)由题意得

$P(AB)=P(A)P(B)=0.05$,

$P(AC)=P(A)P(C)=0.1$,

$P(BC)=P(B)P(C)=0.125$,

$\therefore P(A)=0.2,P(B)=0.25,P(C)=0.5$,

∴甲、乙、丙每台机器在这一小时内需要照顾的概率分别为0.2,0.25,0.5.

(2)$\because A,B,C$两两相互独立,

$\therefore \overline{A},\overline{B},\overline{C}$两两相互独立,

∴甲、乙、丙每台机器在一个小时内都不需要照顾的概率为

$P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0.8\times0.75\times0.5=0.3$,

∴这一小时内至少有一台需要照顾的概率为

$P=1-P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C})=1-0.3=0.7$.

随堂演练

1.BD [对于A,至少有1件次品与至多有1件正品,都包含着"一件正品,一件次品",所以不是互斥事件,故A不正确;对于B,至少有1件次品包含着"一件正品一件次品""两件次品",与"两件都是正品"是对立事件,故B正确;对于C,至少有1件次品与至少有1件正品都包含着"一件正品,一件次品",所以不是互斥事件,故C不正确;对于D,恰有1件次品与恰有2件正品是互斥而不对立事件,故D正确.]

2.A [由题意,得骰子朝上的面的点数为奇数的概率为$\frac{1}{2}$,即甲、乙每局得分的概率相等,所以继续游戏甲获胜的概率是$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$,乙获胜的概率是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,所以甲得到的游戏牌为$12\times\frac{3}{4}=9$(张),乙得到的游戏牌为$12\times\frac{1}{4}=3$(张),故选A.]

3.B [有放回地取球3次,共27种可能结果,其中颜色相同的结果有3种,其概率为$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$;颜色不全同的结果有24种,其概率为$\frac{24}{27}=\frac{8}{9}$;颜色全不同的结果有6种,其概率为$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$;无红球的结果有8种,其概率为$\frac{8}{27}$.]

4.1

解析 事件A,B,C之间是互斥的,且又是一枚硬币连掷三次的所有结果,所以$P(A)+P(B)+P(C)=1$.

分层训练与测评

第六章　平面向量及其应用

§6.1　平面向量的概念

1. ACD ［零向量的长度为0，方向是任意的，它与任何向量都平行，所以ACD正确，B错误.］

2. C ［温度没有方向，所以不是向量，故A错；由共线向量的定义可知，共线的向量，始点不同，终点可能相同，故B错；向量不可以比较大小，故D错；若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 必共线，故若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则应均为非零向量，故C对.］

3. B ［$|\overrightarrow{AB}|$与$|\overrightarrow{DC}|$表示等腰梯形两腰的长度，故相等.］

4. D ［对于①，长度为0的向量都是零向量，①正确；对于②，零向量的方向是任意的，②错误；对于③，单位向量的长度都为1，相等，③正确；对于④，单位向量的方向不一定相同，④错误；对于⑤，零向量的方向是任意的，所以任意向量与零向量都共线，⑤正确，综上，正确的命题是①③⑤.］

5. B ［因为 O 是$\triangle ABC$的外心，所以$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{CO}|$.］

6. ABC ［由于 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，因此与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量只有 $\overrightarrow{DC}$，而与 $\overrightarrow{AB}$ 的模相等的向量有 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$，因此选项A，B正确. 而在Rt$\triangle AOD$中，

因为$\angle ADO=30°$，所以$|\overrightarrow{DO}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{DA}|$，

故$|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{DA}|$，因此选项C正确. 由于 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$，因此 $\overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 是共线的，故选项D不正确. 故选ABC.］

7. 菱形

解析　$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\therefore AB=DC$，$AB/\!/DC$，
$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
$\because|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$，$\therefore$四边形 $ABCD$ 是菱形.

8. ③

解析　①中，当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，不能得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，①不正确；②中，向量的模相等，但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向不确定，②不正确；③中，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，③正确；④中，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 可与 $\boldsymbol{b}$ 共线，④不正确.

9. **解**　(1)与 $\overrightarrow{OA}$ 的模相等的线段是六条边和六条半径(如 OB)，而每一条线段可以有两个向量，所以这样的向量共有23个.

(2)存在. 由正六边形的性质可知，$BC/\!/AO/\!/EF$，所以与 $\overrightarrow{OA}$ 长度相等、方向相反的向量有 $\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{BC}$，共4个.

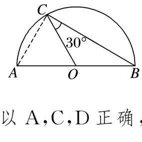
(3)由(2)知，$BC/\!/OA/\!/EF$，线段 OD，AD 与 OA 在同一条直线上，所以与 $\overrightarrow{OA}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DA}$，共9个.

10. **证明**　$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\therefore AB=DC$ 且 $AB/\!/DC$，
$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$，
又 $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}$，$\therefore CN=MA$，$CN/\!/MA$，
$\therefore$四边形 $CNAM$ 是平行四边形，
$\therefore\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NA}$，$\therefore CM=NA$，$CM/\!/NA$.
$\because CB=DA$，$CM=NA$，$\therefore MB=DN$.
又 $DN/\!/MB$，$\therefore\overrightarrow{DN}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的模相等且方向相同，
$\therefore\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$.

11. ACD

12. A ［如图，连接 AC，由$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|$，得$\angle ABC=\angle OCB=30°$，又$\angle ACB=90°$，

则$|\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{2}\times2=1$.］

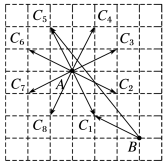


13. ACD ［若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，模相等，所以A，C，D正确，B错误.］

14. $\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{CO}$，$\overrightarrow{DE}$　$\overrightarrow{CO}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{DE}$.

15. C ［由向量相等及共线的概念，结合图形可知C不一定正确.］

16. **解**　(1)画出所有的向量 $\overrightarrow{AC}$，如图所示.



(2)由(1)所画的图知，
①当点 C 位于点 C_1 或 C_2 时，
$|\overrightarrow{BC}|$取得最小值 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$；
②当点 C 位于点 C_5 或 C_6 时，
$|\overrightarrow{BC}|$取得最大值 $\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.
所以$|\overrightarrow{BC}|$的最大值为 $\sqrt{41}$，最小值为$\sqrt{5}$.

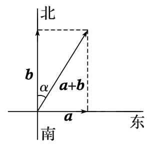
§6.2　平面向量的运算

6.2.1　向量的加法运算

1. C ［$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$. 故选C.］

2. B ［如图，易知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $\alpha=30°$. 故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向是北偏东30°.

又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$ km，故选B.］



3. D ［$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CF}$.］

4. C ［$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{BC}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{BC}$.］

5. D ［由于$|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|=1$，$|\overrightarrow{BC}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，所以$\triangle ABC$为等腰直角三角形. 故选D.］

6. ABD ［由向量加法的平行四边形法则，知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 成立，故$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$也成立；由向量加法的三角形法则，知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}$ 成立，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}$ 不成立.］

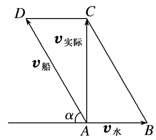
7. (1)$\overrightarrow{AD}$　(2)$\boldsymbol{0}$

8. 1　$\sqrt{3}$

解析　易知$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=1$，以 AB，AC 为邻边作平行四边形 $ABDC$，则$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{AB}|\times\sin60°=2\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

9. **解**　(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BA}$.
(2)$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}=(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EA})+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.
(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

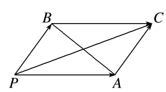
10. **解**　作出图形，如图所示.



设船速 $\boldsymbol{v}_{船}$ 与岸的方向成 α 角，
由图可知 $\boldsymbol{v}_{水}+\boldsymbol{v}_{船}=\boldsymbol{v}_{实际}$，
结合已知条件，得四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
在Rt$\triangle ACD$中，
$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{v}_{水}|=10$ m/min，
$|\overrightarrow{AD}|=|\boldsymbol{v}_{船}|=20$ m/min，
$\therefore\cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$，
$\therefore\alpha=60°$，从而船行进的方向与水流方向成120°角.
$\therefore$船沿与水流方向成120°角的方向行进.

11. ACD ［A错，若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向是任意的；B正确，若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，则它们的和的方向应该与 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{b}$)的方向相同，若它们的方向相反，而 $\boldsymbol{a}$ 的模大于 $\boldsymbol{b}$ 的模，则它们的和的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；C错，当 A，B，C 三点共线时，也满足 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$；D错，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.］

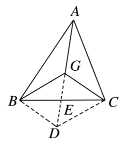
12. D ［$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}$，根据向量加法的平行四边形法则，如图，则点 P 在$\triangle ABC$外. 故选D.］



13. D ［由向量加法的平行四边形法则可知，$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DF}\neq\overrightarrow{FD}$.］

14. $\boldsymbol{0}$

解析　如图所示，连接 AG 并延长交 BC 于点 E，则点 E 为 BC 的中点，延长 AE 到点 D，使 $GE=ED$，



则 $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$,$\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}=\mathbf{0}$,

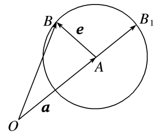
$\therefore\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.

15.3

解析 在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$,

因为 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量,

所以点 B 在以点 A 为圆心的单位圆上(如图所示),



由图可知当点 B 在点 B_1 时,O,A,B_1 三点共线,

$|\overrightarrow{OB}|$ 即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}|$ 最大,最大值是 3.

16.**证明** 由题意知,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$,

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$,$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}$.

由平面几何知识可知,$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FA}$,

所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF})$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB})$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF})+\mathbf{0}$

$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\mathbf{0}$.

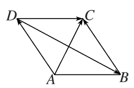
6.2.2 向量的减法运算

1.B [由向量的加法、减法法则,得
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.]

2.D [选项 D 中,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$.]

3.B

4.D [如图,作菱形 $ABCD$,



则 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$
$=|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{3}$.]

5.BCD [A 项,$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$;B 项,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$;C 项,$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$;D 项,$\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PN}=\mathbf{0}$.]

6.D [$\because\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}$,$\therefore\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DF}$.由三角形中位线定理得 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$,故选 D.]

7.0 2

解析 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为相反向量,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=0$,又 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,所以 $|\boldsymbol{a}|=|-\boldsymbol{b}|=1$,因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 共线,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.

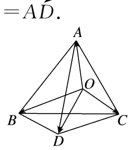
8.$4\sqrt{5}$ 8

解析 在矩形 $ABCD$ 中,因为 $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}$,所以 $|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DC}|=2|\overrightarrow{CA}|=4\sqrt{5}$.因为 $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}$,所以 $|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}|=2|\overrightarrow{CB}|=8$.

9.**解** (1)如图所示,以 $\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 为邻边作▱$OBDC$,连接 OD,AD,

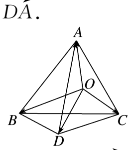
则 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,

所以 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}$.



(2)由(1)知,$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,

则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DA}$.



10.**解** 由向量的平行四边形法则,得 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 时,平行四边形的两条对角线的长度相等,四边形 $ABCD$ 为矩形;

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时,平行四边形的两条邻边的长度相等,四边形 $ABCD$ 为菱形;

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时,四边形 $ABCD$ 为正方形.

11.B [易知 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$,而在平行四边形 $ABCD$ 中有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,所以 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$,即 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$,也即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\mathbf{0}$.故选 B.]

12.2

解析 以 AB,AC 为邻边作平行四边形 $ACDB$(图略),

由向量加减法的几何意义可知,

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,

$\because|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$,

$\therefore|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{CB}|$,

又 $|\overrightarrow{BC}|=4$,M 是线段 BC 的中点,

$\therefore|\overrightarrow{AM}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|=2$.

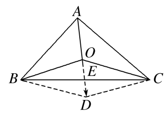
13.$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$

解析 由已知得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,

则 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

14.重

解析 如图,以 $\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 为邻边作▱$OBDC$,则



$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

又 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,

$\therefore\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$,

$\therefore\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$,

$\therefore A,O,D$ 三点共线.

设 OD 与 BC 的交点为 E,则 E 是 BC 的中点,

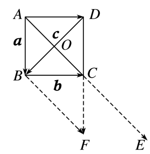
$\therefore AE$ 是△ABC 中 BC 边的中线.

同理可证另两条边的中线也过点 O,故 O 是△ABC 的重心.

15.A [①当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时成立;②当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,$\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$ 时成立;③当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,方向相反,且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$ 时成立;④当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,方向相同,且 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 时成立.]

16.**解** (1)由已知得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,

$\because\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,$\therefore$延长 AC 到 E,使 $|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{AC}|$,如图所示,



则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AE}$,

且 $|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{2}$.

$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=2\sqrt{2}$.

(2)作 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}$,连接 CF,则 $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DF}$,

而 $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}|=|\overrightarrow{DF}|$ 且 $|\overrightarrow{DF}|=2$.

$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=2$.

6.2.3 向量的数乘运算

1.D

2.ACD [ACD 正确,B 错,$7(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-8\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.]

3.AB [由向量数乘的运算律知 A,B 正确;C 中,当 $m=0$ 时,$m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$,但 $\boldsymbol{a}$ 不一定等于 $\boldsymbol{b}$,故错误;D 中,当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 时等式成立,但 m 不一定等于 n,故错误.]

4.B [①中,$\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;

②中,$\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{2}-\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1}{2}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;

③中,$\boldsymbol{b}=\dfrac{3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2}{2}=\dfrac{3}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$,若 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,若 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.]

5.D [$\because$向量 $\boldsymbol{m}$ 与向量 $\boldsymbol{n}$ 共线,

$\therefore$设 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}(\lambda\in\mathbf{R})$,

$\therefore-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{e}_2-2\lambda\boldsymbol{e}_1$,

$\because\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线,

$\therefore\begin{cases}k=\lambda,\\-1=-2\lambda,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2},\\k=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$]

6.A [由 $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{p}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{q}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}$,

得 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}=-3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r})$,$\therefore\boldsymbol{r}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{p}+\dfrac{3}{2}\boldsymbol{q}$.]

7. $\pm\frac{3}{5}$

解析　由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,得 $|\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{b}|$.

$\because|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=5,\therefore|\lambda|=\frac{3}{5}$,即 $\lambda=\pm\frac{3}{5}$.

8. $-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

解析　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

9. **解**　(1)原式$=18\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}-18\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{b}$.

(2)原式$=6\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}+4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$

$=(6\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{a})+(8\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b})+(6\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{c})$

$=6\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

10. **解**　由题意可知存在实数 λ 使 $2k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$,

即 $2k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=8\lambda\boldsymbol{a}+\lambda k\boldsymbol{b}$,

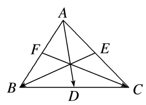
$\therefore\begin{cases}2k=8\lambda,\\1=\lambda k,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2},\\k=2\end{cases}$或$\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2},\\k=-2,\end{cases}$

$\because 2k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 的方向相反,

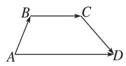
$\therefore k=2$ 不符合题意,舍去,

$\therefore k=-2$.

11. C　[如图,$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\times2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$.]



12. A　[如图所示.



$\because\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$

$=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

$\therefore\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$.

$\therefore\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线,且 $|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{BC}|$.

又$\because$这两个向量所在的直线不重合,

$\therefore AD/\!/BC$,且 $AD=2BC$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是以 AD,BC 为两条底边的梯形.]

13. B　[$\because A,B,D$ 三点共线,

$\therefore\frac{1}{3}+\lambda=1$,解得 $\lambda=\frac{2}{3}$.]

14. 3

解析　**方法一**　$\because\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{0}$,

$\therefore$点 M 是$\triangle ABC$ 的重心.

$\therefore\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AM},\therefore m=3$.

方法二　在$\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}$,

若 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$ 成立,则

$(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA})=m\overrightarrow{AM}$ 成立,

整理得,$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+(m-2)\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{0}$,

由已知可得,$m-2=1$,即 $m=3$.

15. D　[$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$. $\because\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD},\therefore x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$,

$\therefore\left(x-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}=\left(\frac{5}{6}-y\right)\overrightarrow{AD}$,又 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 不共线,

$\therefore x-\frac{1}{3}=0$ 且 $\frac{5}{6}-y=0$,故 $x=\frac{1}{3},y=\frac{5}{6}$. $\therefore 3x+6y=6$.]

16. **解**　$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ 共线.证明如下:

$\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,

$\therefore$存在唯一实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$.　①

$\because\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,

$\therefore$存在唯一实数 μ,使得 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{a}$.　②

由①-②得,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{c}-\mu\boldsymbol{a}$.

$\therefore(1+\mu)\boldsymbol{a}=(1+\lambda)\boldsymbol{c}$.

又$\because\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线,$\therefore 1+\mu=0,1+\lambda=0$,

$\therefore\mu=-1,\lambda=-1,\therefore\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$,

即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. $\therefore\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$.

故 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ 共线.

6.2.4　向量的数量积(一)

1. B　[$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 135^\circ=3\times4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-6\sqrt{2}$.]

2. C　[由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,知 $AB\perp BC$.由 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$,知 $BC\underline{/\!/}AD$,所以四边形 $ABCD$ 是矩形.]

3. B　[由题意,根据向量的数量积的定义,可得力 $\boldsymbol{F}$ 做的功 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=10\times10\cos 60^\circ=50(\mathrm{J})$,故选 B.]

4. B　[设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

$\because|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta\,\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta\,\frac{1}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta=\frac{3}{2}$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.]

5. ACD　[选项 B 中,$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta|$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,故 B 错误.]

6. A　[$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$

$=-|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$.

同理 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{1}{2},\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}$.]

7. $\frac{12}{25}\boldsymbol{b}$

解析　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=12$,又 $|\boldsymbol{b}|=5$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\frac{12}{5},\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{5}$,

即 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$\frac{12}{25}\boldsymbol{b}$.

8. $\frac{\pi}{4}$

解析　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

由题意知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,

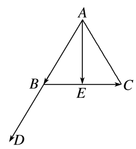
则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

又$\because 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$.

9. **解**　(1)$\because\triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore\angle ABC=60^\circ$.

如图,延长 AB 至点 D,使 $BD=AB$,



则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$,

$\therefore\angle DBC$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角.

$\because\angle DBC=120^\circ$,

$\therefore$向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 120°.

(2)$\because E$ 为 BC 的中点,$\therefore AE\perp BC$,

$\therefore\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{EC}$ 的夹角为 90°.

10. **解**　(1)若 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$,则 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$,

故 $x=y=\frac{1}{2}$.

(2)因为 $|\overrightarrow{OA}|=4,|\overrightarrow{OB}|=2,\angle BOA=60^\circ$,

所以$\angle OBA=90^\circ$,

所以 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{3}$.

又因为 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$,

所以 $|\overrightarrow{PB}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{2},\cos\angle OPB=\frac{\sqrt{57}}{19}$.

所以 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角 θ 的余弦值为$-\frac{\sqrt{57}}{19}$.

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta=-3$.

11. AB　[对于选项 A,根据投影向量的定义,知 A 正确;对于选项 B,$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta<0$,则 $\cos\theta<0$,又$\because 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\therefore\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$,故 B 正确;对于选项 C,若$\triangle ABC$ 是等边三角形,则

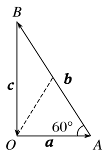
$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $120°$，故 C 错误；对于选项 D，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，故 D 错误.]

12. D ［由题意知 $\angle ABC=90°$，
所以原式 $=0+4\times5\cos(180°-C)+5\times3\cos(180°-A)$
$=-20\cos C-15\cos A$
$=-20\times\dfrac{4}{5}-15\times\dfrac{3}{5}=-16-9=-25.$］

13. A ［$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-6}{2\times5}=-\dfrac{3}{5}$，
$\because\theta\in[0,\pi]$，
$\therefore\sin\theta=\dfrac{4}{5}$.
$\therefore|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=2\times5\times\dfrac{4}{5}=8$. 故选 A.］

14. 等边三角形 -8
解析 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$，
即 $8=4\times4\cos\angle BAC$，
于是 $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{2}$，
因为 $0°<\angle BAC<180°$，
所以 $\angle BAC=60°$.
又 $AB=AC$，故 $\triangle ABC$ 是等边三角形.
此时 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos120°=-8$.

15. $90°$
解析 由题意可画出图形，如图所示，在 $\triangle OAB$ 中，
因为 $\angle OAB=60°$，$|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，
所以 $\angle ABO=30°$，
$OA\perp OB$，
即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 $90°$.



16. **解** (1)由已知可得 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}$，
四边形 $OAMB$ 是菱形，则 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，
所以 $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$
$=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.
(2)易知 $\angle DMC=60°$，且 $|\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MD}|$，
那么只需求 MC 的最大值与最小值即可.
当 $MC\perp OA$ 时，MC 最小，此时 $MC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，
则 $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\cos60°=\dfrac{3}{8}$.
当 MC 与 MO 重合时，MC 最大，此时 $MC=1$，
则 $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\cos60°=\dfrac{1}{2}$.
所以 $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ 的取值范围为 $\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{1}{2}\right]$.

6.2.4 向量的数量积(二)

1. C ［由题意得 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=4-1=3.$］

2. C ［设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.
因为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+2\cos\theta=3$，
所以 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，又因为 $\theta\in[0,\pi]$，
所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.］

3. A ［**方法一** $\because|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=16+144+96=256$，$\therefore|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=16$.
方法二 由题意知 $2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，
$\therefore|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=|4\boldsymbol{b}|=4|\boldsymbol{b}|=16.$］

4. A ［$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10$， ①
$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=6$， ②
由①－②得 $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1.$］

5. C ［因为 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$
$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos60°-6|\boldsymbol{b}|^2$
$=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|-96=-72$.
所以 $|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|-24=0$.
解得 $|\boldsymbol{a}|=6$ 或 $|\boldsymbol{a}|=-4$(舍去). 故选 C.］

6. A ［$(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$，$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-|\boldsymbol{a}|^2=0$，$\lambda=\dfrac{2}{2\times\cos45°}=\sqrt{2}$.］

7. $\dfrac{3}{2}$
解析 $\because(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3\lambda\boldsymbol{a}^2+(2\lambda-3)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=3\lambda\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2=12\lambda-18=0$，
$\therefore\lambda=\dfrac{3}{2}$.

8. 9
解析 $\because\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-9=0$，
即 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=9$.

9. **解** (1)$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$
$=2\times4-2\times1+3\times2\times1\times\dfrac{1}{2}=9$.
(2)$|\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{d}|^2=(4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2=16\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$
$=16\times4+9\times1+24\times2\times1\times\dfrac{1}{2}=97$，
$\therefore|\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{d}|=\sqrt{97}$.

10. **解** 因为 $\boldsymbol{a}^2=(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)^2=9-2\times3\times2\times\cos\alpha+4=9$，
所以 $|\boldsymbol{a}|=3$，
因为 $\boldsymbol{b}^2=(3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2=9-2\times3\times1\times\cos\alpha+1=8$，
所以 $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$，
又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)\cdot(3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=9\boldsymbol{e}_1^2-9\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_2^2=9-9\times1\times1\times\dfrac{1}{3}+2=8$，
所以 $\cos\beta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{8}{3\times2\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

11. CD ［分析知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $120°$，故 B 结论错误；
$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3$，
$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，故 A 结论错误；
$\because(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\times1\times2\times\cos120°+4=0$，
$\therefore(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，故 C 结论正确；
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2\times\cos120°=-1$，故 D 结论正确.］

12. A ［$\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2$
$=|\boldsymbol{a}|^2+\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos45°-3|\boldsymbol{b}|^2=16+\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|-3|\boldsymbol{b}|^2=12$，
解得 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$ 或 $|\boldsymbol{b}|=-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$(舍去). 故 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为
$|\boldsymbol{b}|\cos45°\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\boldsymbol{a}}{4}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}$.］

13. A ［因为 $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，
即 $\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，
又因为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$，
所以 $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，
即 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，
所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.］

14. $[0,1]$
解析 $\because\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-|\boldsymbol{b}|^2=0$，
$\therefore|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\cos\theta$ (θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角)或 $|\boldsymbol{b}|=0$，又 $\theta\in[0,\pi]$，
$\therefore0\leqslant|\boldsymbol{b}|\leqslant1$.

15. C ［因为 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 恒成立，
两边平方，化简得 $\boldsymbol{b}^2t^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}t+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2\geqslant0$，
对任意的 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立，
又 $|\boldsymbol{b}|\neq0$，则 $\Delta=4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-4\boldsymbol{b}^2(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2)\leqslant0$，
即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2)^2\leqslant0$，
所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，
即 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.］

16. (1)**证明** 因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，
且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 之间的夹角均为 $120°$，
所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
$=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos120°-|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos120°=0$，
所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$.
(2)**解** 因为 $|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|>1$，
所以 $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2>1$，
即 $k^2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}>1$，
因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\cos120°=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $k^2-2k>0$,
解得 $k<0$ 或 $k>2$.
所以实数 k 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

§6.3　平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1　平面向量基本定理

1. AC　[易知 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 不共线,$\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 不共线,故 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 可作为基底.]

2. D　[选项 A 中,两个向量为相反向量,即 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)$,则 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$ 为共线向量;选项 B 中,$2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=2\left(\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\right)$,也为共线向量;选项 C 中,$6\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2=-2(2\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1)$,为共线向量.根据不共线的向量可以作为基底,知只有选项 D 中的两向量可作为基底.]

3. A　[$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC})$
$=\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$.]

4. AB　[B 正确,平面中的任意向量都可以用基底表示;C 错,在平面 α 内任意向量都可表示为 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式,故 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 一定在平面 α 内;D 错,这样的 λ_1,λ_2 是唯一的,而不是无数对.]

5. D　[由题意得 $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{8}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$,故选 D.]

6. A　[由题意可得,$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$
$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$,
据此可知 $\lambda=\frac{1}{3}$,$\mu=\frac{2}{9}$,
$\therefore\frac{\lambda}{\mu}=\frac{3}{2}$.]

7. $\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$

解析　$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{MA}+\frac{5}{6}(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})=\frac{1}{6}\overrightarrow{MA}+\frac{5}{6}\overrightarrow{MB}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$.

8. $\frac{5}{2}$　$-\frac{1}{2}$

解析　由条件可知 $\begin{cases}\lambda+\mu=2,\\\lambda-\mu=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{5}{2},\\\mu=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

9. **解**　**方法一**　设 AC,BD 交于点 O,
则有 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.
所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

方法二　设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{x}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{y}$,
则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{y}$,
又 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\\\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD},\end{cases}$
所以 $\begin{cases}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\end{cases}$ 解得 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,
即 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

10. (1)**证明**　假设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R})$,
则 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$.
由 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 不共线,得 $\begin{cases}\lambda=1,\\3\lambda=-2,\end{cases}$
所以 λ 不存在.
故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,可以作为一个基底.
(2)**解**　设 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(m,n\in\mathbf{R})$,
则 $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=m(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+n(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$
$=(m+n)\boldsymbol{e}_1+(-2m+3n)\boldsymbol{e}_2$.
所以 $\begin{cases}m+n=3,\\-2m+3n=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2,\\n=1.\end{cases}$
所以 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

11. D　[$\because\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$,
$\therefore\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}=\lambda(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP})$,$\therefore(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}$,
$\therefore\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}=\frac{1}{1+\lambda}\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\boldsymbol{b}$.]

12. D　[连接 CD,OD,图略,
$\because$ 点 C,D 是半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的两个三等分点,
$\therefore\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,$\therefore CD/\!/AB$,$\angle CAD=\angle DAB=30°$,
$\because OA=OD$,$\therefore\angle ADO=\angle DAO=30°$,
$\therefore\angle CAD=\angle ADO=30°$,
$\therefore AC/\!/DO$,
$\therefore$ 四边形 $ACDO$ 为平行四边形,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}$.
$\because\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,
$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.故选 D.]

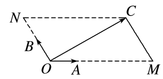
13. B　[$\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,$\therefore\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,
$\therefore\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$,$\therefore$ 点 P 是线段 OC 的中点,即 AB 边中线的三等分点(非重心).]

14. $\frac{1}{2}$

解析　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}-y\overrightarrow{AD}$,
由 $\overrightarrow{PQ}/\!/\overrightarrow{BE}$,可设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{BE}$,
即 $x\overrightarrow{AB}-y\overrightarrow{AD}=\lambda(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB})=\lambda\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$,所以 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\lambda,\\y=-\lambda,\end{cases}$ 则 $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$.

15. 6

解析　如图,以 OA,OB 所在射线为邻边,OC 为对角线作▱$OMCN$,使得 M 在直线 OA 上,N 在直线 OB 上,



则存在 λ,μ,使 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{ON}=\mu\overrightarrow{OB}$,
即 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$.
在 Rt$\triangle OCM$ 中,$\because|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$,
$\angle COM=30°$,$\angle OCM=90°$,
$\therefore|\overrightarrow{OM}|=4$,$\therefore\overrightarrow{OM}=4\overrightarrow{OA}$,
又 $|\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{MC}|=2$,$\therefore\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OB}$,
$\therefore\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$,
即 $\lambda=4$,$\mu=2$,
$\therefore\lambda+\mu=6$.

16. **解**　(1)因为 $AN=\frac{1}{4}AB$,
所以 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$,
所以 $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.
因为 $BM=\frac{2}{3}BC$,所以 $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,
所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.
(2)因为 A,O,M 三点共线,所以 $\overrightarrow{AO}/\!/\overrightarrow{AM}$,
设 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AM}$,
则 $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\lambda\left(\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}\right)-\boldsymbol{b}$
$=\lambda\boldsymbol{a}+\left(\frac{2}{3}\lambda-1\right)\boldsymbol{b}$.
因为 D,O,N 三点共线,
所以 $\overrightarrow{DO}/\!/\overrightarrow{DN}$,存在实数 μ 使 $\overrightarrow{DO}=\mu\overrightarrow{DN}$,
则 $\lambda\boldsymbol{a}+\left(\frac{2}{3}\lambda-1\right)\boldsymbol{b}=\mu\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)$.

由于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{4}\mu,\\ \dfrac{2}{3}\lambda-1=-\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{3}{14},\\ \mu=\dfrac{6}{7}.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{3}{14}\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{11}{14}\overrightarrow{AM}$，

所以 $AO:OM=3:11$.

6.3.2　平面向量的正交分解及坐标表示

6.3.3　平面向量加、减运算的坐标表示

1. B　[$\overrightarrow{NM}=(2,3)-(3,1)=(-1,2)$.]

2. ABD　[由向量坐标的定义不难看出一个坐标可对应无数个相等的向量，故 C 错误.]

3. A　[$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(3,2)-(2,4)=(1,-2)$.]

4. D　[设 $D(x,y)$，因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，
所以 $(x-5,y+1)=(2,-5)$，
所以 $x=7$，$y=-6$.
所以 $D(7,-6)$.]

5. B　[$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$
$=-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$
$=-(-1,4)-(m,n)-(2,3)$
$=(-1-m,-7-n)$.]

6. A　[设 $C(x,y)$，则 $\overrightarrow{AC}=(x-4,y-1)$.
又 $\overrightarrow{AB}=(7,-3)-(4,1)=(3,-4)$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$，
$\therefore (3,-4)+(x-4,y-1)=(0,0)$，
$\therefore \begin{cases}3+x-4=0,\\ -4+y-1=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x=1,\\ y=5.\end{cases}$ $\therefore C(1,5)$.]

7. $(-18,18)$
解析　$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=(-8-2,10-(-4))+(-8-0,10-6)$
$=(-10,14)+(-8,4)=(-18,18)$.

8. $(-8,-15)$

9. **解**　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$，
$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2)$，

则 $a_1=|\boldsymbol{a}|\cos 45°=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

$a_2=|\boldsymbol{a}|\sin 45°=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

$b_1=|\boldsymbol{b}|\cos 120°=3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$，

$b_2=|\boldsymbol{b}|\sin 120°=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

$c_1=|\boldsymbol{c}|\cos(-30°)=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

$c_2=|\boldsymbol{c}|\sin(-30°)=4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$.

因此 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$\boldsymbol{c}=(2\sqrt{3},-2)$.

10. **解**　设点 P 的坐标为 (x,y)，
因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}$，
又 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(1-x,1-y)+(2-x,3-y)+(3-x,2-y)=(6-3x,6-3y)$.
所以 $\begin{cases}6-3x=0,\\ 6-3y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=2.\end{cases}$
所以点 P 的坐标为 $(2,2)$，故 $\overrightarrow{OP}=(2,2)$.

11. B　[$\because A(2\,021,12)$，$B(-1,8)$，$\therefore \overrightarrow{AB}=(-2\,022,-4)$.
又 $\because \overrightarrow{AB}$ 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后不发生变化，
$\therefore$ 平移后 $\overrightarrow{AB}=(-2\,022,-4)$.]

12. D　[向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标为 $(x^2+x+1,-x^2+x-1)$.
$\because x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，$-x^2+x-1=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}<0$，
$\therefore$ 向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标位于第四象限.]

13. A　[由题意知，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，又 $|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|$.
$\therefore \overrightarrow{AB}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.
设 $B(x,y)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x+1,y-2)$，
$\therefore \begin{cases}x+1+6=0,\\ y-2-8=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-7,\\ y=10,\end{cases}$
故点 B 的坐标为 $(-7,10)$.]

14. $\dfrac{\pi}{6}$ 或 $-\dfrac{\pi}{2}$

解析　由题意知 $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=(\sin\alpha,\cos\beta)$，

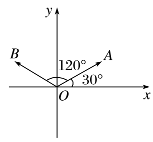
$\therefore \sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，

又 $\because \alpha,\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore \alpha=-\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $-\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $-\dfrac{\pi}{2}$.

15. D　[如图，设 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点 O 逆时针方向旋转 $120°$ 得到的 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标为 (x,y)，



则 $x=|\overrightarrow{OA}|\cos(120°+30°)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$y=|\overrightarrow{OA}|\sin(120°+30°)=\dfrac{1}{2}$，

故 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标是 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，故选 D.]

16. **解**　(1)过点 A 作 $AM\perp x$ 轴于点 M(图略)，

则 $OM=OA\cdot\cos 45°=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$，

$AM=OA\cdot\sin 45°=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore A(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$，故 $\boldsymbol{a}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.
$\because \angle AOC=180°-105°=75°$，$\angle AOy=45°$，
$\therefore \angle COy=30°$. 又 $OC=AB=3$，

$\therefore C\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

即 $\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2) $\because \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2})+\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\left(2\sqrt{2}-\dfrac{3}{2},2\sqrt{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(2\sqrt{2}-\dfrac{3}{2},2\sqrt{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.3.4　平面向量数乘运算的坐标表示

1. A　[$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-1,0)-(-2,-2)=(1,2)$.]

2. B　[由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，得 $5\cos\alpha-3\sin\alpha=0$，即 $\tan\alpha=\dfrac{5}{3}$.]

3. B　[$\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且方向相反，$\therefore$ 存在实数 $\lambda(\lambda<0)$，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，
即 $(4,k)=\lambda(k,1)=(\lambda k,\lambda)$，$\therefore \begin{cases}\lambda k=4,\\ k=\lambda,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}k=-2,\\ \lambda=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=2,\\ \lambda=2\end{cases}$（舍去）.]

4. ABC　[只有 D 正确，可令 $m=0$，则 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，无论 x 为何值，都有 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{b}$.]

5. A　[因为三点 $A(4,3)$，$B(5,m)$，$C(6,n)$ 在一条直线上，所以 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，所以 $(1,m-3)=\lambda(2,n-3)$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，所以 $m-3=\dfrac{1}{2}(n-3)$，即 $2m-n=3$.]

6. BD　[$\because |AP|=2|PB|$，
$\therefore \overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ 或 $\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{PB}$，
由定比分点坐标公式可知
当 $\lambda=2$ 时，$P\left(\dfrac{7}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$，
当 $\lambda=-2$ 时，$P(5,-6)$.]

7. 7
解析　由于 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，
即 $(9,4)=(2m,-3m)+(n,2n)=(2m+n,-3m+2n)$，
所以 $\begin{cases}2m+n=9,\\ -3m+2n=4,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}m=2,\\ n=5,\end{cases}$ 所以 $m+n=7$.

8. $\left(11,-\frac{11}{3}\right)$

解析　设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$，

则 $(x_1-2,y_1-4)=\frac{3}{2}(-6,2)=(-9,3)$，

$\therefore x_1=-7,y_1=7$，即 $C(-7,7)$.

$\overrightarrow{BD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BA}$，

则 $(x_2+4,y_2-6)=\frac{4}{3}(6,-2)=\left(8,-\frac{8}{3}\right)$，

$\therefore x_2=4,y_2=\frac{10}{3}$，即 $D\left(4,\frac{10}{3}\right)$，

则 $\overrightarrow{CD}=\left(11,-\frac{11}{3}\right)$.

9. **解**　$m\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(2m,3m)+(-4,8)=(2m-4,3m+8)$，

$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2,3)-(-2,4)=(4,-1)$，

因为 $m\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线，

所以 $4(3m+8)-(-1)\times(2m-4)=0$，得 $m=-2$.

当 $m=-2$ 时，$m\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(-8,2)$，

所以 $m\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=-2(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，

所以 $m\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 方向相反.

10. **解**　设点 P 的坐标为 (x,y)，

①若点 P 在线段 AB 上，则 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$，

$\therefore(x-3,y+4)=\frac{1}{2}(-9-x,2-y)$.

解得 $x=-1,y=-2$，

$\therefore P(-1,-2)$.

②若点 P 在线段 BA 的延长线上，则 $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$，

$\therefore(x-3,y+4)=-\frac{1}{4}(-9-x,2-y)$.

解得 $x=7,y=-6$，$\therefore P(7,-6)$.

综上可得，点 P 的坐标为 $(-1,-2)$ 或 $(7,-6)$.

11. D　[由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 可排除 A，B，C，故选 D.]

12. B　[$\because$ 向量 $\boldsymbol{a}=(-6,1)$，$\boldsymbol{b}=(7,-2)$，

$\therefore\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=(-6+7m,1-2m)$，$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-25,5)$.

$\because(\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b})/\!/(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

$\therefore 5(-6+7m)-(-25)\times(1-2m)=0$，

解得 $m=-\frac{1}{3}$.]

13. C　[因为 A，B，C 三点不能构成三角形，则 A，B，C 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(k,k+1)$，所以 $2k-(k+1)=0$，即 $k=1$.]

14. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

解析　由题意，得 $\overrightarrow{AB}=(-a+2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(b+2,-4)$.

又 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，所以 $-4(-a+2)=-2(b+2)$，整理得 $2a+b=2$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

$\geqslant\frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{b}{a}}\right)=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $b=\sqrt{2}a$ 时等号成立.

15. $\left(\frac{27}{7},\frac{16}{7}\right)$

解析　设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{DP}=(x-1,y)$，$\overrightarrow{DB}=(5,4)$，$\overrightarrow{CA}=(-3,6)$，$\overrightarrow{DC}=(4,0)$.

由 B，P，D 三点共线可得 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DB}=(5\lambda,4\lambda)$.

又因为 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DC}=(5\lambda-4,4\lambda)$，

由 $\overrightarrow{CP}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 共线得，$(5\lambda-4)\times6+12\lambda=0$.

解得 $\lambda=\frac{4}{7}$，所以 $\overrightarrow{DP}=\frac{4}{7}\overrightarrow{DB}=\left(\frac{20}{7},\frac{16}{7}\right)$，

所以 P 的坐标为 $\left(\frac{27}{7},\frac{16}{7}\right)$.

16. **解**　由 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$，知 $\begin{cases}\lambda+2=2m,\\ \lambda^2-\cos^2\alpha=m+2\sin\alpha,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\lambda=2m-2,\\ \lambda^2-m=\cos^2\alpha+2\sin\alpha,\end{cases}$

又 $\cos^2\alpha+2\sin\alpha=-\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1=-(\sin\alpha-1)^2+2$，

$\therefore-2\leqslant\cos^2\alpha+2\sin\alpha\leqslant2$，

$\therefore-2\leqslant\lambda^2-m=(2m-2)^2-m\leqslant2$，

$\therefore\frac{1}{4}\leqslant m\leqslant2$，

$\because\frac{\lambda}{m}=\frac{2m-2}{m}=2-\frac{2}{m}$，$\therefore-6\leqslant2-\frac{2}{m}\leqslant1$，

$\therefore\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围为 $[-6,1]$.

6.3.5　平面向量数量积的坐标表示

1. AD　[$|\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{b}^2=2$，故 A 正确，B，C 显然错误，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-1)$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1-1=0$，

所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$. 故 D 正确.]

2. B　[由题意可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x\cdot1+1\times(-2)=x-2=0$，

解得 $x=2$.

再由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x+1,-1)=(3,-1)$，

可得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$.]

3. A　[由题设知 $\overrightarrow{AB}=(8,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(2,4)$，$\overrightarrow{BC}=(-6,8)$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times8+(-4)\times4=0$，即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$. 所以 $\angle BAC=90°$，故 $\triangle ABC$ 是直角三角形.]

4. B　[$\boldsymbol{a}=(2,0)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，

$\therefore|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1\times\cos60°=1$.

$\therefore|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=2\sqrt{3}$.]

5. B　[$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，

$\therefore\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$，即 $(4-0,2-0)=(a-2,8-a)$，

$\therefore a=6$，$\because\overrightarrow{OA}=(4,2)$，$\overrightarrow{OC}=(2,6)$，

设向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 θ，

$\therefore\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{4\times2+2\times6}{\sqrt{4^2+2^2}\times\sqrt{2^2+6^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $\theta\in(0,\pi)$，$\therefore\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.]

6. A　[由题意，设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda,-2\lambda)(\lambda<0)$，

则 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\lambda^2+(-2\lambda)^2}=\sqrt{5}|\lambda|=3\sqrt{5}$，

又 $\lambda<0$，$\therefore\lambda=-3$，故 $\boldsymbol{b}=(-3,6)$.]

7. 4

解析　$\because\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,5)$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=4$.

8. -1

解析　由题意得 $m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(m+1,-m)$，

根据向量垂直的充要条件可得

$1\times(m+1)+0\times(-m)=0$，

所以 $m=-1$.

9. **解**　(1)设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，由 $|\boldsymbol{c}|=3\sqrt{2}$，$\boldsymbol{c}/\!/\boldsymbol{a}$ 可得

$\begin{cases}y+x=0,\\ x^2+y^2=18,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=-3,\\ y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\ y=-3,\end{cases}$

故 $\boldsymbol{c}=(-3,3)$ 或 $\boldsymbol{c}=(3,-3)$.

(2)因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，

即 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，

故 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $\theta\in[0,\pi]$，

所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

10. **解**　(1)因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(-2,0)$，

所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})-(-2,0)=(3,\sqrt{3})$，

设 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 之间的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$.

(2) $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{b}^2=4t^2+4t+4=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+3$. 易知当 $t\in[-1,1]$ 时，$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|^2\in[3,12]$，

所以 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|$ 的取值范围是 $[\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

11. B　[由 $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=(2\lambda+3,3)$，$\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=(-1,-1)$，

$(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$，

可得 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})=(2\lambda+3,3)\cdot(-1,-1)=-2\lambda-6=0$，

解得 $\lambda=-3$.]

12. ABC ［∵$\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,k)$，

∴$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-1,k-3)$.

若$\angle A=90°$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times1+3\times k=0$，∴$k=-\dfrac{2}{3}$；

若$\angle B=90°$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times(-1)+3(k-3)=0$，

∴$k=\dfrac{11}{3}$；

若$\angle C=90°$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times(-1)+k(k-3)=0$，

∴$k=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

故所求k的值为$-\dfrac{2}{3}$或$\dfrac{11}{3}$或$\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.］

13. C ［设点P的坐标为$(x,0)$，则$\overrightarrow{AP}=(x-2,-2)$，

$\overrightarrow{BP}=(x-4,-1)$.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-2)(x-4)+(-2)\times(-1)$

$=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$，

所以当$x=3$时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$有最小值1.

此时点P的坐标为$(3,0)$.］

14. $\dfrac{32}{9}$

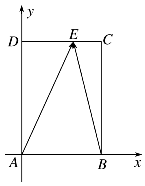
解析 以A为原点，AB所在直线为x轴、AD所在直线为y轴建立如图所示平面直角坐标系.

∵$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，

∴$A(0,0)$，$B(\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{2},2)$，$D(0,2)$，

∵点E在边CD上，且$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC}$，

∴$E\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},2\right)$. ∴$\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},2\right)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3},2\right)$，



∴$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=-\dfrac{4}{9}+4=\dfrac{32}{9}$.

15. A ［因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以$A+B>\dfrac{\pi}{2}$，

即$\dfrac{\pi}{2}>A>\dfrac{\pi}{2}-B>0$，

又因为函数$y=\sin x$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

所以$\sin A>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，

所以$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=\sin A-\cos B>0$，

设$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{q}$的夹角为θ，所以$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}>0$，

又因为$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{q}$不共线，所以$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{q}$的夹角是锐角.］

16. **解** (1)∵$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(x+4,y-2)$，

∴$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=(-x-4,2-y)$.

又$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{DA}$，且$\overrightarrow{BC}=(x,y)$，

∴$x(2-y)-y(-x-4)=0$，

即$x+2y=0$.

(2)$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(x+6,y+1)$，

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(x-2,y-3)$.

∵$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，∴$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，

即$(x+6)(x-2)+(y+1)(y-3)=0$.

由(1)知$x+2y=0$，与上式联立，化简得$y^2-2y-3=0$，

解得$y=3$或$y=-1$.

当$y=3$时，$x=-6$，

此时$\overrightarrow{AC}=(0,4)$，$\overrightarrow{BD}=(-8,0)$；

当$y=-1$时，$x=2$，此时$\overrightarrow{AC}=(8,0)$，$\overrightarrow{BD}=(0,-4)$；

∴$S_{四边形ABCD}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|=16$.

习题课　平面向量数量积的综合应用

1. C ［∵$\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，$\boldsymbol{c}=(3,2)$，∴$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-5,6)$，

∴$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-5)\times3+6\times2=-3$.］

2. C ［∵$\boldsymbol{a}=(4,3)$，∴$2\boldsymbol{a}=(8,6)$.

又∵$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,18)$，

∴$\boldsymbol{b}=(-5,12)$，∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-20+36=16$.

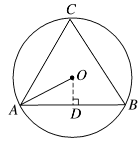
又∵$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=13$，

∴$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{16}{5\times13}=\dfrac{16}{65}$.］

3. A ［设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，则$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2\times(-4)+3\times7}{\sqrt{4+9}\times\sqrt{16+49}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos\theta\boldsymbol{e}=\sqrt{13}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}\boldsymbol{e}=\dfrac{\sqrt{65}}{5}\boldsymbol{e}$.］

4. D ［因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+4\times2=6$，所以$\boldsymbol{c}=(2,4)-6(-1,2)=(8,-8)$，所以$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{8^2+(-8)^2}=8\sqrt{2}$.］

5. D ［如图，过点O作$OD\perp AB$于D，



可知$AD=\dfrac{1}{2}AB=3$，

则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times6+0=18$.］

6. A ［∵$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1+2x,4)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2-x,3)$，

$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$与$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$平行，∴$(1+2x)\cdot3=4(2-x)$，∴$x=\dfrac{1}{2}$.

∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,2)\cdot\left(\dfrac{1}{2},1\right)=1\times\dfrac{1}{2}+2\times1=\dfrac{5}{2}$.］

7. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}$

解析 由已知得$\overrightarrow{AB}=(2,1)$，$\overrightarrow{CD}=(5,5)$，因此$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{CD}$上的投影向量为$\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}\boldsymbol{e}=\dfrac{15}{5\sqrt{2}}\boldsymbol{e}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}$.

8. 120°

解析 设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为θ，

由$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2)=-\boldsymbol{a}$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，

得$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{-\dfrac{5}{2}}{5}=-\dfrac{1}{2}$.

∵$0\leqslant\theta\leqslant180°$，∴$\theta=120°$.

9. **解** (1)设$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}=(\lambda,2\lambda)(\lambda>0)$，

则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda+4\lambda=10$，

∴$\lambda=2$，∴$\boldsymbol{a}=(2,4)$.

(2)∵$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1\times2-2\times1=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，

∴$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=10\cdot(2,-1)=(20,-10)$.

10. **解** (1)设$\boldsymbol{a}=(x,y)$，

依题意有$\overrightarrow{AB}=(4,3)$，$|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\boldsymbol{a}|=1$，

且$\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AB}$，即$\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

所以$\begin{cases}4x+3y=0,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=-\dfrac{3}{5},\\y=\dfrac{4}{5}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{3}{5},\\y=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

所以$\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$或$\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$.

(2)设向量$\overrightarrow{AC}$与单位向量$\boldsymbol{a}$的夹角为θ，$\overrightarrow{AC}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$\boldsymbol{h}$，

则$|\boldsymbol{h}|=||\overrightarrow{AC}|\cos\theta|=\dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}=|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{a}|$.

又因为$\overrightarrow{AC}=(1,4)$，所以

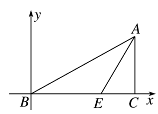
当$\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$时，$|\boldsymbol{h}|=\left|1\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)+4\times\dfrac{4}{5}\right|=\dfrac{13}{5}$；

当$\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$时，$|\boldsymbol{h}|=\left|1\times\dfrac{3}{5}+4\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right|=\dfrac{13}{5}$.

所以向量$\overrightarrow{AC}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影向量的模为$\dfrac{13}{5}$.

(3)$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{h}|=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{13}{5}=\dfrac{13}{2}$.

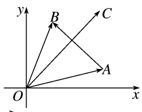
11. C ［以点B为坐标原点建立平面直角坐标系，如图所示.



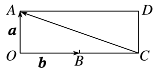
由题意知$\angle ABC=30°$，$\angle AEC=60°$，$CE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$\dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{CE}|}=3$，∴$\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{CE}$，即$\lambda=-3$.］

12. A ［由图知,要使 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的投影向量相等,只需使 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OC}$,即 $(2-a,b-1)\cdot(4,5)=0$,得 $4a-5b-3=0$,即 $4a-5b=3$.］



13. A ［如图,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$OA\perp OB$.延长 OB 至点 C,使 $OB=BC$,以 OA,OC 为邻边作矩形 $OCDA$,则 $\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,$\angle ACD$ 即为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角,$\cos\angle ACD=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|}$.又 $|\boldsymbol{a}|=1$,所以 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量.则向量 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|\cos\angle ACD\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.］



14. $\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5},\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)$

解析　如图,已知 $A(0,1)$,$B(-3,4)$,

设 $E(0,5)$,$D(-3,9)$,

∴四边形 $OBDE$ 为菱形,

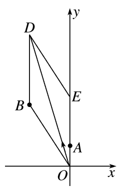
∴$\angle AOB$ 的平分线是菱形 $OBDE$ 的对角线 OD.

设 $C(x_1,y_1)$,

∵$|\overrightarrow{OC}|=2$,$|\overrightarrow{OD}|=3\sqrt{10}$,

∴$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{3\sqrt{10}}\overrightarrow{OD}$.

∴$\overrightarrow{OC}=(x_1,y_1)=\dfrac{2}{3\sqrt{10}}\times(-3,9)=\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5},\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.



15. $(-3,2)$

解析　设点 B 的坐标为 (x,y),因为 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$,

所以 $\begin{cases}2x+3y=0,\\x^2+y^2=13,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=-2\end{cases}$(舍去).

故点 B 的坐标为 $(-3,2)$.

16. **解**　(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=\cos 2x$,

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

$\sqrt{\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{2+2\left(\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}\right)}$

$=\sqrt{2+2\cos 2x}=2\sqrt{\cos^2x}$,

因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以 $\cos x\geqslant 0$,

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\cos x$.

(2)由(1),可得 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\lambda|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\cos 2x-4\lambda\cos x$,

即 $f(x)=2\cos^2x-1-4\lambda\cos x$

$=2(\cos x-\lambda)^2-1-2\lambda^2$.

因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$.

①当 $\lambda<0$ 时,当且仅当 $\cos x=0$ 时,

$f(x)$ 取得最小值 -1,这与已知矛盾;

②当 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 时,当且仅当 $\cos x=\lambda$ 时,$f(x)$ 取得最小值 $-1-2\lambda^2$,

由已知得 $-1-2\lambda^2=-\dfrac{3}{2}$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$;

③当 $\lambda>1$ 时,当且仅当 $\cos x=1$ 时,$f(x)$ 取得最小值 $1-4\lambda$,

由已知得 $1-4\lambda=-\dfrac{3}{2}$,解得 $\lambda=\dfrac{5}{8}$,这与 $\lambda>1$ 相矛盾.

综上所述 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

习题课　平面向量中的最值与范围问题

1. C ［因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,所以 $2a-2=2-b$,所以 $2a+b=4$,所以 $b=4-2a>0$,所以 $0<a<2$,

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2a+b-ab=4-ab=4-a(4-2a)=2a^2-4a+4=2(a-1)^2+2\in[2,4)$.］

2. D ［由图可知 x,y 均为正,且 $x+y=1$,

∴$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)(x+y)=5+\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}$

$\geqslant 5+2\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{4x}{y}}=9$,当且仅当 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{4x}{y}$,

即 $x=\dfrac{1}{3}$,$y=\dfrac{2}{3}$ 时等号成立,

则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$ 的最小值为 9.］

3. B ［因为点 M 是 AC 的中点,

所以 $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

因为点 D 是 AC 边上的一点(包括端点),

所以 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CA}$,$\lambda\in[0,1]$,

$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}-\lambda\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}$,

则 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot[\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}]$

$=\dfrac{1}{2}\lambda\overrightarrow{BA}^2+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{BC}^2$.

因为 $AB=\sqrt{3}$,$BC=2$,$\angle B=150°$,

所以 $\overrightarrow{BA}^2=3$,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-3$,$\overrightarrow{BC}^2=4$,

所以 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda$.

因为 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,则 $0\leqslant\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$.

故 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.］

4. B ［∵$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=(1-\lambda,\lambda)$,$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}=(-\lambda,\lambda)$,$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$,

∴$(1-\lambda,\lambda)\cdot(-1,1)\geqslant(\lambda,-\lambda)\cdot(\lambda-1,1-\lambda)$,

∴$2\lambda^2-4\lambda+1\leqslant 0$,解得 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,因为点 P 是线段 AB 上的一个动点,所以 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,即满足条件的实数 λ 的取值范围是 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$.］

5. A ［以 A 为原点,AB,垂直于 AB 所在的直线分别为 x,y 轴建立平面直角坐标系(图略),

则 $B(2,0)$,$A(0,0)$,$D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

∵满足 $\dfrac{MD}{AD}=\dfrac{NC}{DC}=\lambda$,$\lambda\in[0,1]$,

∴$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+(1-\lambda)(2,0)=\left(\dfrac{5}{2}-2\lambda,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}$

$=(-2,0)+(1-\lambda)\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda,\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\right)$,

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\left(\dfrac{5}{2}-2\lambda,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda,\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\right)$

$=\left(\dfrac{5}{2}-2\lambda\right)\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)$

$=\lambda^2+\lambda-3=\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$.

∵$\lambda\in[0,1]$,二次函数的对称轴为 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$,

则函数在 $[0,1]$ 上单调递增,

故当 $\lambda\in[0,1]$ 时,$\lambda^2+\lambda-3\in[-3,-1]$.］

6. C ［∵$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(2+\sin\theta-\cos\theta,2-\cos\theta-\sin\theta)$,

∴$|\overrightarrow{P_1P_2}|=$

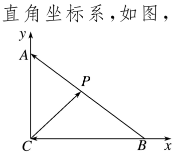
$\sqrt{(2+\sin\theta-\cos\theta)^2+(2-\cos\theta-\sin\theta)^2}$

$=\sqrt{10-8\cos\theta}\leqslant 3\sqrt{2}$.

当 $\cos\theta=-1$ 时,$|\overrightarrow{P_1P_2}|$ 有最大值 $3\sqrt{2}$.］

7. 9

解析　根据题意,建立直角坐标系,如图,



∴$A(0,3)$,$B(4,0)$,$C(0,0)$,

$\therefore \overrightarrow{AB}=(4,-3)$,

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{AB}=(0,3)+(4\lambda,-3\lambda)=(4\lambda,3-3\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，

$\therefore \overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=(4\lambda,3-3\lambda)\cdot(0,3)=9-9\lambda\in[0,9]$，

$\therefore \overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$的最大值为9.

8. $2\sqrt{2}+1$

解析 因为$|\boldsymbol{b}|=1$，设$\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sin\theta)$，

则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2+\cos\theta,2+\sin\theta)$，

则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2+\cos\theta)^2+(2+\sin\theta)^2}=\sqrt{4(\cos\theta+\sin\theta)+9}$

$=\sqrt{4\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+9}\leqslant\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}=2\sqrt{2}+1$，当且仅当$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$时取等号.

9. **解** 由$|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2$，可知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，

根据向量求模公式得$|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|=\sqrt{4\lambda^2-2\lambda+1}$，

易知，当$\lambda=\frac{1}{4}$时，$|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|$取得最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. **解** 设$\overrightarrow{PC}=t\overrightarrow{AC}(0\leqslant t\leqslant1)$，

则$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AC}$，

因为$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-(1-t)\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=[\overrightarrow{AB}-(1-t)\overrightarrow{AC}]\cdot t\overrightarrow{AC}$

$=t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-t(1-t)\overrightarrow{AC}^2$

$=2\times2\sqrt{2}t\cdot\cos45^\circ-t(1-t)\times(2\sqrt{2})^2$

$=8t^2-4t$

$=8\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{2}$.

因为$0\leqslant t\leqslant1$，所以$-\frac{1}{2}\leqslant\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\leqslant4$，

所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的取值范围为$\left[-\frac{1}{2},4\right]$.

11. C [$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=-\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{2}{3}\times4+\frac{1}{3}\times9+\frac{1}{3}\times2\times3\cos\theta=2\cos\theta+\frac{1}{3}$.

$\because -1<\cos\theta<1$，$\therefore -\frac{5}{3}<2\cos\theta+\frac{1}{3}<\frac{7}{3}$.

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\in\left(-\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$.]

12. C [不妨设$AB=2BC=2$，$BD=x$，$x\in[0,1]$，由平面向量三点共线可知，$\overrightarrow{OB}=\frac{2}{2+x}\overrightarrow{OD}+\frac{x}{2+x}\overrightarrow{OA}$，

$\therefore \overrightarrow{OD}=\frac{2+x}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{x}{2}\overrightarrow{OA}$，

$\therefore \lambda=-\frac{x}{2}$，$\mu=\frac{2+x}{2}$，$x\in[0,1]$，

则$\lambda\mu=-\frac{(2+x)x}{4}=-\frac{1}{4}(x^2+2x)$，

$\therefore \lambda\mu\in\left[-\frac{3}{4},0\right]$.]

13. D [因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$，

则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}$，解得$\theta=\frac{\pi}{3}$，而$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，则可设$\boldsymbol{a}=(1,0)$，由$\theta=\frac{\pi}{3}$可得$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

由$|\boldsymbol{c}|=1$，设$\boldsymbol{c}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$，

则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

$=1+2-\sin\alpha-\left(\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)$

$=3-\left(\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)=3-\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.

所以当$\alpha=\frac{4\pi}{3}$时取得最大值为$3+\sqrt{3}$，当$\alpha=\frac{\pi}{3}$时取得最小值为$3-\sqrt{3}$，所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$的取值范围为$[3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}]$.]

14. $-\frac{49}{52}$

解析 $\because \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(1-4\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，

$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=(2-4\lambda)\boldsymbol{a}+(\lambda-1)\boldsymbol{b}$，

$\therefore (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$

$=[(1-4\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}]\cdot[(2-4\lambda)\boldsymbol{a}+(\lambda-1)\boldsymbol{b}]$

$=(16\lambda^2-12\lambda+2)\boldsymbol{a}^2+(-8\lambda^2+7\lambda-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{b}^2$，

代入$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，

原式$=52\lambda^2-38\lambda+6$，

$\therefore$当$\lambda=\frac{19}{52}$时，原式取得最小值，为$-\frac{49}{52}$.

15. 12

解析 设$\angle OAB=\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则$A(4\cos\theta,0)$，$C\left(4\cos\theta+4\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right),4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\right)$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=4\cos\theta\cdot\left[4\cos\theta+4\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\right]$

$=4\cos\theta(2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta)$

$=4\cos2\theta+4+4\sqrt{3}\sin2\theta$

$=8\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+4$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

故当$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$\theta=\frac{\pi}{6}$时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$有最大值12.

16. **解** (1)设$\boldsymbol{c}=(x,y)$，根据题意得$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ \sqrt{3}y+x=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\ y=\frac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore \boldsymbol{c}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$或$\boldsymbol{c}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(2)$\because \boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-1)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

$\because \boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$，$\therefore -kt|\boldsymbol{a}|^2+(t^2+3)|\boldsymbol{b}|^2=0$.

$\because |\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，

$\therefore t^2-4kt+3=0$.

问题转化为关于t的二次方程$t^2-4kt+3=0$在$[0,2]$内有解.

令$f(t)=t^2-4kt+3$，

则当$2k\leqslant0$，即$k\leqslant0$时，$\because f(0)=3$，

$\therefore$方程$t^2-4kt+3=0$在$[0,2]$内无解.

当$0<2k\leqslant2$，即$0<k\leqslant1$时，由$\Delta=16k^2-12\geqslant0$，

解得$k\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$或$k\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant k\leqslant1$.

当$2k>2$，即$k>1$时，由$f(2)\leqslant0$得$4-8k+3\leqslant0$，

解得$k\geqslant\frac{7}{8}$，$\therefore k>1$.

综上，实数k的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$.

6.4 平面向量的应用

6.4.1 平面几何中的向量方法

1. C [$\overrightarrow{AB}=(19,4)-(-2,-3)=(21,7)$，

$\overrightarrow{AC}=(-1,-6)-(-2,-3)=(1,-3)$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=21-21=0$，$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

则$\angle A=90^\circ$，又$|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{AC}|$，

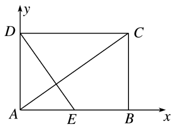
$\therefore\triangle ABC$为直角三角形.]

2. D [$\because \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\therefore AC\perp BD$.

$\therefore$四边形$ABCD$的面积

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times2\sqrt{10}=10$.]

3. B [以A为坐标原点，AB所在直线为x轴，AD所在直线为y轴，建立如图所示的直角坐标系.



设 $|\overrightarrow{AD}|=a(a>0)$，则 $A(0,0)$，$C(4,a)$，$D(0,a)$，$E(2,0)$，

所以 $\overrightarrow{DE}=(2,-a)$，$\overrightarrow{AC}=(4,a)$.

因为 $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

所以 $2\times4+(-a)\cdot a=0$，即 $a^2=8$.

所以 $a=2\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{DE}=(2,-2\sqrt{2})$，

所以 $|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$.]

4. B　[$\because\overrightarrow{OP}=\dfrac{3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{2}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，

$\therefore\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$，

$\therefore\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，故选B.]

5. D　[$\because\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$\therefore(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

$\therefore\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，$\therefore OB\perp AC$.

同理 $OA\perp BC$，$OC\perp AB$，

$\therefore O$ 为三条高所在直线的交点.]

6. C　[由题意知，$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA})=0$，

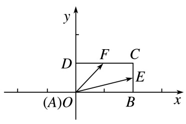
即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

即 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

则 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，故△ABC 的形状为直角三角形.]

7. $-\dfrac{9}{2}$

解析　如图，以 A 为坐标原点，以 AB 所在直线为 x 轴，以 AD 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，



则 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$D(0,1)$，

$\therefore C(2,1)$.

$\because E,F$ 分别为 BC,CD 的中点，$\therefore E\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，$F(1,1)$，

$\therefore\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,1)$，

$\therefore(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})\cdot\overrightarrow{BD}=3\times(-2)+\dfrac{3}{2}\times1=-\dfrac{9}{2}$.

8. $-\dfrac{5}{2}$

解析　由弦长 $AB=\sqrt{5}$，可知 $\angle ACB=60°$，故 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\angle ACB=-\dfrac{5}{2}$.

9. **证明**　设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{d}$，

则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{d}$，

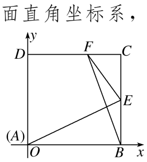
所以 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{d})^2=\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}^2$，

由条件知，$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{b}^2$，

所以 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d}$，即 $\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})=0$，即 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，

所以 $AD\perp BC$.

10. **解**　建立如图所示的平面直角坐标系，



(1)因为 $AB=BC=2$，点 F 是边 CD 上靠近 C 的三等分点，E 是 BC 边上的中点，

所以 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(2,2)$，$E(2,1)$，$D(0,2)$，$F\left(\dfrac{4}{3},2\right)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(2,1)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-\dfrac{2}{3},1\right)$，

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}=-\dfrac{4}{3}+1=-\dfrac{1}{3}$.

(2)因为 $AB=\sqrt{3}$，$BC=2$，

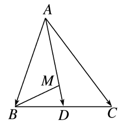
所以 $A(0,0)$，$B(\sqrt{3},0)$，$E(\sqrt{3},1)$，$C(\sqrt{3},2)$，$D(0,2)$，

设 $F(a,2)$，所以 $\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{BF}=(a-\sqrt{3},2)$，

当 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ 时 $\Rightarrow\sqrt{3}(a-\sqrt{3})+2=0\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $CF=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

11. B　[如图，D 为 BC 边的中点，



则 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

因为 $3\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$，

所以 $3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以 $S_{\triangle ABM}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.]

12. C　[假设 BC 的中点是 O，则 $\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$，即 $(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以 $\overrightarrow{MO}\perp\overrightarrow{BC}$，所以动点 M 在线段 BC 的中垂线上，所以动点 M 形成的图形必通过△ABC 的外心，选C.]

13. D　[将△ABC 各边及 PA,PB,PC 均用向量表示，

则 $\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=\dfrac{\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2}{\overrightarrow{PC}^2}$

$=\dfrac{(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})^2+(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})^2}{\overrightarrow{PC}^2}$

$=\dfrac{2|\overrightarrow{PC}|^2+2\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{AB}^2}{|\overrightarrow{PC}|^2}$

$=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2}{|\overrightarrow{PC}|^2}-6=4^2-6=10$.]

14. 等腰三角形

解析　$\because(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=[(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})]\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2=0$，

$\therefore|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，

$\therefore$△ABC 是等腰三角形.

15. $-\dfrac{8}{9}$

解析　$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE}$，且 $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OE}$，

所以 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FE}=(\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE})$

$=\overrightarrow{FO}^2-\overrightarrow{OD}^2=\dfrac{1}{9}-1=-\dfrac{8}{9}$.

16. **证明**　因为 M 是边 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

又因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$，

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})$

$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE})$

$=\dfrac{1}{2}(0+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}-0)$

$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE})$

$=\dfrac{1}{2}[|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AF}|\cdot\cos(90°+\angle BAC)-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cdot\cos(90°+\angle BAC)]=0$，

所以 $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{EF}$，即 $AM\perp EF$.

6.4.2　向量在物理中的应用举例

1. A　[在△ABC 中，两边之和大于第三边，即 $s=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|>|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{a}|$，故选A.]

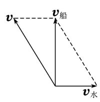
2. D　[因为 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=(1,2\lg 2)$，

所以 $W=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{s}$

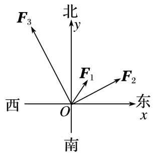
$=(1,2\lg 2)\cdot(2\lg 5,1)=2\lg 5+2\lg 2=2$.]

3. D　[为使物体平衡，则合力为 $\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{F}_4=(0-(-2)-(-3)-4,0-(-1)-2-(-3))=(1,2)$.]

4. B　[由题意知 $|\boldsymbol{v}_{水}|=2$ m/s，$|\boldsymbol{v}_{船}|=10$ m/s，作出示意图如图. $\therefore|\boldsymbol{v}|=\sqrt{10^2+2^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$(m/s).]



5.D [如图,建立直角坐标系,



则 $\boldsymbol{F}_1=(1,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{F}_2=(2\sqrt{3},2)$,$\boldsymbol{F}_3=(-3,3\sqrt{3})$,则合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(2\sqrt{3}-2,2+4\sqrt{3})$.

又位移 $\boldsymbol{s}=(4\sqrt{2},4\sqrt{2})$,所以合力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=(2\sqrt{3}-2)\times4\sqrt{2}+(2+4\sqrt{3})\times4\sqrt{2}=24\sqrt{6}$ J.]

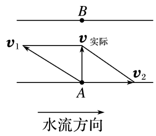
6.BD [根据向量将船速 $\boldsymbol{v}$ 分解,当 $\boldsymbol{v}$ 垂直河岸时,用时最少.船垂直到达对岸时航行的距离最短.]

7.$\dfrac{\pi}{4}$

解析 设 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ,由 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$,得 $250\sqrt{2}=10\times50\times\cos\theta$,$\therefore\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.又 $\theta\in[0,\pi]$,$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

8.0.5

解析 如图,$\boldsymbol{v}_{实际}=\boldsymbol{v}_{船}+\boldsymbol{v}_{水}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$,



$|\boldsymbol{v}_1|=20$,$|\boldsymbol{v}_2|=12$,

$\therefore|\boldsymbol{v}_{实际}|=\sqrt{|\boldsymbol{v}_1|^2-|\boldsymbol{v}_2|^2}$

$=\sqrt{20^2-12^2}=16$(km/h).

$\therefore$所需时间 $t=\dfrac{8}{16}=0.5$(h).

$\therefore$该船到达 B 处所需的时间为 0.5 h.

9.**解** (1)$\overrightarrow{AB}=(7,0)-(20,15)=(-13,-15)$,

$W_1=\boldsymbol{F}_1\cdot\overrightarrow{AB}=(3,4)\cdot(-13,-15)$

$=3\times(-13)+4\times(-15)=-99$(J),

$W_2=\boldsymbol{F}_2\cdot\overrightarrow{AB}=(6,-5)\cdot(-13,-15)$

$=6\times(-13)+(-5)\times(-15)=-3$(J).

$\therefore$力 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$ 对质点所做的功分别为-99 J 和-3 J.

(2)$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\overrightarrow{AB}$

$=[(3,4)+(6,-5)]\cdot(-13,-15)$

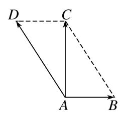
$=(9,-1)\cdot(-13,-15)$

$=9\times(-13)+(-1)\times(-15)$

$=-117+15=-102$(J).

$\therefore$合力 $\boldsymbol{F}$ 对质点所做的功为-102 J.

10.**解** 如图所示,设 $\overrightarrow{AB}$ 表示水流的速度,$\overrightarrow{AD}$ 表示渡船在静水中的速度,$\overrightarrow{AC}$ 表示渡船实际垂直过江的速度.



因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$,

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

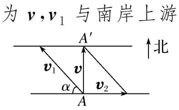
在 Rt$\triangle ACD$ 中,$\angle ACD=90°$,$|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AB}|=12.5$,

$|\overrightarrow{AD}|=25$,所以$\angle CAD=30°$,

即渡船要垂直地渡过长江,其航向应为北偏西 30°.

11.B [对于两个大小相等的共点力 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$,当它们的夹角为 90°,合力的大小为 20 N 时,可知这两个力的大小都是 $10\sqrt{2}$ N;当它们的夹角为 120°时,可知力的合成构成一个等边三角形,因此合力的大小为 $10\sqrt{2}$ N.]

12.D [设船的实际速度为 $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{v}_1$ 与南岸上游的夹角为 α,如图所示.



要使得游船正好到达 A'处,

则 $|\boldsymbol{v}_1|\cos\alpha=|\boldsymbol{v}_2|$,

即 $\cos\alpha=\dfrac{|\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1|}=\dfrac{2}{5}$,

又 $\theta=\pi-\alpha$,所以 $\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{2}{5}$.]

13.$-\dfrac{5\sqrt{37}}{37}$

解析 因为物体处于平衡状态,

所以 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$.

因此 $\boldsymbol{F}_3=-(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)$,于是 $|\boldsymbol{F}_3|=\sqrt{(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)^2}$

$=\sqrt{|\boldsymbol{F}_1|^2+|\boldsymbol{F}_2|^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2}$

$=\sqrt{3^2+4^2+2\times3\times4\cdot\cos60°}=\sqrt{37}$,

设 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_3$ 的夹角是 θ.

又 $\boldsymbol{F}_2=-(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_3)$,所以 $|\boldsymbol{F}_2|=\sqrt{(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_3)^2}$

$=\sqrt{|\boldsymbol{F}_1|^2+|\boldsymbol{F}_3|^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_3}$

$=\sqrt{3^2+37+2\times3\times\sqrt{37}\cdot\cos\theta}=4$,

解得 $\cos\theta=-\dfrac{5\sqrt{37}}{37}$.

14.0 98

解析 物体 m 的位移大小为 $|\boldsymbol{s}|=\dfrac{2}{\sin37°}=\dfrac{10}{3}$(m),则支持力对物体 m 所做的功为 $W_1=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos90°=0$(J);重力对物体 m 所做的功为 $W_2=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{G}||\boldsymbol{s}|\cos53°=5\times9.8\times\dfrac{10}{3}\times0.6=98$(J).

15.AC [设水的阻力为 $\boldsymbol{f}$,绳的拉力为 $\boldsymbol{F}$,绳 AB 与水平方向的夹角为 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

则 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta=|\boldsymbol{f}|$,$\therefore|\boldsymbol{F}|=\dfrac{|\boldsymbol{f}|}{\cos\theta}$.

$\because\theta$ 增大,$\cos\theta$ 减小,$\therefore|\boldsymbol{F}|$增大.

$\because|\boldsymbol{F}|\sin\theta$ 增大,$\therefore$船的浮力减小.]

16.**解** 设 t h 后,台风中心移动到 Q 处,

此时城市开始受到台风的侵袭,$\angle OPQ=\theta-45°$.

$\because\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$,

$\therefore\overrightarrow{OQ}^2=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ})^2$

$=\overrightarrow{OP}^2+\overrightarrow{PQ}^2+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}$

$=\overrightarrow{OP}^2+\overrightarrow{PQ}^2-2|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{PQ}|\cos(\theta-45°)$

$=300^2+(20t)^2-2\times300\times20t\times\dfrac{4}{5}$

$=100(4t^2-96t+900)$.

依题意得 $\overrightarrow{OQ}^2\leqslant(60+10t)^2$,

解得 $12\leqslant t\leqslant24$.

从而 12 h 后该城市开始受到台风的侵袭.

6.4.3 余弦定理、正弦定理

第 1 课时 余弦定理

1.B [由余弦定理,得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4+25-19}{2\times2\times5}=\dfrac{1}{2}$,

又 $0°<A<180°$,所以 $A=60°$.]

2.A [由余弦定理,得 $c^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos60°=3$,

所以 $c=\sqrt{3}$.

所以$\triangle ABC$ 为直角三角形,$A=30°$.]

3.B [由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{25+64-49}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$.

又 $0°<B<180°$,所以 $B=60°$,所以 $A+C=120°$.]

4.A [因为 $a^2=b^2-c^2+\sqrt{2}ac$,所以 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$,

由余弦定理,得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $0°<B<180°$,所以 $B=45°$.]

5.BD [由 $3a=\sqrt{3}b=12$,得 $a=4$,$b=4\sqrt{3}$,利用余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即 $16=48+c^2-12c$,解得 $c=4$ 或 $c=8$.]

6.A [由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$,

得$(a+b)^2-c^2=2ab(1+\cos C)$

$=2ab(1+\cos60°)=3ab=4$,

$\therefore ab=\dfrac{4}{3}$.]

7.$\dfrac{\pi}{3}$ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解析 由余弦定理,可得

$\cos A=\dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\dfrac{4^2+3^2-(\sqrt{13})^2}{2\times3\times4}=\dfrac{1}{2}$,

又 $0<A<\pi$,$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$,

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

则 AC 边上的高为 $h=AB\sin A=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. $\sqrt{19}$

解析　由题意得,$a+b=5$,$ab=2$.

由余弦定理,得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab=5^2-3\times2=19$,

所以 $c=\sqrt{19}$.

9. **解**　(1)$\because(a+b+c)(b+c-a)=3bc$,

$\therefore a^2=b^2+c^2-bc$,

而 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,$\therefore 2\cos A=1$,

$\therefore\cos A=\frac{1}{2}$.

$\because A\in(0,\pi)$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

(2)在$\triangle ABC$中,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,且 $a=\sqrt{3}$,

$\therefore(\sqrt{3})^2=b^2+c^2-2bc\cdot\frac{1}{2}=b^2+c^2-bc$.　①

又$\because b+c=2\sqrt{3}$,与①联立,解得 $bc=3$,

$\therefore\begin{cases}b+c=2\sqrt{3},\\bc=3,\end{cases}\therefore b=c=\sqrt{3}$,

$\therefore\triangle ABC$为等边三角形.

10. **解**　(1)$\because\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$,$2\cos^2\frac{A}{2}+\cos A=0$,

$\therefore 2\cos A+1=0$,$\therefore\cos A=-\frac{1}{2}$,$\therefore A=120°$.

(2)由余弦定理,知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

又 $a=2\sqrt{3}$,$b=2$,$\cos A=-\frac{1}{2}$,

$\therefore(2\sqrt{3})^2=2^2+c^2-2\times2\times c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$,

化简,得 $c^2+2c-8=0$,解得 $c=2$ 或 $c=-4$(舍去).

11. A　[在$\triangle ABC$中,因为 $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2c}$,

所以$\frac{1+\cos A}{2}=\frac{b}{2c}+\frac{1}{2}$,

所以 $\cos A=\frac{b}{c}$.由余弦定理,知$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{c}$,

所以 $b^2+c^2-a^2=2b^2$,

即 $a^2+b^2=c^2$,所以$\triangle ABC$是直角三角形.]

12. B　[$\because b^2=ac$,$c=2a$,$\therefore b^2=2a^2$,

$\therefore\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+4a^2-2a^2}{2a\times2a}=\frac{3}{4}$.]

13. D　[设该等腰三角形为$\triangle ABC$,且 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,顶角为 C,周长为 l,

因为 $l=5c$,所以 $a=b=2c$,

由余弦定理,得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4c^2+4c^2-c^2}{2\times2c\times2c}=\frac{7}{8}$.]

14. -19

解析　设三角形的三边分别为 a,b,c,

依题意得,$a=5$,$b=6$,$c=7$.

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\pi-B)=-ac\cdot\cos B$.

由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$,

$\therefore -ac\cdot\cos B=\frac{1}{2}(b^2-a^2-c^2)=\frac{1}{2}(6^2-5^2-7^2)=-19$,

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-19$.

15. C　[$\because b=3$,$c=4$,且$\triangle ABC$是锐角三角形,

$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0$,

且 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$,$\therefore 7<a^2<25$,

$\therefore\sqrt{7}<a<5$.]

16. **解**　(1)由已知得,$-\cos(A+B)+\cos A\cos B-\sqrt{3}\sin A\cdot\cos B=0$,即 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$.

因为 $\sin A\neq0$,所以 $\sin B-\sqrt{3}\cos B=0$.

又 $\cos B\neq0$,所以 $\tan B=\sqrt{3}$.

又 $0<B<\pi$,

所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.

因为 $a+c=1$,$\cos B=\frac{1}{2}$,

所以 $b^2=3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

又 $0<a<1$,

所以$\frac{1}{4}\leqslant b^2<1$,

即$\frac{1}{2}\leqslant b<1$.

第2课时　正弦定理(一)

1. B　[$\because A=105°$,$B=45°$,$\therefore C=30°$.

由正弦定理,得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{2\sqrt{2}\sin30°}{\sin45°}=2$.]

2. B　[由题意及正弦定理可知,$\frac{a}{\sin A}=b=\frac{b}{\sin B}$,

则 $\sin B=1$,

又 $B\in(0,\pi)$,故 B 为直角,$\triangle ABC$是直角三角形.]

3. C　[由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

得 $a\sin B=b\sin A$.]

4. D　[由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\frac{15}{\sin60°}=\frac{10}{\sin B}$,

$\therefore\sin B=\frac{10\sin60°}{15}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{15}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\because a>b$,$\therefore A>B$,

又$\because A=60°$,$\therefore B$为锐角.

$\therefore\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.]

5. D　[在$\triangle ABC$中,因为 $A:B:C=1:2:3$,所以 $B=2A$,$C=3A$,又 $A+B+C=180°$,所以 $A=30°$,$B=60°$,$C=90°$,所以 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sin30°:\sin60°:\sin90°=1:\sqrt{3}:2$.]

6. ACD　[对于A,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,可得,$a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C=\sin A:\sin B:\sin C$,故A正确;

对于B,由 $\sin2A=\sin2B$,可得 $A=B$,或 $2A+2B=\pi$,

即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$,故B错误;

对于C,在$\triangle ABC$中,由正弦定理可得,$\sin A>\sin B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow A>B$,因此 $A>B$ 是 $\sin A>\sin B$ 的充要条件,故C正确;

对于D,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

可得右边$=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{2R\sin B+2R\sin C}{\sin B+\sin C}=2R=$左边,故D正确.]

7. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

解析　由正弦定理,得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $A\in(0,\pi)$,$a>b$,

$\therefore A>B$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

8. $\frac{63}{65}$　$\frac{21}{13}$

解析　在$\triangle ABC$中,由 $\cos A=\frac{4}{5}$,$\cos C=\frac{5}{13}$,

可得 $\sin A=\frac{3}{5}$,$\sin C=\frac{12}{13}$,

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{63}{65}$,

又 $a=1$,故由正弦定理得,$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{21}{13}$.

9. **解** $\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{10\sin 45°}{\sin 30°}=10\sqrt{2}$.

$B=180°-(A+C)=180°-(45°+30°)=105°$.

又$\because \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{10\sin 105°}{\sin 30°}=20\sin 75°$

$=20\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

10. **解** 由正弦定理,得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

得 $\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $b>c$,所以 $B>C=30°$,所以 $B=60°$或 $120°$.

当 $B=60°$时,$A=90°$,$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{6\sin 90°}{\sin 30°}=12$.

当 $B=120°$时,$A=30°$,$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{6\sin 30°}{\sin 30°}=6$.

所以 $a=6$ 或 12.

11. B [由正弦定理,知$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$,$\therefore \frac{\sin C}{c}=\frac{\cos C}{c}$,

$\therefore \cos C=\sin C$,$\therefore \tan C=1$,

又$\because 0°<C<180°$,$\therefore C=45°$.]

12. C [设 C 为最大角,则 A 为最小角,$\therefore A+C=120°$,

$\therefore \frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin(120°-A)}{\sin A}$

$=\frac{\sin 120°\cos A-\cos 120°\sin A}{\sin A}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{\cos A}{\sin A}=1$. $\therefore \tan A=1$.

又$\because A$ 为锐角,$\therefore A=45°$,$C=75°$.]

13. $(1,2)$

解析 因为 $A+B+C=\pi$,$C=2B$,

所以 $A=\pi-3B>0$,所以 $0<B<\frac{\pi}{3}$,

所以$\frac{1}{2}<\cos B<1$,$1<2\cos B<2$.

又$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B$,故 $1<\frac{c}{b}<2$.

14. $(\sqrt{3},2)$

解析 在$\triangle ABC$ 中,$B=60°$,$c=2$,由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$.若此三角形有两解,则必须满足的条件为 $c>b>c\sin B$,

即$\sqrt{3}<b<2$.

15. ①②③

解析 $A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow \sin A>\sin B$,故①成立.

函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上单调递减,

$\because A>B$,$\therefore \cos A<\cos B$,故②成立.

在锐角三角形中,$\because A+B>\frac{\pi}{2}$,

$\therefore 0<\frac{\pi}{2}-B<A<\frac{\pi}{2}$,

又函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,

则 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$,即 $\sin A>\cos B$,

同理 $\sin B>\cos A$,故③成立.

16. **解** 由正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

即$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$,

$\therefore b=2\sin B$,$c=2\sin C$,

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $L=a+b+c=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin C$

$=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)$

$=\sqrt{3}+3\sin B+\sqrt{3}\cos B$

$=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$,

又 $B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,

$\therefore B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,

$\therefore \sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$,

$\therefore L\in(2\sqrt{3},3\sqrt{3}]$.

即$\triangle ABC$ 的周长的取值范围为$(2\sqrt{3},3\sqrt{3}]$.

第 3 课时 正弦定理(二)

1. AC [由正弦定理,得$\sqrt{3}\sin A=2\sin B\sin A$,所以 $\sin A\cdot(2\sin B-\sqrt{3})=0$.因为 $0<A<\pi$,$0<B<\pi$,所以 $\sin A\neq 0$,$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.]

2. A [由余弦定理,得 $b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c^2\Rightarrow c=1$,即$\triangle ABC$ 的周长为 5,故选 A.]

3. C [由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$和 $3\sin A=5\sin B$,得 $3a=5b$,即 $b=\frac{3}{5}a$,又 $b+c=2a$,$\therefore c=\frac{7}{5}a$,$\therefore$由余弦定理,得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$,$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$,故选 C.]

4. A [$\because a\sin A-b\sin B=4c\sin C$,

$\therefore$由正弦定理,得 $a^2-b^2=4c^2$,即 $a^2=4c^2+b^2$.

由余弦定理,得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(4c^2+b^2)}{2bc}=\frac{-3c^2}{2bc}=-\frac{1}{4}$,$\therefore \frac{b}{c}=6$.故选 A.]

5. ABC [对于 A,根据余弦定理,可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,故 A 正确;

对于 B,根据正弦定理边角互化,可得 $a\sin B=b\sin A\Leftrightarrow ab=ab$,故 B 正确;

对于 C,根据正弦定理,得 $a=b\cos C+c\cos B$

$\Rightarrow \sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin A$,故 C 正确;

对于 D,根据正弦定理的边角互化可得,

$\sin A\cos B+\sin B\cos C=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,即 $\sin B\cos C=\cos A\sin B$,

又 $\sin B\neq 0$,所以 $\cos C=\cos A$,当 $A=C$ 时,等式成立,故 D 不正确.]

6. C [由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,及$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$,得$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C}$,即 $\tan A=\tan B=\tan C$,所以 $A=B=C$,即$\triangle ABC$ 为等边三角形.]

7. $\frac{\pi}{3}$ $\sqrt{3}$

解析 由 $a^2+b^2-c^2=ab$,

得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,

$\because C\in(0,\pi)$,$\therefore C=\frac{\pi}{3}$,

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{3\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$.

8. 直角三角形

解析 $\because b=a\cos C$,

$\therefore \sin B=\sin A\cos C$，
则 $\sin(A+C)=\sin A\cos C$.
即 $\cos A\sin C=0$，
$\because A,C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C\neq 0$，
$\therefore \cos A=0$，
$\therefore A=\frac{\pi}{2}$，
$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

9. **解**　(1)由 $a\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}c=b$，
得 $\sin A\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C=\sin B$.
因为 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，
所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C=\cos A\sin C$.
因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$.
(2)由正弦定理，得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
所以 $B=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.
①当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，由 $A=\frac{\pi}{6}$，得 $C=\frac{\pi}{2}$，
所以 $c=2$；
②当 $B=\frac{2\pi}{3}$ 时，由 $A=\frac{\pi}{6}$，得 $C=\frac{\pi}{6}$，
所以 $c=a=1$.
综上可得 $c=1$ 或 2.

10. **解**　(1)由余弦定理，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，
$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，
$\therefore$ 原式化为 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=-\frac{b}{2a+c}$，
整理，得 $a^2+c^2-b^2+ac=0$，
$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{-ac}{2ac}=-\frac{1}{2}$，
又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$.
(2)将 $b=\sqrt{13}$，$a+c=4$，$B=\frac{2\pi}{3}$，
代入 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得，
$13=a^2+(4-a)^2-2a(4-a)\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$，
即 $a^2-4a+3=0$. 解得 $a=1$ 或 $a=3$.

11. D　[因为 $a\cos B+b\cos A=4\sin C$，所以由正弦定理可得，
$\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{4\sin C}{2R}$，
化简得，$\sin(A+B)=\frac{4\sin C}{2R}$，
在 $\triangle ABC$ 中，$\sin(A+B)=\sin C$，
解得 $R=2$，所以 $\triangle ABC$ 外接圆的面积为 $S=\pi R^2=4\pi$.]

12. A　[因为在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，且 $8b=5c$，$C=2B$，所以 $8\sin B=5\sin C=5\sin 2B=10\sin B\cos B$，又 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos B=\frac{4}{5}$，
所以 $\cos C=\cos 2B=2\cos^2 B-1=\frac{7}{25}$.]

13. D　[由 $A=\frac{\pi}{4}$，$\sin B=\sqrt{2}\cos C\Rightarrow\frac{\sin B}{\cos C}=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-C\right)}{\cos C}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)}{\cos C}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tan C=\sqrt{2}\Rightarrow\tan C=1$，又 $C\in(0,\pi)$，
则 $C=\frac{\pi}{4}$，
所以 $B=\frac{\pi}{2}$，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 故选 D.]

14. 2　$\frac{\pi}{3}$

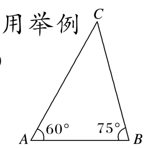
解析　$\because 2\sin A\sin B\cos C=\sin^2 C$，
$\therefore 2ab\cos C=c^2\Rightarrow a^2+b^2-c^2=c^2\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{c^2}=2$，
$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2}{4ab}\geqslant\frac{1}{2}$，
$\because 0<C<\pi$，$\therefore 0<C\leqslant\frac{\pi}{3}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.
即角 C 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$.

15. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

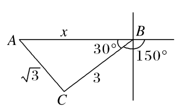
解析　由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=5ac$，
由正弦定理，得 $\sin^2 B=5\sin A\sin C=\frac{3}{4}$，
所以 $\sin A\sin C=\frac{3}{20}$，
所以 $\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

16. **解**　(1)在 $\triangle ABC$ 中，设其外接圆半径为 R，
根据正弦定理得，$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$，
代入 $\frac{a+b}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}$，得 $\frac{a+b}{a}=\frac{b}{b-a}$，
所以 $b^2-a^2=ab$.　①
因为 $\cos(A-B)+\cos C=1-\cos 2C$，
所以 $\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin^2 C$，
所以 $\sin A\sin B=\sin^2 C$.
由正弦定理，得 $\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$，
所以 $ab=c^2$.　②
把②代入①得，$b^2-a^2=c^2$，
即 $a^2+c^2=b^2$.
所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.
(2)由(1)知 $B=\frac{\pi}{2}$，
所以 $A+C=\frac{\pi}{2}$，
所以 $C=\frac{\pi}{2}-A$.
所以 $\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos A$.
根据正弦定理，得
$\frac{a+c}{b}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$.
因为 $ac<ab=c^2$，
所以 $a<c$，
所以 $0<A<\frac{\pi}{4}$，
所以 $\frac{\pi}{4}<A+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.
所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)<1$，
所以 $1<\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}$，
即 $\frac{a+c}{b}$ 的取值范围是 $(1,\sqrt{2})$.

第 4 课时　余弦定理、正弦定理应用举例



1. D　[如图所示，$C=180°-60°-75°=45°$，$AB=10$(海里).
由正弦定理，得 $\frac{10}{\sin 45°}=\frac{BC}{\sin 60°}$，
所以 $BC=5\sqrt{6}$(海里).]



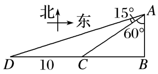
2. AB　[如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=x$，$BC=3$，$AC=\sqrt{3}$，$\angle ABC=30°$，
由余弦定理得，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$.

即$(\sqrt{3})^2=x^2+3^2-2x\cdot3\cdot\cos30°$.

$\therefore x^2-3\sqrt{3}x+6=0$.

解得$x=2\sqrt{3}$或$x=\sqrt{3}$.]

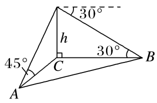
3. D [如图,依题意有$\angle BAC=60°$,$\angle BAD=75°$,所以$\angle CAD=\angle CDA=15°$,从而$CD=CA=10$(海里),在Rt$\triangle ABC$中,由正弦定理,可得$AB=5$(海里),所以这艘船的速度是10海里/时.故选D.]



4. A [如图所示,$BC=\sqrt{3}h$,$AC=h$,

$\therefore AB=\sqrt{3h^2+h^2}=2h$.

即此时两船间的距离为$2h$米.]



5. A [在$\triangle PAB$中,$\angle PAB=30°$,$\angle APB=15°$,$AB=60$ m,$\sin15°=\sin(45°-30°)=\sin45°\cos30°-\cos45°\sin30°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,由正弦定理,得$PB=\dfrac{AB\sin30°}{\sin15°}=30(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ m,所以建筑物的高度为$PB\sin45°=30(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=(30+30\sqrt{3})$ m.]

6. C [由题意知,$AB=24\times\dfrac{1}{4}=6$(km),$\angle BAS=30°$,$\angle ASB=75°-30°=45°$.

由正弦定理,得$BS=\dfrac{AB\sin\angle BAS}{\sin\angle ASB}=\dfrac{6\sin30°}{\sin45°}=3\sqrt{2}$(km).]

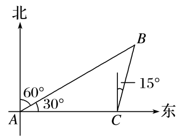
7. 210

解析 由题意知$\angle ACB=120°$,在$\triangle ACB$中,由余弦定理,得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=90^2+150^2-2\times90\times150\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=44\ 100$.

$\therefore AB=210$,$DE=210$.

8. $30\sqrt{2}$

解析 如图所示,在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=30°$,$\angle ACB=105°$,
则$\angle ABC=45°$,
$AC=60$(km),根据正弦定理,得
$BC=\dfrac{AC\sin\angle BAC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{60\sin30°}{\sin45°}=30\sqrt{2}$(km).



9. **解** (1)依题意,知$\angle BAC=120°$,$AB=6$,$AC=5\times2=10$.
在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\angle BAC=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos120°=196$,

解得$BC=14$,$v_{甲}=\dfrac{BC}{2}=7$,

所以渔船甲的速度为7 n mile/h.

(2)在$\triangle ABC$中,$AB=6$,$\angle BAC=120°$,$BC=14$,$\angle BCA=\alpha$.

由正弦定理,得$\dfrac{AB}{\sin\alpha}=\dfrac{BC}{\sin120°}$,

即$\sin\alpha=\dfrac{AB\sin120°}{BC}=\dfrac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{14}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

10. **解** 在$\triangle ABC$中,因为$\cos A=\dfrac{12}{13}$,$\cos C=\dfrac{3}{5}$,

所以$\sin A=\dfrac{5}{13}$,$\sin C=\dfrac{4}{5}$.

从而$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$

$=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{12}{13}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{63}{65}$.

由$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$,

得$AB=\dfrac{AC}{\sin B}\cdot\sin C=\dfrac{1\ 260}{\frac{63}{65}}\times\dfrac{4}{5}=1\ 040$(m).

所以索道AB的长为1 040 m.

11. ABC [对于A,利用内角和定理先求出$C=\pi-A-B$,再利用正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$解出$c$;对于B,直接利用余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$即可解出$c$;对于C,先利用内角和定理求出$C=\pi-A-B$,再利用正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$解出$c$;对于D,不知道长度,显然不能求$c$.]

12. D [**方法一** 设$AB=x$,则$BC=x$.

$\therefore BD=10+x$.$\therefore\tan\angle ADB=\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{x}{10+x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

解得$x=5(\sqrt{3}+1)$(m).

$\therefore A$点离地面的高AB等于$5(\sqrt{3}+1)$ m.

方法二 $\because\angle ACB=45°$,$\angle ADC=30°$,

$\therefore\angle CAD=45°-30°=15°$.

由正弦定理,得$AC=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}\cdot\sin\angle ADC$

$=\dfrac{10}{\sin15°}\cdot\sin30°=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$(m).

$\therefore AB=AC\sin45°=5(\sqrt{3}+1)$(m).

即A点离地面的高AB等于$5(\sqrt{3}+1)$(m).]

13. B [依题意,可得$AD=20\sqrt{10}$,$AC=30\sqrt{5}$,
又$CD=50$,所以在$\triangle ACD$中,

由余弦定理,得$\cos\angle CAD=\dfrac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC\cdot AD}$

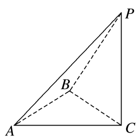
$=\dfrac{(30\sqrt{5})^2+(20\sqrt{10})^2-50^2}{2\times30\sqrt{5}\times20\sqrt{10}}=\dfrac{6\ 000}{6\ 000\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

又$0°<\angle CAD<180°$,

所以$\angle CAD=45°$,

所以从顶端A看建筑物CD的张角为45°.]

14. A [如图,设水柱的高度是h m,水柱底端为C,则在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=60°$,$AC=h$,$AB=100$,$BC=\sqrt{3}h$,根据余弦定理得,$(\sqrt{3}h)^2=h^2+100^2-2\times h\times100\times\cos60°$,即$h^2+50h-5\ 000=0$,即$(h-50)(h+100)=0$,解得$h=50$或$h=-100$(舍去),故水柱的高度是50 m.]



15. $\dfrac{132}{7}$ km,$\dfrac{48}{7}$ km,$\dfrac{258}{7}$ km

解析 由题意得,在$\triangle ABC$中,
$AB-AC=1.5\times8=12$(km).
在$\triangle ACD$中,$AD-AC=1.5\times20=30$(km).
设$AC=x$(km),
则$AB=(12+x)$(km),$AD=(30+x)$(km).

在$\triangle ABC$中,$\cos\angle ACB=\dfrac{x^2+400-(12+x)^2}{2\times20\times x}$

$=\dfrac{256-24x}{40x}=\dfrac{32-3x}{5x}$,

在$\triangle ACD$中,$\cos\angle ACD=\dfrac{x^2+1\ 156-(30+x)^2}{68x}$

$=\dfrac{256-60x}{68x}=\dfrac{64-15x}{17x}$.

$\because B,C,D$在一条直线上,

$\therefore\dfrac{64-15x}{17x}=-\dfrac{32-3x}{5x}$,

即$\dfrac{64-15x}{17}=\dfrac{3x-32}{5}$,

解得$x=\dfrac{48}{7}$.即$AC=\dfrac{48}{7}$(km).

$\therefore AB=\dfrac{132}{7}$(km),$AD=\dfrac{258}{7}$(km).

16. **解** 设缉私船应沿CD方向行驶t小时,才能最快截获(在D点)走私船,

则$CD=10\sqrt{3}t$,$BD=10t$,

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$

$=(\sqrt{3}-1)^2+2^2-2(\sqrt{3}-1)\cdot2\cdot\cos120°=6$.

$\therefore BC=\sqrt{6}$.又$\because\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$,

$\therefore\sin\angle ABC=\dfrac{AC\cdot\sin\angle BAC}{BC}=\dfrac{2\cdot\sin120°}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

又$0°<\angle ABC<60°$,$\therefore\angle ABC=45°$,

$\therefore B$点在C点的正东方向上,

$\therefore\angle CBD=90°+30°=120°$,

在$\triangle BCD$中,由正弦定理,得$\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}=\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}$,

$\therefore \sin\angle BCD=\dfrac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\dfrac{10t\cdot\sin 120^\circ}{10\sqrt{3}t}=\dfrac{1}{2}$.

又$\because 0^\circ<\angle BCD<60^\circ$，$\therefore\angle BCD=30^\circ$，

$\therefore$缉私船沿北偏东 60°的方向行驶.

又在$\triangle BCD$中，$\angle CBD=120^\circ$，$\angle BCD=30^\circ$，

$\therefore\angle CDB=30^\circ$，$\therefore BD=BC$，

即 $10t=\sqrt{6}$.

$\therefore t=\dfrac{\sqrt{6}}{10}$(小时)$\approx 15$(分钟).

$\therefore$缉私船应沿北偏东 60°的方向行驶，才能最快截获走私船，大约需要 15 分钟.

第 5 课时　余弦定理、正弦定理的应用

1. BD　[因为 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{3}{2}$，

所以 $\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\sin A=\dfrac{3}{2}$，

所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $0^\circ<A<180^\circ$，

所以 $A=60^\circ$或 120°.]

2. B　[在$\triangle ABC$中，$A=30^\circ$，$a=b=2$，

由等腰三角形的性质可得，$A=B=30^\circ$，

则 $C=180-30^\circ-30^\circ=120^\circ$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.]

3. C　[在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$B=30^\circ$，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $\sin A=1$，

所以 $A=90^\circ$，

所以 $C=180^\circ-A-B=60^\circ$.]

4. AD　[$\because AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$B=\dfrac{\pi}{6}$，

又由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$，

$\therefore BC^2-3BC+2=0$，

$\therefore BC=1$ 或 $BC=2$，

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin B$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.]

5. A　[因为 $b=2$，$c=\sqrt{5}$，$S=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cos A=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{5}\sin A$，所以 $\sin A=\dfrac{1}{2}\cos A$. 所以 $\sin^2A+\cos^2A=\dfrac{1}{4}\cos^2A+\cos^2A=\dfrac{5}{4}\cos^2A=1$. 所以 $\cos A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. 所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+5-2\times 2\times\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=9-8=1$，故选 A.]

6. B　[由题意及三角形的面积公式，得$\dfrac{1}{2}ab\sin C=5\sqrt{3}$，即$\dfrac{1}{2}a\times 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$，解得 $a=4$，根据余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $c^2=16+25-2\times 4\times 5\times\dfrac{1}{2}=21$，$c=\sqrt{21}$，所以$\triangle ABC$的周长为 $9+\sqrt{21}$. 故选 B.]

7. 45°　$\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

解析　在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{2}\sin 60^\circ}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $b<a$，所以 $B<A$，所以 $B=45^\circ$，则 $C=75^\circ$，

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sin 75^\circ=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.

8. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

解析　由正弦定理得$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$，

即$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sin C}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，解得 $\sin C=\dfrac{1}{2}$.

又 $c<a$，所以 $C<A$，且 $0^\circ<C<180^\circ$，所以 $C=30^\circ$，

故 $B=90^\circ$，所以 $S=\dfrac{1}{2}ac=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

9. **解**　(1)$\because(\sin B+\sin C)^2=\sin^2A+\sin B\sin C$.

$\therefore$由正弦定理，得$(b+c)^2=a^2+bc$，

即 $b^2+c^2-a^2=-bc$，

$\therefore\cos A=-\dfrac{1}{2}$，$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)$\because S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=2\sqrt{3}$，$\therefore bc=8$，

又 $b+c=6$，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-bc=36-8=28$，

$\therefore a=2\sqrt{7}$.

10. **解**　(1)因为 $D=2B$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\cos D=\cos 2B=2\cos^2B-1=-\dfrac{1}{3}$.

因为 $D\in(0,\pi)$，

所以 $\sin D=\sqrt{1-\cos^2D}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 $AD=1$，$CD=3$，

所以$\triangle ACD$的面积为 $S=\dfrac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin D=\dfrac{1}{2}\times 1\times 3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$.

(2)在$\triangle ACD$中，$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos D=12$，

所以 $AC=2\sqrt{3}$.

因为 $BC=2\sqrt{3}$，$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，

所以$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin(\pi-2B)}=\dfrac{AB}{\sin 2B}=\dfrac{AB}{2\sin B\cos B}$，

所以 $AB=4$.

11. D　[因为 $DC=5$，$DA=7$，$AC=8$，

所以 $\cos\angle ADC=\dfrac{7^2+5^2-8^2}{2\times 7\times 5}=\dfrac{1}{7}$，

因此 $\cos\angle ADB=-\dfrac{1}{7}$，所以 $\sin\angle ADB=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

又 $B=45^\circ$，$DA=7$，

由正弦定理，可得$\dfrac{DA}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，

所以 $AB=\dfrac{DA\cdot\sin\angle ADB}{\sin B}=\dfrac{7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{6}$.]

12. A　[设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则由题意得，$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2\times 2-1\times 2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\times\sqrt{2^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，所以平行四边形的面积为 $S=2\times\dfrac{1}{2}\times|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=6$，故选 A.]

13. D　[由 $b\sin 2A+\sqrt{3}a\sin B=0$，结合正弦定理，可得

$\sin B\sin 2A+\sqrt{3}\sin A\sin B=0$，

即 $2\sin B\sin A\cos A+\sqrt{3}\sin A\sin B=0$，

由于 $\sin B\sin A\neq 0$，所以 $\cos A=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{5\pi}{6}$.

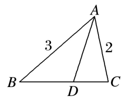
又 $b=\sqrt{3}c$，由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=3c^2+c^2+3c^2=7c^2$，

即 $a^2=7c^2$，所以$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.]

14. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

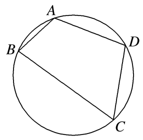
解析 如图，$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，



$\therefore \frac{1}{2}\times3\times2\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times3AD\times\sin30^\circ+\frac{1}{2}\times 2AD\times\sin30^\circ$，

$\therefore AD=\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

15. C ［如图，



由余弦定理，得

在$\triangle ABD$中，$BD^2=4+16-2\times2\times4\cos A=20-16\cos A$，

在$\triangle CBD$中，$BD^2=16+36-2\times4\times6\cos C=52-48\cos C$，

$\because A+C=180^\circ$，

$\therefore 20-16\cos A=52+48\cos A$，

解得$\cos A=-\frac{1}{2}$，

$\therefore A=120^\circ, C=60^\circ$.

$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin60^\circ=8\sqrt{3}$.］

16. **解** (1) $f(x)=\sin x\cos x-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right), x\in\mathbf{R}$.

化简可得，$f(x)=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{2}=\sin2x-\frac{1}{2}$，

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

可得$-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore$函数$f(x)$的单调递增区间是

$\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$.

(2)由$f\left(\frac{A}{2}\right)=0$，即$\sin A-\frac{1}{2}=0$，

可得$\sin A=\frac{1}{2}$，

$\because 0<A<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

可得$1+\sqrt{3}bc=b^2+c^2$.

$\because b^2+c^2\geqslant2bc$，当且仅当$b=c$时等号成立.

$\therefore 1+\sqrt{3}bc\geqslant2bc$，

$\therefore bc\leqslant2+\sqrt{3}$.

$\therefore\triangle ABC$的面积为$S=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

故$\triangle ABC$面积的最大值为$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

第七章　复　数

§7.1　复数的概念

1. B ［因为$a,b\in\mathbf{R}$，当“$a=0$”时，“复数$a+b\mathrm{i}$是纯虚数”不一定成立，也可能$b=0$，即$a+b\mathrm{i}=0\in\mathbf{R}$.
而当“复数$a+b\mathrm{i}$是纯虚数”时，“$a=0$”一定成立.
所以$a,b\in\mathbf{R}$，“$a=0$”是“复数$a+b\mathrm{i}$是纯虚数”的必要不充分条件.］

2. A ［$-3+\mathrm{i}$的虚部为1，$3\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-1+3\mathrm{i}$的实部为$-1$，故所求复数为$1-\mathrm{i}$.］

3. B ［因为复数$z=(a^2-2a)+(a^2-a-2)\mathrm{i}$是纯虚数，
所以$a^2-2a=0$且$a^2-a-2\neq0$，所以$a=0$.］

4. D ［因为$a+2\,021\mathrm{i}=2-b\mathrm{i}$，
所以$a=2$，$-b=2\,021$，即$a=2$，$b=-2\,021$，
所以$a^2+b\mathrm{i}=4-2\,021\mathrm{i}$.］

5. D ［复数包括实数与虚数，所以实数集与纯虚数集无交集，所以$\mathbf{R}\cap\mathbf{I}=\varnothing$.］

6. BCD ［由复数相等的定义知A正确；实数的虚部为0，故B错误；对于C，只有当$z_1,z_2,z_3\in\mathbf{R}$时，才有$z_1=z_2=z_3$，否则不成立，故C错误；D显然错误.］

7. 1

解析 由题意得$\begin{cases}x+y=2,\\x-y=0,\end{cases}$

所以$x=y=1$，所以$xy=1$.

8. $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

解析 由题意知$\sin2\alpha=0$，$1-\cos2\alpha\neq0$，

$\therefore 2\alpha=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

9. **解** 由$m^2+5m+6=0$，得$m=-2$或$m=-3$，
由$m^2-2m-8=0$，得$m=4$或$m=-2$.
(1)当$m^2-2m-8=0$时，复数z为实数，
$\therefore m=4$或$m=-2$.
(2)当$m^2-2m-8\neq0$时，复数z为虚数，
$\therefore m\neq4$且$m\neq-2$.
(3)当$\begin{cases}m^2-2m-8\neq0,\\m^2+5m+6=0\end{cases}$时，复数$z$是纯虚数，
$\therefore m=-3$.
(4)当$\begin{cases}m^2-2m-8=0,\\m^2+5m+6=0\end{cases}$时，复数$z=0$，
$\therefore m=-2$.

10. **解** (1)$\because x,y\in\mathbf{R}$，
$\therefore$由复数相等的定义，得$\begin{cases}2x-1=x-y,\\y+1=-x-y,\end{cases}$
解得$\begin{cases}x=3,\\y=-2.\end{cases}$
(2)$\because x\in\mathbf{R}$，
$\therefore$由复数相等的定义，得$\begin{cases}\frac{x^2-x-6}{x+1}=0,\\x^2-2x-3=0,\end{cases}$
即$\begin{cases}x=3\text{或}x=-2,\text{且}x\neq-1,\\x=3\text{或}x=-1,\end{cases}$
$\therefore x=3$.

11. B ［由已知可得$a^2>2a+3$，即$a^2-2a-3>0$，
解得$a>3$或$a<-1$，
因此，实数a的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.］

12. C ［复数$a^2-a-2+(|a-1|-1)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$不是纯虚数，则有$a^2-a-2\neq0$或$|a-1|-1=0$，解得$a\neq-1$.］

13. B ［由题意知$(n^2+mn)+2n\mathrm{i}=-2-2\mathrm{i}$，
即$\begin{cases}n^2+mn=-2,\\2n=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=3,\\n=-1.\end{cases}$ $\therefore z=3-\mathrm{i}$.］

14. $\{3\}$

解析 由已知，得$\begin{cases}m^2-3m=0,\\m^2-4m+3=0,\\m^2<10,\end{cases}$解得$m=3$，

所以所求实数m的取值集合是$\{3\}$.

15. C ［$\because$复数$z=\left(\cos\theta-\frac{4}{5}\right)+\left(\sin\theta-\frac{3}{5}\right)\mathrm{i}$是纯虚数，

$\therefore\cos\theta-\frac{4}{5}=0$，$\sin\theta-\frac{3}{5}\neq0$，

$\therefore\sin\theta=-\frac{3}{5}$，$\therefore\tan\theta=-\frac{3}{4}$，

$\therefore\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1-\frac{3}{4}}=-7$.］

16. **解** (1)$\because z_1$为纯虚数，

$\therefore\begin{cases}4-m^2=0,\\m-2\neq0,\end{cases}$解得$m=-2$.

(2)由$z_1=z_2$，得$\begin{cases}4-m^2=\lambda+2\sin\theta,\\m-2=\cos\theta-2,\end{cases}$

$\therefore\lambda=4-\cos^2\theta-2\sin\theta=\sin^2\theta-2\sin\theta+3$
$=(\sin\theta-1)^2+2$.
$\because -1\leqslant\sin\theta\leqslant1$，
$\therefore$当$\sin\theta=1$时，$\lambda_{\min}=2$，
当$\sin\theta=-1$时，$\lambda_{\max}=6$，
$\therefore$实数λ的取值范围是$[2,6]$.

7.1.2　复数的几何意义

1. C　[依题意得,$|z_1|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,$|z_2|=\sqrt{(-1)^2}=1$,所以$\frac{|z_1|}{|z_2|}=\sqrt{5}$.]

2. C　[由题意可知,点 A 的坐标为$(-1,-2)$,则点 B 的坐标为$(1,-2)$,故向量$\overrightarrow{OB}$对应的复数为 $1-2i$.]

3. B　[若复数 $z=(a^2-3a-4)+(a-4)i$ 是纯虚数,
则$\begin{cases}a^2-3a-4=0,\\a-4\neq 0,\end{cases}$得$\begin{cases}a=4\text{ 或 }a=-1,\\a\neq 4,\end{cases}$即 $a=-1$,
则复数 $a-ai=-1+i$ 对应的点为$(-1,1)$,位于第二象限.]

4. A　[因为 z 在复平面内对应的点位于第二象限,
所以 $a<0$,由$|z|=2$ 知,$\sqrt{a^2+(\sqrt{3})^2}=2$,解得 $a=\pm 1$,
故 $a=-1$,所以 $z=-1+\sqrt{3}i$.]

5. AC　[依题意可得 $\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}=2$,
解得 $m=1$ 或 $m=3$.]

6. A　[$\because |z|^2-2|z|-3=0$,
$\therefore (|z|-3)(|z|+1)=0$,$\therefore |z|=3$,
∴复数 z 对应的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心,以 3 为半径的一个圆.故选 A.]

7. 2　4
解析　因为 z_1 与 z_2 互为共轭复数,所以 $a=2$,$b=4$.

8. $1+2i$ 或 $-1-2i$
解析　依题意可设复数 $z=a+2ai(a\in\mathbf{R})$,
由$|z|=\sqrt{5}$,得 $\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}$,
解得 $a=\pm 1$,故 $z=1+2i$ 或 $z=-1-2i$.

9. **解**　(1)设向量$\overrightarrow{OB}$对应的复数为 $z_1=x_1+y_1i(x_1,y_1\in\mathbf{R})$,
则点 B 的坐标为(x_1,y_1),
由题意可知,点 A 的坐标为$(2,1)$.
根据对称性可知,$x_1=2$,$y_1=-1$,
故 $z_1=2-i$.
(2)设点 C 对应的复数为 $z_2=x_2+y_2i(x_2,y_2\in\mathbf{R})$,
则点 C 的坐标为(x_2,y_2),
由对称性可知,$x_2=-2$,$y_2=-1$,
故 $z_2=-2-i$.

10. **解**　$|w|=\sqrt{(x+y)^2+(x-y)^2}=\sqrt{2(x^2+y^2)}=\sqrt{2}|z|$,而 $1\leqslant|z|\leqslant\sqrt{2}$,故$\sqrt{2}\leqslant|w|\leqslant 2$.所以 w 对应点的集合是以原点为圆心,半径为$\sqrt{2}$和 2 的圆所夹圆环内点的集合(包括圆环的边界),其面积为 $S=\pi[2^2-(\sqrt{2})^2]=2\pi$.

11. BD　[A 中,$z_1+z_2=0$ 只能说明 $z_1=-z_2$;B 中,$|z_1|+|z_2|=0$,说明$|z_1|=|z_2|=0$,即 $z_1=z_2=0$;C 中,$|z_1|=|z_2|$,说明$|\overrightarrow{OZ_1}|=|\overrightarrow{OZ_2}|$,但$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$方向不一定相同;D 中,$|z_1-z_2|=0$,则 $z_1=z_2$,故 $\overline{z_1}=\overline{z_2}$.故正确的为 B,D 选项.]

12. B　[复数对应的点为$(3,-\sqrt{3})$,对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$,则对应的点为$(0,-2\sqrt{3})$,所得向量对应的复数为$-2\sqrt{3}i$.]

13. B　[因为 A,B 为锐角三角形的两个内角,所以 $A+B>\frac{\pi}{2}$,即 $A>\frac{\pi}{2}-B$,$\sin A>\cos B$,所以 $\cos B-\tan A=\cos B-\frac{\sin A}{\cos A}<\cos B-\sin A<0$,又 $\tan B>0$,所以点$(\cos B-\tan A,\tan B)$在第二象限,故选 B.]

14. 5
解析　由点$(3,-5)$,$(1,-1)$,$(-2,a)$共线可知 $a=5$.

15. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$
解析　因为点 A,B 对应的复数分别是
$z_1=\sin^2\theta+i$,$z_2=-\cos^2\theta+i\cos 2\theta$,
所以点 A,B 的坐标分别是 $A(\sin^2\theta,1)$,$B(-\cos^2\theta,\cos 2\theta)$,
所以$\overrightarrow{AB}=(-\cos^2\theta,\cos 2\theta)-(\sin^2\theta,1)=(-\cos^2\theta-\sin^2\theta,\cos 2\theta-1)=(-1,-2\sin^2\theta)$,
所以$\overrightarrow{AB}$对应的复数是 $z=-1+(-2\sin^2\theta)i$.
所以点 P 的坐标是$(-1,-2\sin^2\theta)$,代入 $y=\frac{1}{2}x$,
得 $-2\sin^2\theta=-\frac{1}{2}$,即 $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$,
所以 $\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$.
又因为 $\theta\in(0,\pi)$,所以 $\sin\theta=\frac{1}{2}$,所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$.

16. **解**　(1)由题意得$|z|=\sqrt{(x-2)^2+(x+2)^2}=\sqrt{2x^2+8}\geqslant 2\sqrt{2}$,显然当 $x=0$ 时,复数 z 的模最小,最小值为 $2\sqrt{2}$.
(2)由(1)知当 $x=0$ 时,复数 z 的模最小,则 $Z(-2,2)$.
因为点 Z 在一次函数 $y=-mx+n$ 的图象上,所以 $2m+n=2$.
又 $mn>0$,
所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\left(m+\frac{n}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{m}{n}+\frac{n}{2m}\geqslant\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.当且仅当$\frac{m}{n}=\frac{n}{2m}$,即 $n^2=2m^2$ 时等号成立.
又 $2m+n=2$ 且 $mn>0$,所以取等号时 $m=2-\sqrt{2}$,$n=2\sqrt{2}-2$.

§7.2　复数的四则运算

7.2.1　复数的加、减运算及其几何意义

1. B　[$z=3+4i-(5-6i)=(3-5)+(4+6)i=-2+10i$.]

2. BD　[$\because (3+mi)-(2+i)=3+mi-2-i=1+(m-1)i$,
$\therefore m-1>0$,$\therefore m>1$.]

3. A　[由图可知 $z=-2+i$,所以 $z+1=-1+i$,则复数 $z+1$ 所对应的向量的坐标为$(-1,1)$.故选 A.]

4. D　[$z_1+z_2=2+i+3+ai=(2+3)+(1+a)i$
$=5+(1+a)i$.
$\because z_1+z_2$ 所对应的点在实轴上,
$\therefore 1+a=0$,$\therefore a=-1$.]

5. B　[设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,
则$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.
由题意知 $a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=5+\sqrt{3}i$,
即 $a+\sqrt{a^2+b^2}+bi=5+\sqrt{3}i$,
$\therefore\begin{cases}a+\sqrt{a^2+b^2}=5,\\b=\sqrt{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{11}{5},\\b=\sqrt{3}.\end{cases}$
$\therefore z=\frac{11}{5}+\sqrt{3}i$,$\overline{z}=\frac{11}{5}-\sqrt{3}i$,
$\therefore z-\overline{z}=2\sqrt{3}i$.]

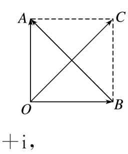
6. B　[$\because |z-1|=|z+1|$,∴点 Z 到$(1,0)$和$(-1,0)$的距离相等,即点 Z 在以$(1,0)$和$(-1,0)$为端点的线段的中垂线上,即在虚轴上.]

7. $\pm 2\sqrt{3}-2i$
解析　因为 $z+2i$ 是实数,所以可设 $z=a-2i(a\in\mathbf{R})$,
由$|z|=4$ 得 $a^2+4=16$,
所以 $a^2=12$,所以 $a=\pm 2\sqrt{3}$,
所以 $z=\pm 2\sqrt{3}-2i$.

8. $3+3\sqrt{2}$
解析　$z_1+z_2=3+3i$,故 $f(z_1+z_2)=f(3+3i)=3+|3+3i|=3+3\sqrt{2}$.

9. **解**　(1)原式$=\left(2+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+2\right)i=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$.
(2)$(3+2i)+(\sqrt{3}-2)i=3+(2+\sqrt{3}-2)i=3+\sqrt{3}i$.
(3)$(1+2i)+(i+i^2)+|3+4i|=1+2i+i-1+5=5+3i$.
(4)$(6-3i)+(3+2i)-(3-4i)-(-2+i)=[6+3-3-(-2)]+[-3+2-(-4)-1]i=8+2i$.

10. **解**　设$\overrightarrow{OA}$对应的复数为 z_1,$\overrightarrow{OB}$对应的复数为 z_2,
则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$对应的复数为 z_1+z_2,$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$对应的复数为 z_1-z_2,
因为$|z_1|=|z_2|=3$,且$|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$,
所以$\triangle AOB$ 为等腰直角三角形,
且$|\overrightarrow{BA}|=3\sqrt{2}$.
作正方形 $AOBC$,如图所示
则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$对应的复数为 z_1+z_2,
故$|z_1+z_2|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{BA}|=3\sqrt{2}$.



11. C　[∵点 A,B,C 对应的复数分别为 $1+3i$,$-i$,$2+i$,
$\therefore\overrightarrow{BC}$对应的复数为 $2+i-(-i)=2+2i$.
设点 D 对应的复数为 $x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,

$\therefore \overrightarrow{AD}$ 对应的复数为 $x-1+(y-3)\mathrm{i}$，
又 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\therefore x-1+(y-3)\mathrm{i}=2+2\mathrm{i}$，
由复数相等得 $\begin{cases}x-1=2,\\y-3=2,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=3,\\y=5.\end{cases}$
$\therefore$ 点 D 对应的复数为 $3+5\mathrm{i}$.]

12. D　[$|z_1-z_2|=|(1-\sin\theta)+(\cos\theta+1)\mathrm{i}|$
$=\sqrt{(1-\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2}=\sqrt{3+2(\cos\theta-\sin\theta)}$
$=\sqrt{3+2\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$.
$\because -1\leqslant\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，
$\therefore |z_1-z_2|_{\max}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$.]

13. B　[根据复数加(减)法的几何意义，可知以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边所作的平行四边形的对角线相等，则此平行四边形为矩形，故 $\triangle AOB$ 为直角三角形.]

14. 100

解析　因为 $x+y\mathrm{i}=(3+5\cos\theta)+\mathrm{i}(-4+5\sin\theta)$，
所以 $x^2+y^2=(3+5\cos\theta)^2+(-4+5\sin\theta)^2$
$=50+30\cos\theta-40\sin\theta=50+50\cos(\theta+\varphi)$，
其中 $\sin\varphi=\frac{4}{5}$，$\cos\varphi=\frac{3}{5}$.
又 $-1\leqslant\cos(\theta+\varphi)\leqslant 1$，所以 $(x^2+y^2)_{\max}=50+50=100$.

15. $\sqrt{10}$

解析　由题意可设 $z_2=a+b\mathrm{i}(a<0,b>0)$，则 $\begin{cases}a^2+b^2=5,\\2a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}\therefore z_2=-1+2\mathrm{i}$，$\therefore z_1+z_2=(2+\mathrm{i})+(-1+2\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}$，
$\therefore |z_1+z_2|=\sqrt{10}$.

16. **解**　(1)$\because$ 向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 $1+2\mathrm{i}$，向量 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $3-\mathrm{i}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，
$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{AC}$ 对应的复数为 $(3-\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i})=2-3\mathrm{i}$.
又 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$，
$\therefore$ 点 C 对应的复数为 $(2+\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})=4-2\mathrm{i}$.
$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{AD}$ 对应的复数为 $3-\mathrm{i}$，
$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$，$\therefore \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$，
$\therefore$ 点 D 对应的复数为 $2+\mathrm{i}+3-\mathrm{i}=5$.
(2)$\because \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B$，
$\therefore \cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{3-2}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.
$\therefore \sin B=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.
$\therefore S_{\square ABCD}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\sin B=\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=7$，
故 $\square ABCD$ 的面积为 7.

7.2.2　复数的乘、除运算

1. C　[$z=\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})=-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-1-2\mathrm{i}$，
故复平面内复数 $z=\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})$ 对应的点位于第三象限.]

2. B　[$\because \frac{a}{1+\mathrm{i}}+\frac{1+\mathrm{i}}{2}=\frac{a(1-\mathrm{i})}{2}+\frac{1+\mathrm{i}}{2}=\frac{1+a}{2}+\frac{1-a}{2}\mathrm{i}$，
又 $\because \left(\frac{a}{1+\mathrm{i}}+\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)\in\mathbf{R}$，$\therefore \frac{1-a}{2}=0$，解得 $a=1$.]

3. D　[$(1+\mathrm{i})^2(2+3\mathrm{i})=2\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=-6+4\mathrm{i}$.]

4. BC　[计算得 AD 为实数，BC 为纯虚数.]

5. C　[$\because (1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$，$\therefore (1+\mathrm{i})^4=-4$，
又 $(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$，$\therefore (1-\mathrm{i})^4=-4$，
$\therefore (1+\mathrm{i})^{20}-(1-\mathrm{i})^{20}=(-4)^5-(-4)^5=0$.]

6. B　[设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，
由题意得 $\begin{cases}2a=6,\\a^2+b^2=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3,\\b=-1,\end{cases}$
$\therefore z=3\pm\mathrm{i}$.]

7. $\frac{-3\pm\sqrt{23}\mathrm{i}}{4}$

解析　因为 $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times2\times4=9-32=-23<0$，
所以方程 $2x^2+3x+4=0$ 的根为
$x=\frac{-3\pm\sqrt{-(-23)}\,\mathrm{i}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{23}\,\mathrm{i}}{4}$.

8. 0

解析　$\because z=-\frac{2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{-2(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}=-\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$
$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
$\therefore 1+z+z^2=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2$
$=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=0$.

9. **解**　(1)$\frac{(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{\mathrm{i}^3}=\frac{-3+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=-1-3\mathrm{i}$.
(2)$\frac{(1+2\mathrm{i})^2+3(1-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}=\frac{-3+4\mathrm{i}+3-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$
$=\frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$.
(3)$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^6+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\mathrm{i}}=\left[\frac{(1+\mathrm{i})^2}{2}\right]^6+\frac{\mathrm{i}(\sqrt{3}-\sqrt{2}\mathrm{i})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\mathrm{i}}$
$=\mathrm{i}^6+\mathrm{i}=-1+\mathrm{i}$.

10. **解**　(1)$z=\frac{-2\mathrm{i}+3+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5}=1+\mathrm{i}$.
(2)把 $z=1+\mathrm{i}$ 代入 $z^2+az+b=1-\mathrm{i}$，
得 $(1+\mathrm{i})^2+a(1+\mathrm{i})+b=1-\mathrm{i}$，
整理得 $a+b+(2+a)\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$，
所以 $\begin{cases}a+b=1,\\2+a=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=4.\end{cases}$

11. D　[因为 $\frac{5}{-3-\mathrm{i}}=\frac{5(-3+\mathrm{i})}{(-3-\mathrm{i})(-3+\mathrm{i})}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，
所以 $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，所以 $A\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$，
把点 A 的坐标分别代入选项，只有 D 选项满足.]

12. BD　[由 $\frac{z+3}{z-1}=-\mathrm{i}$，
得 $z=\frac{-3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-1+2\mathrm{i}$，
故 z 的虚部为 2，
$|z|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，
$\overline{z}=-1-2\mathrm{i}$，
则 $\overline{z}$ 对应的点位于第三象限.]

13. B　[依题意，得 $z=\frac{(1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\mathrm{i}$，
所以 $\overline{z}=-\mathrm{i}$，所以 $z\cdot\overline{z}=\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})=1$，$z^{2\,021}=\mathrm{i}^{2\,021}=\mathrm{i}$，
所以 $|z\cdot\overline{z}+z^{2\,021}|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.]

14. 3

解析　由题意，得 $a(2+3\mathrm{i})^2+(2+3\mathrm{i})+c=0$，
即 $-5a+2+c+(12a+3)\mathrm{i}=0$.
由复数相等的充要条件，得 $\begin{cases}-5a+2+c=0,\\12a+3=0,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{4},\\c=-\frac{13}{4},\end{cases}$ 所以 $a-c=3$.

15. A　[欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x(x\in\mathbf{R})$，
则 $z=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}=\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$，
根据共轭复数定义可知 $\overline{z}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.]

16. **解**　(1)设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z+2\mathrm{i}=a+(b+2)\mathrm{i}$，
$\because z+2\mathrm{i}$ 为实数，$\therefore b+2=0$，解得 $b=-2$，
$\therefore \frac{z}{2-\mathrm{i}}=\frac{a-2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(a-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{2a+2}{5}+\frac{a-4}{5}\mathrm{i}$，
$\because \frac{z}{2-\mathrm{i}}$ 为实数，$\therefore \frac{a-4}{5}=0$，解得 $a=4$.
$\therefore z=4-2\mathrm{i}$.

(2)∵复数$(z+xi)^2=[4+(x-2)i]^2=16-(x-2)^2+8(x-2)i=(12+4x-x^2)+(8x-16)i$,且复数$(z+xi)^2$在复平面内对应的点在第一象限,

∴$\begin{cases}12+4x-x^2>0,\\8x-16>0,\end{cases}$解得$2<x<6$.

即实数x的取值范围是$(2,6)$.

第八章　立体几何初步

§8.1　基本立体图形

第1课时　棱柱、棱锥、棱台

1. B ［由棱锥的结构特征可得.］

2. C ［显然A正确;底面边数最少的棱柱是三棱柱,它有五个面,故B正确;底面是正方形的四棱柱,有一对侧面与底面垂直,另一对侧面不垂直于底面,此时侧面并不全等,故C错误;D正确.］

3. A ［A是假命题,正六棱柱的两个相对的侧面互相平行,但不是棱柱的底面,B,C,D都是真命题.］

4. B ［根据定义知,正方体是特殊的正四棱柱,正四棱柱是特殊的长方体,长方体是特殊的直四棱柱,所以{正方体}$\subsetneqq${正四棱柱}$\subsetneqq${长方体}$\subsetneqq${直四棱柱},故选B.］

5. B ［(1)图还原后,①⑤对面,②④对面,③⑥对面;
(2)图还原后,①④对面,②⑤对面,③⑥对面;
(3)图还原后,①④对面,②⑤对面,③⑥对面;
(4)图还原后,①⑥对面,②⑤对面,③④对面;
综上,可得还原成正方体后,其中两个完全一样的是(2)(3).］

6. AC ［有一个面是多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形,由这些面所围成的多面体叫做棱锥,即其余各面的三角形必须有公共的顶点,故A错误;根据棱锥的概念知,B正确;当棱锥的各个侧面的共顶点的角之和是360°时,各侧面构成平面图形,故这个棱锥不可能为六棱锥,故C错误;若每个侧面都是长方形,则说明侧棱与底面垂直,又底面也是长方形,符合长方体的定义,故D正确.］

7. 北

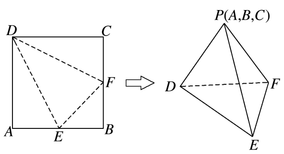
8. $5\sqrt{2}$

解析　依题意得,

$BD_1^2=AB^2+AD^2+AA_1^2=3^2+4^2+5^2=50$,

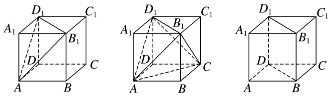
∴$BD_1=5\sqrt{2}$.

9. **解**　(1)如图折起后的几何体是三棱锥.



(2)$S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}a^2$,$S_{\triangle DPF}=S_{\triangle DPE}=\frac{1}{2}\times 2a\times a=a^2$,$S_{\triangle DEF}=\frac{3}{2}a^2$.

10. **解**　(1)如图①所示,三棱锥$A_1-AB_1D_1$(答案不唯一).
(2)如图②所示,三棱锥B_1-ACD_1(答案不唯一).
(3)如图③所示,三棱柱$A_1B_1D_1-ABD$(答案不唯一).



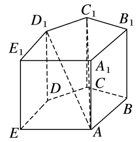
①　②　③

11. D ［设原棱锥的高为h,由题意得$\left(\frac{3}{h}\right)^2=\frac{1}{4}$,则$h=6$,因而棱台的高为3,故选D.］

12. C ［选项A中$\frac{A_1B_1}{AB}\neq\frac{B_1C_1}{BC}$,故A不符合题意;选项B中$\frac{B_1C_1}{BC}\neq\frac{A_1C_1}{AC}$,故B不符合题意;选项C中$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}$,故C符合题意;选项D中满足这个条件的可能是一个三棱柱,不可能是三棱台.］

13. 10

解析　如图,在五棱柱$ABCDE-A_1B_1C_1D_1E_1$中,从顶点A出发的对角线有两条:AC_1,AD_1,同理从B,C,D,E点出发的对角线均有两条,共$2\times5=10$(条).



14. $\sqrt{6}$

解析　设长方体长、宽、高为x,y,z,

则$yz=\sqrt{2}$,$xz=\sqrt{3}$,$yx=\sqrt{6}$,

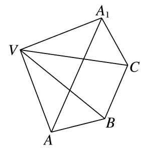
三式相乘得$x^2y^2z^2=6$,即$xyz=\sqrt{6}$,

解得$x=\sqrt{3}$,$y=\sqrt{2}$,$z=1$,

所以$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3+2+1}=\sqrt{6}$.

15. $4\sqrt{2}$

解析　将三棱锥沿侧棱VA剪开,并将其侧面展开平铺在一个平面上,如图,线段AA_1的长为所求$\triangle AEF$周长的最小值.



∵$\angle AVB=\angle A_1VC=\angle BVC=30°$,∴$\angle AVA_1=90°$.

又$VA=VA_1=4$,∴$AA_1=4\sqrt{2}$.

∴$\triangle AEF$周长的最小值为$4\sqrt{2}$.

16. **解**　(1)不对.水面的形状就是用一个与棱(将长方体倾斜时固定不动的棱)平行的平面截长方体时截面的形状,因而可以是矩形,但不可能是非矩形的平行四边形.
(2)不对.水的形状就是用与棱(将长方体倾斜时固定不动的棱)平行的平面将长方体截去一部分后剩余部分的几何体,此几何体是棱柱,水比较少时,是三棱柱,水多时,可能是四棱柱或五棱柱,但不可能是棱台或棱锥.
(3)用任意一个平面去截长方体,其截面形状可以是三角形、四边形、五边形、六边形,因而水面的形状可以是三角形、四边形、五边形、六边形,水的形状可以是棱锥、棱柱,但不可能是棱台,故此时(1)对,(2)不对.

第2课时　圆柱、圆锥、圆台、球、简单组合体

1. D

2. ACD

3. B ［截面可以从各个不同的部位截取,截得的截面都是圆面的几何体只有球.］

4. B ［圆面绕着直径所在的轴,旋转而形成球,矩形绕着轴旋转而形成圆柱.故选B.］

5. B ［当过A,B的直线经过球心时,经过A,B的截面所得的圆都是球的大圆,这时过A,B作球的大圆有无数个;当直线AB不经过球心O时,经过A,B,O的截面就是一个大圆,这时只能作出一个大圆.］

6. B ［当围成的圆柱底面周长为4,高为2时,设圆柱底面圆的半径为r,则$2\pi r=4$,所以$r=\frac{2}{\pi}$,所以轴截面是长为2,宽为$\frac{4}{\pi}$的矩形,所以轴截面的面积为$2\times\frac{4}{\pi}=\frac{8}{\pi}$.同理,当围成的圆柱底面周长为2,高为4时,轴截面的面积也为$\frac{8}{\pi}$.］

7. $\frac{\sqrt{Q}}{2}$

解析　设圆柱的底面半径为r,则母线长为$2r$.

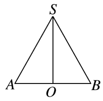
∴$4r^2=Q$,解得$r=\frac{\sqrt{Q}}{2}$,

∴此圆柱的底面半径为$\frac{\sqrt{Q}}{2}$.

8. 12π

解析　因为圆锥的底面半径为2,所以底面圆的周长为4π,故将此圆锥沿一条母线展开,所得扇形的面积为$\frac{1}{2}\times4\pi\times6=12\pi$.

9. **解** 如图轴截面 SAB，圆锥 SO 的底面直径为 AB，SO 为高，SA 为母线，则 $\angle ASO=30°$。



在 $Rt\triangle SOA$ 中，

$$AO=SO\cdot\tan 30°=\frac{2\sqrt{3}}{3}(cm).$$

$$SA=\frac{SO}{\cos 30°}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}(cm).$$

所以 $S_{\triangle ASB}=\frac{1}{2}SO\cdot 2AO=\frac{4\sqrt{3}}{3}(cm^2)$。

所以圆锥的母线长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm，圆锥的轴截面的面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm^2。

10. **解** 当 $AD>BC$ 时，四边形 $ABCD$ 绕 EF 旋转一周所得的几何体是由底面半径为 CD 的圆柱和圆锥拼成的组合体，当 $AD=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 绕 EF 旋转一周所得的几何体是圆柱，当 $AD<BC$ 时，四边形 $ABCD$ 绕 EF 旋转一周所得的几何体是从圆柱中挖去一个同底的圆锥而得到的。

11. D ［圆台的母线长 l、高 h 和上、下两底面圆的半径 r，R 满足关系式 $l^2=h^2+(R-r)^2$，由题意知 $l=5$，$R=7$，$r=6$，求得 $h=2\sqrt{6}$，即两底面之间的距离为 $2\sqrt{6}$。］

12. A ［因为圆锥的侧面展开图是直径为 a 的半圆面，所以圆锥的底面圆的直径为 $\frac{a}{2}$，母线长也为 $\frac{a}{2}$，所以此圆锥的轴截面是等边三角形。］

13. AD ［一个圆柱挖去一个圆锥后，剩下的几何体被一个竖直的平面所截后，圆柱的轮廓是矩形除去一条边，圆锥的轮廓是三角形除去一条边或抛物线的一部分。］

14. ③④

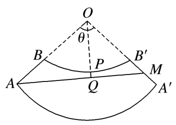
解析 题图中的半球可由③绕轴旋转一周而成，也可由④绕轴旋转 180°而成。

15. (1)①(或②或⑤) (2)①②⑤(或①④⑤或②③④)

解析 (1)由图可知，①～⑤中选出的一个模块可以是①，也可以是②，也可以是⑤。

(2)以①②⑤为例，中间层用⑤补齐，最上层用①②。(答案不唯一)

16. **解** (1)如图所示，将侧面展开，绳子的最短长度为侧面展开图中 AM 的长度，



设 $OB=l$，

则 $\theta\cdot l=2\pi\times 5$，$\theta\cdot(l+20)=2\pi\times 10$，

解得 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$l=20$ cm。

$\therefore OA=40$ cm，$OM=30$ cm。

$\therefore AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=50$ cm。

即绳子最短长度为 50 cm。

(2)作 $OQ\perp AM$ 于点 Q，交弧 BB' 于点 P，

则 PQ 为所求的最短距离。

$\because OA\cdot OM=AM\cdot OQ$，$\therefore OQ=24$ cm。

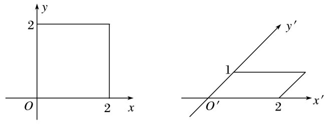
故 $PQ=OQ-OP=24-20=4$(cm)，即上底圆周上的点到绳子的最短距离为 4 cm。

§8.2 立体图形的直观图

1. ACD

2. C ［根据斜二测画法可知，此直观图的平面图形可能是 C。］

3. A ［如图，由正方形的直观图是平行四边形可知①②③错误，易知④正确，故选 A。］



4. AB ［等于 4 的一边在原图形中可能等于 4，也可能等于 8，所以正方形的面积为 16 或 64。］

5. A ［由 $\triangle ABC$ 的直观图，知在原 $\triangle ABC$ 中，$AO\perp BC$。

$\because A'O'=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AO=\sqrt{3}$。

$\because B'O'=C'O'=1$，$\therefore BC=2$，$AB=AC=2$，

$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形。］

6. C

7. (4,2)

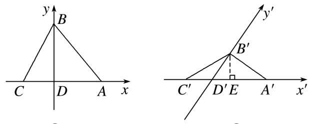
解析 由直观图画法"横不变，纵折半"可得点 M' 的坐标为(4，2)。

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析 画出直观图(图略)，则 B' 到 x' 轴的距离为

$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}OA=\frac{\sqrt{2}}{4}OA=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

9. **解** (1)①以 D 为原点，AC 所在直线为 x 轴，DB 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，如图①，



① ②

②画出对应的 x'，y' 轴，使其 $\angle x'D'y'=45°$，

在 x' 轴上取点 A'，C'，使 $D'A'=DA$，$D'C'=DC$，

在 y' 轴上取点 B'，使 $D'B'=\frac{1}{2}DB$，

连接 $A'B'$，$C'B'$，

则 $\triangle A'B'C'$，即为 $\triangle ABC$ 的直观图，如图②。

(2)在图②中，作 $B'E\perp A'C'$，E 为垂足，

$\because D'B'=\frac{1}{2}DB=6$，$\angle B'D'E=45°$，

$\therefore B'E=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}\times A'C'\times B'E=\frac{1}{2}\times 12\times 3\sqrt{2}$

$=18\sqrt{2}$ (cm^2)。

10. **解** 一个水平放置的平面图形的直观图是一个底角为 45°，腰和上底均为 1 的等腰梯形，所以原图形 $ABCD$ 为直角梯形，且 $AB\perp BC$，且 $AB=2A'B'=2$，$AD=A'D'=1$，又等腰梯形 $A'B'C'D'$ 中，

$B'C'=1+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$，

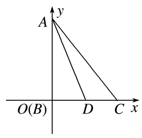
$\therefore BC=B'C'=1+\sqrt{2}$，$\therefore S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB=\frac{1}{2}(1+1+\sqrt{2})\times 2=2+\sqrt{2}$，$\therefore$ 原图形的面积为 $2+\sqrt{2}$。

11. A ［由直观图可知 $\triangle ABO$ 为直角三角形且 $AB\perp BO$，$OB=4$，

$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\times 4\times AB=16$，

$\therefore AB=8$，$\therefore A'B'=4$，$\therefore A'C'=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$。］

12. CD ［由直观图知 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$AB\perp BC$，$AB=2A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，D 为 BC 的中点，如图所示，



又 $A_1B_1=B_1C_1$，

故 AB 错误，CD 正确。］

13. 4 0.5 3.6

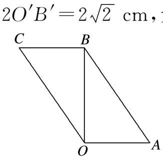
解析 由比例可知长方体的长、宽、高分别为 4 cm，1 cm，2 cm，四棱锥的高为 1.6 cm，

所以长方体的直观图的长、宽、高应分别为 4 cm，0.5 cm，2 cm，四棱锥的直观图的高为 1.6 cm。

所以直观图中建筑物的高为 2+1.6=3.6(cm)。

14. 8 cm

解析 由题意知正方形 $O'A'B'C'$ 的边长为 1 cm，它是水平放置的一个平面图形的直观图，所以 $O'B'=\sqrt{2}$ cm，对应原图形平行四边形 $OABC$ 的高 $OB=2O'B'=2\sqrt{2}$ cm，如图所示。



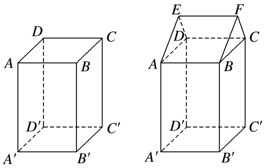
所以原图形中，$OA=BC=1$ cm，$AB=OC=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$ (cm)，故原图形的周长为 $2\times(1+3)=8$(cm)。

15. D ［设$\triangle AOB$的边OB上的高为h，因为$S_{原图形}=2\sqrt{2}S_{直观图}$，所以$\frac{1}{2}\times OB\times h=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times 2\times O'B'$.

又$OB=O'B'$，所以$h=4\sqrt{2}$.］

16. **解**　(1)先按照斜二测画法画出直四棱柱的直观图$A'B'C'D'-ABCD$；

(2)以直四棱柱的上底面$ABCD$为三棱柱的侧面画出三棱柱的直观图$ADE-BCF$. 直观图如图所示.



§8.3　简单几何体的表面积与体积

8.3.1　棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

1. B

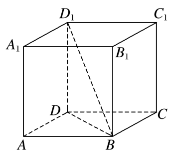
2. D

3. B ［设棱柱的高为h，底面积为S，则棱锥的高为h，底面积为$\frac{3}{2}S$，故二者的体积之比为$\frac{V_1}{V_2}=\frac{Sh}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}Sh}=\frac{2}{1}=2$.］

4. C ［$\because V_{三棱锥C-A'B'C'}=\frac{1}{3}V_{三棱柱ABC-A'B'C'}=\frac{1}{3}$，

$\therefore V_{四棱锥C-AA'B'B}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.］

5. C ［如图所示，正四棱柱的侧棱长为$AA_1=5$，对角线长为$BD_1=\sqrt{43}$，则$(\sqrt{2}AB)^2+5^2=43$，解得$AB=3$，所以这个棱柱的表面积为$2\times3\times3+4\times5\times3=78$.］



6. BD ［依题意，上部分为小棱锥，下部分为棱台，
所以小棱锥与原棱锥的底面边长之比为1∶3，高之比为1∶3，
所以小棱锥与原棱锥的侧面积之比为1∶9，体积之比为1∶27，
即小棱锥与棱台的侧面积之比为1∶8，体积之比为1∶26.］

7. 1

解析　$\because$正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面边长为2，侧棱长为$\sqrt{3}$，D为BC的中点，

$\therefore$底面B_1DC_1的面积为$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

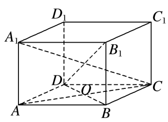
三棱锥$A-B_1DC_1$的高就是底面正三角形的高$\sqrt{3}$.

三棱锥$A-B_1DC_1$的体积为$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$.

8. 1 012

解析　易知正四棱台侧面为等腰梯形，其高为$\sqrt{13^2-5^2}=12$，所以正四棱台的表面积$S=4\times\frac{1}{2}\times(8+18)\times12+8^2+18^2=1\,012(\text{cm}^2)$.

9. **解**　如图，设底面对角线$AC=a$，$BD=b$，交点为O，



体对角线$A_1C=15$，$B_1D=9$，

$\therefore a^2+5^2=15^2$，$b^2+5^2=9^2$，

$\therefore a^2=200$，$b^2=56$.

$\because$该直四棱柱的底面是菱形，

$\therefore AB^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{200+56}{4}=64$，

$\therefore AB=8$.

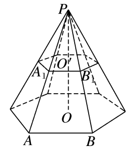
$\therefore$直四棱柱的侧面积$S_{侧}=4\times8\times5=160$.

直四棱柱的底面积$S_{底}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=20\sqrt{7}$.

直四棱柱的表面积$S_{表}=160+2\times20\sqrt{7}=160+40\sqrt{7}$.

10. **解**　(1)由题意知$S_{小棱锥侧}$∶$S_{大棱锥侧}=1$∶4，则$S_{大棱锥侧}$∶$S_{小棱锥侧}$∶$S_{棱台侧}=4$∶1∶3.

(2)如图所示，$\because$小棱锥的底面边长为4 cm，



$\therefore$大棱锥的底面边长为8 cm，

又$PA=12$ cm，$\therefore A_1A=6$ cm.

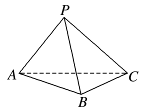
又梯形ABB_1A_1的高$h'=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$(cm)，

$\therefore S_{棱台侧}=6\times\frac{4+8}{2}\times4\sqrt{2}=144\sqrt{2}(\text{cm}^2)$，

$\therefore S_{棱台表}=S_{棱台侧}+S_{上底}+S_{下底}=144\sqrt{2}+24\sqrt{3}+96\sqrt{3}=(144\sqrt{2}+120\sqrt{3})(\text{cm}^2)$.

11. B ［设正六棱柱的底面边长为a m，高为h m，则$2ah=1$，$\sqrt{3}a=1$，解得$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$h=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以六棱柱的体积$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}(\text{m}^3)$.］

12. A ［如图，PA，PB，PC两两垂直且$PA=PB=PC$，



$\triangle ABC$为等边三角形，$AB=a$，

$\therefore PA=PB=PC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore$表面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\times3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2=\frac{3+\sqrt{3}}{4}a^2$.］

13. D ［设三棱台的高为h，则由题可知三棱锥A_1-ABC的体积$V_1=\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle ABC}$，三棱锥$A_1-B_1C_1B$的体积$V_2=\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\times h\times\frac{1}{4}\times S_{\triangle ABC}$，三棱锥$A_1-C_1BC$的体积$V_3=2V_2$，所以三棱锥$A_1-ABC$，$A_1-B_1C_1B$，$A_1-C_1BC$的体积之比为4∶1∶2.］

14. $\frac{1}{12}$

解析　连接AD_1，CD_1，B_1A，B_1C，AC(图略)，

$\because E$，H分别为AD_1，CD_1的中点，

$\therefore EH/\!/AC$，$EH=\frac{1}{2}AC$.

$\because F$，G分别为B_1A，B_1C的中点，

$\therefore FG/\!/AC$，$FG=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore EH/\!/FG$，$EH=FG$，$\therefore$四边形$EHGF$为平行四边形，

又$EG=HF$，$EH=HG$，$\therefore$四边形$EHGF$为正方形.

又四棱锥$M-EFGH$的高为$\frac{1}{2}$，

$\therefore$四棱锥$M-EFGH$的体积为$\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

15. 36

解析　易知由下向上三个正方体的棱长依次为2，$\sqrt{2}$，1，

$\therefore S_{表}=2\times2^2+4\times[2^2+(\sqrt{2})^2+1^2]=36$.

$\therefore$该几何体的表面积为36.

16. **解**　设点B到平面EMC的距离为h_1，点D到平面EMC的距离为h_2，

连接MD，因为M是AE的中点，

所以$V_{M-ABCD}=\frac{1}{2}V$，

所以$V_{E-MBC}=\frac{1}{2}V-V_{E-MDC}$.

而$V_{E-MBC}=V_{B-EMC}$，$V_{E-MDC}=V_{D-EMC}$，

所以$\frac{V_{E-MBC}}{V_{E-MDC}}=\frac{V_{B-EMC}}{V_{D-EMC}}=\frac{h_1}{h_2}$.

因为B，D到平面EMC的距离即为到平面EAC的距离，而$AB/\!/CD$，且$2AB=3CD$，

所以$\frac{h_1}{h_2}=\frac{3}{2}$.

所以$V_{E-MBC}=V_{M-EBC}=\frac{3}{10}V$.

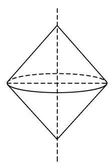
8.3.2　圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

1. B　[由两球的体积之比为 8∶27，
可得半径之比为 2∶3，
故表面积之比是 4∶9.]

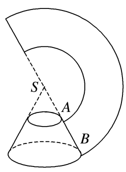
2. D　[设该等边圆锥的半径为 R，
则母线 $l=2R$，
$\therefore S_{底}=\pi R^2$，
$S_{侧}=\pi Rl=2\pi R^2$，
$\therefore S_{侧}=2S_{底}$.]

3. D　[由题意，得 $r=\dfrac{1}{3}$，$d=\dfrac{2}{3}$，
所以 $\dfrac{2}{3}\approx\sqrt[3]{\dfrac{16V}{9}}$，
解得 $V\approx\dfrac{1}{6}$.]

4. B　[绕等腰直角三角形的斜边所在的直线旋转一周形成的曲面围成的几何体为两个底面重合，等体积的圆锥，如图所示. 每一个圆锥的底面半径和高都为 $\sqrt{2}$，故所求几何体的体积 $V=2\times\dfrac{1}{3}\times2\pi\times\sqrt{2}=\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.]



5. ABD　[如图所示，设圆台的上底面周长为 C，因为扇环的圆心角为 180°，
所以 $C=\pi\cdot SA$，又 $C=10\times2\pi$，
所以 $SA=20$，同理 $SB=40$，
故圆台的母线 $AB=SB-SA=20$，
高 $h=\sqrt{AB^2-(20-10)^2}=10\sqrt{3}$，
体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\times10\sqrt{3}\times(10^2+10\times20+20^2)=\dfrac{7\ 000\sqrt{3}\pi}{3}$，
表面积 $S=\pi(10+20)\times20+100\pi+400\pi=1\ 100\pi$.]

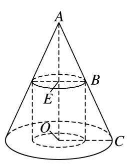


6. D　[由题意知，该神人纹玉琮王的体积为底面边长为 17.6 cm，高为 8.8 cm 的正方体的体积减去底面直径为 4.9 cm，高为 8.8 cm 的圆柱的体积.
则 $V=17.6\times17.6\times8.8-\pi\times\left(\dfrac{4.9}{2}\right)^2\times8.8\approx2\ 560\ (\text{cm}^3)$.
结合该神人纹玉琮王外面方形偏低且去掉雕刻部分，可估计该神人纹玉琮王的体积约为 2 350 cm^3.]

7. 12π
解析　由正方体的体积为 8 可知，正方体的棱长 $a=2$. 又正方体的体对角线是其外接球的一条直径，即 $2R=\sqrt{3}a$（R 为正方体的外接球半径），所以 $R=\sqrt{3}$，故所求球的表面积 $S=4\pi R^2=12\pi$.

8. 2∶1　$2\sqrt{3}$∶1
解析　$S_{圆柱}=2\cdot\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+2\pi\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a=\dfrac{3\pi}{2}a^2$.
$S_{圆锥}=\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\pi\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a=\dfrac{3\pi}{4}a^2$.
$\therefore S_{圆柱}:S_{圆锥}=2:1$.
$V_{圆柱}=\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\cdot a=\dfrac{\pi}{4}a^3$，
$V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}a^3$，
$\therefore V_{圆柱}:V_{圆锥}=\dfrac{\pi}{4}a^3:\dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}a^3=2\sqrt{3}:1$.

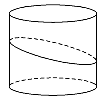
9. **解**　设圆锥的底面半径为 R，圆柱的底面半径为 r，高为 h，表面积为 S.



则 $R=OC=2$，$AC=4$，$AO=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，$h=AO-AE=\sqrt{3}$.
如图所示，易知$\triangle AEB\backsim\triangle AOC$，$\therefore\dfrac{AE}{AO}=\dfrac{EB}{OC}$，
即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{r}{2}$，$\therefore r=1$，
$S_{圆柱底}=2\pi r^2=2\pi$，$S_{圆柱侧}=2\pi r\cdot h=2\sqrt{3}\pi$.
$\therefore S=S_{圆柱底}+S_{圆柱侧}=2\pi+2\sqrt{3}\pi=(2+2\sqrt{3})\pi$.

10. **解**　该组合体的表面积 $S=4\pi r^2+2\pi rl=4\pi\times1^2+2\pi\times1\times3=10\pi$.
该组合体的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2l$
$=\dfrac{4}{3}\pi\times1^3+\pi\times1^2\times3=\dfrac{13\pi}{3}$.

11. D　[用一个完全相同的几何体把题中几何体补成一个圆柱，如图，则圆柱的体积为 $\pi\times2^2\times5=20\pi$，故所求几何体的体积为 10π.]

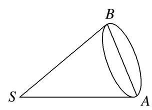


12. C　[设正方体的棱长为 a，则其内切球的半径为 $\dfrac{a}{2}$，
$\therefore V_{内}=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^3=\dfrac{\pi a^3}{6}$，
正方体的外接球的半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，
$\therefore V_{外}=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$，
$\therefore V_{内}:V_{外}=1:3\sqrt{3}$.]

13. B　[由已知得天池盆盆口半径为 14 寸，盆底半径为 6 寸，
则盆口面积为 196π，盆底面积为 36π，
又盆深 18 寸，盆中水深 9 寸，
则积水水面的半径为 $\dfrac{14+6}{2}=10$（寸），
$\therefore$积水水面面积为 100π，
$\therefore$积水的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times(36\pi+\sqrt{36\pi\times100\pi}+100\pi)\times9=588\pi$，
$\therefore$平地降雨量为 $\dfrac{588\pi}{196\pi}=3$（寸）.]

14. 3∶1∶2
解析　设球的半径为 R，则
$V_{圆柱}=\pi R^2\cdot2R=2\pi R^3$，
$V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi R^2\cdot2R=\dfrac{2}{3}\pi R^3$，
$V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，
故 $V_{圆柱}:V_{圆锥}:V_{球}=2\pi R^3:\dfrac{2}{3}\pi R^3:\dfrac{4}{3}\pi R^3=3:1:2$.

15. 20　224π
解析　设圆锥的母线长为 l，如图，以 S 为圆心，SA 为半径的圆的面积 $S=\pi l^2$.
又圆锥的侧面积 $S_{圆锥侧}=\pi rl=8\pi l$.
根据圆锥在平面内转到原位置时，圆锥本身滚动了 2.5 周，
$\therefore\pi l^2=2.5\times8\pi l$，
$\therefore l=20$ cm.
圆锥的表面积 $S=S_{圆锥侧}+S_{底}=\pi\times8\times20+\pi\times8^2$
$=224\pi(\text{cm}^2)$.



16. **解**　要使冰淇淋融化后不会溢出杯子，则必须有 $V_{圆锥}\geqslant V_{半球}$，
而 $V_{半球}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\pi}{3}\times4^3$，$V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi\times4^2\times h$，
则有 $\dfrac{1}{3}\pi\times4^2\times h\geqslant\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\pi}{3}\times4^3$，解得 $h\geqslant8$，
即当圆锥形杯子的高大于或等于 8 cm 时，冰淇淋融化后不会溢出杯子.
又因为 $S_{圆锥侧}=4\pi\sqrt{h^2+16}$，
所以当高为 8 cm 时，制作的杯子最省材料，材料最省为 $16\sqrt{5}\pi\ \text{cm}^2$.

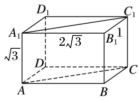
习题课　与球有关的内切、外接问题

1. D　[由正方体性质知，它的外接球的半径为 $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，内切球的半径为 $r=\dfrac{1}{2}$，

∴$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$,$S_{球}=4\pi r^2=\pi$,

∴$V_{球}:S_{球}=\sqrt{3}:2$.]

2.C [由题意,将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成长方体,如图所示,



则该长方体的体对角线为

$\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+1^2}=4$,

设长方体的外接球的半径为 R,则 $2R=4$,$R=2$,

所以该长方体的外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$.]

3.A [三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱 PA,PB,PC 两两互相垂直,它的外接球就是它扩展为长方体的外接球,求出长方体的体对角线的长为 $\sqrt{2+1+3}=\sqrt{6}$,

所以球的直径是$\sqrt{6}$,半径为$\frac{\sqrt{6}}{2}$,球的体积为$\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$.]

4.D [由正三棱柱的底面边长 $AB=6$,设底面外接圆的半径为 r,所以 $2r=\frac{6}{\sin 60^\circ}$,解得 $r=2\sqrt{3}$.又正三棱柱的高 $AA_1=6$,则球心到底面的距离为 $d=3$,根据球心距、底面外接圆半径与球半径的关系得,$R^2=r^2+d^2=12+9=21$,即 $R=\sqrt{21}$.所以外接球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=28\sqrt{21}\pi$.]

5.B [设圆柱的高为 h,底面半径为 r,圆柱的外接球的半径为 R,则 $R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2$.

因为圆锥的母线与底面所成角为 60°,所以圆锥的高为$\sqrt{3}r$,母线长 $l=2r$.

所以圆锥的侧面积为 $\pi lr=2\pi r^2$,

所以 $4\pi R^2=4\pi\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2\right]=4\times 2\pi r^2$,所以 $\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2=2r^2$,所以 $h^2=4r^2$,所以$\frac{h}{r}=2$.]

6.A [设圆锥的底面半径为 r,高为 h,则 $2\pi r=\frac{2\pi}{3}\times 3$,

∴$r=1$,$h=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$,设内切球的半径为 R,

则$\frac{R}{2\sqrt{2}-R}=\frac{1}{3}$,

∴$R=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.]

7.$\frac{1}{2}$　3π

解析　正方体的内切球的直径为正方体的棱长,则棱长为 1 的正方体的内切球的半径是$\frac{1}{2}$,正方体的外接球的半径为体对角线的一半,则 $R=\frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以该正方体的外接球的表面积是 $4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\pi$.

8.20π

解析　设球的半径为 r,由题意得 $r^2=1^2+2^2=5$,

∴$S_{球}=4\pi\cdot 5=20\pi$.

9.**解**　(1)正方体内切球的半径为棱长的一半,

即 $R_1=\frac{a}{2}$,外接球半径为体对角线的一半,即 $R_2=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

所以内切球体积与外接球体积之比为 $V_1:V_2=R_1^3:R_2^3=1:3\sqrt{3}$.

(2)连接 MN(图略),则 $V_{A-MB_1ND}=V_{A-MB_1N}+V_{A-MDN}$,

$V_{A-MB_1N}=V_{N-AB_1M}=\frac{1}{3}S_{\triangle AB_1M}\cdot C_1B_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\cdot a\cdot a=\frac{a^3}{12}$,

同理,$V_{A-MDN}=\frac{a^3}{12}$,

∴$V_{A-MB_1ND}=\frac{a^3}{12}+\frac{a^3}{12}=\frac{a^3}{6}$.

10.**解**　(1)设圆柱的高为 h,底面半径为 r,球的半径为 R,由已知得 $h=2R$,$r=R$,

∴$V_{圆柱}=\pi r^2h=2\pi R^3$,$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$,

∴$\frac{V_{圆柱}}{V_{球}}=\frac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}$.

(2)∵$S_{圆柱}=S_{侧}+2S_{圆}=2\pi rh+2\pi r^2=6\pi r^2$,

$S_{球}=4\pi r^2$,∴$\frac{S_{圆柱}}{S_{球}}=\frac{6\pi r^2}{4\pi r^2}=\frac{3}{2}$.

11.AB [因为正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面积为 3,

所以底面边长为$\sqrt{3}$,

因为外接球的表面积为 8π,

所以球的半径 r 为$\sqrt{2}$.连接 AC,BD 交于点 O(图略).

①当球心在线段 PO 上时,

计算得 $PO=r+\sqrt{r^2-OA^2}=\sqrt{2}+\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

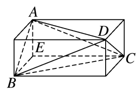
所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为$\frac{1}{3}\times 3\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

②当球心在线段 PO 的延长线上时,

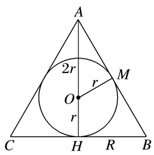
计算得 $PO=r-\sqrt{r^2-OA^2}=\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为$\frac{1}{3}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.]

12.C [如图所示,该四面体的顶点为长方体的四个顶点,设长、宽、高分别为 a,b,c,则 $\begin{cases}a^2+b^2=5,\\a^2+c^2=4,\\b^2+c^2=3,\end{cases}$ 三式相加得 $a^2+b^2+c^2=6$,所以该四面体的外接球的直径为长方体的体对角线长,故外接球的表面积为 $4\pi R^2=6\pi$.]



13.B [设球的半径为 r,则圆锥的高为 $3r$,设圆锥的底面圆的半径为 R,取圆锥的轴截面如图所示,



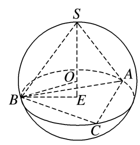
设球心为点 O,在 $\mathrm{Rt}\triangle AOM$ 中,$\angle AMO=90^\circ$,$OM=r$,$AO=AH-OH=2r$,$\sin\angle OAM=\frac{OM}{AO}=\frac{1}{2}$,∴$\angle OAM=30^\circ$,∴$R=AH\tan\angle OAM=\sqrt{3}r$,则 $AB=2R=2\sqrt{3}r$,

则圆锥的侧面积为 $S_1=\pi R\cdot 2R=\pi\times\sqrt{3}r\times 2\sqrt{3}r=6\pi r^2$,球 O 的表面积为 $S_2=4\pi r^2$,

因此,圆锥的侧面积与球的表面积的比值为$\frac{S_1}{S_2}=\frac{6\pi r^2}{4\pi r^2}=\frac{3}{2}$.]

14.64π

解析　取$\triangle ABC$ 的中心为 E,连接 SE,记球心为 O.如图,



∵在正三棱锥 $S-ABC$ 中,底面边长为 6,侧棱长为 $4\sqrt{3}$,

∴$BE=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=2\sqrt{3}$,

∴$SE=\sqrt{SB^2-BE^2}=6$.∵球心 O 到四个顶点的距离相等,均等于该正三棱锥外接球的半径长 R,

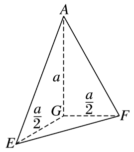
∴$OB=R$,$OE=6-R$.在 $\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 中,$OB^2=BE^2+OE^2$,

即 $R^2=12+(6-R)^2$,解得 $R=4$,

∴外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=64\pi$.

15.$\frac{\sqrt{6}}{6}$

解析　由题意,折叠后的四面体 $A-EFG$ 如图所示,设正方形边



长为 a,四面体 $A-EFG$ 外接球的半径为 r,则

$AG=a$,$EG=FG=\frac{a}{2}$,

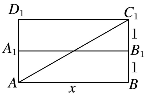
易知折叠后的四面体 $A-EFG$ 中,GA,GE,GF 两两垂直,

所以四面体 $A-EFG$ 的外接球半径

$r=\frac{\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}a$,由 $4\pi r^2=\frac{\pi}{4}$,解得 $r=\frac{1}{4}$,

所以 $a=\frac{4}{\sqrt{6}}r=\frac{4}{\sqrt{6}}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

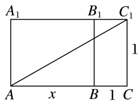
16. **解** (1)设 $AB=x$,点 A 到点 C_1 可能有两种途径,如图甲的最短路程为 $AC_1=\sqrt{x^2+4}$.



图甲

如图乙的最短路程为

$AC_1=\sqrt{(x+1)^2+1}=\sqrt{x^2+2x+2}$,



图乙

$\because x>1$,$\therefore x^2+2x+2>x^2+2+2=x^2+4$,

故从点 A 沿长方体的表面爬到点 C_1 的最短距离为 $\sqrt{x^2+4}$.

由题意得 $\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{2}$,解得 $x=2$.

即 AB 的长度为 2.

(2)设长方体外接球的半径为 R,则

$(2R)^2=1^2+1^2+2^2=6$,

$\therefore R^2=\frac{3}{2}$,$\therefore S=4\pi R^2=6\pi$,

即该长方体外接球的表面积为 6π.

§8.4 空间点、直线、平面之间的位置关系

8.4.1 平 面

1. D

2. ABC [不共线的三点有且仅有一个平面,故 A 错误;
只有平行或相交的直线才能确定一个平面,故 B 错误;
当三条直线相交于一点时,可以确定三个平面,例如三棱锥的三条侧棱,故 C 错误;
圆和平行四边形是平面图形,可以用来表示平面,故 D 正确.]

3. C [若这三个公共点在一条直线上,则这两个平面相交;若这三个公共点不共线,则这两个平面重合.故选 C.]

4. ACD

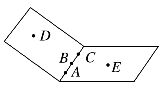
5. A [$\because M\in a$,$a\subset\alpha$,$\therefore M\in\alpha$,
又 $\because N\in b$,$b\subset\alpha$,$\therefore N\in\alpha$,
又 $M,N\in l$,$\therefore l\subset\alpha$.]

6. BCD [由基本事实 1 易知选项 A 正确;对于选项 B,如正方体中,具有同一顶点的三条棱不在同一平面内,故选项 B 错误;对于选项 C,三个不同的公共点可在两平面的交线上,故选项 C 错误;三条直线相交于一点时,最多可确定 3 个平面.]

7. $\in$

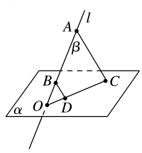
解析 $\because a\cap b=M$,$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,$\therefore M\in\alpha$,$M\in\beta$.
又 $\because\alpha\cap\beta=l$,$\therefore M\in l$.

8. ①



解析 ①假设其中有三点共线,则该直线和直线外的另一点确定一个平面,这与四点不共面矛盾,故其中任意三点不共线,所以①正确;②如图,两个相交平面有三个公共点 A,B,C,但 A,B,C,D,E 不共面;③显然不正确;④不正确,因为此时所得的四边形的四条边可以不在一个平面上,如空间四边形.

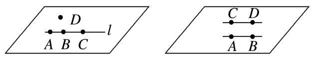
9. **证明** 如图,$\because AC\,/\!/\,BD$,



$\therefore AC$ 与 BD 确定一个平面,记作平面 β,则 $\alpha\cap\beta=$ 直线 CD.
$\because l\cap\alpha=O$,$\therefore O\in\alpha$.
又 $\because O\in AB$,$AB\subset\beta$,
$\therefore O\in\beta$,
$\therefore O\in$ 直线 CD,
$\therefore O,C,D$ 三点共线.

10. **证明** 不妨设 $AB\neq A_1B_1$,则四边形 AA_1B_1B 为梯形,
$\therefore AA_1$ 与 BB_1 相交,设其交点为 S,则 $S\in AA_1$,$S\in BB_1$.
$\because BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1,$\therefore S\in$ 平面 BCC_1B_1.
同理可证,$S\in$ 平面 ACC_1A_1,
$\therefore$ 点 S 在平面 BCC_1B_1 与平面 ACC_1A_1 的交线上,
即 $S\in CC_1$,
$\therefore AA_1,BB_1,CC_1$ 三线共点.

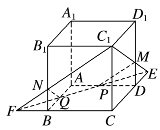
11. B [如图①②所示,A,C,D 均不正确,只有 B 正确.]



① ②

12. ABC [在题图中,连接 A_1C_1,AC,则 $AC\cap BD=O$,
又 $A_1C\cap$ 平面 $C_1BD=M$.
$\therefore$ 三点 C_1,M,O 在平面 C_1BD 与平面 ACC_1A_1 的交线上,即 C_1,M,O 三点共线,
$\therefore$ A,B,C 均正确,D 不正确.]

13. C [先确定截面上的已知边与几何体上和其共面的边的交点,再确定截面与几何体的棱的交点.设直线 C_1M,CD 相交于点 E,直线 C_1N,CB 相交于点 F,连接 EF 交直线 AD 于点 P,交直线 AB 于点 Q,则五边形 C_1MPQN 为所求截面图形.]

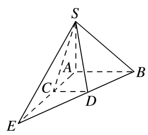


14. 7

解析 可以想象四棱锥的 5 个顶点,它们总共确定 7 个平面.

15. A [由题意得 EF 在平面 ABC 内,HG 在平面 ACD 内,EF 与 HG 交于点 M,$\therefore M$ 一定落在平面 ABC 与平面 ACD 的交线 AC 上.]

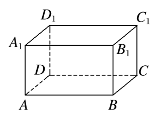
16. **解** 很明显,点 S 是平面 SBD 和平面 SAC 的一个公共点,即点 S 在平面 SBD 和平面 SAC 的交线上.



由于 $AB>CD$,则分别延长 AC 和 BD 交于点 E,如图所示,
$\because E\in AC$,$AC\subset$ 平面 SAC,
$\therefore E\in$ 平面 SAC.
同理,可证 $E\in$ 平面 SBD.
$\therefore$ 点 E 在平面 SBD 和平面 SAC 的交线上,则连接 SE,直线 SE 就是平面 SBD 和平面 SAC 的交线.

8.4.2 空间点、直线、平面之间的位置关系

1. B [如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,AA_1 与 BC 是异面直线,
又 $AA_1\,/\!/\,BB_1$,$AA_1\,/\!/\,DD_1$,显然 $BB_1\cap BC=B$,DD_1 与 BC 是异面直线,故选 B.]

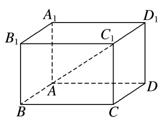


2. D [与同一平面平行的两条直线的位置关系有三种情况:平行、相交或异面.]

3. C [平面外两点的连线与已知平面的位置关系有两种情况:
①直线与平面相交,可以作 0 个平行平面;
②直线与平面平行,可以作 1 个平行平面.]

4. D [三个平面两两相交,有两种情况:一是如三棱柱的三个侧面,三条交线两两平行;二是如三棱锥的三个侧面,三条交线相交于一点.]

5. C [如图所示,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中没有与体对角线 AC_1 平行的棱,要求与长方体体对角线 AC_1 异面的棱所在的直线,只要去掉与 AC_1 相交的六条棱,其余的都与体对角线异面,$\therefore$ 与 AC_1 异面的棱有 BB_1,A_1D_1,A_1B_1,BC,CD,DD_1,$\therefore$ 长方体的一条体对角线与长方体的棱所组成的异面直线有 6 对.]



6. AC [对于 A,正确;对于 B,逆推"α 与 β 相交"推不出"a 与 b 相交",也可能 $a\,/\!/\,b$,故 B 错误;对于 C,正确;对于 D,反例:正方体的侧棱任意两条都共面,但这 4 条侧棱却不共面,故 D 错误.]

7. 相交

解析 $\because$ 点 $A\in\alpha$,$B\notin\alpha$,$C\notin\alpha$,

∴平面 ABC 与平面 α 有公共点,且不重合,
∴平面 ABC 与平面 α 的位置关系是相交.

8.8

解析　以底边所在直线为准进行考察,因为四边形 $ABCD$ 是平面图形,4 条边在同一平面内,不可能组成异面直线,而每一边所在直线能与 2 条侧棱组成 2 对异面直线,所以共有 $4\times2=8$(对)异面直线.

9.**解**　B_1D_1 在平面 A_1C_1 内,B_1D_1 与平面 BC_1,平面 AB_1,平面 AD_1,平面 CD_1 都相交,B_1D_1 与平面 AC 平行.

10.**解**　$a /\!/ b$,$a /\!/ \beta$.证明如下:
由 $\alpha\cap\gamma=a$ 知 $a\subset\alpha$ 且 $a\subset\gamma$,
由 $\beta\cap\gamma=b$ 知 $b\subset\beta$ 且 $b\subset\gamma$,
∵$\alpha /\!/ \beta$,$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,
∴a,b 无公共点.
又∵$a\subset\gamma$ 且 $b\subset\gamma$,∴$a /\!/ b$.
∵$\alpha /\!/ \beta$,∴α 与 β 无公共点.
又 $a\subset\alpha$,∴a 与 β 无公共点,∴$a /\!/ \beta$.

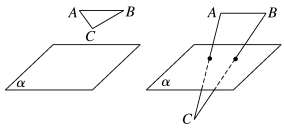
11.A　[延长各侧棱可恢复成棱锥的形状,所以三棱台的一条侧棱所在直线与其对面所在的平面相交.]

12.D　[若直线 a 不平行于平面 α,则 $a\cap\alpha=A$ 或 $a\subset\alpha$,故 D 项正确.]

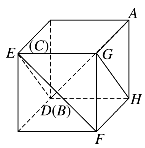
13.B　[因为在△ABC 中,$AE:EB=AF:FC$,所以 $EF /\!/ BC$.又因为 $BC /\!/ B_1C_1$,所以 $EF /\!/ B_1C_1$.]

14.①

解析　如图,三点 A,B,C 可能在 α 同侧,也可能在 α 两侧,其中真命题是①.



15.C　[把正方体的展开图还原成正方体,
得到如图所示的正方体,



由正方体性质得,
AB 与 CD 相交,AD 与 EF 异面,CD 与 GH 平行,AB 与 GH 异面.]

16.**解**　平面 ABC 与平面 β 的交线与 l 相交.
证明如下:
∵AB 与 l 不平行,且 $AB\subset\alpha$,$l\subset\alpha$,
∴AB 与 l 是相交直线.
设 $AB\cap l=P$,则点 $P\in AB$,点 $P\in l$.
又∵$AB\subset$平面 ABC,$l\subset\beta$,
∴$P\in$平面 ABC 且 $P\in$平面 β,
即点 P 是平面 ABC 与平面 β 的一个公共点,
而点 C 也是平面 ABC 与平面 β 的一个公共点,
又∵P,C 不重合,
∴直线 PC 就是平面 ABC 与平面 β 的交线,
即平面 $ABC\cap$平面 $\beta=$直线 PC,而直线 $PC\cap l=P$,
∴平面 ABC 与平面 β 的交线与 l 相交.

§8.5　空间直线、平面的平行

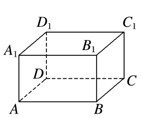
8.5.1　直线与直线平行

1.D

2.D　[可能相交也可能异面,但一定不平行(否则与条件矛盾).]

3.C　[∵$OA /\!/ O'A'$,$OB /\!/ O'B'$,
∴$\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 相等或互补,∵$\angle AOB=130°$,
∴$\angle A'O'B'=130°$或 $50°$.]

4.D　[如图所示,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,AB 与 AA_1 相交,A_1B_1 与 AA_1 相交,$AB /\!/ A_1B_1$;AD 与 AA_1 相交,AB 与 AD 相交,AA_1 与 AB 相交;A_1D_1 与 AA_1 相交,AB 与 AA_1 相交,AB 与 A_1D_1 异面.]



5.D　[由题意可知 $DE /\!/ PB$,$EF /\!/ BC$,所以 $\angle DEF=\angle PBC=90°$.]

6.CD　[假设 $l /\!/ AD$,则由 $AD /\!/ BC /\!/ B_1C_1$,知 $l /\!/ B_1C_1$,
这与 l 与 B_1C_1 不平行矛盾,
∴l 与 AD 不平行.
又 l 在上底面中,AD 在下底面中,
故 l 与 AD 无公共点,故 l 与 AD 不相交.
CD 可以成立.]

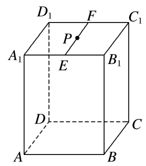
7.$\angle D_1DC$,$\angle D_1C_1C$,$\angle A_1B_1B$

解析　因为在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1 /\!/ DD_1$,$AB /\!/ CD$,所以 $\angle A_1AB$ 与 $\angle D_1DC$ 相等.又由于侧面 A_1ABB_1,D_1DCC_1 为平行四边形,所以 $\angle A_1AB$ 与 $\angle A_1B_1B$,$\angle D_1C_1C$ 也相等.

8.$\dfrac{1}{8}$

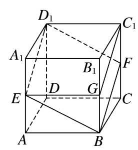
解析　如题干图,$\dfrac{AO}{A'O}=\dfrac{BO}{B'O}=\dfrac{CO}{C'O}=\dfrac{1}{2}$,
可证 $AB /\!/ A'B'$,$AC /\!/ A'C'$,$BC /\!/ B'C'$.
由等角定理得 $\angle CAB=\angle C'A'B'$,$\angle ACB=\angle A'C'B'$,
∴△ABC∽△$A'B'C'$,
∴$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{1}{4}$,
∴$\dfrac{V_{O-ABC}}{V_{O-A'B'C'}}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$.

9.**解**　如图所示,在面 A_1C_1 内过点 P 作直线 $EF /\!/ B_1C_1$,交 A_1B_1 于点 E,交 C_1D_1 于点 F,则直线 EF 即为所求.



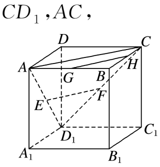
理由:因为 $EF /\!/ B_1C_1$,$BC /\!/ B_1C_1$,
所以 $EF /\!/ BC$.

10.**证明**　如图所示,取 BB_1 的中点 G,连接 GC_1,GE.
因为 F 为 CC_1 的中点,
所以 $BG /\!/ FC_1$,且 $BG=FC_1$.
所以四边形 BFC_1G 是平行四边形.
所以 $BF /\!/ GC_1$,$BF=GC_1$,
又因为 $EG /\!/ A_1B_1$,$EG=A_1B_1$,
$A_1B_1 /\!/ C_1D_1$,$A_1B_1=C_1D_1$,
所以 $EG /\!/ C_1D_1$,$EG=C_1D_1$.
所以四边形 EGC_1D_1 是平行四边形.
所以 $ED_1 /\!/ GC_1$,$ED_1=GC_1$,
所以 $BF /\!/ ED_1$,$BF=ED_1$,
所以四边形 BFD_1E 是平行四边形.



11.D

12.C　[如图,连接 AD_1,CD_1,AC,



则 E,F,G,H 分别为 AD_1,CD_1,AB,BC 的中点.由三角形的中位线定理,知 $EF /\!/ AC$,$GH /\!/ AC$,所以 $EF /\!/ GH$.]

13.BCD　[由题意知 $PQ=\dfrac{1}{2}DE$,且 $DE\neq MN$,
所以 $PQ\neq\dfrac{1}{2}MN$,故 A 不正确;
又 $PQ /\!/ DE$,$DE /\!/ MN$,
所以 $PQ /\!/ MN$,又 $PQ\neq MN$,
所以 M,N,P,Q 四点共面,且四边形 $MNPQ$ 是梯形.
故 B,C,D 正确.]

14.8

解析　由题意得 EH 是△ABD 的中位线,
∴$EH /\!/ BD$ 且 $EH=\dfrac{1}{2}BD=3$,
又∵$\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{CG}{CD}=\dfrac{2}{3}$,

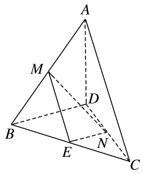
∴$GF\parallel BD$ 且 $GF=\frac{2}{3}BD=4$,

由基本事实4知,$EH\parallel GF$,

∴四边形$EFGH$是梯形,而直线EH,FG之间的距离就是梯形$EFGH$的高,设为h,

即$\frac{(3+4)h}{2}=28$,得$h=8$.

15. D [如图所示,取BC的中点E,连接ME,NE,



则$ME=\frac{1}{2}AC$,$NE=\frac{1}{2}BD$,

所以$ME+NE=\frac{1}{2}(AC+BD)$.

在$\triangle MNE$中,有$ME+NE>MN$,

所以$MN<\frac{1}{2}(AC+BD)$.]

16. (1)**证明** 由G,H分别为FA,FD的中点,

可得$GH\parallel AD$,$GH=\frac{1}{2}AD$.

又$BC\parallel AD$,$BC=\frac{1}{2}AD$,

∴$GH\mathrel{\underline{\parallel}}BC$,

∴四边形$BCHG$为平行四边形.

(2)**解** 由$BE\parallel FA$,$BE=\frac{1}{2}AF$,G为FA的中点知,

$BE\mathrel{\underline{\parallel}}FG$,

∴四边形$BEFG$为平行四边形,∴$EF\parallel BG$.

由(1)知$BG\parallel CH$,∴$EF\parallel CH$,

∴EF与CH共面.

又$D\in FH$,∴C,D,F,E四点共面.

8.5.2 直线与平面平行

1. C [A,本身说法错误;B,当直线m在平面α内时,m与α不平行;C,能推出m与α平行;D,当直线m在平面α内时,m与α不平行.]

2. A [在a上任取一点A,则过A与b平行的直线有且只有一条,设为b',又∵$a\cap b'=A$,∴a与b'确定一个平面α,即为过a与b平行的平面,可知它是唯一的.]

3. D [∵$A_1B_1\mathrel{\underline{\parallel}}AB\mathrel{\underline{\parallel}}CD$,

∴$A_1B_1\mathrel{\underline{\parallel}}CD$,

∴四边形A_1B_1CD为平行四边形,

∴$A_1D\parallel B_1C$,

又$B_1C\subset$平面AB_1C,$A_1D\not\subset$平面AB_1C,

∴$A_1D\parallel$平面AB_1C.]

4. B [∵$GH\parallel$平面SCD,$GH\subset$平面SBD,

平面$SBD\cap$平面$SCD=SD$,

∴$GH\parallel SD$.]

5. A [对于选项B,由于$AB\parallel MQ$,结合线面平行的判定定理可知B不满足题意;对于选项C,由于$AB\parallel MQ$,结合线面平行的判定定理可知C不满足题意;对于选项D,由于$AB\parallel NQ$,结合线面平行的判定定理可知D不满足题意,故选A.]

6. A [∵$EH\parallel FG$,$EH\not\subset$平面BDC,$FG\subset$平面BDC,

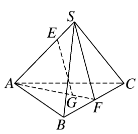
∴$EH\parallel$平面BDC,

又$EH\subset$平面ABD且平面$ABD\cap$平面$BDC=BD$,

∴$EH\parallel BD$.]

7. 平行

解析 如图,延长AG交BC于F,连接SF,则由G为$\triangle ABC$的重心知$AG:GF=2:1$,



又$AE:ES=2:1$,∴$EG\parallel SF$,

又$SF\subset$平面SBC,$EG\not\subset$平面SBC,

∴$EG\parallel$平面SBC.

8. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$

解析 ∵$MN\parallel$平面AC,平面$PMNQ\cap$平面$AC=PQ$,$MN\subset$平面$PQNM$,

∴$MN\parallel PQ$,易知$DP=DQ=\frac{2a}{3}$,

故$PQ=\sqrt{PD^2+DQ^2}=\sqrt{2}DP=\frac{2\sqrt{2}a}{3}$.

9. **证明** 取D_1B_1的中点O,连接OF,OB(图略).

∵F为C_1D_1的中点,

∴$OF\parallel B_1C_1$且$OF=\frac{1}{2}B_1C_1$,

又$BE\parallel B_1C_1$,$BE=\frac{1}{2}B_1C_1$,

∴$OF\parallel BE$且$OF=BE$,

∴四边形$OFEB$是平行四边形,∴$EF\parallel BO$.

∵$EF\not\subset$平面BDD_1B_1,$BO\subset$平面BDD_1B_1,

∴$EF\parallel$平面BDD_1B_1.

10. **证明** ∵四边形$ABCD$为矩形,∴$BC\parallel AD$.

∵$AD\subset$平面PAD,$BC\not\subset$平面PAD,

∴$BC\parallel$平面PAD.

∵平面$BCFE\cap$平面$PAD=EF$,$BC\subset$平面$BCFE$,

∴$BC\parallel EF$.

∵$AD=BC$,$AD\neq EF$,∴$BC\neq EF$,

∴四边形$BCFE$是梯形.

11. A [由长方体性质知,$EF\parallel$平面$ABCD$,

∵$EF\subset$平面$EFGH$,平面$EFGH\cap$平面$ABCD=GH$,

∴$EF\parallel GH$.

又$EF\parallel AB$,∴$GH\parallel AB$.]

12. ABC [矩形$ABCD$的对角线AC与BD交于点O,所以O为BD的中点.在$\triangle PBD$中,M是PB的中点,所以OM是$\triangle PBD$的中位线,所以$OM\parallel PD$,又$OM\not\subset$平面PCD,且$OM\not\subset$平面PDA,所以$OM\parallel$平面PCD,且$OM\parallel$平面PDA.因为$M\in PB$,所以OM与平面PBA、平面PBC均相交.]

13. B [因为直线$a\parallel$平面α,直线$a\parallel$平面β,

所以在α,β中均可找到一条直线与直线a平行.

设m在平面α内,n在平面β内,且$m\parallel a$,$n\parallel a$,

所以$m\parallel n$.

又因为m不在平面β内,n在平面β内,所以$m\parallel\beta$.

又因为$\alpha\cap\beta=b$,$m\subset\alpha$,所以$m\parallel b$.

又因为$m\parallel a$,所以$a\parallel b$,故选B.]

14. 相交 平行

解析 ∵M是A_1D_1的中点,

∴直线DM与直线AA_1相交,

∴DM与平面A_1ACC_1有一个公共点,

∴DM与平面A_1ACC_1相交.

取B_1C_1的中点M_1,连接MM_1,M_1C(图略).

∵$MM_1\parallel C_1D_1$,$C_1D_1\parallel CD$,

∴$MM_1\parallel CD$.

∵$MM_1=C_1D_1$,$C_1D_1=CD$,

∴$MM_1=CD$.

∴四边形DMM_1C为平行四边形,

∴$DM\parallel CM_1$,

又$DM\not\subset$平面BCC_1B_1,$CM_1\subset$平面BCC_1B_1,

∴$DM\parallel$平面BCC_1B_1.

15. 平行四边形

解析 ∵$AB\parallel\alpha$,平面$ABC\cap\alpha=EG$,$AB\subset$平面ABC,

∴$EG\parallel AB$.

同理$FH\parallel AB$,∴$EG\parallel FH$.

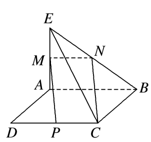
又$CD\parallel\alpha$,平面$BCD\cap\alpha=GH$,$CD\subset$平面BCD,

∴$GH\parallel CD$.同理$EF\parallel CD$,

∴$GH\parallel EF$,∴四边形$EFHG$是平行四边形.

16. **解** 存在点M,如图,当点M是线段AE的中点时,$PM\parallel$平面BCE.

证明如下,取BE的中点N,连接CN,MN,



则$MN\parallel AB$且$MN=\frac{1}{2}AB$,

又$PC\parallel AB$且$PC=\frac{1}{2}AB$,所以$MN\parallel PC$且$MN=PC$,

所以四边形$MNCP$为平行四边形,所以$PM\parallel CN$.

因为$PM\not\subset$平面BCE,$CN\subset$平面BCE,

所以$PM\parallel$平面BCE.

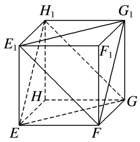
8.5.3 平面与平面平行

1. BCD [A中,直线还可以在平面内,A错误;B中,一个平面内两条相交直线平行于另一个平面内的两条相交直线,可得两条相交直线与另一个平面平行,即两个平面平行,B正确;C,D显然正确.]

2. B [∵$\alpha\parallel\beta$,$a\subset\alpha$,过a作平面γ与平面β相交,则a与交线平行.在β内与交线平行的直线都与a平行,故有无数条,故选B.]

3. D　[由于$\alpha /\!/ \beta$，$a \subset \alpha$，$M \in \beta$，过M有且只有一条直线与a平行，故D项正确.]

4. A　[如图，$\because EG /\!/ E_1G_1$，$EG \not\subset$平面E_1FG_1，$E_1G_1 \subset$平面E_1FG_1，



$\therefore EG /\!/$平面E_1FG_1.

又$G_1F /\!/ H_1E$，

同理可证$H_1E /\!/$平面E_1FG_1，

又$H_1E \cap EG = E$，H_1E，$EG \subset$平面EGH_1，

$\therefore$平面$E_1FG_1 /\!/$平面EGH_1.]

5. A　[平面$\alpha /\!/$平面BC_1E，平面$\alpha \cap$平面$ABB_1A_1 = A_1F$，平面$BC_1E \cap$平面$ABB_1A_1 = BE$，

$\therefore A_1F /\!/ BE$，又$A_1E /\!/ FB$，

$\therefore$四边形A_1FBE为平行四边形，

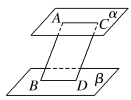
$\therefore FB = A_1E = 3 - 1 = 2$，

$\therefore AF = 1$.]

6. B　[因为平面$A_1B_1C_1 /\!/$平面ABC，平面$A_1B_1ED \cap$平面$A_1B_1C_1 = A_1B_1$，平面$A_1B_1ED \cap$平面$ABC = DE$，所以$A_1B_1 /\!/ DE$. 又因为$A_1B_1 /\!/ AB$，所以$DE /\!/ AB$.]

7. 6

解析　如图，$\because AB /\!/ CD$，



$\therefore A, B, C, D$四点共面，

$\because \alpha /\!/ \beta$，且$\alpha \cap$平面$ABDC = AC$，$\beta \cap$平面$ABDC = BD$，

$\therefore AC /\!/ BD$，又$AB /\!/ CD$，

$\therefore$四边形$ABDC$为平行四边形，

$\therefore AB = CD = 6$.

8. $\dfrac{1}{2}$

解析　$\because$平面$MNE /\!/$平面ACB_1，

由面面平行的性质定理可得$EN /\!/ B_1C$，$EM /\!/ B_1A$，

又$\because E$为BB_1的中点，$\therefore M, N$分别为BA, BC的中点，

$\therefore MN = \dfrac{1}{2}AC$，即$\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{1}{2}$.

9. **证明**　因为F为CD的中点，H为PD的中点，

所以$FH /\!/ PC$，

又$FH \not\subset$平面PEC，$PC \subset$平面PEC，

所以$FH /\!/$平面PCE.

又$AE /\!/ CF$且$AE = CF$，

所以四边形$AECF$为平行四边形，

所以$AF /\!/ CE$，

又$AF \not\subset$平面PCE，$CE \subset$平面PCE，

所以$AF /\!/$平面PCE.

又$FH \subset$平面AFH，$AF \subset$平面AFH，$FH \cap AF = F$，

所以平面$AFH /\!/$平面PCE.

10. **证明**　因为$BE /\!/ AA_1$，

$AA_1 \subset$平面AA_1D，$BE \not\subset$平面AA_1D，

所以$BE /\!/$平面AA_1D.

因为$BC /\!/ AD$，$AD \subset$平面AA_1D，

$BC \not\subset$平面AA_1D，所以$BC /\!/$平面AA_1D.

又$BE \cap BC = B$，$BE \subset$平面BCE，$BC \subset$平面BCE，

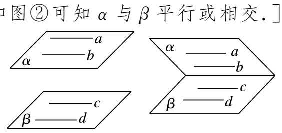
所以平面$BCE /\!/$平面AA_1D.

又平面$A_1DCE \cap$平面$BCE = EC$，

平面$A_1DCE \cap$平面$AA_1D = A_1D$，

所以$EC /\!/ A_1D$.

11. C　[根据图①和图②可知α与β平行或相交.]



①　　②

12. B　[由题意知$AA' /\!/ BB' /\!/ CC'$，$\alpha /\!/ \beta$，

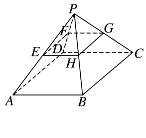
由面面平行的性质定理，得$AC /\!/ A'C'$，

则四边形$ACC'A'$为平行四边形，$\therefore AC = A'C'$.

同理$BC = B'C'$，$AB = A'B'$，

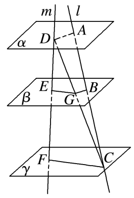
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.]

13. C　[把平面展开图还原为四棱锥如图所示，则$EH /\!/ AB$，所以$EH /\!/$平面$ABCD$. 同理可证$EF /\!/$平面$ABCD$，所以平面$EFGH /\!/$平面$ABCD$；平面PAD，平面PBC，平面PAB，平面PDC均是四棱锥的四个侧面，则它们两两相交. 因为$AB /\!/ CD$，所以平面$PCD /\!/ AB$. 同理，平面$PAD /\!/ BC$.]



14. $\dfrac{9}{4}$

解析　如图，连接CD交平面β于点G，连接EG，BG，AD，CF，设l与CD确定的平面为α_1，因为$\alpha \cap \alpha_1 = AD$，$\beta \cap \alpha_1 = BG$，且$\alpha /\!/ \beta$，所以$AD /\!/ BG$，



所以$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DG}{GC}$，同理可得，$GE /\!/ CF$，$\dfrac{DG}{GC} = \dfrac{DE}{EF}$，所以$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$，所以$DE = \dfrac{AB \cdot EF}{BC} = \dfrac{3 \times 3}{4} = \dfrac{9}{4}$.

15. M在线段FH上

解析　连接HN，FH，FN(图略).

$\because HN /\!/ DB$，$FH /\!/ D_1D$，

$HN \cap HF = H$，$BD \cap DD_1 = D$，

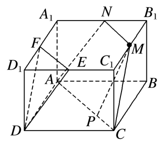
HN，$HF \subset$平面FHN，DB，$DD_1 \subset$平面B_1BDD_1，

$\therefore$平面$FHN /\!/$平面B_1BDD_1.

$\because$点M在四边形$EFGH$上及其内部运动，

$\therefore M \in FH$.

16. **解**　如图，设N为A_1B_1的中点，连接MN，AN，AC，CM，



则四边形$MNAC$为所求的平面图形.

因为M, N, E, F均为中点，所以$MN /\!/ EF$，

又$EF \subset$平面DEF，$MN \not\subset$平面DEF，

所以$MN /\!/$平面DEF，

又$AN /\!/ DE$，$AN \not\subset$平面DEF，$DE \subset$平面DEF，

所以$AN /\!/$平面DEF，

又$MN \cap AN = N$，MN，$AN \subset$平面$MNAC$，所以平面$MNAC /\!/$平面DEF.

易知$MN /\!/ AC$，四边形$MNAC$为梯形，且$MN = \dfrac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$，

过点M作$MP \perp AC$于点P，

可得$MC = \sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}$，$PC = \dfrac{AC - MN}{2} = \sqrt{2}$，

所以$MP = \sqrt{MC^2 - PC^2} = \sqrt{10}$，

所以$S_{梯形MNAC} = \dfrac{1}{2} \times (2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times \sqrt{10} = 6\sqrt{5}$.

§8.6　空间直线、平面的垂直

8.6.1　直线与直线垂直

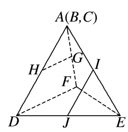
1. B　[$\because a \perp b$，$b /\!/ c$，$\therefore a \perp c$.]

2. D　[根据异面直线的概念可看出直线AA_1，A_1B_1，A_1D_1都和直线EF为异面直线；B_1C_1和EF在同一平面内，且这两直线不平行.

$\therefore$直线B_1C_1和直线EF相交，即选项D正确.]

3. A　[$\angle PQR$(或其补角)为所求，由勾股定理的逆定理可知$\angle PQR = 90°$.]

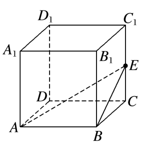
4. B　[将三角形折成三棱锥，如图所示，GH与IJ为异面直线，在三棱锥$A-DEF$中，$IJ /\!/ AD$，$GH /\!/ DF$，所以$\angle ADF$即为所求，



因此GH与IJ所成角为$60°$.]

5. C　[如图，连接BE，$\because AB /\!/ CD$，

$\therefore$异面直线AE与CD所成的角等于相交直线AE与AB所成的角，即$\angle EAB$(或其补角).

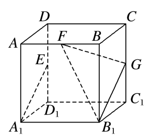


不妨设正方体的棱长为2，则$CE = 1$，$BC = 2$，由勾股定理得$BE = \sqrt{5}$，$AC = 2\sqrt{2}$，$AE = 3$.

$\therefore AB^2 + BE^2 = AE^2$，$\therefore AB \perp BE$，

$\therefore \tan\angle EAB = \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.]

6. A　[如图，连接B_1G，



$\because A_1E /\!/ B_1G$，

$\therefore \angle FGB_1$为异面直线A_1E与GF所成的角或其补角.

连接FB_1，

在$\triangle FB_1G$中，

$B_1F = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2 + AA_1^2} = \sqrt{5}$，

$B_1G=\sqrt{\left(\frac{1}{2}AA_1\right)^2+AD^2}=\sqrt{2}$，

$FG=\sqrt{CF^2+\left(\frac{1}{2}AA_1\right)^2}=\sqrt{3}$，

$B_1F^2=B_1G^2+FG^2$.

$\therefore \angle FGB_1=90°$，

即异面直线 A_1E 与 GF 所成的角为 $90°$.]

7. $90°$　$45°$

解析　B_1D_1 与 AC 是异面直线，连接 BD，交 AC 于点 O，易知 $BD/\!/B_1D_1$，

所以 $\angle DOC$ 或其补角为 B_1D_1 与 AC 所成的角.

因为 $BD\perp AC$，所以 $\angle DOC=90°$，

所以 B_1D_1 与 AC 所成的角是 $90°$.

因为 $DC/\!/D_1C_1$，所以 $\angle ACD$ 是 AC 与 D_1C_1 所成的角，

又 $\angle ACD=45°$，所以 AC 与 D_1C_1 所成的角是 $45°$.

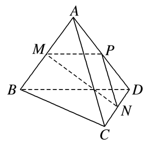
8. 5

解析　如图，取 AD 的中点 P，连接 PM，PN，

则 $BD/\!/PM$，$AC/\!/PN$，

$\therefore \angle MPN$ 或其补角即为异面直线 AC 与 BD 所成的角，

$\therefore \angle MPN=90°$，



$PN=\frac{1}{2}AC=4$，$PM=\frac{1}{2}BD=3$，

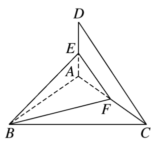
$\therefore MN=5$.

9. **解**　如图，取 AC 的中点 F，连接 EF，BF.

在 $\triangle ACD$ 中，E，F 分别是 AD，AC 的中点，

$\therefore EF/\!/CD$，

$\therefore \angle BEF$（或其补角）即为异面直线 BE 与 CD 所成的角.



在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{2}$，$AB=AC$，$\therefore AB=AC=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EAB$ 中，$AB=1$，

$AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}$，$\therefore BE=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，$AF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$，$AE=\frac{1}{2}$，$\therefore EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$AB=1$，$AF=\frac{1}{2}$，$\therefore BF=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

在等腰三角形 EBF 中，$\cos\angle FEB=\dfrac{\frac{1}{2}EF}{BE}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore$ 异面直线 BE 与 CD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

10. **证明**　如图，取 CD_1 的中点 G，连接 EG，DG.

$\because E$ 是 BD_1 的中点，

$\therefore EG/\!/BC$，$EG=\frac{1}{2}BC$，

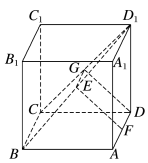
$\because F$ 是 AD 的中点，且 $AD/\!/BC$，$AD=BC$，

$\therefore DF/\!/BC$，$DF=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore EG/\!/DF$，$EG=DF$，$\therefore$ 四边形 $EFDG$ 是平行四边形，

$\therefore EF/\!/DG$，

$\therefore \angle DGD_1$（或其补角）是异面直线 CD_1 与 EF 所成的角.



又 $\because A_1A=AB$，

$\therefore$ 四边形 ABB_1A_1，四边形 CDD_1C_1 都是正方形，

又 G 为 CD_1 的中点，

$\therefore DG\perp CD_1$，$\therefore \angle D_1GD=90°$，

$\therefore$ 异面直线 CD_1 与 EF 所成的角为 $90°$，

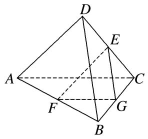
$\therefore CD_1\perp EF$.

11. B　[如图所示，取 BC 的中点 G，连接 FG，EG.

$\because E$，F 分别是 CD，AB 的中点，

$\therefore FG/\!/AC$，$EG/\!/BD$，

且 $FG=\frac{1}{2}AC$，$EG=\frac{1}{2}BD$.



$\therefore \angle EFG$ 为 EF 与 AC 所成的角（或其补角）.

又 $\because AC=BD$，$\therefore FG=EG$.

又 $\because AC\perp BD$，$\therefore FG\perp EG$，$\therefore \angle FGE=90°$，

$\therefore \triangle EFG$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle EFG=45°$，即 EF 与 AC 所成的角为 $45°$.]

12. C　[设正方体棱长为 1，$DP=x$，则 $x\in[0,1]$，连接 AD_1，AP，由 $AD_1/\!/BC_1$ 可知，$\angle AD_1P$（或其补角）即为异面直线 D_1P 与 BC_1 所成角，

在 $\triangle AD_1P$ 中，$AD_1=\sqrt{2}$，$AP=D_1P=\sqrt{1+x^2}$，

故 $\cos\angle AD_1P=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1+x^2}}$，

又 $\because x\in[0,1]$，$\therefore \cos\angle AD_1P=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1+x^2}}\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，

又 $\angle AD_1P\in(0,\pi)$，$\therefore \angle AD_1P\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$，故选 C.]

13. AC　[把正方体的平面展开图还原为原来的正方体可知，$AB\perp EF$，EF 与 MN 是异面直线，$AB/\!/CM$，$MN\perp CD$，只有 AC 正确.]

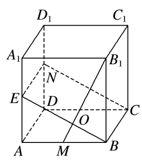
14. $90°$

解析　如图，取 AA_1 的中点 E，连接 EN，BE，设 BE 交 B_1M 于点 O，易知 $EN/\!/BC$，且 $EN=BC$，

$\therefore$ 四边形 $BCNE$ 是平行四边形，

$\therefore BE/\!/CN$，

$\therefore \angle BOM$ 或其补角即为异面直线 B_1M 与 CN 所成的角.



由 $BB_1=AB$，$AE=BM$，$\angle EAB=\angle MBB_1$，

得 $\mathrm{Rt}\triangle BB_1M\cong \mathrm{Rt}\triangle ABE$，

$\therefore \angle BMB_1=\angle AEB$，$\therefore \angle BOM=90°$.

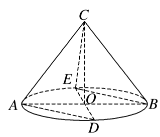
15. $60°$

解析　如图，延长 DO 交底面圆于点 E，连接 BE，CE，由 AB，DE 均为圆的直径知 $AD/\!/BE$，且 $AD=BE$，

所以 $\angle CBE$ 即为异面直线 AD 与 BC 所成的角或其补角.

在 $\triangle AOD$ 中，$AD=2OA\sin 60°$

$=2\sqrt{3}$，



在 $\triangle CBE$ 中，$CB=CE=BE=2\sqrt{3}$，所以 $\triangle CBE$ 为正三角形，

所以 $\angle CBE=60°$.

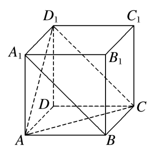
16. **解**　如图所示，连接 CD_1，AC.

在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1D_1/\!/BC$，$A_1D_1=BC=2\sqrt{3}$，

$\therefore$ 四边形 A_1BCD_1 是平行四边形，

$\therefore A_1B/\!/CD_1$，

$\therefore \angle AD_1C$（或其补角）为异面直线 A_1B 和 AD_1 所成的角，



$\because A_1B\perp AD_1$，即异面直线 A_1B 和 AD_1 所成的角为 $90°$，

$\therefore \angle AD_1C=90°$.

又易知 $AD_1=D_1C$，$\therefore \triangle ACD_1$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AD_1=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$.

$\because AB=BC=2\sqrt{3}$，$\angle ABC=120°$，

$\therefore AC=2\sqrt{3}\times\sin 60°\times 2=6$，

$\therefore AD_1=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=3\sqrt{2}$，

$\therefore AA_1=\sqrt{AD_1^2-A_1D_1^2}=\sqrt{6}$.

8.6.2　直线与平面垂直

1. C　[依题意知 $l\perp$ 平面 ABC，$m\perp$ 平面 ABC，

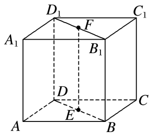
$\therefore l/\!/m$.]

2. B　[$\because AD_1\perp A_1D$，$AD_1\perp A_1B_1$，$A_1D\cap A_1B_1=A_1$，A_1D，$A_1B_1\subset$ 平面 A_1DB_1，

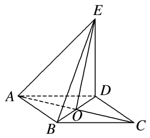
$\therefore AD_1\perp$ 平面 A_1DB_1.]

3. C　[①不正确，其他三项均正确.]

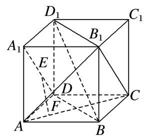
4. C　[$\because AB\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，$\therefore AB\perp l$，
又$\because BC\perp\beta$，$l\subset\beta$，$\therefore BC\perp l$，
又$AB\cap BC=B$，AB，$BC\subset$平面ABC，
$\therefore l\perp$平面ABC，
又$AC\subset$平面ABC，$\therefore l\perp AC$.]
5. A
6. B　[易证$AC\perp$平面PBC，又$BC\subset$平面PBC，
所以$AC\perp BC$.]
7. 平行
解析　如图，$\because AB\perp BB_1$，$AB\perp EF$，且AB不垂直于平面BB_1D_1D，
$\therefore EF$与BB_1不相交，$\therefore EF/\!/BB_1$，
又$AA_1/\!/BB_1$，$\therefore EF/\!/AA_1$.



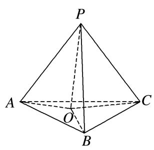
8. $30°$
解析　由题意知$\angle PCA$为PC与平面$ABCD$所成的角.
在Rt$\triangle PAC$中，$\tan\angle PCA=\dfrac{PA}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，
$\therefore\angle PCA=30°$.
9. (1)**证明**　$\because$四边形$ABCD$是正方形，$\therefore AC\perp BD$.
$\because DE\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，$\therefore AC\perp DE$，
$\because BD$，$DE\subset$平面BED，$BD\cap DE=D$，
$\therefore AC\perp$平面BDE.
(2)**解**　设$AC\cap BD=O$，连接EO，如图所示.
$\because AC\perp$平面BDE，$\therefore EO$是直线AE在平面BDE上的射影，
$\therefore\angle AEO$即为AE与平面BDE所成的角.
在Rt$\triangle EAD$中，$EA=\sqrt{AD^2+DE^2}=2\sqrt{2}$，
$AO=\sqrt{2}$，



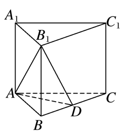
$\therefore$在Rt$\triangle EOA$中，$\sin\angle AEO=\dfrac{AO}{EA}=\dfrac{1}{2}$，
$\therefore\angle AEO=30°$，即AE与平面BDE所成的角为$30°$.
10. **证明**　如图所示，连接AB_1，B_1D_1，B_1C，BD，
$\because DD_1\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，$\therefore DD_1\perp AC$.
又$AC\perp BD$，$DD_1\cap BD=D$，DD_1，$BD\subset$平面BDD_1B_1，
$\therefore AC\perp$平面BDD_1B_1，
又$BD_1\subset$平面BDD_1B_1，
$\therefore AC\perp BD_1$.
同理可证$BD_1\perp B_1C$，
又$AC\cap B_1C=C$，AC，$B_1C\subset$平面AB_1C，
$\therefore BD_1\perp$平面AB_1C.
$\because EF\perp A_1D$，$A_1D/\!/B_1C$，$\therefore EF\perp B_1C$.
又$\because EF\perp AC$，$AC\cap B_1C=C$，AC，$B_1C\subset$平面AB_1C，
$\therefore EF\perp$平面AB_1C，$\therefore EF/\!/BD_1$.



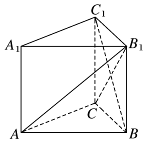
11. B　[根据折叠前、后$AH\perp HE$，$AH\perp HF$不变，可推出$AH\perp$平面EFH.]
12. A　[如图，设点P在平面ABC内的射影为点O，连接OP，则$PO\perp$平面ABC，
连接OA，OB，OC，
$\therefore PO\perp OA$，$PO\perp OB$，$PO\perp OC$，
又$PA=PB=PC$，
$\therefore$Rt$\triangle POA\cong$Rt$\triangle POB$
$\cong$Rt$\triangle POC$，
则$OA=OB=OC$，
$\therefore O$为$\triangle ABC$的外心.]



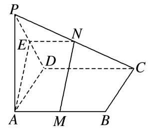
13. A　[取BC的中点D，连接AD，B_1D，
$\because AD\perp BC$且$AD\perp BB_1$，$BC\cap BB_1=B$，BC，$BB_1\subset$平面BCC_1B_1，
$\therefore AD\perp$平面BCC_1B_1，
$\therefore\angle AB_1D$即为AB_1与平面BB_1C_1C所成的角.



设$AB=\sqrt{2}$，则$AA_1=1$，$AD=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$AB_1=\sqrt{3}$，
$\therefore\sin\angle AB_1D=\dfrac{AD}{AB_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\angle AB_1D=45°$.
即AB_1与平面BB_1C_1C所成的角为$45°$.]
14. $\angle A_1C_1B_1=90°$
解析　如图所示，连接B_1C，由$BC=CC_1$，可得$BC_1\perp B_1C$，因此，要证$AB_1\perp BC_1$，则只要证明$BC_1\perp$平面AB_1C，即只要证$AC\perp BC_1$即可，由直三棱柱可知，只要证$AC\perp BC$即可. 因为$A_1C_1/\!/AC$，$B_1C_1/\!/BC$，故只要证$A_1C_1\perp B_1C_1$即可.(或者能推出$A_1C_1\perp B_1C_1$的条件，如$\angle A_1C_1B_1=90°$等)



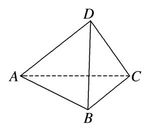
15. ABC　[对于选项A，由题意得$SD\perp AC$，$AC\perp BD$，$SD\cap BD=D$，SD，$BD\subset$平面SBD，$\therefore AC\perp$平面SBD，故$AC\perp SB$，故A正确；对于选项B，$\because AB/\!/CD$，$AB\not\subset$平面SCD，$CD\subset$平面SCD，$\therefore AB/\!/$平面SCD，故B正确；对于选项C，由对称性知SA与平面SBD所成的角与SC与平面SBD所成的角相等，故C正确.]
16. (1)**证明**　取PD的中点E，连接NE，AE，如图.



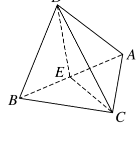
又$\because N$是PC的中点，
$\therefore NE/\!/DC$且$NE=\dfrac{1}{2}DC$，
又$\because DC/\!/AB$且$DC=AB$，
$AM=\dfrac{1}{2}AB$，
$\therefore AM/\!/CD$且$AM=\dfrac{1}{2}CD$，$\therefore NE/\!/AM$，且$NE=AM$，
$\therefore$四边形$AMNE$是平行四边形，$\therefore MN/\!/AE$.
$\because AE\subset$平面PAD，$MN\not\subset$平面PAD，
$\therefore MN/\!/$平面PAD.
(2)**解**　当$\alpha=45°$时，$MN\perp$平面PCD，证明如下.
$\because PA\perp$平面$ABCD$，
$\therefore\angle PDA$即为PD与平面$ABCD$所成的角，
$\therefore\angle PDA=45°$，$\therefore AP=AD$，$\therefore AE\perp PD$.
又$\because MN/\!/AE$，$\therefore MN\perp PD$.
$\because PA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp CD$.
又$\because CD\perp AD$，$PA\cap AD=A$，PA，$AD\subset$平面PAD，
$\therefore CD\perp$平面PAD.
$\because AE\subset$平面PAD，$\therefore CD\perp AE$，
$\therefore CD\perp MN$. 又$CD\cap PD=D$，CD，$PD\subset$平面PCD，
$\therefore MN\perp$平面PCD.

8.6.3　平面与平面垂直

1. D　[A项，平面α内的一条直线a垂直于平面β内的任意一条直线，则$\alpha\perp\beta$，故A错误；
B项，由面面垂直的性质定理知，只有垂直于交线的直线才垂直于另一个平面，故B错误；
C项，平面$\alpha\perp\beta$，且$\alpha\cap\beta=l$，则过α内一点P与l垂直的直线，只有当此直线在α内时才垂直于β，故C错误；
D项，a与平面α内的任意一条直线都垂直可以推出$a\perp\alpha$，故D正确.]
2. C　[$m/\!/\alpha$，$m/\!/n$，$\therefore n/\!/\alpha$或$n\subset\alpha$，
又$n\perp\beta$，$\therefore\alpha\perp\beta$.]
3. A　[画图(图略)易得到满足已知条件的两个二面角相等或互补，若它们的平面角均为锐角，则这两个二面角相等.]
4. B　[如图，因为$AD\perp BC$，$AD\perp CD$，$BC\cap CD=C$，
所以$AD\perp$平面BCD，
又$AD\subset$平面ADC，
所以平面$ADC\perp$平面BCD.
故选B.]



5. B　[因为$PA=PB$，$AD=DB$，所以$PD\perp AB$.
又因为平面$PAB\perp$平面ABC，平面$PAB\cap$平面$ABC=AB$，$PD\subset$平面PAB，
所以$PD\perp$平面ABC.]
6. ABC　[由题意可得$CD\perp$平面PAD，$AB\perp$平面PAD，$BC\perp$平面PAB，
$\therefore$平面$PCD\perp$平面PAD，平面$PAB\perp$平面PAD，平面$PBC\perp$平面PAB，故选ABC.]
7. ①③④
解析　因为D，F分别是AB，AC的中点，
所以$DF/\!/BC$，
又$DF\subset$平面PDF，$BC\not\subset$平面PDF，
所以$BC/\!/$平面PDF，故①正确；
因为E是BC的中点，所以$BC\perp AE$，$BC\perp PE$.
因为$AE\cap PE=E$，所以$BC\perp$平面PAE.
因为$BC\subset$平面ABC，所以平面$PAE\perp$平面ABC，故④正确；
因为$DF/\!/BC$，所以$DF\perp$平面PAE，故③正确；
只有②不正确. 故正确的命题为①③④.
8. 2
解析　如图，取AB的中点E，连接DE，CE，
因为$\triangle ADB$是等边三角形，
所以$DE\perp AB$.

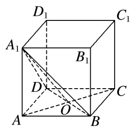


当平面 $ABD \perp$ 平面 ABC 时，
因为平面 $ABD \cap$ 平面 $ABC=AB$，$DE \subset$ 平面 ABD，
所以 $DE \perp$ 平面 ABC. 又 $CE \subset$ 平面 ABC，
可知 $DE \perp CE$. 由已知可得 $DE=\sqrt{3}$，$EC=1$，
在 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$ 中，$CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=2$.

9. **证明**　由长方体的性质可知 $A_1B_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1，
又 $BM \subset$ 平面 BCC_1B_1，
所以 $A_1B_1 \perp BM$.
又 $CC_1=2$，M 为 CC_1 的中点，
所以 $C_1M=CM=1$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1C_1M$ 中，$B_1M=\sqrt{B_1C_1^2+MC_1^2}=\sqrt{2}$，
同理 $BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=\sqrt{2}$，
又 $B_1B=2$，
所以 $B_1M^2+BM^2=B_1B^2$，从而 $BM \perp B_1M$.
又 $A_1B_1 \cap B_1M=B_1$，A_1B_1，$B_1M \subset$ 平面 A_1B_1M，
所以 $BM \perp$ 平面 A_1B_1M，
因为 $BM \subset$ 平面 ABM，
所以平面 $ABM \perp$ 平面 A_1B_1M.

10. **证明**　(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形且 $\angle DAB=60°$，
$\therefore \triangle ABD$ 是正三角形，$\therefore BG \perp AD$.
又平面 $PAD \cap$ 平面 $ABD=AD$，
平面 $PAD \perp$ 平面 ABD，$BG \subset$ 平面 ABD，
$\therefore BG \perp$ 平面 PAD.
(2)由(1)可知 $BG \perp AD$，又 $\triangle PAD$ 为正三角形，
$\therefore PG \perp AD$，$BG \cap PG=G$，BG，$PG \subset$ 平面 PBG，
$\therefore AD \perp$ 平面 PBG，
又 $PB \subset$ 平面 PBG，$\therefore AD \perp PB$.

11. C　[如图所示，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 A_1O，$\angle A_1OA$ 为二面角 A_1-BD-A 的平面角，



设 $A_1A=a$，则 $AO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，
所以 $\tan\angle A_1OA=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{2}$.]

12. A　[由已知条件可知 $\angle BAB'=\frac{\pi}{4}$，$\angle ABA'=\frac{\pi}{6}$，
设 $AB=2a$，则 $BB'=2a\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}a$，
$A'B=2a\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}a$，
$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BB'A'$ 中，得 $A'B'=a$，
$\therefore AB : A'B'=2 : 1$.]

13. D　[$\because AD$ 与 PB 在平面 $ABCDEF$ 的射影 AB 不垂直，所以 A 不成立；
又平面 $PAB \perp$ 平面 PAE，所以 B 不成立；
又 $BC /\!/ AD$，AD 与平面 PAE 相交，C 不成立；
$\because PA \perp$ 平面 ABC，
$\therefore \angle ADP$ 是直线 PD 与平面 ABC 所成的角.
$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，$\therefore AD=2AB$，
$\therefore \tan\angle ADP=\frac{PA}{AD}=\frac{2AB}{2AB}=1$，
$\therefore$ 直线 PD 与平面 ABC 所成的角为 $45°$.]

14. ①③④⇒②
解析　共有四个命题：①②③⇒④，①②④⇒③，①③④⇒②，②③④⇒①.
对于①②③⇒④，若 $m \perp n$，$\alpha \perp \beta$，$n \perp \beta$，则 m 与 α 可平行或相交，故命题错误；
对于①②④⇒③，若 $m \perp n$，$\alpha \perp \beta$，$m \perp \alpha$，则 n 与 β 可平行或相交，故命题错误；
对于①③④⇒②，因为 $m \perp n$，$n \perp \beta$，则 $m \subset \beta$ 或 $m /\!/ \beta$，又因为 $m \perp \alpha$，则 $\alpha \perp \beta$，故命题正确；
对于②③④⇒①，因为 $m \perp \alpha$，$\alpha \perp \beta$，则 $m \subset \beta$ 或 $m /\!/ \beta$，又因为 $n \perp \beta$，则 $m \perp n$，命题正确.

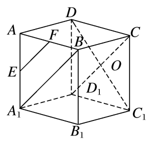
15. $DM \perp PC$(或 $BM \perp PC$ 等)
解析　由题意得 $BD \perp AC$，
$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA \perp BD$.
又 $PA \cap AC=A$，PA，$AC \subset$ 平面 PAC，
$\therefore BD \perp$ 平面 PAC，$\therefore BD \perp PC$.
$\therefore$ 当 $DM \perp PC$(或 $BM \perp PC$)时，即有 $PC \perp$ 平面 MBD，
而 $PC \subset$ 平面 PCD，$\therefore$ 平面 $MBD \perp$ 平面 PCD.

16. (1)**证明**　取 EF 的中点 N，连接 MN，DN，MD(图略).
根据题意可知，四边形 $ABFE$ 是边长为 2 的正方形，
又 M，N 分别为 AB，EF 的中点，
$\therefore MN \perp EF$，$MN=2$.
由题意得 $DN=\sqrt{DE^2+EN^2}=\sqrt{5}$，又 $MD=3$，
$\therefore MN^2+DN^2=2^2+(\sqrt{5})^2=9=MD^2$，
$\therefore MN \perp DN$，
又 $\because EF \cap DN=N$，
$\therefore MN \perp$ 平面 $CDEF$.
又 $MN \subset$ 平面 $ABFE$，
$\therefore$ 平面 $ABFE \perp$ 平面 $CDEF$.
(2)**解**　连接 CE(图略)，
则 $V_{六面体ABCDEF}=V_{四棱锥C-ABFE}+V_{三棱锥A-CDE}$.
由(1)知 $MN \perp$ 平面 $CDEF$，
又 $MN /\!/ BF /\!/ AE$，
$\therefore BF \perp$ 平面 $CDEF$，$AE \perp$ 平面 $CDEF$，
$\therefore BF \perp CF$，又 $CF \perp EF$，$BF \cap EF=F$，
$\therefore CF \perp$ 平面 $ABFE$，
$\therefore V_{四棱锥C-ABFE}=\frac{1}{3}\cdot S_{正方形ABFE}\cdot CF=\frac{4}{3}$，
$V_{三棱锥A-CDE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle CDE}\cdot AE=\frac{4}{3}$，
$\therefore V_{六面体ABCDEF}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

习题课　异面直线所成的角及直线与平面所成的角的解法

1. B

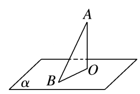
2. D　[如图，在正方体中，连接 A_1B，CD_1，且 $CD_1 \cap C_1D=O$. 因为 E，F 分别是棱 AA_1，AB 的中点，所以 $EF /\!/ A_1B$. 又 $A_1B /\!/ CD_1$，所以 $EF /\!/ CD_1$，所以 $\angle COD$ 即为异面直线 EF 与 C_1D 所成的角(或补角). 因为平面 CDD_1C_1 为正方形，



所以 $\angle COD=\frac{\pi}{2}$，所以异面直线 EF 与 C_1D 所成角的大小为 $\frac{\pi}{2}$.]

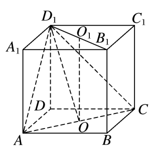
3. A　[因为几何体是棱柱，$BC /\!/ B_1C_1$，
则直线 A_1C 与 BC 所成的角就是异面直线 A_1C 与 B_1C_1 所成的角.
在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1 \perp AB$，$AA_1 \perp AC$，连接 BA_1(图略)，
$\because AB=AC=AA_1=1$，$\therefore BA_1=\sqrt{2}$，$CA_1=\sqrt{2}$.
$\therefore \triangle BCA_1$ 是等边三角形，
$\therefore$ 异面直线 A_1C 与 B_1C_1 所成的角为 $60°$.]

4. A　[斜线段、垂线段以及射影构成直角三角形. 如图所示，$\angle ABO$ 即是斜线段 AB 与平面 α 所成的角.



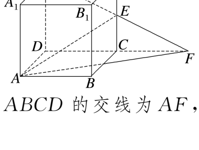
因为 $AB=2BO$，所以 $\cos\angle ABO=\frac{BO}{AB}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle ABO=60°$.]

5. D　[如图，不妨设正方体的棱长为 1，上、下底面的中心分别为 O_1，O，则 $OO_1 /\!/ BB_1$，O_1O 和平面 ACD_1 所成的角就是 BB_1 和平面 ACD_1 所成的角，即 $\angle O_1OD_1$，



则 $\cos\angle O_1OD_1=\frac{O_1O}{OD_1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.]

6. A　[延长 D_1E 与直线 CD 相交于 F，连接 AF，



则平面 AD_1E 与平面 $ABCD$ 的交线为 AF，

而 $C_1D_1/\!/CD$,

∴$\angle AFD$ 为平面 AD_1E 与平面 $ABCD$ 的交线与直线 C_1D_1 所成的角,

∵E 是棱 CC_1 的中点,且 $DD_1/\!/CC_1$,∴$CD=CF$,

∴$\tan\angle AFD=\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{1}{2}$.]

7. $60°$

解析　如图(1),取 BD 的中点 G,连接 GE,GF.

因为 $BE=EA$,$BG=GD$,所以 $GE/\!/AD$,$GE=\dfrac{1}{2}AD=1$.

因为 $DF=FC$,$DG=GB$,所以 $GF/\!/BC$,$GF=\dfrac{1}{2}BC=1$.

所以 $\angle EGF$(或其补角)是异面直线 AD 与 BC 所成的角.

在 $\triangle GEF$ 中,$GE=1$,$GF=1$,$EF=\sqrt{3}$(如图(2)),

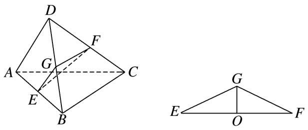
取 EF 的中点 O,连接 GO,

则 $GO\perp EF$,$EO=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\sin\angle EGO=\dfrac{EO}{EG}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\angle EGO=60°$,所以 $\angle EGF=2\angle EGO=120°$,

所以异面直线 AD 与 BC 所成的角为 $180°-120°=60°$.



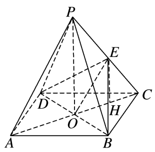
(1)　(2)

8. $60°$

解析　如图,在正四棱锥 $P-ABCD$ 中,连接 BD,交 AC 于 O,连接 PO,

则 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,则在正四棱锥中,$BO\perp$ 平面 PAC.

连接 OE,DE,则 $\angle BEO$ 是直线 BE 和平面 PAC 所成的角.



∵正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 2,底面积为 6,

∴$V=\dfrac{1}{3}\times 6\times PO=2$,则高 $PO=1$.

∵底面积为 6,∴$BC=\sqrt{6}$,$OC=OB=\sqrt{3}$,

则侧棱 $PB=PC=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$.

∵E 为侧棱 PC 的中点,

∴取 OC 的中点 H,连接 EH,则 $EH\perp OC$,

则 $EH=\dfrac{1}{2}PO=\dfrac{1}{2}$,$OH=\dfrac{1}{2}OC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

则 $OE=\sqrt{EH^2+OH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 中,$\tan\angle BEO=\dfrac{OB}{OE}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$,

则 $\angle BEO=60°$.

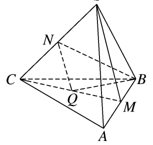
9. **解**　如图所示,连接 CM,

设 Q 为 CM 的中点,连接 QN,

则 $QN/\!/SM$.

∴$\angle QNB$ 是异面直线 SM 与 BN 所成的角或其补角.

连接 BQ,设 $SC=a$,在 $\triangle BQN$ 中,



$BN=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$,$NQ=\dfrac{1}{2}SM=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$,$BQ=\dfrac{\sqrt{14}}{4}a$,

∴$\cos\angle QNB=\dfrac{BN^2+NQ^2-BQ^2}{2BN\cdot NQ}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

即异面直线 SM 与 BN 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

10. **解**　如图,取 AA_1 的中点 M,连接 EM,BM.

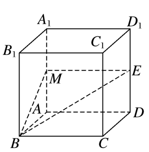
因为 E 是 DD_1 的中点,四边形 ADD_1A_1 为正方形,

所以 $EM/\!/AD$.

又在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$AD\perp$ 平面 ABB_1A_1,

所以 $EM\perp$ 平面 ABB_1A_1,



从而直线 BM 为直线 BE 在平面 ABB_1A_1 上的射影,

$\angle EBM$ 即为直线 BE 和平面 ABB_1A_1 所成的角.

设正方体的棱长为 $2a$,

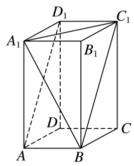
则 $EM=AD=2a$,$BE=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2+a^2}=3a$.

于是在 $\mathrm{Rt}\triangle BEM$ 中,$\sin\angle EBM=\dfrac{EM}{BE}=\dfrac{2}{3}$,

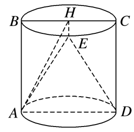
即直线 BE 和平面 ABB_1A_1 所成的角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

11. D　[如图,连接 A_1C_1,BC_1,则 $BC_1/\!/AD_1$,那么 $\angle A_1BC_1$ 即为异面直线 A_1B 与 AD_1 所成的角.

又 $|A_1B|=|C_1B|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,$|A_1C_1|=\sqrt{2}$,由余弦定理可得 $\cos\angle A_1BC_1=\dfrac{5+5-2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$.]



12. D　[如图,取 BC 的中点 H,连接 EH,AH,$\angle EHA=90°$.不妨设 $AB=2$,则 $BH=HE=1$,$AH=\sqrt{5}$,所以 $AE=\sqrt{6}$.连接 ED,$ED=\sqrt{6}$.因为 $BC/\!/AD$,所以异面直线 AE 与 BC 所成的角即为 $\angle EAD$(或其补角).在 $\triangle EAD$ 中,$\cos\angle EAD=\dfrac{6+4-6}{2\times 2\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.]

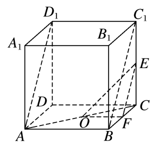


13. D　[如图所示,取 BC 的中点 F,连接 EF,OF,BC_1.

因为 E 为 CC_1 的中点,

$EF/\!/BC_1/\!/AD_1$,

故 $\angle OEF$ 即为异面直线 OE 与 AD_1 所成的角(或其补角),



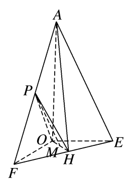
不妨设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,

则在 $\triangle OEF$ 中,$EF=\sqrt{2}$,$OE=\sqrt{3}$,$OF=1$,

故 $\angle OFE=90°$,故 $\cos\angle OEF=\dfrac{EF}{OE}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.]

14. C　[翻折前,$AB\perp BE$,$AD\perp DF$,故翻折后,$AO\perp OE$,$AO\perp OF$,又 $OE\cap OF=O$,∴$AO\perp$ 平面 EOF,故 A 正确;

连接 OH,AH,如图,则 $\angle OHA$ 为 AH 与平面 EOF 所成的角.∵$OE=OF=1$,∴$EF=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,∴$OE\perp OF$,又 H 是 EF 的中点,∴$OH=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



又 $OA=2$,∴$\tan\angle OHA=\dfrac{OA}{OH}=2\sqrt{2}$,故 B 正确;

设四面体 $OAEF$ 的表面积为 S,体积为 V,内切球半径为 r,则 $V=\dfrac{1}{3}S\cdot r$.又 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle OEF}\cdot OA=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times 2=\dfrac{1}{3}$,$S=2\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 2+\dfrac{1}{2}\times 1\times 1+\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=4$,∴$\dfrac{4}{3}r=\dfrac{1}{3}$,解得 $r=\dfrac{1}{4}$,∴内切球的表面积为 $4\pi r^2=\dfrac{\pi}{4}$,故 C 错误;

取 AF 的中点,连接 OP,HP.∵点 P 是 AF 的中点,点 H 是 EF 的中点,∴$PH/\!/AE$,∴$\angle OHP$ 为异面直线 OH 与 AE 所成的角或其补角.∵$OE=OF=1$,$OA=2$,

∴$OP=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,$PH=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,$OH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

再取 OH 的中点 M,连接 PM,

则 $PM\perp OH$,∴$\cos\angle OHP=\dfrac{MH}{PH}=\dfrac{\frac{1}{2}OH}{PH}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,故 D 正确.]

15. BCD　[由于 $EF/\!/C_1D_1$,因此异面直线 D_1B_1 与 EF 所成的角就是 D_1B_1 与 C_1D_1 所成的角,为 $45°$,A 错误;

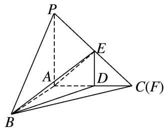
$\triangle D_1EF$ 的面积不变,B_1 到平面 D_1EF 即平面 D_1DCC_1 的距离不变,因此三棱锥 B_1-D_1EF 的体积不变,即三棱锥 D_1-B_1EF 的体积为定值,B 正确;

平面 B_1EF 即为平面 A_1B_1CD,$\angle D_1A_1D$ 为平面 A_1B_1CD 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角的平面角,$\angle D_1A_1D=45°$,C 正确;

连接 AD_1 交 A_1D 于 M,连接 B_1M(图略),由正方体性质知

$A_1B_1 \perp AD_1$，$A_1D \perp AD_1$，而 $A_1B_1 \cap A_1D = A_1$，因此 $AD_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD，因此 $\angle D_1B_1M$ 是直线 B_1D_1 与平面 A_1B_1CD 即平面 B_1EF 所成的角，在 $\mathrm{Rt}\triangle MB_1D_1$ 中，$D_1M = \frac{1}{2}D_1B_1$，所以 $\angle D_1B_1M = 30°$，D 正确.]

16. **解** (1)如图，延长 PE 交 AC 于点 F，



$\because AP, AB, AC$ 两两互相垂直，
$\therefore PA \perp$ 平面 ABC.
$\because DE \perp$ 平面 ABC，$\therefore DE /\!/ PA$，
$\therefore \frac{DF}{AF} = \frac{DE}{PA} = \frac{1}{2}$，$\therefore F$ 与 C 重合.
$\because C \in PE$，$C \in AC$，$PE \subset$ 平面 PBE，$AC \subset$ 平面 ABC，
$\therefore C$ 是平面 PBE 与平面 ABC 的公共点.
又 B 是平面 PBE 与平面 ABC 的公共点，
$\therefore BC$ 是平面 PBE 与平面 ABC 的交线.
(2)如图，连接 AE.
$\because AP, AB, AC$ 两两互相垂直，
$\therefore AB \perp$ 平面 PAC，
$\therefore \angle BEA$ 为 BE 和平面 $PADE$ 所成的角.
$\because V_{B-PADE} = \frac{1}{3}S_{梯形ADEP} \cdot AB$
$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 \times AB = \frac{\sqrt{3}}{3}$，
$\therefore AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
又 $\because AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{2}$，
$\therefore \tan\angle BEA = \frac{AB}{AE} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

习题课　二面角的平面角的常见解法

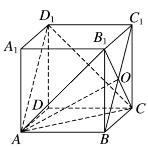
1. C [由条件得，$PA \perp BC$，$AC \perp BC$，又 $PA \cap AC = A$，$\therefore BC \perp$ 平面 PAC，$\therefore \angle PCA$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAC$ 中，由 $PA = AC$ 得 $\angle PCA = 45°$.]

2. C [因为 AD 是等腰直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高，所以 $BD = DC = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$，$\angle ADC = \angle ADB = 90°$，因此 $\angle B'DC$ 是二面角的平面角，$\angle B'AC = 60°$. 所以 $\triangle B'AC$ 是等边三角形，因此 $B'C = AB = AC$，所以在 $\triangle B'DC$ 中，$\angle B'DC = 90°$.]

3. A [因为 $AB = AD = 2\sqrt{3}$，$CC_1 = \sqrt{2}$，所以取 BD 的中点 O，连接 C_1O，CO(图略)，则 $\angle C_1OC$ 即为二面角 C_1-BD-C 的一个平面角，由 $CO = \sqrt{6}$，$\tan\angle C_1OC = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 知，$\angle C_1OC = 30°$.]

4. B [在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB \perp$ 平面 B_1BCC_1，E, F 分别为棱 AD, BC 的中点，所以 $EF /\!/ AB$，所以 $EF \perp$ 平面 B_1BCC_1，
所以 $EF \perp FC_1$，$EF \perp FC$，
所以 $\angle CFC_1$ 就是平面 C_1D_1EF 与底面 $ABCD$ 所成的二面角的平面角，
$\cos\angle CFC_1 = \frac{CF}{FC_1} = \frac{FC}{\sqrt{FC^2 + (2FC)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.]

5. ACD [如图所示，连接 AD_1，AO，CD_1，



对于 A，平移直线 BC_1 到直线 AD_1，则 $\angle D_1AC$ 为异面直线 AC 与 BC_1 所成的角，显然 $\triangle AD_1C$ 为正三角形，
$\therefore \angle D_1AC = 60°$，故 A 正确；
对于 B，$\because B_1O \perp BC_1$，$B_1O \perp AB$，$AB \cap BC_1 = B$，$\therefore B_1O \perp$ 平面 ABC_1D_1，$\therefore \angle B_1AO$ 为直线 AB_1 与平面 ABC_1D_1 所成的角，$\because AO = \frac{\sqrt{6}}{2}$，$B_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$，
$\therefore \tan\angle B_1AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$，故 B 错误；
对于 C，在 $\triangle AB_1C$ 中，$AO \perp B_1C$，$\therefore \angle AOB$ 为二面角的平面角，
$\tan\angle AOB = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$，故 C 正确；
对于 D，利用补形法即三棱锥的外接球为正方体的外接球，
$\therefore R = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$，故 D 正确.]

6. D [设棱长为 a，BC 的中点为 E，连接 A_1E，AE(图略)，由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都相等，可得 $A_1E \perp BC$，$AE \perp BC$，所以二面角 A_1-BC-A 的平面角为 $\angle A_1EA$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $\tan\angle A_1EA = \frac{AA_1}{AE} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，即二面角 A_1-BC-A 的平面角的正切值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.]

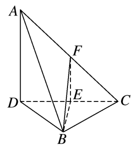
7. ①45°　②90°

解析 ①在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AB \perp$ 平面 AD'，所以 $AB \perp AD'$，$AB \perp AD$，因此 $\angle D'AD$ 为二面角 $D'-AB-D$ 的平面角. 在 $\mathrm{Rt}\triangle D'DA$ 中，$\angle D'AD = 45°$，所以二面角 $D'-AB-D$ 的大小为 45°.
②因为 $AB \perp$ 平面 AD'，所以 $AB \perp AD$，$AB \perp AA'$，因此 $\angle A'AD$ 为二面角 $A'-AB-D$ 的平面角，又 $\angle A'AD = 90°$，所以二面角 $A'-AB-D$ 的大小为 90°.

8. $\frac{3}{4}$

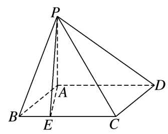
解析 由长方体特点可知，$BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$. 又 $BC \subset$ 平面 $ABCD$，$BD \subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BC \perp BB_1$，$BD \perp BB_1$，$\therefore \angle CBD$ 即为二面角 $C-BB_1-D$ 的平面角. 又 $CD = AB = 3$，$BC = AD = 4$，$BC \perp CD$，$\therefore \tan\angle CBD = \frac{CD}{BC} = \frac{3}{4}$.

9. **解** 由已知可得 $AD \perp DC$，



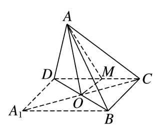
又由其余各棱长都为 1，得 $\triangle BCD$ 为正三角形，取 CD 的中点 E，连接 BE，则 $BE \perp CD$，
在平面 ADC 中，过 E 作 AD 的平行线交 AC 于点 F，则 $\angle BEF$ 为二面角 $A-CD-B$ 的平面角.
$\because EF = \frac{1}{2}$，$BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$BF = \frac{\sqrt{2}}{2}$，
$\therefore \cos\angle BEF = \frac{EF^2 + BE^2 - BF^2}{2BE \cdot EF} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. **解** 设 $PA = AB = 2$，过点 A 在平面 $ABCD$ 内作 $AE \perp BC$，连接 PE，如图所示，



$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$，$BC \subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BC \perp PA$，
$\because AE \perp BC$，$PA \cap AE = A$，$\therefore BC \perp$ 平面 PAE，
$\because PE \subset$ 平面 PAE，$\therefore PE \perp BC$，
$\therefore$ 二面角 $P-BC-A$ 的平面角为 $\angle PEA$，
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$\angle AEB = 90°$，$\angle ABE = 30°$，$AB = 2$，
则 $AE = \frac{1}{2}AB = 1$，
$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$，$AE \subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA \perp AE$，
由勾股定理得 $PE = \sqrt{PA^2 + AE^2} = \sqrt{5}$，
$\therefore \cos\angle PEA = \frac{AE}{PE} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
$\therefore$ 二面角 $P-BC-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

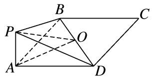
11. B [$\because$ 以正方形 A_1BCD 的对角线 BD 为棱折成直二面角，
$\therefore$ 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD，连接 BD，A_1C 相交于点 O，连接 AO，则 $AO \perp BD$，



$\because$ 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$，$AO \subset$ 平面 ABD，
$\therefore AO \perp$ 平面 BCD，
取 CD 的中点 M，连接 OM，AM，则 $OM /\!/ BC$，
$\therefore OM \perp CD$，$\therefore \angle AMO$ 即为所求.
不妨设正方形 A_1BCD 的边长为 2，
则 $AO = \sqrt{2}$，$OM = 1$，
$\therefore AM = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$.
$\therefore \cos\angle AMO = \frac{OM}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.]

12.C [由已知得 $BD=2CD$. 翻折后,易知 $BC\perp CD$. 在 $Rt\triangle BCD$ 中,$\angle BDC=60^\circ$. 而 $AD\perp BD$,$CD\perp AD$,故$\angle BDC$ 是二面角 $B-AD-C$ 的平面角,其大小为 60°.]

13.B [如图,过点 A 作 $AO\perp BD$,交 BD 于点 O,连接 PO,∵矩形 $ABCD$ 的两边 $AB=3$,$AD=4$,$PA\perp$平面 $ABCD$,且 $PA=\frac{4}{5}$,



∴$BD=\sqrt{3^2+4^2}=5$,$PO\perp BD$,

∴$\angle POA$ 是二面角 $A-BD-P$ 的平面角.

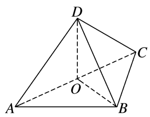
∵$\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AO=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD$,∴$AO=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{12}{5}$,

∴$\tan\angle POA=\frac{PA}{AO}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{12}{5}}=\frac{1}{3}$.

∴二面角 $A-BD-P$ 的正切值为$\frac{1}{3}$.]

14. $\frac{\pi}{2}$

解析 设翻折前 AC 与 BD 相交于点 O,则 $OB\perp AC$,$OD\perp AC$,而翻折之后的图形如图所示,



∴$\angle BOD$ 为二面角 $B-AC-D$ 的平面角,

∵$OB=OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$BD=1$,

∴$\triangle BOD$ 为等腰直角三角形,且$\angle BOD=\frac{\pi}{2}$,

∴二面角 $B-AC-D$ 的大小为$\frac{\pi}{2}$.

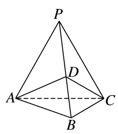
15. $\frac{7}{15}$

解析 过点 A 作 $AD\perp PB$ 于点 D,连接 CD.

∵$\triangle PAB\cong\triangle PCB$,∴$CD\perp PB$,

即$\angle ADC$ 是二面角 $A-PB-C$ 的平面角,

在$\triangle PAB$ 中,



$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}PB\cdot AD$

$=\frac{1}{2}AB\cdot\sqrt{PA^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{15}}{2}$,

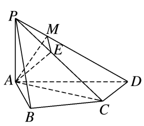
即 $CD=AD=\frac{\sqrt{15}}{2}$,

∴$\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2\times AD\times CD}=\frac{7}{15}$.

16.(1)**解** 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PA\perp$平面 $ABCD$,$AB\subset$平面 $ABCD$,故 $PA\perp AB$,
又 $AB\perp AD$,$PA\cap AD=A$,从而 $AB\perp$平面 PAD,
故 PB 在平面 PAD 内的射影为 PA,
从而$\angle APB$ 为 PB 和平面 PAD 所成的角,
在 $Rt\triangle PAB$ 中,$AB=PA$,故$\angle APB=45^\circ$,
所以 PB 和平面 PAD 所成的角的大小为 45°.

(2)**证明** 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PA\perp$底面 $ABCD$,$CD\subset$平面 $ABCD$,故 $CD\perp PA$,$CD\perp CA$,
所以 $CD\perp$平面 PAC,所以 $CD\perp AE$,因为 $AB=BC$,$\angle ABC=60^\circ$,所以 $AC=AB$,所以 $PA=AC$,又 E 为 PC 的中点,所以 $AE\perp PC$,$CD\cap PC=C$,CD,$PC\subset$平面 PCD,所以 $AE\perp$平面 PCD.

(3)**解** 过 E 作 $EM\perp PD$,连接 AM,
则 $AM\perp PD$,所以$\angle AME$ 即二面角 $A-PD-C$ 的平面角,



设 $PA=a$,$AE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

在四边形 $ABCD$ 中,$\angle CAD=30^\circ$,

所以 $AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$,

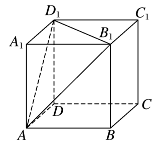
在 $Rt\triangle PAD$ 中,$AM=\frac{PA\cdot AD}{PD}=\frac{2}{\sqrt{7}}a$,

$\sin\angle AME=\frac{AE}{AM}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.

习题课 空间中距离问题的解法

1.C

2.A [设点 A_1 到平面 AB_1D_1 的距离是 h,则由等体积法得 $V_{A_1-AD_1B_1}=V_{A-A_1D_1B_1}$,如图,



因为 $V_{A_1-AD_1B_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle AB_1D_1}\times h$,

又 $S_{\triangle AB_1D_1}=\frac{1}{2}\times AB_1^2\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$V_{\text{三棱锥}A-A_1D_1B_1}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1B_1D_1}\times AA_1$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1^2\times1=\frac{1}{6}$.

所以$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times h=\frac{1}{6}$,解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.]

3.B [由正方体的性质可知,A_1B_1∥平面 ABC_1D_1,
因为 E 是 A_1B_1 的中点,
所以点 E 到平面 ABC_1D_1 的距离等于点 A_1 到平面 ABC_1D_1 的距离,设为 h,显然有 $V_{\text{三棱锥}A_1-ABD_1}=V_{\text{三棱锥}D_1-AA_1B}$,
在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,显然 $A_1D_1\perp$平面 ABB_1A_1,$AD_1\perp AB$,
正方体的棱长为 1,所以 $AD_1=\sqrt{AA_1^2+A_1D_1^2}=\sqrt{2}$,
由 $V_{\text{三棱锥}A_1-ABD_1}=V_{\text{三棱锥}D_1-AA_1B}$ 可得,

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1\Rightarrow h=\frac{\sqrt{2}}{2}$.]

4.A [由题意知,$S_{\triangle BMB_1}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$,

因为 $V_{\text{三棱锥}N-BMB_1}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BMB_1}\times BC=\frac{1}{3}\times2\times2=\frac{4}{3}$,

又因为 $MB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}=BN$,$MN=2\sqrt{2}$,

$\cos\angle MBN=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{1}{5}$,

$\sin\angle MBN=\frac{2\sqrt{6}}{5}$,

$S_{\triangle MBN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\sqrt{6}$,

又因为 $V_{\text{三棱锥}N-BMB_1}=V_{\text{三棱锥}B_1-MBN}=\frac{1}{3}\times\sqrt{6}\times h=\frac{4}{3}\Rightarrow h=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,

所以点 B_1 到平面 MNB 的距离 $h=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.]

5.B [根据正方体的特征,易知 O 是线段 A_1C_1 的中点,
所以点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离是点 A_1 到平面 ABC_1D_1 即平面 ABC_1 的距离的一半.
又因为 $V_{C_1-A_1AB}=V_{A_1-ABC_1}$,

即$\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1AB}\times C_1B_1=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC_1}\times h_{A_1-ABC_1}$

$\Rightarrow\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times A_1A\times AB\times B_1C_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AB\times BC_1\times h_{A_1-ABC_1}\Rightarrow\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{1^2+1^2}\times h_{A_1-ABC_1}$,

所以 $h_{A_1-ABC_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

又点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离是点 A_1 到平面 ABC_1D_1 的一半,

即$\frac{1}{2}h_{A_1-ABC_1}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.]

6.C [由题意可得,原问题等价于求解点 C_1 到平面 AB_1D_1 的距离 h,由等体积法可得,$V_{C_1-AB_1D_1}=V_{A-B_1C_1D_1}$,

即 $h\cdot\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2^2\times\sin 60^\circ=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$,

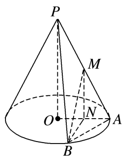
解得 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$,即平面 AB_1D_1 到平面 BC_1D 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.]

7. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解析　易证平面 $BB_1A_1\perp$ 平面 A_1BM，故点 N 到平面 A_1BM 的距离即点 N 到直线 A_1B 的距离，易得点 N 到平面 A_1BM 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

8. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

解析　如图所示，N 为 OA 的中点，连接 MN，OB，BN，圆锥的高为 2，侧面积为 $4\sqrt{2}\pi$，



即 $\pi r\sqrt{4+r^2}=4\sqrt{2}\pi$，$r=2$，

$\because M$ 为 PA 的中点，N 为 OA 的中点，$\therefore MN/\!/OP$，

故 $MN\perp OA$.

又 $MB\perp OA$，所以 $OA\perp$ 平面 MNB，故 $OA\perp BN$.

故 $\triangle OAB$ 为等边三角形.

$\therefore V_{P-OAB}=\dfrac{1}{3}\times 2\times\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

在 $\triangle ABP$ 中，$AP=BP=2\sqrt{2}$，$AB=2$，AB 边上的高 $h=\sqrt{7}$，

$\therefore S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$，

$\because V_{O-ABP}=\dfrac{1}{3}h\times S_{\triangle ABP}=V_{P-OAB}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore h=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

9. (1) **证明**　连接 EF(图略)，由题意知，$PB=BC=6$，$PE=CE=9$，

在 $\triangle PBF$ 中，$PF^2+BF^2=20+16=36=PB^2$，

所以 $PF\perp BF$.

易得 $EF=\sqrt{6^2+(12-3-4)^2}=\sqrt{61}$，

在 $\triangle PEF$ 中，$EF^2+PF^2=61+20=81=PE^2$，

所以 $PF\perp EF$.

又 $BF\cap EF=F$，$BF\subset$ 平面 $ABED$，$EF\subset$ 平面 $ABED$，所以 $PF\perp$ 平面 $ABED$.

(2) **解**　由(1)知，$PF\perp$ 平面 $ABED$，连接 AE(图略)，则 PF 为三棱锥 $P-ABE$ 的高.

设点 A 到平面 PBE 的距离为 h，由等体积法得 $V_{A-PBE}=V_{P-ABE}$，

即 $\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle PBE}\times h=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ABE}\times PF$.

又 $S_{\triangle PBE}=\dfrac{1}{2}\times 6\times 9=27$，$S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}\times 12\times 6=36$，

所以 $h=\dfrac{S_{\triangle ABE}\cdot PF}{S_{\triangle PBE}}=\dfrac{36\times 2\sqrt{5}}{27}=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$，

即点 A 到平面 PBE 的距离为 $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$.

10. (1) **证明**　由题意可设 $AA_1=3a$，$AB=2a$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACF$ 中，$AC=2a$，$CF=\dfrac{2}{3}CC_1=2a$，

$\therefore\angle AFC=45°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle EFC_1$ 中，$EC_1=\dfrac{1}{2}A_1C_1=a$，$C_1F=\dfrac{1}{3}CC_1=a$，

$\therefore\angle EFC_1=45°$，

$\therefore\angle AFE=180°-\angle AFC-\angle EFC_1=90°$，

$\therefore AF\perp EF$，　①

在等边三角形 $B_1A_1C_1$ 中，E 为 A_1C_1 的中点，

$\therefore B_1E\perp A_1C_1$.

又平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 $B_1A_1C_1$，且平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $B_1A_1C_1=A_1C_1$，

$B_1E\subset$ 平面 $B_1A_1C_1\Rightarrow B_1E\perp$ 平面 ACC_1A_1，又 $AF\subset$ 平面 $ACC_1A_1\Rightarrow AF\perp B_1E$，　②

又 $EF\cap B_1E=E$，　③

由①②③可得，$AF\perp$ 平面 B_1EF.

(2) **解**　由(1)知，$B_1E\perp$ 平面 ACC_1A_1，$B_1B/\!/$平面 AEF，

$\therefore$ 点 B 到平面 AEF 的距离为 $B_1E=\sqrt{3}$，

$\therefore BA=2$，$AA_1=3$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEB_1$ 中，$B_1E=\sqrt{3}$，$AE=\sqrt{10}$，

$\therefore S_{\triangle AEB_1}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{10}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFE$ 中，$AF=2\sqrt{2}$，$EF=\sqrt{2}$，

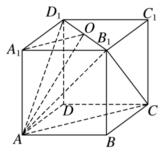
$\therefore S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=2$.

设点 F 到平面 AEB_1 的距离为 d，

由 $V_{F-AEB_1}=V_{B_1-AEF}$ 可得

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{30}}{2}\times d=\dfrac{1}{3}\times 2\times\sqrt{3}\Rightarrow d=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

11. BC　[易知 $\triangle AB_1C$ 为等边三角形，故 AC 不垂直于 AB_1，故 AC 不垂直于平面 AB_1D_1，A 错误；



设点 A_1 到平面 AB_1D_1 的距离为 h，

$V_{A-A_1B_1D_1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times 1=\dfrac{1}{6}$，

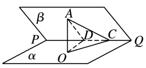
$V_{A_1-AB_1D_1}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle AB_1D_1}h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}h=\dfrac{1}{6}$，解得 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，B 正确；

设 AA_1 与平面 AB_1D_1 的夹角为 θ，根据 B 可知 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，C 正确；

O 为 B_1D_1 的中点，易知 $A_1O\perp B_1D_1$，$AO\perp B_1D_1$，故 $\angle A_1OA$ 为二面角 $A-B_1D_1-A_1$ 的平面角，$\tan\angle A_1OA=\sqrt{2}$，D 错误.]

12. C　[过 A 作 $AO\perp\alpha$ 于 O，点 A 到平面 α 的距离为 AO；作 $AD\perp PQ$ 于 D，连接 OD，则 $OD\perp CD$，$\angle ADO$ 就是二面角 $\alpha-PQ-\beta$ 的大小，为 $60°$. $AC=2$，$\angle ACP=30°$，所以 $AD=AC\sin 30°=2\times\dfrac{1}{2}=1$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$\dfrac{AO}{AD}=\sin 60°$，$AO=AD\sin 60°=1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.]



13. B　[空间四个点 P，A，B，C 在同一球面上，PA，PB，PC 两两垂直，且 $PA=PB=PC=1$，

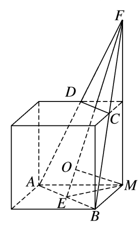
则 PA，PB，PC 可看作是正方体的一个顶点发出的三条棱，所以过空间四个点 P，A，B，C 的球面即为正方体的外接球，球的直径即是正方体的体对角线，长为 $\sqrt{3}$，

球心 O 到平面 ABC 的距离为体对角线的 $\dfrac{1}{6}$，即球心 O 到平面 ABC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

其外接球上的点到平面 ABC 的距离的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.]

14. $\dfrac{2}{3}$

解析　延长 BC，AD 与过 M 的正方体的竖直的棱的延长线交于 F. 取 AB 的中点 E，连接 ME，EF. 过 M 作 $EF\perp MO$，与 EF 交于 O 点.



由题知，$ME\perp AB$. 又因为 $AF=BF$，$AE=BE$，

所以 $AB\perp EF$.

所以 $AB\perp$ 平面 EMF，

所以 $AB\perp MO$.

因为 $MO\perp EF$，$AB\cap EF=E$，

所以 $MO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 MO 是 M 到平面 $ABCD$ 的距离.

由 $AM=1$，得 $ME=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

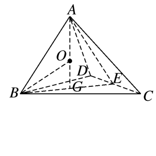
所以 $FM=2$，所以 $EF=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以 $MO=\dfrac{ME\cdot MF}{EF}=\dfrac{2}{3}$.

15. 64π　$\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$

解析　如图，设底面 $\triangle BCD$ 的外心为 G，连接 AG，

则该三棱锥的外接球的球心 O 在 AG(或其延长线)上，



连接 OB,连接 BG 并延长,交 CD 于点 E,连接 AE,
由等边三角形 BCD 的边长 $CD=6$,
得 $BE=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$,
则 $BG=\frac{2}{3}BE=2\sqrt{3}$,
所以 $AG=\sqrt{16-12}=2$.
设三棱锥的外接球的半径为 R,
则 $(2-R)^2+(2\sqrt{3})^2=R^2$,
解得 $R=4$.
所以三棱锥的外接球的表面积为 $S=4\pi\times4^2=64\pi$.
又 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AG=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6^2\times\sin60^\circ\times2=6\sqrt{3}$,
$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{4^2-3^2}=3\sqrt{7}$.
设点 B 到平面 ACD 的距离为 h,
则 $V_{A-BCD}=V_{B-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot h=\frac{1}{3}\times3\sqrt{7}\cdot h=6\sqrt{3}$,
则 $h=\frac{6\sqrt{21}}{7}$.

16.(1)**证明** 由 $PC\perp$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,
得 $AC\perp PC$.
又 $AD=CD=1$,
在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,得 $AC=\sqrt{2}$,
设 AB 的中点为 G,连接 CG(图略),
则四边形 $ADCG$ 为边长为 1 的正方形,
所以 $CG\perp AB$,且 $BC=\sqrt{2}$,
因为 $AC^2+BC^2=AB^2$,
所以 $AC\perp BC$.
又因为 $BC\cap PC=C$,
所以 $AC\perp$平面 PBC.
又 $AC\subset$平面 EAC,
所以平面 $EAC\perp$平面 PBC.
(2)因为 $PC\perp$平面 $ABCD$,
所以 PC 就是四棱锥 $P-ABCD$ 的高,
设 $PC=a$,因为 $AB\perp AD$,$AB/\!/CD$,
所以四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是直角梯形.
因为 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{\text{四边形}ABCD}\cdot PC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(CD+AB)\cdot AD\cdot PC=\frac{a}{2}=1$,
所以 $a=2$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle PCB$ 中,$PB=\sqrt{PC^2+BC^2}=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$,
$CE=\frac{1}{2}PB=\frac{\sqrt{6}}{2}$.
因为 $PC\perp$平面 $ABCD$,又 $PC\subset$平面 PCB,
所以平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$.
在平面 PBC 内过点 E 作 BC 的垂线 EF,交 BC 于点 F,
则 $EF\perp$平面 $ABCD$,且 $EF=\frac{1}{2}PC=1$.
在三棱锥 $E-ABC$ 中,设点 B 到平面 EAC 的距离为 h(图略),
则 $V_{E-ABC}=V_{B-EAC}$,
即 $S_{\triangle EAC}\cdot h=S_{\triangle ABC}\cdot EF$,
所以 $\frac{1}{2}AC\cdot CE\cdot h=\frac{1}{2}AC\cdot CB\cdot EF$,
得 $h=\frac{CB\cdot EF}{CE}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,
所以点 B 到平面 EAC 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

第九章 统 计

§9.1 随机抽样

9.1.1 简单随机抽样

1.BC [人口普查和高考考生的体检都属于全面调查,调查某商品的质量优劣和对某个事情进行舆论调查只能用抽样调查.]
2.D [在这个问题中,总体是 240 名学生的身高,个体是每个学生的身高,样本是 40 名学生的身高,样本量是 40.]
3.B [由于总体相对较大,样本量较小,故采用随机数法较为合适.]
4.C [由题意可知,$\frac{n}{400+320+280}=0.2$,解得 $n=200$.]
5.C [$\frac{36}{40}\times100\%=90\%$.]
6.B [符合条件的是 29,64,56,07,52,42,44,故选出的第 7 个个体的编号是 44.]
7.9 500
解析 $20\ 000\times\frac{65+30}{200}=9\ 500$(户).
8.55.6 55.6
解析 A 样本数据为 43,50,45,55,60,
所以 B 样本数据为 48,55,50,60,65,
所以 B 样本数据的均值为 $\frac{1}{5}(48+55+50+60+65)=55.6$,
据此,可以估计乙工厂生产的该产品的总体均值为 55.6.
9.**解** 第一步,将 32 名男生从 0 到 31 进行编号.
第二步,用相同的纸条制成 32 个号签,在每个号签上写上这些编号.
第三步,将写好的号签放在一个不透明的容器内摇匀,不放回地从中逐个抽出 10 个号签.
第四步,相应编号的男生参加合唱.
第五步,用相同的办法从 28 名女生中选出 8 名,则此 8 名女生参加合唱.
10.**解** 这 20 名男生的平均体重为
$\frac{65+56+70+\cdots+68+58+66}{20}=67.85(\mathrm{kg})$.
20 名男生中体重在 60~75 kg 之间的人数为 12,
故这 20 名男生体重在 60~75 kg 之间的人数所占比例为 $\frac{12}{20}=0.6$.
所以估计该校高一男生的平均体重约为 67.85 kg,体重在 60~75 kg 之间的人数所占比例约为 0.6.
11.AC [选项 B 要普查;选项 D 容量小可以普查;选项 A,C 总体容量大,用抽样调查.]
12.A [简单随机抽样中每个个体被抽取的机会相等,都为 $\frac{1}{10}$.]
13.D [用随机数法选取样本时,样本的编号位数要一致.]
14.乙
解析 因为乙检验员抽取的样本量更大,所以检测结果更准确.
15.C [设参加游戏的小孩有 x 人,则 $\frac{k}{x}=\frac{n}{m}$,$x=\frac{km}{n}$.]
16.**解** 抽签法:
(1)将 30 名内地艺人从 01 到 30 编号,然后用相同的纸条做成 30 个号签,在每个号签上写上这些编号,揉成团,然后放入一个不透明小筒中摇匀,从中逐个不放回地抽出 10 个号签,则相应编号的艺人参加演出.
(2)运用相同的办法分别从 10 名台湾艺人中抽取 4 人,从 18 名香港艺人中抽取 6 人.
随机数法:
(1)将 30 名内地艺人从 01 到 30 编号,准备 10 个大小、质地一样的小球.小球上分别写上数字 0,1,2,…,9.把它们放入一个不透明的袋中,从袋中有放回地摸取 2 次,每次摸取前充分搅匀,并把第一次、第二次摸到的数字分别作为十位、个位数字,这样就生成了一个随机数,如果这个随机数在 1~30 范围内,就代表了对应编号的艺人被抽中,否则舍弃编号,重复抽取随机数,直到抽中 10 名艺人为止.
(2)运用相同的办法分别从 18 名香港艺人中抽取 6 人,从 10 名台湾艺人中抽取 4 人.

9.1.2 分层随机抽样

1.C [由于小学、初中、高中三个学段的学生视力差异比较大,因此应按照学段进行分层随机抽样,而男女生视力情况差异不大,不能按照性别进行分层随机抽样.]
2.C [(1)中收入差距较大,采用分层随机抽样较合适;(2)中总体个数较少,采用简单随机抽样较合适.]
3.D [根据分层随机抽样的性质,每个个体被抽到的可能性是相等的.]
4.D [因为在简单随机抽样时每个个体被抽到的可能性相等,所以选取分层随机抽样方法抽取样本时,总体中每个个体被抽中的可能性仍为 $\frac{1}{3}$.]
5.ACD [由于总体按型号分为三个子总体,所以应采用分层随机抽样抽取,A 正确;
设三种型号的轿车依次抽取 x 辆、y 辆、z 辆,

则有$\begin{cases}\dfrac{x}{1\ 200}=\dfrac{y}{6\ 000}=\dfrac{z}{2\ 000},\\ x+y+z=46,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=6,\\ y=30,\\ z=10,\end{cases}$

所以三种型号的轿车依次抽取6辆、30辆、10辆,故C正确;由分层随机抽样的定义可知D也正确.]

6. B [因为分层随机抽样是按比例分配,所以根据公式得$\dfrac{160}{160+140}\times 12\ 500+\dfrac{140}{160+140}\times 8\ 600=10\ 680$.]

7. 3

解析 由题意,得抽样比为$\dfrac{30}{150}=\dfrac{1}{5}$,所以抽取的高级职称的人数为$15\times\dfrac{1}{5}=3$.

8. (1)90,70 (2)84.375

解析 (1)由题意,可得高一年级抽取的样本量为$\dfrac{160}{450+350}\times 450=90$,高二年级抽取的样本量为$\dfrac{160}{450+350}\times 350=70$.

(2)高一和高二数学竞赛的平均分约为$\overline{\omega}=\dfrac{90}{90+70}\times 80+\dfrac{70}{90+70}\times 90=84.375$(分).

9. **解** ①样本容量与总体中的个体数的比值为$\dfrac{21}{210}=\dfrac{1}{10}$;

②确定要抽取的各种商店的数目:大型商店为$20\times\dfrac{1}{10}=2$(家),中型商店为$40\times\dfrac{1}{10}=4$(家),小型商店为$150\times\dfrac{1}{10}=15$(家);

③采用简单随机抽样的方法在各层中分别抽取大型商店2家、中型商店4家、小型商店15家,这样便得到了所要抽取的样本.

10. **解** 该武警大队共有$30+30+40=100$(人),按比例分配得第一中队参加考核人数为$\dfrac{30}{100}\times 30=9$;

第二中队参加考核人数为$\dfrac{30}{100}\times 30=9$;

第三中队参加考核人数为$\dfrac{40}{100}\times 30=12$,

所以参加考核的30人的平均射击环数为

$\dfrac{9}{30}\times 8.8+\dfrac{9}{30}\times 8.5+\dfrac{12}{30}\times 8.1=8.43$,

所以估计该武警大队队员的平均射击水平为8.43环.

11. B [设所求的样本量为n,由题意得

$\dfrac{n}{26+13+39}=\dfrac{2}{26}$,解得$n=6$.]

12. A [设持"喜欢""不喜欢""一般"态度的人数分别为$6x,x,3x$,由题意可得$3x-x=12$,解得$x=6$,所以持"喜欢"态度的有$6x=36$(人).]

13. ABD [每层的个体数不一定都一样多,故A错误;由于每层的容量不一定相等,若每层抽同样多的个体,从总体来看,各层之间的个体被抽取的可能性就不一样了,故B错误;对于第i层的每个个体,它被抽到的可能性与层数i无关,即对于每个个体来说,被抽入样本的可能性是相同的,故C正确;每层抽取的个体数是有限制的,故D错误.]

14. 8

解析 若设高一学生数为x,则高二学生数为$x+300$,高三学生数为$2x$,所以有$x+x+300+2x=3\ 500$,解得$x=800$.故高一学生数为800,因此应抽取高一学生数为$800\times\dfrac{1}{100}=8$.

15. ACD [依题意由分层随机抽样可知,

$100\div(560+350+180)=\dfrac{10}{109}$,

则甲应付:$\dfrac{10}{109}\times 560=51\dfrac{41}{109}$(钱);

乙应付:$\dfrac{10}{109}\times 350=32\dfrac{12}{109}$(钱);

丙应付:$\dfrac{10}{109}\times 180=16\dfrac{56}{109}$(钱).]

16. **解** (1)设参加华东五市游的人数为x,参加长白山之旅的高一教师、高二教师、高三教师所占的比例分别为a,b,c,则有$\dfrac{x\cdot 50\%+3xa}{4x}=42.5\%$,$\dfrac{x\cdot 40\%+3xb}{4x}=47.5\%$,$\dfrac{x\cdot 10\%+3xc}{4x}=10\%$,解得$a=40\%$,$b=50\%$,$c=10\%$.即参加长白山之旅的高一教师、高二教师、高三教师所占的比例分别为40%,50%,10%.

(2)参加长白山之旅的高一教师应抽取人数为$200\times\dfrac{3}{4}\times 40\%=60$;

抽取的高二教师人数为$200\times\dfrac{3}{4}\times 50\%=75$;

抽取的高三教师人数为$200\times\dfrac{3}{4}\times 10\%=15$.

9.1.3 获取数据的途径

1. A [因为要研究的是某城市家庭的收入情况,所以通过调查获取数据.]

2. C [A不能用普查的方式调查,因为这种试验具有破坏性;B用普查的方式无法完成;C可以用普查的方式进行调查;D用普查的方式需要耗费大量的时间,在实际中较难实现.]

3. C [A,B,D都是通过查询获取的二手数据,C是通过调查获取的数据.]

4. D [A项中,某地七月份的日平均最高气温值不能代表全年的日平均最高气温;B项中,在农村调查得到的平均寿命不能代表市民的平均寿命;C项中,试验田的产量与水稻的实际产量相差可能较大,只有D项正确.]

5. C [①通过观察获取数据,③④通过调查获取数据,只有②通过试验获取数据.]

6. D

7. 通过查询获取数据

解析 借阅《中国统计年鉴》属于通过查询获取数据.

8. 3.2

解析 因为数据3.2明显低于其它几个数据,是极端值,所以去掉这个数据,能够更好地提高样本数据的代表性.

9. **解** 小明的结论是错误的,在众多的高考落榜生中,走出另外一条成功之路的是少数,小明通过研究一些期刊杂志社报道过的一些成功人士就得出结论是片面的,因为他的抽样不具有代表性.

10. **解** (1)小张获取数据的途径是通过查询获得数据.

(2)结合我国的经济发展水平可知,从2012年开始,电视机销售总量出现下滑的主要原因是市场的饱和及新兴替代品的出现.

11. CD [AB是抽样调查,CD是用普查的方式调查.]

12. C [通过表中数据可知,A项正确;B项中,行人、乘车人在事故中的死亡率为$\dfrac{1\ 247}{2\ 242}\approx 0.56$,高于其它类型,故B正确;C项中,非机动车事故造成的直接财产损失为2 719.4万元,故C错误;D项中,非机动车事故伤亡人数约为$2\ 311+15\ 737=18\ 048$,故D正确.]

13. (1)(2) (3)

解析 (1)中,少年体校的男子篮球、排球运动员的身高一般高于平均水平,因此不能用测量的结果去估计总体的结果,故方案(1)不合理;(2)中,用外地学生的身高也不能准确地反映本地学生身高的实际情况,故方案(2)不合理;(3)中,由于初中三个年级的男生身高是不同的,所以应该用分层随机抽样的方法从初中三个年级抽取180名男生调查其身高,方案(3)合理.

14. 通过观察获取数据 24.3

解析 由题意可知气象台获取数据的途径是通过观察获取数据;本地6月份的日最高气温的平均数为$\overline{y}=\dfrac{1}{30}\times(20\times 5+22\times 4+24\times 6+25\times 6+26\times 4+28\times 2+29\times 2+30\times 1)\approx 24.3$(℃).

15. B [从表中可以看出,计算机行业应聘和招聘人数都较多,但录用率约为60%,化工行业招聘名额虽少,但应聘者也相应较少,且低于招聘人数,故A不正确;建筑行业招聘人数不多,显然好于物流行业,相对物流行业,机械行业可能不是最紧张的,营销行业招聘人数与应聘人数的比约为1∶1.5,但贸易行业招聘数不详,无法比较.]

16. **解** 由于学生的身高会随着年龄的增长而增高,校医务室想了解全校高中学生的身高情况,在抽样时应当关注高中各年级学生的身高,并且还要分性别进行抽查.如果只抽取高一的学生,结果一定是片面的.这个问题涉及的调查对象的总体是某校全体高中学生的身高,其中准备抽取的50名学生的身高是样本.

§9.2 用样本估计总体

9.2.1 总体取值规律的估计

第1课时 总体取值规律的估计

1. C [由于在频率分布直方图中各小长方形的面积表示相应各组的频率,这样,小长方形的高就表示该组个体在样本中出现的频率与组距的比.]

2.C　[在125,120,122,105,130,114,116,95,120,134这10个数中,落在[114.5,124.5)内的有116,120,120,122,共4个,
∴样本数据落在[114.5,124.5)内的频率为$\frac{4}{10}=0.4$.]

3.B　[$\frac{频率}{组距}=h$,故$|a-b|=$组距$=\frac{频率}{h}=\frac{m}{h}$.]

4.A　[第三组的频数$x=100-(10+13+14+15+13+12+9)=100-86=14$,频率为$\frac{14}{100}=0.14$.]

5.A　[由频率分布直方图可知,
前三组的频率之和为$(0.01+0.024+0.036)\times10=0.7$,
∴支出在[50,60]内的频率为$1-0.7=0.3$,
∴$n=\frac{30}{0.3}=100$.]

6.ABC　[对于A,由题图可得,样本数据分布在[6,10)内的频率为$0.08\times4=0.32$,所以A正确;对于B,由题图可得,样本数据分布在[10,14)内的频数为$100\times(0.1\times4)=40$,所以B正确;对于C,由题图可得,样本数据分布在[2,10)内的频数为$100\times(0.02+0.08)\times4=40$,所以C正确;对于D,由题图可估计,总体数据分布在[10,14)内的比例为$0.1\times4=0.4=40\%$,所以D错误,故选ABC.]

7.40
解析　设中间长方形的面积为x,样本容量为n.
由题意得$x=\frac{1}{3}(1-x)$,解得$x=\frac{1}{4}$,即中间一组的频率为$\frac{1}{4}$,
∴$\frac{10}{n}=\frac{1}{4}$,$n=40$.

8.90
解析　∵样本中产品净重小于100克的频率为
$(0.050+0.100)\times2=0.3$,频数为36,
∴样本容量为$\frac{36}{0.3}=120$.
∵样本中净重大于或等于98克并且小于104克的产品的频率为$(0.100+0.150+0.125)\times2=0.75$,
∴样本中净重大于或等于98克并且小于104克的产品的个数为$120\times0.75=90$.

9.**解**　根据题意,设分布在[40,50),[50,60)内的数据个数分别为x,y.
∵样本中数据在[20,60)内的频率为0.6,样本容量为50,
∴$\frac{4+5+x+y}{50}=0.6$,
解得$x+y=21$.
即样本在[40,50),[50,60)内的数据个数之和为21.

10.**解**　在频率分布直方图中频数之比等于频率之比且样本的所有频率之和等于1.
(1)小矩形的高之比为频率之比,
∴从左到右各小组的频率之比为2∶3∶6∶4∶1,
∴最左边的一组所占的频率为$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$,
∴样本容量$=\frac{频数}{频率}=\frac{6}{\frac{1}{8}}=48$.
(2)105.5～120.5这一组的频率为$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$,
∴频数为$48\times\frac{3}{8}=18$.
(3)成绩大于120分的频率为$\frac{4+1}{16}=\frac{5}{16}$,
∴考试成绩的优秀率约为$\frac{5}{16}\times100\%=31.25\%$.

11.B　[∵少于60分的学生人数为$600\times(0.05+0.15)=120$,
∴不少于60分的学生人数为480.]

12.A　[样本数据落在[6,10)内的频率为$0.08\times4=0.32$,
则$a=100\times0.32=32$;
由于样本数据落在[2,6)内的频率为$0.02\times4=0.08$,
则样本数据落在[2,10)内的频率$b=0.08+0.32=0.4$.]

13.AD　[体重在区间[90,100)内的肥胖者由健身前的6人增加到健身后的8人,增加了2人,故A正确;
他们健身后,体重在区间[100,110]内的频率没有变,但人员组成可能改变,故B错误;
他们健身后,20人的平均体重大约减少了
$(0.3\times95+0.5\times105+0.2\times115)-(0.1\times85+0.4\times95+0.5\times105)=5$ kg,故C错误;
因为图(2)中没有体重在区间[110,120]内的人员,所以原来体重在区间[110,120]内的肥胖者体重都有减少,故D正确.]

14.40
解析　月收入在[1 500,2 000)内的频率为$1-(0.000\,2+0.000\,5\times2+0.000\,3+0.000\,1)\times500=0.2$,故应抽取$200\times0.2=40$(人).

15.(1)0.012 5　(2)72
解析　(1)由频率分布直方图知$20x=1-20\times(0.025+0.006\,5+0.003+0.003)$,解得$x=0.012\,5$.
(2)上学时间不少于1小时的学生的频率为$0.003\times2\times20=0.12$,因此估计有$0.12\times600=72$(人)可以申请住宿.

16.**解**　(1)由频率表中第4组数据可知,第4组总人数为$\frac{9}{0.36}=25$,
再结合频率分布直方图可知
$n=\frac{25}{0.025\times10}=100$,
所以$a=100\times0.01\times10\times0.5=5$,
$b=100\times0.03\times10\times0.9=27$,
$x=\frac{18}{20}=0.9$,$y=\frac{3}{15}=0.2$.
(2)第2,3,4组回答正确的共有$18+27+9=54$(人).
利用分层随机抽样在54人中抽取6人,所以第2组抽取$\frac{18}{54}\times6=2$(人);第3组抽取$\frac{27}{54}\times6=3$(人);第4组抽取$\frac{9}{54}\times6=1$(人).

第2课时　统计图表的识别

1.C　[由图可得,新生儿体重在[2 700,3 000)内的频率为$0.001\times300=0.3$.]

2.B　[初中部女教师有$120\times70\%=84$(人),高中部女教师有$150\times(1-60\%)=150\times40\%=60$(人),则该校女教师共有$84+60=144$(人).]

3.D　[在A中,利润最高的月份是3月份和10月份,且2月份的利润为10万元,故A错误;
在B中,利润最小的月份是8月份,且8月份的利润为5万元,故B错误;
在C中,收入最少的月份是5月份,但5月份的支出也最少,故5月份的利润不是最少的,故C错误,D正确.]

4.D　[由图表可知,选项A,B,C正确;对于选项D,这10天的$PM_{2.5}$日均值的中位数是$\frac{45+49}{2}=47$,故D错误.]

5.A　[折线图能直观反映数据的真实信息,故选A.]

6.ABC　[从2014年,将每年的二氧化硫排放量与前一年作差比较,得到2016年二氧化硫排放量与2015年排放量的差最大,A选项正确;
从2015年开始二氧化硫排放量变少,B选项正确;
虽然2019年二氧化硫排放量较2018年多一些,但自2014年以来,整体呈递减趋势,C选项正确,D选项错误.]

7.37 770
解析　根据统计图,得
高一年级人数为$3\,000\times32\%=960$,捐款$960\times15=14\,400$(元);
高二年级人数为$3\,000\times33\%=990$,捐款$990\times13=12\,870$(元);
高三年级人数为$3\,000\times35\%=1\,050$,捐款$1\,050\times10=10\,500$(元).
所以该校学生共捐款$14\,400+12\,870+10\,500=37\,770$(元).

8.200　20
解析　该地区中小学生总人数为$3\,500+2\,000+4\,500=10\,000$,则样本容量为$10\,000\times2\%=200$,其中抽取的高中生近视人数为$2\,000\times2\%\times50\%=20$.

9.**解**　考虑到数据量比较大,在绘图之前,我们可以按照一定的方式将这1 000名员工的工资数据分成若干个小组,再用频率分布直方图或条形图反映各组的情况,不必考虑每个员工具体的收入情况.

10.**解**　(1)由图(2)可知,$(0.02+0.03+0.04+0.06+m)\times5=1$,
∴$m=0.05$,
∴该天运动步数不少于15 000的人数为$(0.05+0.03)\times5\times200=80$(人).
(2)$40\div200=0.2$,$130\div200=0.65$.
假设甲的步数为x,乙的步数为y,
由频率分布直方图可得,$0.2-0.15=(20-y)\times0.05$,
∴$y=19$.
$(1-0.65)-0.3=(x-10)\times0.06$,

$\therefore x=\frac{65}{6}\approx 10.833$,

故作出的是星期二的频率分布直方图.

11. A [在A中,由扇形图可知互联网行业人员中90后所占比例为56%,显然在一半以上,故A正确;
在B中,90后从事技术岗位的人数占总人数的 $56\%\times 39.6\%=22.176\%$,已超过总人数的20%,故各年龄段从事技术岗位的人数占总人数的比例肯定会超过20%,故B错误;
在C中,由于90后人数比80前要多得多,所以虽然不知道80前的岗位分布比例,但很明显所给结论是错误的,故C错误;
在D中,由于90后和80后的人数占比相差不大,且80后的岗位分布比例未知,故无法判断从事技术岗位的90后和80后人数的多少,故D错误.]

12. ABD [在A中,10月份人均月收入增长率为2%,故A正确;
在B中,11月份人均月收入约为 $1\ 428\times(1+1\%)\approx 1\ 442$(元),故B正确;
在C中,12月份人均月收入低于10月和11月,但高于8月和9月,并没有说明和哪个数据比较后下降了,故C错误;
在D中,从题图可知该地10月份至12月份这三个月与8月份相比人均月收入均得到提高,故D正确.]

13. A [根据选择 D 方式的有18人,所占比例为15%,得总人数为 $\frac{18}{15\%}=120$,故选择 A 方式的人数为 $120-42-30-18=30$.]

14. ①②④

解析 根据同比涨幅折线图,可知2021年各月平均房价同比涨幅有涨有跌,且同比涨幅3月份最大,12月份最小,故①②均正确;由环比涨幅折线图可知,前4个月中,虽然折线有下降也有上升,但环比涨幅始终大于0,即房价一直在增长,只是增长幅度有大有小,故1月份房价最高是错误的.设5月份的房价为 a,根据环比涨幅折线图,可算得9月份的房价为 $a(1-0.2\%)\times 1\times 1\times(1+0.2\%)=0.999\ 996a<a$,故5月的房价比9月的要高,④正确.

15. C [由图可知,A,B,D正确,C错误.]

16. **解** (1)依题意,得 $(0.014+0.04+0.06+a+0.02+0.016)\times 5=1$,
所以 $a=0.05$.
(2)根据题意得,全市"5G爱好者"为 $300\times 60\%=180$(万人),
由样本频率分布直方图可知,35岁以上"5G爱好者"的频率为 $(0.02+0.016)\times 5=0.18$,
据此可估计全市35岁以上"5G爱好者"的人数为 $180\times 0.18=32.4$(万人).
(3)样本频率分布直方图中前两组的频率之和为 $(0.014+0.04)\times 5=0.27<45\%$,
前3组频率之和为 $(0.014+0.04+0.06)\times 5=0.57>45\%$,
所以年龄在25~30岁,不妨设年龄上限为 m,
由 $0.27+(m-25)\times 0.06=0.45$,
得 $m=28$,
所以估计该市"5G达人"的年龄上限为28岁.

9.2.2 总体百分位数的估计

1. A [因为 $8\times 30\%=2.4$,故30%分位数是第三项数据8.4.]

2. B [把成绩按从小到大的顺序排列为
56,70,72,78,79,80,81,83,84,86,88,90,91,94,98,
因为 $15\times 80\%=12$,所以这15人成绩的第80百分位数是 $\frac{90+91}{2}=90.5$.]

3. B [将数据由小到大排列为6,7,15,36,39,40,41,42,43,47,49,共11项.由 $11\times 25\%=2.75$,故25%分位数是15.]

4. D [把该组数据按从小到大的顺序排列为10,12,14,14,15,15,16,17,17,17,其平均数 $a=\frac{1}{10}\times(10+12+14+14+15+15+16+17+17+17)=14.7$,因为 $10\times 50\%=5$,所以这10名工人一小时内生产零件的第50百分位数为 $b=\frac{15+15}{2}=15$.]

5. A [棉花纤维的长度在30 mm以下的比例为 $(0.01+0.01+0.04+0.06+0.05)\times 5=0.85=85\%$,
在25 mm以下的比例为 $85\%-25\%=60\%$,
因此,80%分位数一定位于[25,30)内,
由 $25+5\times\frac{0.80-0.60}{0.85-0.60}=29$,
可以估计棉花纤维的长度的样本数据的80%分位数是29 mm.]

6. A [因为 $30\%\times 6=1.8$,$80\%\times 6=4.8$,所以第30百分位数为 $n=28$,第80百分位数为 $m=48$,所以 $\frac{m}{n}=\frac{48}{28}=\frac{12}{7}$.]

7. 30

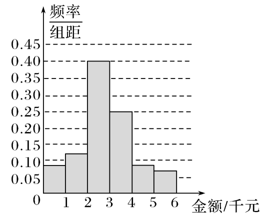
解析 因为分数位于[20,40),[40,60)的频率之和为 $(0.005+0.01)\times 20=0.3$,所以60分为成绩的第30百分位数.

8. 24 ℃ 16 ℃

解析 由折线图可知,把日最高气温按照从小到大排序,得24,24.5,24.5,25,26,26,27,因为共有7个数据,所以 $7\times 10\%=0.7$,不是整数,所以这7天日最高气温的第10百分位数是第1个数据,为24 ℃.把日最低气温按照从小到大排序,得12,12,13,14,15,16,17,因为共有7个数据,所以 $7\times 80\%=5.6$,不是整数,所以这7天日最低气温的第80百分位数是第6个数据,为16 ℃.

9. **解** 把12个数据按从小到大的顺序排列可得:
12,13,15,18,19,20,22,24,27,28,30,31,
计算 $12\times 25\%=3$,$12\times 50\%=6$,$12\times 75\%=9$,
所以数据的第25百分位数为 $\frac{15+18}{2}=16.5$,
第50百分位数为 $\frac{20+22}{2}=21$,
第75百分位数为 $\frac{27+28}{2}=27.5$.

10. **解** (1)根据题意有
$$\begin{cases}16+24+x+y+16+14=200,\\ \frac{16+24+x}{y+16+14}=\frac{3}{2},\end{cases}$$
解得 $\begin{cases}x=80,\\ y=50.\end{cases}$
所以 $p=0.4$,$q=0.25$.
补全频率分布直方图如图所示.



(2)由(1)可知,网购金额低于2千元的频率为 $0.08+0.12=0.2$,
网购金额低于3千元的频率为 $0.2+0.4=0.6$,
所以网购金额的25%分位数在[2,3)内,
则网购金额的25%分位数估计为 $2+\frac{0.25-0.2}{0.6-0.2}\times 1=2.125\approx 2.13$(千元).

11. D [由折线图可知,这10天的最低气温按照从小到大排列为 $-3,-2,-1,-1,0,0,1,2,2,2$,因为共有10个数据,所以 $10\times 80\%=8$,是整数,则这10天最低气温的第80百分位数是 $\frac{2+2}{2}=2$.]

12. BCD [由题图可得,$\overline{x}_甲=\frac{4+5+6+7+8}{5}=6$,$\overline{x}_乙=\frac{3\times 5+6+9}{5}=6$,A项错误,B项正确;
甲的成绩的第80百分位数是 $\frac{7+8}{2}=7.5$,乙的成绩的第80百分位数是 $\frac{6+9}{2}=7.5$,所以二者相等,C项正确;甲的成绩的极差为4,乙的成绩的极差也为4,D项正确.]

13. A [由 $i=5\times 40\%=2$,可知40%分位数为第2项和第3项数据的平均数,即 $\frac{a+b}{2}=16$,所以 $a+b=32$.]

14. 16.5

解析 设成绩的70%分位数为 x,因为 $\frac{1+3+7}{1+3+7+6+3}=0.55$,$\frac{1+3+7+6}{1+3+7+6+3}=0.85$,所以 $x\in[16,17)$,
所以 $16+1\times\frac{0.7-0.55}{0.85-0.55}=16.5$.

15. A [因为 $8\times 65\%=5.2$,所以这组数据的第65百分位数是第6项数据4.5,则 $x\geqslant 4.5$,故选A.]

16. **解** (1)当 $0\leqslant x\leqslant 200$ 时,$y=0.5x$;
当 $200<x\leqslant 400$ 时,

$y=0.5\times200+0.8\times(x-200)=0.8x-60$;
当 $x>400$ 时，
$y=0.5\times200+0.8\times200+1.0\times(x-400)=x-140$.
所以 y 与 x 之间的函数解析式为
$$y=\begin{cases}0.5x, 0\leqslant x\leqslant200,\\0.8x-60, 200<x\leqslant400,\\x-140, x>400.\end{cases}$$
(2)由(1)可知，当 $y=260$ 时，$x=400$，即用电量低于 400 千瓦时的占 80%，
结合频率分布直方图可知
$$\begin{cases}0.001\times100+2\times100b+0.003\times100=0.8,\\100a+0.000\ 5\times100=0.2,\end{cases}$$
解得 $a=0.001\ 5$，$b=0.002\ 0$.
(3)因为用电量低于 300 千瓦时的所占比例为
$(0.001+0.002+0.003)\times100=60\%$，
用电量低于 400 千瓦时的占 80%，
所以 75%分位数在[300,400)内，
所以 $300+\dfrac{0.75-0.6}{0.8-0.6}\times100=375$，即用电量的 75%分位数为 375 千瓦时.

9.2.3　总体集中趋势的估计

1.A　[∵这组数据由小到大排列为 87,89,90,91,92,93,94,96,
∴中位数是 $\dfrac{91+92}{2}=91.5$，
平均数 $\overline{x}=\dfrac{87+89+90+91+92+93+94+96}{8}=91.5$.]

2.A　[从表中 6 天的销售情况可得，一天的平均销售量为 $\dfrac{30+40+28+44+38+42}{6}=37$(本)，该月共 31 天，故该月的销售总量约为 $37\times31=1\ 147$(本).]

3.A　[根据题意知，中位数 $22=\dfrac{x+23}{2}$，则 $x=21$.]

4.BCD　[数据 2,4,6,8 的中位数为 $\dfrac{4+6}{2}=5$，显然 A 是错误的，BCD 都是正确的.]

5.B　[鞋店经理最关心的是哪个鞋号的鞋销量最大，由表可知，鞋号为 37 的鞋销量最大，共销售了 16 双，所以这组数据最重要的是众数.]

6.C　[自左至右各小矩形的面积依次为 0.1,0.2,0.4,0.15,0.15，设中位数是 x，则由 $0.1+0.2+0.08\times(x-20)=0.5$，
得 $x=22.5$，故选 C.]

7.91
解析　设该数个位数字为 x，则这个数为 $90+x$，由题意，知最低分为 88.若 $90+x$ 为最高分，
则平均分为
$\dfrac{89+89+91+92+92+93+94}{7}\approx91.4\neq91$.
故最高分为 94.则去掉最高分 94 和最低分 88，
平均分为
$\dfrac{89+89+91+92+92+93+(90+x)}{7}=91$，
解得 $x=1$.故该数为 91.

8.6　5
解析　因为中位数为 5，所以 $\dfrac{4+x}{2}=5$，
即 $x=6$.
所以该组数据的众数为 6，
平均数为 $\dfrac{-1+0+4+6+6+15}{6}=5$.

9.**解**　(1)这次测验全班平均分
$\overline{x}=\dfrac{1}{48}(82\times27+80\times21)\approx81.13$(分).
(2)因为男同学的中位数是 75 分，
所以至少有 14 人得分不超过 75 分.
又因为女同学的中位数是 80 分，
所以至少有 11 人得分不超过 80 分.
所以全班至少有 25 人得分在 80 分以下(含 80 分).
(3)男同学的平均分与中位数的差别较大，说明男同学的得分两极分化现象严重，得分高的和低的相差较大.

10.**解**　(1)依题意，可得使用 A 款订餐软件的商家中“平均送达时间”的众数为 55，平均数为 $15\times0.06+25\times0.34+35\times0.12+45\times0.04+55\times0.4+65\times0.04=40$.
(2)使用 B 款订餐软件的商家中“平均送达时间”的平均数为 $15\times0.04+25\times0.2+35\times0.56+45\times0.14+55\times0.04+65\times0.02=35<40$，所以选 B 款订餐软件.

11.D　[由已知得 $a=\dfrac{1}{10}\times(15+17+14+10+15+17+17+16+14+12)=14.7$，
将这 10 名工人生产的件数按从小到大的顺序排列，得第 5 个数和第 6 个数都是 15，
$\therefore b=\dfrac{1}{2}\times(15+15)=15$，$c=17$，
$\therefore c>b>a$.故选 D.]

12.B　[设 40 个网球的质量分别为 $x_i(i=1,2,\cdots,40)$，则 $M=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{40}}{40}$，$N=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{40}+M}{41}=M$，故 $\dfrac{M}{N}=1$.]

13.ABC　[由频率分布直方图可得，成绩在[70,80)内的频率最高，因此考生人数最多，故 A 正确；由频率分布直方图可得，成绩在[40,60)内的频率为 0.25，因此，不及格的人数为 $4\ 000\times0.25=1\ 000$，故 B 正确；由频率分布直方图可得，平均分为 $45\times0.1+55\times0.15+65\times0.2+75\times0.3+85\times0.15+95\times0.1=70.5$，故 C 正确；因为成绩在[40,70)内的频率为 $0.45<0.5$，[70,80)内的频率为 0.3，所以中位数为 $70+10\times\dfrac{0.5-0.45}{0.03}\approx71.67$，故 D 错误.]

14.65,62.5
解析　∵最高的矩形为第三个矩形，
∴时速的众数的估计值为 65.
前两个矩形的面积为 $(0.01+0.03)\times10=0.4$.
$\because 0.5-0.4=0.1$，$\dfrac{0.1}{0.4}\times10=2.5$，
∴中位数的估计值为 $60+2.5=62.5$.

15.$n<m<\overline{x}$
解析　由题图可知，30 名学生得分的中位数为第 15 个数和第 16 个数(分别为 5,6)的平均数，即 $m=5.5$；又 5 出现次数最多，故 $n=5$；
$\overline{x}=\dfrac{2\times3+3\times4+10\times5+6\times6+3\times7+2\times8+2\times9+2\times10}{30}\approx5.97$.
故 $n<m<\overline{x}$.

16.**解**　(1)由中位数可知，85 分排在第 25 名之后，从名次上讲，85 分不算是上游，但也不能单以名次来判断学习成绩的好坏，小刚得了 85 分，说明他对这阶段的学习内容掌握较好.
(2)甲班学生成绩的中位数为 87 分，说明高于或等于 87 分的学生占一半以上，而平均分为 79 分，说明两极分化严重，建议对学习有困难的同学多给一些帮助；
乙班学生成绩的中位数和平均分均为 79 分，说明学生成绩之间差别较小，成绩很差的学生少，但成绩优异的学生也很少，建议采取措施提高优秀率.

9.2.4　总体离散程度的估计

1.B　[数据 3,5,7,4,6 的平均数 $\overline{x}=\dfrac{1}{5}\times(3+5+7+4+6)=5$，方差 $s^2=\dfrac{1}{5}\times[(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2]=2$，所以标准差为 $\sqrt{2}$，故选 B.]

2.AD　[只有两个数据时，极差等于 $|x_2-x_1|$，标准差等于 $\dfrac{1}{2}|x_2-x_1|$.故 D 正确.由定义可知 A 正确，BC 错误.]

3.D　[每一个数据都加上 60，所得新数据的平均数增加 60，而方差保持不变.]

4.D　[∵样本 a,0,1,2,3 的平均数为 1，
$\therefore \dfrac{a+6}{5}=1$，解得 $a=-1$.
则样本的方差 $s^2=\dfrac{1}{5}\times[(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2]=2$，
标准差为 $\sqrt{2}$.故选 D.]

5.C　[由题意可知两个班的数学成绩的平均数为
$\overline{x}=\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$，
则两个班数学成绩的方差为

$s^2=\frac{20}{20+30}\times[2+(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2]+\frac{30}{20+30}\times[3+(\overline{x}_{乙}-\overline{x})^2]$

$=\frac{20}{20+30}\times2+\frac{30}{20+30}\times3=2.6.$]

6.ACD [平均数不大于最大值,不小于最小值,B项错误,其余全对.]

7.16

解析 设样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的标准差为 s,则 $s=8$,

可知数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$ 的标准差为 $2s=16$.

8.9.5 28.5

解析 $\overline{x}=\frac{1}{20}\times(2.5\times4+7.5\times8+12.5\times5+17.5\times2+22.5\times1)=9.5$,$s^2=\frac{1}{20}\times[(2.5-9.5)^2\times4+(7.5-9.5)^2\times8+(12.5-9.5)^2\times5+(17.5-9.5)^2\times2+(22.5-9.5)^2\times1]=28.5$.

9.**解** $\overline{x}_{甲}=\frac{74+85+86+90+93}{5}=85.6$;

$\overline{x}_{乙}=\frac{76+83+85+87+97}{5}=85.6$.

$s^2_{甲}=\frac{1}{5}\times[(74-85.6)^2+(85-85.6)^2+(86-85.6)^2+(90-85.6)^2+(93-85.6)^2]=\frac{1}{5}\times209.2=41.84$;

$s^2_{乙}=\frac{1}{5}\times[(76-85.6)^2+(83-85.6)^2+(85-85.6)^2+(87-85.6)^2+(97-85.6)^2]=\frac{1}{5}\times231.2=46.24$.

因为 $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$,$s^2_{甲}<s^2_{乙}$,所以甲的水平更稳定,所以派甲参赛更合适.

10.**解** 根据题意,全班平均成绩为

$\overline{x}=90\times\frac{20}{40}+80\times\frac{20}{40}=85$,

第一组的平均数为 $\overline{x}_1=90$,方差为 $s_1^2=16$.

第二组的平均数为 $\overline{x}_2=80$,方差为 $s_2^2=36$.

则该班学生的方差为

$s^2=\frac{20}{40}\times[s_1^2+(\overline{x}_1-\overline{x})^2]+\frac{20}{40}\times[s_2^2+(\overline{x}_2-\overline{x})^2]$

$=\frac{1}{2}\times[16+(90-85)^2]+\frac{1}{2}\times[36+(80-85)^2]=51$.

$\therefore s=\sqrt{51}$.

综上可得,该班学生这次考试成绩的平均数和标准差分别为85和 $\sqrt{51}$.

11.B [由题图知,A 组的6个数分别为2.5,10,5,7.5,2.5,10;B 组的6个数分别为15,10,12.5,10,12.5,10,

所以 $\overline{x}_A=\frac{2.5+10+5+7.5+2.5+10}{6}=\frac{25}{4}$,

$\overline{x}_B=\frac{15+10+12.5+10+12.5+10}{6}=\frac{35}{3}$.

显然 $\overline{x}_A<\overline{x}_B$.

又由图形可知,B 组数据的分布比 A 组的均匀,变化幅度不大,故 B 组数据比较稳定,方差较小,从而标准差较小,所以 $s_A>s_B$.]

12.BC [$\overline{x}=\frac{9.4\times3+9.6+9.7}{5}=9.5$,$s^2=\frac{1}{5}\times[(9.4-9.5)^2\times3+(9.6-9.5)^2+(9.7-9.5)^2]=\frac{1}{5}\times(0.1^2\times4+0.2^2)=0.016$.]

13.A [$\because\frac{1}{8}(x_1+x_2+\cdots+x_8)=5$,

$\therefore\frac{1}{9}(x_1+x_2+\cdots+x_8+5)=5$,$\therefore\overline{x}=5$.

由方差定义及意义可知加入新数据5后,样本数据取值的稳定性比原来强,

$\therefore s^2<2$.]

14.3

解析 由题意可得,$1.966=\frac{800}{2\,000}\times[1+(2.7-3)^2]+\frac{600}{2\,000}\times[2+(3.1-3)^2]+\frac{600}{2\,000}\times[s_3^2+(3.3-3)^2]$,

解得 $s_3^2=3$.

15.100

解析 由题意得 $a+b=10\times2=20$,$\overline{x}=\frac{1}{10}\times(2+3+3+\cdots+21)=10$,

要使该总体的方差最小,方差化简后即满足 $(a-10)^2+(b-10)^2$ 最小,

故 $a=b=10$,$ab=100$.

16.**解** $\overline{x}_{甲}=\frac{1}{6}\times(-5+7+15+14-4-3)=4(℃)$,

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{6}(1+4+10+7+2+0)=4(℃)$.

$s_{甲}=\sqrt{\frac{1}{6}\times[(-5-4)^2+\cdots+(-4-4)^2+(-3-4)^2]}$

≈8.4,

$s_{乙}=\sqrt{\frac{1}{6}\times[(1-4)^2+\cdots+(2-4)^2+(0-4)^2]}\approx3.5$,

显然两地的平均温度相等,乙地温度的标准差较小,说明乙地温度波动较小.

因此,乙地比甲地更适合母鸡产蛋.

第十章 概 率

§10.1 随机事件与概率

10.1.1 有限样本空间与随机事件

1.B [①②是必然事件,④是随机事件,③⑤是不可能事件.]

2.B [由题意可知,该试验的样本空间为{1,2,…,18}.]

3.B [设5名学生分别为甲、乙、丙、丁、戊,则 M={甲乙,甲丙,甲丁,甲戊},∴M 含有4个样本点.]

4.ABC [A,B,C为随机事件,D为必然事件,故选A,B,C.]

5.C [把5人分别记为 A,B,C,D,E,用 x 表示正班长,y 表示副班长,则样本点用 (x,y) 表示,$\therefore\Omega=\{(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,A),(B,C),(B,D),(B,E),(C,A),(C,B),(C,D),(C,E),(D,A),(D,B),(D,C),(D,E),(E,A),(E,B),(E,C),(E,D)\}$,故共有20个样本点.]

6.BCD [A为必然事件;B,C,D为随机事件.]

7.{(-1,1),(-1,2),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)}

8.{(2,8),(3,9)}

解析 只有 $\log_2 8=3$,$\log_3 9=2$ 为整数.

9.**解** (1)$\Omega=\{AB,AC,AX,AY,AZ,BC,BX,BY,BZ,CX,CY,CZ,XY,XZ,YZ\}$.

(2)$M=\{AY,AZ,BX,BZ,CX,CY\}$.

10.**解** (1)$\Omega=\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

(2)$A=\{(1,3),(2,2),(3,1),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$,

$B=\{(1,3),(2,2),(3,1),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.

11.ACD

12.C [摸完黑球和白球共需15次,则第16次一定能摸出红球.]

13.C [将一枚质地均匀的骰子投两次,得到的点数依次记为 a 和 b,

∵方程 $ax^2+bx+1=0(a>0)$ 有实数解,

$\therefore\Delta=b^2-4a\geqslant0$,

则 $M=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$,共含19个样本点.]

14.(1)Ω={胜,平,负} (2)Ω={0,1,2,3,4}

解析 (1)对于甲队来说,有胜、平、负三种结果.

(2)从含有6件次品的50件产品中任取4件,其次品的个数可能为0,1,2,3,4,不能再有其他结果.

15.12

解析 每条棱的中间位置上有一个是两个面涂有颜色的小正方体,共12个.

16.**解** (1)每次游戏时,所有可能出现的结果如下表所示:

第二张卡片 / 第一张卡片	土	口	木
土	(土,土)	(土,口)	(土,木)
口	(口,土)	(口,口)	(口,木)
木	(木,土)	(木,口)	(木,木)

∴Ω={(土,土),(土,口),(土,木),(口,土),(口,口),(口,木),

(木,土),(木,口),(木,木)}.

(2)能组成上下结构的汉字的样本点为(土,土),(口,口),(木,口),(口,木).

∴A={(土,土),(口,口),(木,口),(口,木)}.

10.1.2　事件的关系和运算

1.B　[从装有4个黑球、2个白球的袋中任取3个球,事件A为"所取的3个球中至多有1个白球",事件A的互斥事件是所取的3个球中多于1个白球,∴事件A的互斥事件是所取的3个球中恰有2个白球1个黑球.故选B.]

2.B　[至少做完3套练习题包含做完3,4,5,6,…套练习题,故它的对立事件为做完0,1,2套练习题,即至多做完2套练习题.]

3.D

4.BD　[若$A+B=A$,则$B\subseteq A$,故A错误;
由题意知,$AB\subseteq A$,∴$A+AB=A$,B正确;
∵当事件A,B都不发生时,$\overline{A}\ \overline{B}$发生,但$A$不发生,
∴$\overline{A}\ \overline{B}$不是$A$的子集,C错误;∵$A\subseteq(A+B)$,
∴$A(A+B)=A$,D正确.]

5.C　[$A\cup B$表示事件A,B至少有1个发生,$\overline{A}\cup\overline{B}$表示事件$A$,$B$至少有一个不发生,
∴$(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$表示$A$与$B$恰有一个发生.]

6.AD　[A是互斥事件,恰有一名男生的实质是选出的两人中有一名男生和一名女生,它与全是男生不可能同时发生;B不是互斥事件,当选出的两人是一男一女时,"至少有一名男生"和"至少有一名女生"同时发生;C不是互斥事件;D是互斥事件.]

7.该生是大三男生,但不是运动员

8.$B\cup D\cup E$

9.**解**　(1)$A\cap B\cap\overline{C}$={2020年或2020年前出版的中文版的数学书}.

(2)在"图书室中所有数学书都是2020年后出版的且为中文版"的条件下才有$A\cap B\cap C=A$.

(3)是.$\overline{A}=B$意味着图书室中的非数学书都是中文版的,而且所有的中文版的书都不是数学书.

10.**解**　由题意得,事件A={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)},事件B={(1,3),(2,2),(3,1)},事件C={(1,5),(2,6),(5,1),(6,2)},事件D={(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)}.

(1)$C\cap D$={(1,5),(5,1)},$A\cup B$={(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}.

(2)$E=B\cup C$.

11.D

12.AD　[对于A,"恰有1件次品"就是"1件正品,1件次品",与"2件都是次品"显然是互斥事件;
对于B,"至少有1件次品"包括"恰有1件次品"和"2件都是次品",与"都是次品"可能同时发生,因此这两个事件不是互斥事件;
对于C,"至少有1件正品"包括"恰有1件正品"和"2件都是正品",与"至少有1件次品"不是互斥事件;
对于D,"至少有1件次品"包括"恰有1件次品"和"2件都是次品",与"都是正品"显然是互斥事件,故AD是互斥事件.]

13.D　[当取出的2个球是1白1红时,A中两个事件同时发生,所以A中的两个事件不是互斥事件,此时B也一样,所以排除A,B;C中,两个事件不可能同时发生,但是必有一个发生,所以C中的两个事件是对立事件,所以排除C;D中,两个事件不可能同时发生,但是当取出的2个球都是红球时,这两个事件都没有发生,所以D中的两个事件是互斥事件但不是对立事件.]

14.$(BC)\cup(BD)$或$B\cap(C\cup D)$

15.A　[由互斥事件的概念,A,B互斥即$A\cap B$为不可能事件,所以$\overline{A}\cup\overline{B}$是必然事件,故A正确;C选项中,当$B=\overline{A}$时,$\overline{A}$与$\overline{B}$互斥,故C错误;D和B可举反例,如投掷骰子试验中,A表示向上数字为1,B表示向上数字为2,$A\cup B$不是必然事件,$\overline{A}$与$\overline{B}$不是互斥事件,故B,D错误.]

16.**解**　(1)用1,2,3,4表示4名男生,用a,b表示2名女生,因为事件A_1="甲组有1名女生",所以A_1={(1,2,a),(1,2,b),(1,3,a),(1,3,b),(1,4,a),(1,4,b),(2,3,a),(2,3,b),(2,4,a),(2,4,b),(3,4,a),(3,4,b)},共含12个样本点.

(2)事件B="甲组至少有一名女生",其含义是甲组有一名女生或甲组有两名女生,所以$B=A_1\cup A_2$.

(3)因为A_2与$A_0\cup A_1$是对立事件,所以$\overline{A_2}=A_0\cup A_1$,所以$\overline{A_2}\cup A_0=A_0\cup A_1$,所以事件$A_2$与事件$\overline{A_2}\cup A_0$是对立事件.

10.1.3　古典概型(一)

1.C　[A项中由于点数的和出现的可能性不相等,故A不是;B项中的样本点的个数是无限的,故B不是;C项中满足古典概型的有限性和等可能性,故C是古典概型;D项中样本点既不是有限个也不具有等可能性,故D不是.]

2.C　[两个孩子出生有先后之分.]

3.B　[样本点总数为10,"抽出一本是故事书"包含3个样本点,所以其概率为$\frac{3}{10}$.]

4.C　[样本点有:(甲,乙,丙)、(甲,丙,乙)、(乙,甲,丙)、(乙,丙,甲)、(丙,甲,乙)、(丙,乙,甲),共6个.甲站在中间的样本点包括:(乙,甲,丙)、(丙,甲,乙),共2个,所以甲站在中间的概率$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.]

5.C　[试验的样本空间Ω={(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)},共6个样本点,且每个样本点出现的可能性相同,数字之和为奇数的有4个样本点,所以所求概率为$\frac{2}{3}$.]

6.AD　[掷一枚骰子,出现奇数点和出现偶数点的概率都是$\frac{1}{2}$,故A正确;"出现1点"是随机事件,故B错误;概率是客观存在的,不因为人的意念而改变,故C错误;连续掷3次,若每次都出现最大点数6,则三次之和为18,故D正确.]

7.$\frac{1}{4}$

解析　用列举法知,可重复地选取两个数共有16个样本点,且每个样本点出现的可能性相等,其中一个数是另一个数的2倍的有(1,2),(2,1),(2,4),(4,2)共4个样本点,故所求的概率为$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

8.$\frac{3}{10}$　$\frac{4}{25}$

解析　从5个数字中不放回地任取两数,样本点有(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5),共10个,且每个样本点出现的可能性相等.因为都为奇数的样本点有(1,3),(1,5),(3,5),共3个,所以所求概率$P=\frac{3}{10}$.从5个数字中有放回的任取两数,样本点共有25个,且每个样本点出现的可能性相等,都为偶数的样本点有(2,4),(4,2),(2,2),(4,4)共4个,故概率$P=\frac{4}{25}$.

9.**解**　(1)由于共有11个球,且每个球有不同的编号,故共有11种不同的摸法.又因为所有球大小相同,因此每个球被摸中的可能性相等,故以球的编号为样本点的概率模型为古典概型.

(2)由于11个球共有3种颜色,因此共有3个样本点,分别记为A:"摸到白球",B:"摸到黑球",C:"摸到红球".

因为所有球大小相同,所以一次摸球每个球被摸中的可能性均为$\frac{1}{11}$.

因为白球有5个,所以一次摸球摸中白球的可能性为$\frac{5}{11}$.

同理可知,摸中黑球、红球的可能性均为$\frac{3}{11}$.

显然这三个样本点出现的可能性不相等,
所以以颜色为样本点的概率模型不是古典概型.

10.**解**　(1)分别记白球为1,2,3号,黑球为4,5号,从中摸出2只球,有如下样本点(摸到1,2号球用(1,2)表示):
(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5).
因此,共有10个样本点.

(2)上述10个样本点发生的可能性相同,且只有3个样本点是摸到两只白球(记为事件A),即(1,2),(1,3),(2,3),故$P(A)=\frac{3}{10}$.故摸出2只球都是白球的概率为$\frac{3}{10}$.

11.A　[把2个红球分别标记为红1、红2,2个白球分别标记为白1、白2,本试验样本空间所包含的样本点共有16个,其中取出的2个球同色包含的样本点有8个:(红1,红1),(红1,红2),(红2,红1),(红2,红2),(白1,白1),(白1,白2),(白2,白1),(白2,白2).故所求概率$P=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.]

12.A　[直线$y=kx+b$不经过第三象限,即$\begin{cases}k\leqslant 0,\\ b\geqslant 0.\end{cases}$选取出的两个数记为$(k,b)$,则该试验的样本空间$\Omega$={(−1,−2),(−1,1),

$(-1,2),(1,-2),(1,1),(1,2),(2,-2),(2,1),(2,2)\}$，共 9 个样本点，符合题意的有 $(-1,1),(-1,2)$，共 2 个样本点，所以所求概率为 $\frac{2}{9}$.]

13.B [设 3 名男生分别用 A,B,C 表示，2 名女生分别用 a,b 表示，则从 5 人中选出 2 名青年志愿者的样本空间 $\Omega=\{(A,B),(A,C),(A,a),(A,b),(B,C),(B,a),(B,b),(C,a),(C,b),(a,b)\}$，共有 10 个样本点，其中选出的 2 名志愿者性别相同包含的样本点有 $(A,B),(A,C),(B,C),(a,b)$，共有 4 个，则选出的 2 名青年志愿者性别相同的概率 $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.]

14.$\frac{1}{12}$

解析 总的样本点个数为 36，且每个样本点出现的可能性相等.因为方程无实根，所以 $\Delta=(m+n)^2-16<0$. 即 $m+n<4$，其中有 $(1,1),(1,2),(2,1)$，共 3 个样本点.

所以所求概率为 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

15.D [记"$|a-b|\leqslant 1$"为事件 A，由于 $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$，则事件 A 包含的样本点有：$(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)$，共 16 个，而依题意得，样本点总数为 36，且每个样本点出现的可能性相等.因此他们"心有灵犀"的概率 $P=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$.]

16.**解** 从 6 名教师代表中选出 3 名教师组成十九大报告宣讲团，组成人员的全部样本点有 12 个，分别为：

$(A_1,B_1,C),(A_1,B_1,D),(A_1,B_2,C),(A_1,B_2,D),(A_1,C,D),(A_2,B_1,C),(A_2,B_1,D),(A_2,B_2,C),(A_2,B_2,D),(A_2,C,D),(B_1,C,D),(B_2,C,D)$.

(2)组成人员的全部样本点中，A_1 被选中的样本点有 $(A_1,B_1,C),(A_1,B_1,D),(A_1,B_2,C),(A_1,B_2,D),(A_1,C,D)$，共 5 个，

所以教师 A_1 被选中的概率为 $P=\frac{5}{12}$.

(3)宣讲团中没有乙校教师代表的样本点有 $(A_1,C,D),(A_2,C,D)$，共 2 个，

所以宣讲团中没有乙校教师代表的概率为 $P=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

10.1.3 古典概型(二)

1.A [三辆车从左往右停放组成的样本点有：(红旗、捷达、桑塔纳)，(红旗、桑塔纳、捷达)，(捷达，红旗、桑塔纳)，(桑塔纳、红旗、捷达)，(捷达、桑塔纳、红旗)，(桑塔纳、捷达、红旗)，共有 6 个，所以"捷达"车停在"桑塔纳"车右边的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，"红旗"车停在最左边的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.]

2.C [从 5 支彩笔中任取 2 支不同颜色的彩笔，有 10 个样本点：(红，黄)，(红，蓝)，(红，绿)，(红，紫)，(黄，蓝)，(黄，绿)，(黄，紫)，(蓝，绿)，(蓝，紫)，(绿，紫)，取出的 2 支彩笔中含有红色彩笔的样本点有(红，黄)，(红，蓝)，(红，绿)，(红，紫)，共 4 个，故所求概率为 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.]

3.B [连续两次抛掷一枚质地均匀的骰子，记录向上的点数，样本空间包含的样本点的个数为 $n=6\times 6=36$，"向上的点数之差的绝对值等于 2"包含的样本点有：$(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4)$，共 8 个，所以"向上的点数之差的绝对值等于 2"的概率为 $P=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$.]

4.D [样本空间 $\Omega=\{(a,b)|a\in\{1,2,3,4,5\},b\in\{1,2,3\}\}$，包含的样本点个数为 $5\times 3=15$，事件"$b>a$"可表示为 $\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$，包含的样本点个数 $m=3$，所以 $P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.]

5.C [$\because \Omega=\{(M,1),(M,2),(M,3),(M,4),(M,5),(I,1),(I,2),(I,3),(I,4),(I,5),(N,1),(N,2),(N,3),(N,4),(N,5)\}$，$\therefore$ 共 15 个样本点，且每个样本点出现的可能性相等.

正确的开机密码只有 1 种，$\therefore P=\frac{1}{15}$.]

6.ABC [对于 A，从甲、乙、丙三人中任选两人，则该试验的样本空间 $\Omega=\{$(甲、乙)，(甲、丙)、(乙、丙)$\}$，共 3 个样本点，其中，甲被选中的样本点有 2 个，故甲被选中的概率为 $P=\frac{2}{3}$，故 A 正确；对于 B，样本空间 $\Omega=\{(1,3,5),(1,3,7),(1,5,7),(3,5,7)\}$，共 4 个样本点，而能构成三角形的基本事件只有 $(3,5,7)$ 一种情况，所以所取出的三条线段能构成一个三角形的概率是 $P=\frac{1}{4}$，故 B 正确；对于 C，该树枝的树梢有 6 处，有 2 处能找到食物，所以获得食物的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，故 C 正确；对于 D，因为 $A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,9\}$，$A\cap B=\{2,3,6\}$，所以由古典概型的概率公式得，所求的概率是 $\frac{3}{7}$，故 D 错误.]

7.$\frac{3}{10}$

解析 从五个人中选取三人，则试验的样本空间 $\Omega=\{$(甲，乙，丙)，(甲，乙，丁)，(甲，乙，戊)，(甲，丙，丁)，(甲，丙，戊)，(甲，丁，戊)，(乙，丙，丁)，(乙，丙，戊)，(乙，丁，戊)，(丙，丁，戊)$\}$，共 10 个样本点，甲、乙都被选中的样本点有 3 个，故所求的概率为 $\frac{3}{10}$.

8.$\frac{1}{5}$

解析 用 A,B,C 分别表示三名男同学，用 a,b,c 分别表示三名女同学，则从 6 名同学中选出 2 人的样本点为 $(A,B),(A,C),(A,a),(A,b),(A,c),(B,C),(B,a),(B,b),(B,c),(C,a),(C,b),(C,c),(a,b),(a,c),(b,c)$，共 15 个，其中 2 名都是女同学包括 $(a,b),(a,c),(b,c)$，共 3 个，故所求的概率为 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

9.**解** 设第一次抽到电脑记为 x，第二次抽到的电脑记为 y，
则可用数组 (x,y) 表示两次抽取的样本点.
(1)根据相应的抽样方法可知，
有放回简单随机抽样的样本空间：
$\Omega_1=\{(A,A),(A,B),(A,C),(A,D),(B,A),(B,B),(B,C),(B,D),(C,A),(C,B),(C,C),(C,D),(D,A),(D,B),(D,C),(D,D)\}$.
不放回简单随机抽样的样本空间：
$\Omega_2=\{(A,B),(A,C),(A,D),(B,A),(B,C),(B,D),(C,A),(C,B),(C,D),(D,A),(D,B),(D,C)\}$.
按类型等比例分层随机抽样，先从台式电脑中抽一台，再从笔记本电脑中抽一台，其样本空间：
$\Omega_3=\{(A,C),(A,D),(B,C),(B,D)\}$.
(2)设事件 $E=$"抽到两台笔记本电脑"，
则对于有放回简单随机抽样，
$E=\{(C,C),(C,D),(D,C),(D,D)\}$.
因为抽中样本空间 Ω_1 中每一个样本点的可能性都相等，
所以这是一个古典概型.
因此 $P(E)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.
对于不放回简单随机抽样，
$E=\{(C,D),(D,C)\}$.
因为抽中样本空间 Ω_2 中每一个样本点的可能性都相等，
所以这是一个古典概型.
因此 $P(E)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.
因为按类型等比例分层随机抽样，不可能抽到两台笔记本电脑，
所以 $E=\varnothing$，因此 $P(E)=0$.

10.**解** (1)由题意知，从该小组身高低于 1.80 米的同学中任选 2 人这一试验 E_1 的样本空间 $\Omega_1=\{AB,AC,AD,BC,BD,CD\}$，共 6 个样本点，且每个样本点出现的可能性相同，故属于古典概型.设事件 M 表示"选到的 2 人身高都在 1.78 米以下"，则 $M=\{AB,AC,BC\}$，共含有 3 个样本点，

所以 $P(M)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(2)从该小组同学中任选 2 人，这一试验 E_2 的样本空间 $\Omega_2=\{AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE,DE\}$，共 10 个样本点，且每个样本点出现的可能性相等.设事件 N 表示"选到的 2 人的身高都在 1.70 米以上且体重指标都在[18.5,23.9)中"，则 $N=\{CD,CE,DE\}$，共含有 3 个样本点，所以 $P(N)=\frac{3}{10}$.

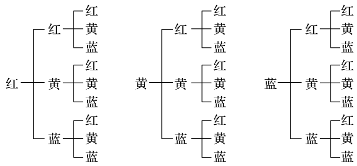
11.C [四个人翻转硬币后是否站起来共有 16 种情形，其中不相邻的两个人站起来，即正面朝上不相邻有：正反正反，反正反正，反反反正，反反正反，反正反反，正反反反，反反反反，共 7 种情形，所以没有相邻的两个人站起来的概率为 $\frac{7}{16}$.]

12.C ［所有样本点的个数为36,且每个样本点出现的可能性相等.由 $\log_{2x}y=1$ 得 $2x=y$,其中 $x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}$,所以 $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=6\end{cases}$ 满足 $\log_{2x}y=1$,故事件"$\log_{2x}y=1$"包含3个样本点,所以所求的概率为 $P=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.］

13.ACD ［记4件产品分别为1,2,3,a,其中 a 表示次品.在A中,样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,a),(2,3),(2,a),(3,a)\}$,共6个样本点,且每个样本点出现的可能性相等,"恰有一件次品"的样本点为 $(1,a),(2,a),(3,a)$,因此其概率 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,A正确;在B中,每次抽取1件,不放回抽取两次,样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,a),(2,1),(2,3),(2,a),(3,1),(3,2),(3,a),(a,1),(a,2),(a,3)\}$,因此 $n(\Omega)=12$.B错误;在C中,"取出的两件中恰有一件次品"的样本点数为6,其概率为 $\frac{1}{2}$,C正确;在D中,每次抽取1件,有放回抽取两次,样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,a),(2,1),(2,2),(2,3),(2,a),(3,1),(3,2),(3,3),(3,a),(a,1),(a,2),(a,3),(a,a)\}$,因此 $n(\Omega)=16$,D正确.］

14.$\frac{1}{9}$　$\frac{2}{9}$

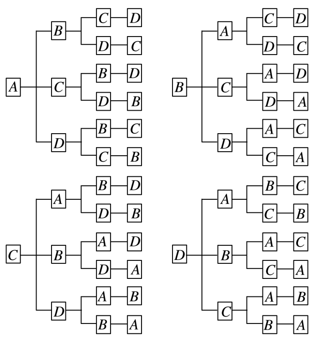
解析　所有可能的样本点共有27个,如图所示,



记"3个矩形颜色都相同"为事件 A,由图知,事件 A 包含的样本点有3个,故 $P(A)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$.记"3个矩形颜色都不同"为事件 B,由图可知,事件 B 中的样本点有6个,故 $P(B)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$.

15.A ［由题意可知小青蛙三次跳动后的所有情况有(3→1→3→1),(3→1→3→2),(3→1→3→4),(3→1→3→5),(3→2→3→2),(3→2→3→1),(3→2→3→4),(3→2→3→5),(3→4→3→4),(3→4→3→1),(3→4→3→2),(3→4→3→5),(3→5→3→5),(3→5→3→1),(3→5→3→2),(3→5→3→4),共16种.
满足题意的有(3→1→3→5),(3→2→3→5),(3→4→3→5),共3种.
由古典概型的概率计算公式可得,小青蛙在第三次跳动后,首次进入5处的概率是 $\frac{3}{16}$.］

16.**解**　将 A,B,C,D 四位贵宾就座情况用下面图形表示出来:



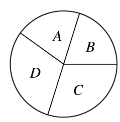
如图所示,样本点的总数为24,且每个样本点出现的可能性相等.
(1)设事件 A 为"这四人恰好都坐在自己的席位上",则事件 A 只包含1个样本点,所以 $P(A)=\frac{1}{24}$.
(2)设事件 B 为"这四个人恰好都没有坐在自己的席位上",则事件 B 包含9个样本点,所以 $P(B)=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.
(3)设事件 C 为"这四个人恰有1位坐在自己席位上",则事件 C 包含8个样本点,所以 $P(C)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.

10.1.4　概率的基本性质

1.C ［由题图知,事件 A 与事件 B 不能同时发生,且 $A\cup B\neq\Omega$,因此 A 与 B 互斥不对立,故选C.］

2.D ［由于不能确定 A 与 B 是否互斥,则 $P(A+B)$ 的值不能确定.］

3.D ［由于 A,B,C,D 彼此互斥,且由 $P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$,知 $A+B+C+D$ 是一个必然事件,故其事件的关系如图所示.由图可知,任何一个事件与其余3个事件的和事件必然是对立事件,任何两个事件的和事件与其余两个事件的和事件也是对立事件,故只有D中的说法正确.］



4.A ［由于事件 A 和 B 是互斥事件,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)=0.1+P(B)$,又 $0\leqslant P(A+B)\leqslant1$,所以 $0\leqslant0.1+P(B)\leqslant1$,又 $P(B)\geqslant0$,所以 $0\leqslant P(B)\leqslant0.9$,故选A.］

5.C ［∵抽到的不是一等品的对立事件是抽到一等品,而 $P(A)=0.65$,∴抽到的不是一等品的概率是 $1-0.65=0.35$.］

6.C ［设"质量小于4.8 g"为事件 A,"质量小于4.85 g"为事件 B,"质量在4.8～4.85 g"为事件 C,则 $A+C=B$,且 A,C 为互斥事件,所以 $P(B)=P(A+C)=P(A)+P(C)$,则 $P(C)=P(B)-P(A)=0.32-0.3=0.02$.］

7.$\frac{3}{5}$

解析　由于空气质量达到良或优为污染指数 $T\leqslant100$,由互斥事件概率的加法公式,得该城市2020年空气质量达到良或优的概率为 $\frac{1}{10}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$.

8.$\frac{2}{5}$

解析　因为事件 A,B 互斥,它们都不发生的概率为 $\frac{2}{5}$,

所以 $P(A)+P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

又因为 $P(A)=2P(B)$,

所以 $P(A)+\frac{1}{2}P(A)=\frac{3}{5}$,

所以 $P(A)=\frac{2}{5}$.

9.**解**　将5杯饮料编号为1,2,3,4,5,编号1,2,3表示 A 饮料,编号4,5表示 B 饮料,则从5杯饮料中选出3杯的样本空间 $\Omega=\{(123),(124),(125),(134),(135),(145),(234),(235),(245),(345)\}$,共有10个样本点.
令 D 表示此人被评为优秀的事件,E 表示此人被评为良好的事件,F 表示此人被评为良好及以上的事件,则
(1)$P(D)=\frac{1}{10}$.
(2)$P(E)=\frac{3}{5}$,$P(F)=P(D)+P(E)=\frac{7}{10}$.

10.**解**　从五张卡片中任取两张,对应的样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$,共有10个样本点.
(1)$A=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$,共有6个样本点,∴$P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.
(2)$B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4)\}$,共有6个样本点,∴$P(B)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.
(3)$C=\{(1,4),(1,5),(2,4)\}$,共有3个样本点,
∴$P(C)=\frac{3}{10}$.
(4)由题意得,事件 D 与事件 B 是对立事件,
∴$P(D)=1-P(B)=\frac{2}{5}$.

11.A ［∵$a\in\{0,1,2\}$,$b\in\{-1,1,3,5\}$,
∴共含有12个样本点.
函数 $f(x)=ax^2-2bx$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数,
①当 $a=0$ 时,$f(x)=-2bx$,需要满足 $-2b>0$,即 $b<0$,符合条件的只有 $(0,-1)$,即 $a=0,b=-1$,共1种;
②当 $a\neq0$ 时,需要满足 $\frac{b}{a}\leqslant1$,即 $b\leqslant a$,符合条件的有 $(1,-1),(1,1),(2,-1),(2,1)$,共4种.
∴函数 $f(x)=ax^2-2bx$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增的概率是 $P=\frac{5}{12}$.］

12. D [样本点总数为10,2件都是一级品包含的样本点有3个,其概率为$\frac{3}{10}$,其对立事件是至少有1件二级品,故"至少有1件二级品"的概率为$\frac{7}{10}$.]

13. AD [任找一个人,其血型为A,B,AB,O型血的事件分别为A',B',C',D',它们两两互斥.由已知,有$P(A')=0.28$,$P(B')=0.29$,$P(C')=0.08$,$P(D')=0.35$.因为B,O型血可以输给B型血的人,所以"可以输给B型血的人"为事件$B'\cup D'$,根据概率的加法公式,得$P(B'\cup D')=P(B')+P(D')=0.29+0.35=0.64$,故A正确;B型血的人能为B型、AB型的人输血,其概率为$0.29+0.08=0.37$,B错误;由O型血只能接受O型血的人输血知,C错误;由任何人的血都可以输给AB型血的人,知D正确.故选A,D.]

14. 120

解析 可设参加联欢会的教师共有n人,由于从这些教师中选一人,"选中男教师"和"选中女教师"两个事件是对立事件,所以选中女教师的概率为$1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$.

再由题意,知$\frac{11}{20}n-\frac{9}{20}n=12$,解得$n=120$.

15. $\frac{13}{18}$

解析 甲、乙两人从1,2,3,…,10中各任取一数(不重复),甲取到的数是5的倍数,设甲取的数为m,乙取的数为n,其样本点记为(m,n),

所以样本空间$\Omega=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(10,1),(10,2),(10,3),(10,4),(10,5),(10,6),(10,7),(10,8),(10,9)\}$,共含有18个样本点,事件"甲数小于乙数"包括$(5,6),(5,7),(5,8),(5,9),(5,10)$,共5个样本点,

∴甲数大于乙数的概率为$P=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$.

16. **解** (1)$P(A)=\frac{1}{1\,000}$,$P(B)=\frac{10}{1\,000}=\frac{1}{100}$,

$P(C)=\frac{50}{1\,000}=\frac{1}{20}$.

故事件A,B,C的概率分别为$\frac{1}{1\,000},\frac{1}{100},\frac{1}{20}$.

(2)1张奖券中奖包含中特等奖,一等奖,二等奖.

设"1张奖券中奖"这个事件为M,则$M=A\cup B\cup C$.

∵A,B,C两两互斥,

∴$P(M)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

$=\frac{1}{1\,000}+\frac{1}{100}+\frac{1}{20}=\frac{61}{1\,000}$.

故1张奖券的中奖概率为$\frac{61}{1\,000}$.

(3)设"1张奖券不中特等奖且不中一等奖"为事件N,则事件N与"1张奖券中特等奖或中一等奖"互为对立事件,

∴$P(N)=1-P(A\cup B)=1-\left(\frac{1}{1\,000}+\frac{1}{100}\right)=\frac{989}{1\,000}$.

故1张奖券不中特等奖且不中一等奖的概率为$\frac{989}{1\,000}$.

习题课　古典概型的应用

1. ABD [因为A,B,D符合古典概型的特征,所以A,B,D是古典概型;在C中,每天是否降雨受多方面因素影响,不具有等可能性,不是古典概型.故选A,B,D.]

2. A [甲、乙两人参加学习小组,若以(A,B)表示甲参加学习小组A,乙参加学习小组B,则样本点有$(A,A),(A,B),(A,C),(B,A),(B,B),(B,C),(C,A),(C,B),(C,C)$,共9个,且每个样本点出现的可能性相等,其中两人参加同一个学习小组共有3种情形,根据古典概型概率公式,得$P=\frac{1}{3}$.]

3. A [从甲、乙、丙、丁四人中任选两人参加问卷调查,样本点为(甲,乙),(甲,丙),(甲,丁),(乙,丙),(乙,丁),(丙,丁),共6个.甲被选中的有3个.

∴甲被选中的概率$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,故选A.]

4. D [由题意知,从五位大学毕业生中录用三人,样本点为(甲,乙,丙),(甲,乙,丁),(甲,乙,戊),(甲,丙,丁),(甲,丙,戊),(甲,丁,戊),(乙,丙,丁),(乙,丙,戊),(乙,丁,戊),(丙,丁,戊),共10个,其中"甲或乙被录用"的样本点有9个,所求概率$P=\frac{9}{10}$.]

5. B [用(A,B,C)表示A,B,C通过主席台的次序,则样本空间$\Omega=\{(A,B,C),(A,C,B),(B,A,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A)\}$,共6个样本点,其中$B$先于$A,C$通过的有$(B,C,A)$和$(B,A,C)$,共2个样本点,故所求概率$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.]

6. B [设5只兔子中测量过某项指标的3只为a_1,a_2,a_3,未测量过这项指标的2只为b_1,b_2,则从5只兔子中随机取出3只的所有可能情况为$(a_1,a_2,a_3),(a_1,a_2,b_1),(a_1,a_2,b_2),(a_1,a_3,b_1),(a_1,a_3,b_2),(a_1,b_1,b_2),(a_2,a_3,b_1),(a_2,a_3,b_2),(a_2,b_1,b_2),(a_3,b_1,b_2)$,共10种可能.其中恰有2只测量过该指标的情况为$(a_1,a_2,b_1),(a_1,a_2,b_2),(a_1,a_3,b_1),(a_1,a_3,b_2),(a_2,a_3,b_1),(a_2,a_3,b_2)$,共6种可能.

故恰有2只测量过该指标的概率为$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.]

7. $\frac{17}{35}$　$\frac{18}{35}$

解析 易知事件"从中取出2粒都是黑子"和"从中取出2粒都是白子"为互斥事件,故从中任意取出2粒恰好是同色的概率为$\frac{1}{7}+\frac{12}{35}=\frac{17}{35}$,任取2粒恰好不同色的概率为$1-\frac{17}{35}=\frac{18}{35}$.

8. 0.2

解析 由题意知A="摸出红球或白球"与B="摸出黑球"是对立事件,又∵$P(A)=0.58$,∴$P(B)=1-P(A)=0.42$.

又∵C="摸出红球或黑球"与D="摸出白球"为对立事件,$P(C)=0.62$,∴$P(D)=0.38$.设事件E="摸出红球",则$P(E)=1-P(B+D)=1-P(B)-P(D)=1-0.42-0.38=0.2$.

9. **解** 把3个选择题记为x_1,x_2,x_3,2个判断题记为p_1,p_2."甲抽到选择题,乙抽到判断题"的样本点为:$(x_1,p_1),(x_1,p_2),(x_2,p_1),(x_2,p_2),(x_3,p_1),(x_3,p_2)$,共6个;

"甲抽到判断题,乙抽到选择题"的样本点为:$(p_1,x_1),(p_1,x_2),(p_1,x_3),(p_2,x_1),(p_2,x_2),(p_2,x_3)$,共6个;

"甲、乙都抽到选择题"的样本点为:$(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_1),(x_3,x_2)$,共6个;"甲、乙都抽到判断题"的样本点为:$(p_1,p_2),(p_2,p_1)$,共2个.

因此样本点的总数为$6+6+6+2=20$(个).

(1)"甲抽到选择题,乙抽到判断题"的概率为$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$,"甲抽到判断题,乙抽到选择题"的概率为$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$,故"甲、乙两人中有一个抽到选择题,另一个抽到判断题"的概率为$\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$.

(2)"甲、乙两人都抽到判断题"的概率为$\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$,故"甲、乙两人至少有一人抽到选择题"的概率为$1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

10. **解** (1)从袋中随机取两个球,该试验的样本空间$\Omega_1=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$,共有6个样本点,且每个样本点出现的可能性相等.记"取出的球的编号之和不大于4"为事件A,$A=\{(1,2),(1,3)\}$,共有2个样本点,

故$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

(2)先从袋中随机取一个球,记下编号为m,放回后,再从袋中随机取一个球,记下编号为n,则样本空间$\Omega_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$,共有16个样本点,且每个样本点出现的可能性相等.记"满足$n<m+2$"为事件B,$B=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$,共有13个样本点,故"满足条件$n<m+2$"的事件的概率$P(B)=\frac{13}{16}$.

11. B [从5张卡片中任取2张,样本空间$\Omega=\{AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE,DE\}$,共含有10个样本点,且每个样本点出现的可能性相等.而恰好按字母顺序相邻为事件A,$A=\{AB,BC,CD,DE\}$,含有4个样本点,故此事件的概率$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.]

12. B ［由题意知样本空间为 $\Omega=\{(1.72,1.83),(1.72,2.28),(1.72,1.55),(1.72,0.62),(1.83,1.72),(1.83,2.28),(1.83,1.55),(1.83,0.62),(2.28,1.72),(2.28,1.83),(2.28,1.55),(2.28,0.62),(1.55,1.72),(1.55,1.83),(1.55,2.28),(1.55,0.62),(0.62,1.72),(0.62,1.83),(0.62,2.28),(0.62,1.55)\}$，共20个样本点，且每个样本点出现的可能性相等，
而满足条件的有 $\{(1.72,1.83),(1.72,2.28),(1.83,1.72),(1.83,2.28),(2.28,1.72),(2.28,1.83),(2.28,1.55),(1.55,2.28)\}$，共8个样本点，故所求概率为 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.］

13. D ［由题意可知 $\begin{cases}0<P(A)<1,\\0<P(B)<1,\\P(A)+P(B)\leqslant 1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}0<2-a<1,\\0<4a-5<1,\\3a-3\leqslant 1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}1<a<2,\\\frac{5}{4}<a<\frac{3}{2},\\a\leqslant\frac{4}{3},\end{cases}$

解得 $\frac{5}{4}<a\leqslant\frac{4}{3}$.］

14. 3或4

解析　点 P 的所有可能坐标为 $(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)$，
则当 $n=2$ 时，P 点是 $(1,1)$，
当 $n=3$ 时，P 点可能是 $(1,2),(2,1)$.
当 $n=4$ 时，P 点可能为 $(1,3),(2,2)$，
当 $n=5$ 时，P 点是 $(2,3)$，
即事件 C_3,C_4 的概率最大，故 $n=3$ 或4.

15. D ［设齐王的下等马、中等马、上等马分别记为 a_1,a_2,a_3，田忌的下等马、中等马、上等马分别记为 b_1,b_2,b_3，
齐王与田忌赛马，其情况有：
$(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)$，齐王获胜；
$(a_1,b_1),(a_2,b_3),(a_3,b_2)$，齐王获胜；
$(a_2,b_1),(a_1,b_2),(a_3,b_3)$，齐王获胜；
$(a_2,b_1),(a_1,b_3),(a_3,b_2)$，齐王获胜；
$(a_3,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_3)$，田忌获胜；
$(a_3,b_1),(a_1,b_3),(a_2,b_2)$，齐王获胜，共6种等可能结果.
其中田忌获胜的只有一种 $(a_3,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_3)$，
则田忌获胜的概率为 $\frac{1}{6}$，故选D.］

16. **解**　(1)把3个黄球分别记为 A,B,C，3个白球分别记为1,2,3.
从6个球中随机摸出3个球的所有可能结果为 $ABC,AB1,AB2,AB3,AC1,AC2,AC3,A12,A13,A23,BC1,BC2,BC3,B13,B23,C12,C13,C23,123$，共20个.
记事件 E＝“一次摸出的3个球均为白球”，则事件 E 包含的所有可能结果只有1个，故 $P(E)=\frac{1}{20}=0.05$.
(2)记事件 F＝“一次摸出的3个球为2个黄球和1个白球”，则事件 F 包含的所有可能结果有9个，故 $P(F)=\frac{9}{20}=0.45$.
(3)记事件 G＝“一次摸出的3个球为同一颜色”，
则 $P(G)=\frac{2}{20}=0.1$.
假定一天中有100人次摸奖，由摸出的3个球为同一颜色的概率可估计一天中事件 G 发生10次，不发生90次.
故该摊主一天的收入为 $90\times1-10\times5=40$(元)，一个月的收入为 $40\times30=1\,200$(元).

§10.2　事件的相互独立性(一)

1. B ［事件 $A=\{2,4,6\}$，事件 $B=\{3,6\}$，事件 $AB=\{6\}$，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，所以 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(AB)=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，因此事件 A 与 B 相互独立. 当“掷出6点”时，事件 A,B 同时发生，所以 A,B 不是互斥事件.］

2. ACD ［在A中，甲射击一次，“射中9环”与“射中8环”两个事件不可能同时发生，二者是互斥事件，不独立；在B中，甲、乙各射击一次，“甲射中10环”发生与否对“乙射中9环”的概率没有影响，二者是相互独立事件；在C中，甲、乙各射击一次，“甲、乙都射中目标”与“甲、乙都没有射中目标”不可能同时发生，二者是互斥事件，不独立；在D中，设“至少有1人射中目标”为事件 A，“甲射中目标但乙未射中目标”为事件 B，则 $AB=B$，因此当 $P(A)\neq1$ 时，$P(AB)\neq P(A)\cdot P(B)$，故A,B不独立. 故选ACD.］

3. C ［A_i 表示“第 i 次击中目标”，$i=1,2$，
则 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.9\times0.9=0.81$.］

4. D ［设“甲被录取”记为事件 A，“乙被录取”记为事件 B，则两人至少有一人被录取的概率 $P=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-[1-P(A)][1-P(B)]=1-0.4\times0.3=0.88$.］

5. C ［记4个选项中的事件分别为 A,B,C,D，则：
$P(A)=1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$，
$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，
$P(C)=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$，
$P(D)=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.］

6. CD ［在A中，M,N 是互斥事件，不相互独立；在B中，M,N 不是相互独立事件；在C中，$P(M)=\frac{1}{2}$，$P(N)=\frac{1}{2}$，$P(MN)=\frac{1}{4}$，$P(MN)=P(M)P(N)$，因此 M,N 是相互独立事件；在D中，第一次为正面对第二次的结果不影响，因此 M,N 是相互独立事件.］

7. $\frac{3}{5}$

解析　设此队员每次罚球的命中率为 P，
则 $1-P^2=\frac{16}{25}$，所以 $P=\frac{3}{5}$.

8. 0.56　0.06

解析　设 A＝“甲中靶”，B＝“乙中靶”，A 与 B 相互独立，利用 $P(AB)=P(A)P(B)$ 得 $P(AB)=0.8\times0.7=0.56$，$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.8)(1-0.7)=0.06$.

9. **解**　记 A 表示事件“进入商场的1位顾客购买甲种商品”，
则 $P(A)=0.5$；
记 B 表示事件“进入商场的1位顾客购买乙种商品”，则 $P(B)=0.6$；
记 C 表示事件“进入商场的1位顾客甲、乙两种商品都购买”；
记 D 表示事件“进入商场的1位顾客购买甲、乙两种商品中的一种”；
记 E 表示事件“进入商场的1位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种”.
(1)易知 $C=AB$，则 $P(C)=P(AB)=P(A)P(B)=0.5\times0.6=0.3$.
(2)易知 $D=(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)$，则 $P(D)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$
$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.5\times0.4+0.5\times0.6=0.5$.
(3)易知 $\overline{E}=\overline{A}\,\overline{B}$，则 $P(\overline{E})=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0.5\times0.4=0.2$. 故 $P(E)=1-P(\overline{E})=0.8$.

10. **解**　(1)设三人中恰有两人的消费额不少于300元的概率为 P_1，
则 $P_1=(0.7)^2\times0.4+2\times0.3\times0.7\times0.6=0.448$.
(2)消费总额为1 500元的概率是 $0.1\times0.1\times0.2=0.002$，
消费总额为1 400元的概率是 $(0.1)^2\times0.2+2\times(0.2)^2\times0.1=0.010$，
消费总额为1 300元的概率是 $(0.1)^2\times0.3+0.3\times0.1\times0.2+0.1\times0.4\times0.2+0.2^3+2\times0.2^2\times0.1=0.033$，
所以消费总额大于或等于1 300元的概率是0.045.

11.C [满足 $xy=4$ 的所有可能如下：
$x=1,y=4$；$x=2,y=2$；$x=4,y=1$.
∴所求事件的概率为
$P=P(x=1,y=4)+P(x=2,y=2)+P(x=4,y=1)$
$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$.]

12.D [由题意知，$P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=\frac{1}{9}$，
$P(\overline{A})\cdot P(B)=P(A)\cdot P(\overline{B})$.
设 $P(A)=x,P(B)=y$，
则 $\begin{cases}(1-x)(1-y)=\frac{1}{9},\\(1-x)y=x(1-y),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1-x-y+xy=\frac{1}{9},\\x=y.\end{cases}$
∴$x^2-2x+1=\frac{1}{9}$，∴$x-1=-\frac{1}{3}$，或 $x-1=\frac{1}{3}$(舍去)，
∴$x=\frac{2}{3}$.]

13.C [灯不亮包括四个开关都断开，或下边的 2 个都断开且上边的 2 个中有一个断开，这两种情况是互斥的，每一种情况中的事件是相互独立的，
∴灯不亮的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$.
∵灯亮与不亮是对立事件，∴灯亮的概率是 $1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$.]

14.0.128
解析 由已知条件知，第 2 个问题答错，第 3，4 个问题答对，记"问题回答正确"事件为 A，则 $P(A)=0.8$，故 $P=P[(A+\overline{A})\overline{A}AA]=[1-P(A)]\cdot P(A)\cdot P(A)=0.128$.

15.ACD [由题意知，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{4}$，$P(D)=\frac{1}{5}$，$P(E)=\frac{1}{6}$，所以 A，B 两个盒子畅通的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，因此 A 正确；$D$，$E$ 两个盒子并联后畅通的概率为 $1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$，因此 B 错误；$A$，$B$，$C$ 三个盒子混联后畅通的概率为 $1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，因此 C 正确；当开关合上时，电路畅通的概率为 $\frac{29}{30}\times\frac{5}{6}=\frac{29}{36}$，因此 D 正确.]

16.**解** 甲、乙两人租车时间超过三小时不超过四小时的概率分别为
$1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.
(1)租车费用相同可分为租车费用都为 0 元、2 元、4 元三种情况.
都付 0 元的概率为 $P_1=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$；
都付 2 元的概率为 $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$；
都付 4 元的概率为 $P_3=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$.
所以甲、乙两人所付租车费用相同的概率为 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{5}{16}$.
(2)设甲、乙两人所付的租车费用之和为 ξ，则 $\xi=4$ 表示两人的租车费用之和为 4 元，其可能的情况是甲、乙的租车费用分别为①0 元，4 元；②2 元，2 元；③4 元，0 元.
所以可得 $P(\xi=4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$，
即甲、乙两人所付的租车费用之和为 4 元的概率为 $\frac{5}{16}$.

§10.2 事件的相互独立性(二)

1.C [相互独立的两个事件彼此没有影响，可以同时发生，因此它们不可能互斥.]

2.D [恰有一株成活的概率为 $p(1-q)+(1-p)q=p-pq+q-pq=p+q-2pq$.]

3.C [两班各自派出代表是相互独立事件，设事件 A，B 分别为甲班、乙班派出的是三好学生，则事件 AB 为两班派出的都是三好学生，则 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{9}{36}\times\frac{6}{36}=\frac{1}{24}$.]

4.B [设事件 A："从中任挑一儿童，这两项至少有一项合格"，则其对立事件 B："从中任挑一儿童，这两项都不合格"，由题可知，儿童体型不合格的概率为 $\frac{4}{5}$，身体关节构造不合格的概率为 $\frac{3}{4}$，所以 $P(B)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$，故 $P(A)=1-P(B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.]

5.C [设 $A_i=\{$第 i 次拨号接通电话$\}$，$i=1,2,3$，第 3 次拨号才接通电话可表示为 $\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3$，显然，$\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$，$A_3$ 相互独立，所以 $P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$.]

6.CD [记"第一次抽奖抽到某一指定号码"为事件 A，"第二次抽奖抽到某一指定号码"为事件 B，则"两次抽奖都抽到某一指定号码"为事件 AB. 由于两次抽奖结果互不影响，因此 A 与 B 相互独立. 于是由事件独立性可得，两次抽奖都抽到某一指定号码的概率为 $P(AB)=P(A)P(B)=0.05\times0.05=0.002\ 5$. 同理"两次抽奖都没有抽到某一指定号码"的概率为 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0.95\times0.95=0.902\ 5$；"两次抽奖恰有一次抽到某一指定号码"可以用 $(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)$ 表示. 由于事件 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥，根据概率加法公式和相互独立事件的定义，得所求的概率为 $P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.05\times(1-0.05)+(1-0.05)\times0.05=0.095$；"两次抽奖至少有一次抽到某一指定号码"可用 $(AB)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)$ 表示. 由于事件 AB，$A\overline{B}$ 和 $\overline{A}B$ 两两互斥，根据概率加法公式和相互独立事件的定义，得所求的概率为 $P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=0.002\ 5+0.095=0.097\ 5$.]

7.0.26
解析 所求概率 $P=0.8\times0.1+0.2\times0.9=0.26$.

8.0.98
解析 至少有一个准时响的概率为 $1-(1-0.90)(1-0.80)=1-0.10\times0.20=0.98$.

9.**解** (1)设事件 A 表示"甲及格"，事件 B 表示"乙及格"，事件 C 表示"丙及格"，
则 $P(A)=\frac{4}{5}$，$P(B)=\frac{3}{5}$，$P(C)=\frac{7}{10}$，
三人中有且只有 2 人及格的概率为
$P_1=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$
$=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)$
$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{7}{10}\right)+\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{10}+\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{113}{250}$.
(2)"三人中至少有一人不及格"的对立事件为"三人都及格"，
三人中至少有一人不及格的概率为
$P_2=1-P(ABC)=1-P(A)P(B)P(C)$
$=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{83}{125}$.

10.**解** (1)设"A 机构在一定时期内研制出疫苗"为事件 D，"B 机构在一定时期内研制出疫苗"为事件 E，"C 机构在一定时期内研制出疫苗"为事件 F，
则 $P(D)=\frac{1}{5}$，$P(E)=\frac{1}{4}$，$P(F)=\frac{1}{3}$，
∴他们能研制出疫苗的概率 $P=1-P(\overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F})=1-\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{5}$.
(2)至多有一个机构研制出疫苗的概率为
$P(D\overline{E}\,\overline{F}\cup\overline{D}E\overline{F}\cup\overline{D}\,\overline{E}F\cup\overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F})$
$=P(D\overline{E}\,\overline{F})+P(\overline{D}E\overline{F})+P(\overline{D}\,\overline{E}F)+P(\overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F})$
$=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$.

11.B [设开关 a，b，c 闭合的事件分别为 A，B，C，则灯亮这一事件 $E=ABC\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C$，且 A，B，C 相互独立，

$ABC,AB\overline{C},A\overline{B}C$ 互斥，所以

$P(E)=P(ABC\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C)$

$=P(ABC)+P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)$

$=P(A)P(B)P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{8}$.]

12. A　[事件 A,B 是相互独立的，$P(A)=0.4,P(B)=0.3$，
在①中，$P(AB)=P(A)P(B)=0.4\times0.3=0.12$，故①正确；
在②中，$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=0.6\times0.3=0.18$，故②正确；
在③中，$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.4\times0.7=0.28$，故③正确；
在④中，$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0.6\times0.7=0.42$，故④正确.]

13. D　[∵在如图所示的电路中，每个开关闭合的概率都是 $\frac{2}{3}$，三个开关的闭合是相互独立的，∴电路中灯亮的概率为 $P=1-\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{22}{27}$.]

14. $\frac{15}{16}$

解析　当天小王没有通过"科目一"考试的概率为 $(1-0.5)(1-0.5)(1-0.5)(1-0.5)=0.0625=\frac{1}{16}$，则当天小王通过"科目一"考试的概率为 $1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.

15. $\frac{3}{8}$

解析　首先分清从 E 处出发到达 B 处的具体途径，然后继续求解.

钢珠从 E 处落下，①有 $\frac{1}{2}$ 的概率落到 EF，经 FH 后有 $\frac{1}{2}$ 的概率落到 HJ，经 JM 后有 $\frac{1}{2}$ 的概率落到 MN，最后落到 B 处，即 $P_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$；

②有 $\frac{1}{2}$ 的概率落到 EF，经 FH 后有 $\frac{1}{2}$ 的概率落到 HK，经 KO 后有 $\frac{1}{2}$ 的概率落到 ON，最后落到 B 处，即 $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$；

③有 $\frac{1}{2}$ 的概率落到 EG，经 GI 后有 $\frac{1}{2}$ 的概率落到 IK，经 KO 后有 $\frac{1}{2}$ 的概率落到 ON，最后落到 B 处，即 $P_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

所以 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{3}{8}$.

16. **解**　(1)三人都合格的概率为 $P_1=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$.

(2)有2人合格的概率为

$P_2=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{23}{60}$.

(3)至少有一人合格的概率为

$P=1-\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{10}$.

§10.3　频率与概率

1. D　[降雨概率为90%是指明天降雨这个随机事件发生的可能性为90%，明天也可能不下雨，故选D.]

2. C　[$80\times(1-80\%)=16$.]

3. CD　[在A中，应为出现正面的频率是 $\frac{5}{9}$，A错误；在B中，摸到白球的概率要小于摸到红球或黑球的概率，B错误；在C中，取得的数小于0的概率大于不小于0的概率，C正确；在D中，任取100件产品，次品的件数是随机的，D正确. 故选C，D.]

4. C　[由题意得，$n=4\ 500-200-2\ 100-1\ 000=1\ 200$，所以随机调查的消费者中对网上购物"比较满意"或"满意"的总人数为 $1\ 200+2\ 100=3\ 300$，

所以随机调查的消费者中对网上购物"比较满意"或"满意"的频率为 $\frac{3\ 300}{4\ 500}=\frac{11}{15}$.

由此估计在网上购物的消费者群体中对网上购物"比较满意"或"满意"的概率为 $\frac{11}{15}$.]

5. A　[由10组随机数知，3个随机数都在4～9中的有569，989两组，故所求的概率为 $P=\frac{2}{10}=0.2$.]

6. CD　[A，B混淆了频率与概率的区别，A，B错误；C正确；在D中，频率是概率的估计值，D正确. 故选C，D.]

7. 选出的4人中，只有1个男生

解析　用1～4代表男生，用5～9代表女生，4678表示选出的4人中，有1个男生3个女生.

8. 0.4　0.93

解析　记该班的测试成绩在[60，70)，[70，80)，[80，90)，[90，100]内依次为事件 A,B,C,D，由题意知事件 A,B,C,D 是两两互斥的. 该班成绩在[80，100]内的概率是 $P(C\cup D)=P(C)+P(D)=0.25+0.15=0.4$. 该班成绩在[60，100]内的概率是 $P(A\cup B\cup C\cup D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=0.17+0.36+0.25+0.15=0.93$.

9. **解**　(1)频数分别是15，65，72；频率分别是20%，25%，27%，24%，25%.

(2)可能不一样，因为频率会随每次试验的变化而变化.

(3)频率集中在25%附近，所以可估计概率为0.25.

10. **解**　(1)由已知共调查了100人，其中40分钟内不能赶到火车站的有12+12+16+4=44(人)，所以用频率估计相应的概率为0.44.

(2)选择 L_1 的有60人，选择 L_2 的有40人，故由调查结果得频率为

所用时间/分	10～20	20～30	30～40	40～50	50～60
选择 L_1 所用时间的频率	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
选择 L_2 所用时间的频率	0	0.1	0.4	0.4	0.1

11. A　[这种鱼卵的孵化频率为 $\frac{8\ 513}{10\ 000}=0.851\ 3$，它近似的为孵化的概率.]

12. B　[由于甲公司桑塔纳的比例为 $\frac{100}{100+3\ 000}=\frac{1}{31}$，

乙公司桑塔纳的比例为 $\frac{3\ 000}{3\ 000+100}=\frac{30}{31}$，

可知肇事车在乙公司的可能性大些.]

13. ACD　[对于A，C，D，甲胜、乙胜的概率都是 $\frac{1}{2}$，游戏是公平的；对于B，点数之和大于7和点数之和小于7的概率相等，但点数等于7时乙胜，所以甲胜的概率小，游戏不公平.]

14. 0.25

解析　表示三次击中目标分别是3013，2604，5725，6576，6754，共5组数，而随机数总共20组，所以所求的概率近似为 $\frac{5}{20}=0.25$.

15. 64　0.4

解析　由于[6，10)范围内，频率/组距=0.08，所以频率=0.08×4=0.32，而频数=频率×样本容量，所以频数=0.32×200=64. 由频率估计概率可知，在[2，10)范围内的概率约为(0.02+0.08)×4=0.4.

16. **解**　列表如下：

B / A	3	4	5	6
1	4	5	6	7
2	5	6	7	8
3	6	7	8	9

由表可知，样本点共12个，和为6的样本点只有3个.

因为 $P(\text{和为}6)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$，所以甲、乙获胜的概率不相等.

所以这样的游戏规则不公平. 如果将规则改为"和是6或7，则甲胜，否则乙胜"，那么此时游戏规则是公平的.

章末检测试卷一(第六章)

1. C [向量不能比较大小,所以 A 不正确;$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 需满足两个条件:$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,所以 B 不正确;C 正确;若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是共线向量,则只需 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反,D 不正确.]

2. C [依题意得,$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$,
即 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$,故选 C.]

3. D

4. A [依题意,设 $a=4k,b=3k,c=2k(k>0)$,则 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{16k^2+4k^2-9k^2}{2\times4k\times2k}=\dfrac{11}{16}$.]

5. C [因为向量 $\boldsymbol{a}=(x,1),\boldsymbol{b}=(1,y),\boldsymbol{c}=(2,-4)$且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,
所以 $2x-4=0\Rightarrow x=2,1\times(-4)-2y=0\Rightarrow y=-2$,
从而 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)+(1,-2)=(3,-1)$,
因此$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$,故选 C.]

6. B [根据已知条件可知,在$\triangle ABC$ 中,$AB=20,\angle BAC=30^\circ$,$\angle ABC=105^\circ$,所以$\angle C=45^\circ$,
由正弦定理,得$\dfrac{BC}{\sin 30^\circ}=\dfrac{20}{\sin 45^\circ}$,
所以 $BC=\dfrac{20\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=10\sqrt{2}$. 故选 B.]

7. A [$\because c\cos A+a\cos C=2c$,
$\therefore$由正弦定理,可得 $\sin C\cos A+\sin A\cos C=2\sin C$,
$\therefore\sin(A+C)=2\sin C$,$\therefore\sin B=2\sin C$,$\therefore b=2c$,
又 $a=b$,$\therefore a=2c$.
$\therefore\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{4c^2+c^2-4c^2}{2\times2c^2}=\dfrac{1}{4}$,
$\because B\in(0,\pi)$,$\therefore\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.]

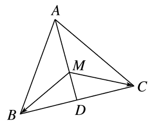
8. B [$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$为 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的单位向量,
$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$为 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量,
则$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$的方向为$\angle BAC$ 的平分线$\overrightarrow{AD}$ 的方向.
又 $\lambda\in(0,+\infty)$,
所以$\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$的方向与$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$的方向相同.
而 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$,
所以点 P 在$\overrightarrow{AD}$ 上移动,
所以点 P 的轨迹一定通过$\triangle ABC$ 的内心.]

9. ABC [$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BQ})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ})-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PQ}$;$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{QC})=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ})=\overrightarrow{PQ}$;$\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{PQ}$;$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{BQ}\neq\overrightarrow{PQ}$.]

10. AB [因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量,
且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\leqslant0$,
所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}^2\leqslant0$,
所以 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\geqslant1$,
而$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2}$
$=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}$
$=\sqrt{3-2\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}\leqslant\sqrt{3-2}=1$,
所以选项 C,D 不正确,故选 AB.]

11. BC [设 $BC=a,c=4,b=5$,$\because\triangle BCD$ 是等边三角形,
$\therefore S_{\triangle BCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$,
由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,
得 $S_{四边形ABDC}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2+\dfrac{1}{2}cb\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(25+16-40\cos A)+\dfrac{1}{2}\times20\sin A=\dfrac{41\sqrt{3}}{4}+10\sin A-10\sqrt{3}\cos A=\dfrac{41\sqrt{3}}{4}+20\sin\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)$.
故当 $A-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $A=\angle BAC=\dfrac{5\pi}{6}$时,四边形 $ABDC$ 的面积最大,为$\dfrac{41\sqrt{3}}{4}+20$,故选 BC.]

12. ACD [A 项,$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}$,即 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$,则点 M 是边 BC 的中点,所以 A 正确;
B 项,$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,即 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}$,则点 M 在线段 CB 的延长线上,所以 B 错误;
C 项,如图,设 BC 的中点为 D,



则 $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$,由重心性质可知 C 成立;
D 项,$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,
且 $x+y=\dfrac{1}{2}\Rightarrow2\overrightarrow{AM}=2x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AC}$,$2x+2y=1$,
设 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$,
所以 $\overrightarrow{AD}=2x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AC}$,$2x+2y=1$,
可知 B,C,D 三点共线,
所以$\triangle MBC$ 的面积是$\triangle ABC$ 面积的$\dfrac{1}{2}$,所以 D 正确.]

13. $\dfrac{1}{2}$

解析 $\overrightarrow{AB}=(a-2,-2)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,b-2)$,
依题意,有$(a-2)(b-2)-4=0$,
即 $ab-2a-2b=0$,
所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$.

14. 等腰三角形或直角三角形

解析 由 $a^2\cos A\sin B=b^2\sin A\cos B$ 及正弦定理,
得 $\sin 2A=\sin 2B$,
所以 $A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$,
故$\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

15. 2

解析 以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴,AD 所在直线为 y 轴,建立直角坐标系(图略),
则由题意得 $A(0,0),B(2,0),D(0,1),C(1,1),M\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.
所以 $\overrightarrow{MA}=\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{MD}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,
所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{4}=2$.

16. $\dfrac{\pi}{12}$　15

解析 由题意,得$\angle CPD=\angle EDP-\angle DCP=2\theta-\theta=\theta$,
$\therefore PD=CD=30$,
$\angle DPE=\angle AEP-\angle EDP=4\theta-2\theta=2\theta$,
$\therefore PE=DE=10\sqrt{3}$,
在$\triangle PDE$ 中,由余弦定理得,
$\cos 2\theta=\dfrac{PD^2+DE^2-PE^2}{2PD\cdot DE}=\dfrac{30^2+(10\sqrt{3})^2-(10\sqrt{3})^2}{2\times30\times10\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
$\therefore2\theta=\dfrac{\pi}{6}$,$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{12}$,$4\theta=\dfrac{\pi}{3}$,
$\because\sin 4\theta=\dfrac{PA}{PE}$,
$\therefore PA=PE\cdot\sin 4\theta=10\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=15$.

17. **解** (1)因为 $\overrightarrow{AB}=(-1,3)$,$\overrightarrow{BC}=(3,m)$,$\overrightarrow{CD}=(1,n)$,
所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(3,3+m+n)$,
因为 $\overrightarrow{AD}/\!/\overrightarrow{BC}$,设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$,
即$\begin{cases}3=3\lambda,\\3+m+n=\lambda m,\end{cases}$
解得 $n=-3$.
(2)因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2,3+m)$,
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(4,m-3)$,
又 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$,所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,

即 $8+(3+m)(m-3)=0$，
解得 $m=\pm1$.

18. **解**　(1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+(-\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2$.
∵ A,E,C 三点共线，∴存在实数 k，使得 $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{EC}$，
即 $\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2=k(-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，
得 $(1+2k)\boldsymbol{e}_1=(k-1-\lambda)\boldsymbol{e}_2$.
∵ $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的非零向量，
∴ $\begin{cases}1+2k=0,\\k-1-\lambda=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2},\\\lambda=-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$
(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=-3\boldsymbol{e}_1-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_2=(-6,-3)+(-1,1)=(-7,-2)$.
(3) ∵ A,B,C,D 四点按逆时针顺序构成平行四边形，
∴ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. 设 $A(x,y)$，则 $\overrightarrow{AD}=(3-x,5-y)$.
∵ $\overrightarrow{BC}=(-7,-2)$，∴ $\begin{cases}3-x=-7,\\5-y=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10,\\y=7,\end{cases}$
即点 A 的坐标为 $(10,7)$.

19. **解**　(1)在 $\triangle ABD$ 中，$AD=5,AB=7,\angle BDA=60^\circ$，
由余弦定理可得，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle BDA$，
即 $49=25+BD^2-2\times5\cdot BD\cdot\cos60^\circ$，
则 $BD^2-5BD-24=0$，
解得 $BD=8$($BD=-3$ 舍去).
(2)在 $\triangle BCD$ 中，$\angle BDC=\angle ADC-\angle BDA=75^\circ-60^\circ=15^\circ$，
又 $\angle BCD=135^\circ$，则 $\angle CBD=180^\circ-135^\circ-15^\circ=30^\circ$.
由(1)得 $BD=8$，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}$，
即 $\dfrac{CD}{\sin30^\circ}=\dfrac{8}{\sin135^\circ}$，
解得 $CD=4\sqrt{2}$.

20. **解**　(1)选择条件①：
由题意得 $8ac\sin B=3(a^2+c^2-b^2)$.
即 $4\sin B=3\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，
整理可得 $3\cos B-4\sin B=0$，
又 $\sin B>0$，所以 $\cos B>0$，
所以 $\tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{3}{4}$.
选择条件②：
因为 $5b\cos C+4c=5a$，
由正弦定理得 $5\sin B\cos C+4\sin C=5\sin A$，
$5\sin B\cos C+4\sin C=5\sin(B+C)$，
即 $\sin C(4-5\cos B)=0$.
在 $\triangle ABC$ 中，$\sin C\neq0$，所以 $\cos B=\dfrac{4}{5}$，又 $0<B<\pi$，
$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\dfrac{3}{5}$，
所以 $\tan B=\dfrac{3}{4}$.
(2)选择①：由 $\tan B=\dfrac{3}{4}$，得 $\sin B=\dfrac{3}{5}$，又 $S=42,a=10$，
则 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times10c\times\dfrac{3}{5}=42$，解得 $c=14$.
将 $S=42,a=10,c=14$ 代入 $6c^2=16S+3(b^2+c^2-a^2)$ 中，
得 $6\times14^2=16\times42+3(b^2+14^2-10^2)$，
解得 $b=6\sqrt{2}$.
选择②：$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times10c\times\dfrac{3}{5}=42$，
解得 $c=14$，又 $a=10$，
由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，
即 $b^2=100+196-2\times140\times\dfrac{4}{5}=72$，所以 $b=6\sqrt{2}$.

21. **解**　(1)由正弦定理及 $b\cos B=a\cos A$，
得 $\sin2B=\sin2A$.
因为 $a>b$，
所以 $A>B$，
所以 $2A+2B=\pi$，
所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$，
所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.
(2)由(1)得 $\angle BCN=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，
则 $b=\dfrac{1}{\cos\theta},a=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta}$，
$f(\theta)=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}=\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
所以当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，此时 $a>b$，满足题意 $f(\theta)$ 取得最大值，为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

22. **解**　(1)由 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，
可得 $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
∵ $\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，∴ $\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AR}=-\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
(2)将 $\overrightarrow{BQ}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CR}=-\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，
代入 $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{CR}$，
则有 $\overrightarrow{AB}+\lambda\left(-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AC}+\mu\left(-\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)$，
即 $(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\mu\overrightarrow{AB}+(1-\mu)\overrightarrow{AC}$，
∵ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线，
∴ $\begin{cases}1-\lambda=\dfrac{1}{3}\mu,\\\dfrac{1}{2}\lambda=1-\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{4}{5},\\\mu=\dfrac{3}{5}.\end{cases}$
(3)设 $\overrightarrow{BP}=m\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AI}$.
由(2)知 $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，
∴ $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=n\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}=n\left(\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AB}=\dfrac{2n}{5}\cdot\overrightarrow{AC}+\left(\dfrac{n}{5}-1\right)\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{AC}-m\overrightarrow{AB}$，
∴ $\begin{cases}-m=\dfrac{n}{5}-1,\\m=\dfrac{2n}{5},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{2}{3},\\n=\dfrac{5}{3},\end{cases}$
∴ $\overrightarrow{BP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，即 $\dfrac{BP}{PC}=2$，
∴点 P 在 BC 的三等分点且靠近点 C 处.

章末检测试卷二(第七章)

1. C　[$i^3-\dfrac{2}{i}=-i-\dfrac{2i}{i^2}=-i+2i=i$.]
2. A　[$\dfrac{2}{2+i}=\dfrac{2(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i$，所以复数 $\dfrac{2}{2+i}$ 的虚部是 $-\dfrac{2}{5}$.]
3. B　[根据复数的运算可得复数 $z=-2+i$，
则 z 对应的点 $(-2,1)$ 在第二象限.]
4. D　[在复平面内通过已知三个点易知第四个顶点对应的复数为 $-1+3i$.]
5. A　[$z=\dfrac{1+5i}{1+i}-a=\dfrac{(1+5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}-a=\dfrac{6+4i}{2}-a=(3-a)+2i$，
由题意得 $3-a=2\times2$，解得 $a=-1$.]
6. C　[∵ $z=3-4i$，∴ $a=|z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5,b=-4$，∴ $a+b=1$.]
7. A　[由 b 是方程 $x^2+(4+i)x+4+ai=0(a\in\mathbf{R})$ 的根可得 $b^2+(4+i)b+4+ai=0$，
整理可得 $(b+a)i+(b^2+4b+4)=0$，
所以 $\begin{cases}b+a=0,\\b^2+4b+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-2,\end{cases}$ 所以 $z=2-2i$.]
8. A　[$z_1-z_2=\dfrac{(2-4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{-10i}{5}=-2i$，
由 $|z_1|=|z_2|=1$，设 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,z_2=\cos\beta+i\sin\beta$，
∴ $\cos\alpha=\cos\beta,\sin\alpha-\sin\beta=-2$，
∴ $\cos\alpha=\cos\beta=0,\sin\alpha=-1,\sin\beta=1$，
∴ $z_1=-i,z_2=i$，∴ $z_1\cdot z_2=-i\cdot i=1$.]
9. BD　[∵ $z=\dfrac{2}{-1+i}=\dfrac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=-1-i$，
∴ $|z|=\sqrt{2}$，A 不正确；

$z^2=(-1-i)^2=2i$,B 正确;
z 的共轭复数为 $-1+i$,C 不正确;
z 的虚部为 -1,D 正确.]

10. ABC [两个不全为实数的复数不能比较大小,故 A 错误;原点也在虚轴上,表示实数 0,故 B 错误;实数的虚部为 0,故 C 错误;D 中 $z^3+1=\frac{1}{i^3}+1=i+1$,对应点在第一象限,故 D 正确.]

11. BC [对于 A,若 $|z_1+z_2|=0$,则 $z_1+z_2=0$,$z_1=-z_2$,所以 $\overline{z_1}=\overline{z_2}$ 不正确;对于 B,若 $z_1=\overline{z_2}$,则 z_1 和 z_2 互为共轭复数,所以 $\overline{z_1}=z_2$;对于 C,设 $z_1=a_1+b_1i$,$z_2=a_2+b_2i(a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbf{R})$,若 $|z_1|=|z_2|$,则 $\sqrt{a_1^2+b_1^2}=\sqrt{a_2^2+b_2^2}$,$z_1\cdot\overline{z_1}=a_1^2+b_1^2$,$z_2\cdot\overline{z_2}=a_2^2+b_2^2$,所以 $z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}$;对于 D,若 $z_1=1$,$z_2=i$,则 $|z_1|=|z_2|$,而 $z_1^2=1$,$z_2^2=-1$,所以 $z_1^2=z_2^2$ 不正确.]

12. BC [根据题意,$M=\{m|m=i^n,n\in\mathbf{N}\}$,
当 $n=4k(k\in\mathbf{N})$ 时,$i^n=1$;
当 $n=4k+1(k\in\mathbf{N})$ 时,$i^n=i$;
当 $n=4k+2(k\in\mathbf{N})$ 时,$i^n=-1$;
当 $n=4k+3(k\in\mathbf{N})$ 时,$i^n=-i$,
$\therefore M=\{-1,1,i,-i\}$.
选项 A 中,$(1-i)(1+i)=2\notin M$;
选项 B 中,$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i\in M$;
选项 C 中,$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i\in M$;
选项 D 中,$(1-i)^2=-2i\notin M$.]

13. 2 $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

解析 因为 $z=(a-2)+(a+1)i(a\in\mathbf{R})$是纯虚数,
故 $\begin{cases}a-2=0,\\a+1\neq0,\end{cases}$ 故 $a=2$.
此时 $\frac{a+i}{1+ai}=\frac{2+i}{1+2i}=\frac{(2+i)(1-2i)}{5}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$.

14. $2\sqrt{5}$

解析 由 $z_1=1-i$,$z_2=3-5i$ 知 $Z_1(1,-1)$,$Z_2(3,-5)$,
所以 $d=\sqrt{(3-1)^2+(-5+1)^2}=2\sqrt{5}$.

15. ±1

解析 $\overline{z}=a-i$,因为复数 z 与它的共轭复数 $\overline{z}$ 所对应的向量互相垂直,所以 $a^2=1$,所以 $a=\pm1$.

16. $\frac{3}{2}$

解析 $z_1\cdot z_2=(\cos\theta-i)\cdot(\sin\theta+i)$
$=(\cos\theta\sin\theta+1)+i(\cos\theta-\sin\theta)$,
故实部为 $\cos\theta\sin\theta+1=1+\frac{1}{2}\sin2\theta\leqslant\frac{3}{2}$,最大值为 $\frac{3}{2}$.

17. **解** $z_2=\frac{15-5i}{(2+i)^2}=\frac{15-5i}{3+4i}=\frac{(15-5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$
$=\frac{25-75i}{25}=1-3i$,
则:(1)$z_1z_2=(2-3i)(1-3i)=-7-9i$.
(2)$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1-3i}=\frac{(2-3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$
$=\frac{11+3i}{10}=\frac{11}{10}+\frac{3}{10}i$.

18. **解** $\because\overrightarrow{CA}$ 对应的复数是 $2+4i$,
$\overrightarrow{CB}$ 对应的复数是 $4+i$,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$,
$\therefore\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为$(4+i)-(2+4i)=2-3i$,
又 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$,
$\therefore\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为$(3+i)+(2-3i)=5-2i$,
$\therefore$点 B 对应的复数为 $z_B=5-2i$.

19. **解** (1)由题意得 $\begin{cases}m-2>0,\\m^2-9>0,\end{cases}$ 解得 $m>3$,
所以 m 的取值范围是$\{m|m>3\}$.
(2)因为 $z=(m-2)+(m^2-9)i$,
所以 $\overline{z}=m-2+(9-m^2)i$,
因为 $\overline{z}$ 与复数 $\frac{8}{m}+5i$ 相等,
所以 $\begin{cases}m-2=\frac{8}{m},\\9-m^2=5,\end{cases}$ 解得 $m=-2$.

20. **解** 由题意,得 $z_1=\frac{-1+5i}{1+i}=2+3i$,
$z_2=a-2-i$,$\overline{z_2}=a-2+i$,
所以 $|z_1-\overline{z_2}|=|(2+3i)-(a-2+i)|$
$=|4-a+2i|=\sqrt{(4-a)^2+4}$,$|z_1|=\sqrt{13}$,
又因为 $|z_1-\overline{z_2}|<|z_1|$,
所以 $\sqrt{(4-a)^2+4}<\sqrt{13}$,
所以 $a^2-8a+7<0$,解得 $1<a<7$.
所以 a 的取值范围是$(1,7)$.

21. **解** (1)设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,
由已知条件得 $a^2+b^2=2$,$z^2=a^2-b^2+2abi$,
所以 $2ab=2$.
所以 $a=b=1$ 或 $a=b=-1$,即 $z=1+i$ 或 $z=-1-i$.
(2)当 $z=1+i$ 时,$z^2=(1+i)^2=2i$,$z-z^2=1-i$.
所以点 $A(1,1)$,$B(0,2)$,$C(1,-1)$,
所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AC|\times1=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.
当 $z=-1-i$ 时,$z^2=(-1-i)^2=2i$,$z-z^2=-1-3i$.
所以点 $A(-1,-1)$,$B(0,2)$,$C(-1,-3)$,
所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AC|\times1=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.
即$\triangle ABC$ 的面积为 1.

22. (1)**解** $\because z$ 是虚数,
$\therefore$可设 $z=x+yi$,$x,y\in\mathbf{R}$,且 $y\neq0$,
$\therefore\omega=z+\frac{1}{z}=x+yi+\frac{1}{x+yi}=x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}$
$=x+\frac{x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i$,
可得 $\begin{cases}y-\frac{y}{x^2+y^2}=0,\\y\neq0\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=1\Rightarrow|z|=1$,
此时,$\omega=2x\Rightarrow-\frac{1}{2}<x<1$,
即 z 的实部的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$.
(2)**证明** $\mu=\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-(x+yi)}{1+(x+yi)}=\frac{1-y^2-x^2-2yi}{1+2x+x^2+y^2}=\frac{-yi}{x+1}$,
$\because y\neq0$,$\therefore\mu$ 为纯虚数.
(3)**解** $\omega-\mu^2=2x-\left(-\frac{y}{1+x}i\right)^2$,化简得
$\omega-\mu^2=2(x+1)+\frac{2}{1+x}-3$
$\geqslant2\sqrt{2(x+1)\cdot\frac{2}{1+x}}-3=1$.
当且仅当 $x+1=\frac{1}{x+1}$,即 $x=0$ 时,$\omega-\mu^2$ 取得最小值 1.

期中检测试卷

1. B [$z=\frac{i}{1-2i}=\frac{i(1+2i)}{1-(2i)^2}=\frac{-2+i}{5}=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$,
其对应的点 $\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$ 位于第二象限.]

2. D [$\because z(1+i)=|3+4i|=5$,$\therefore z=\frac{5}{1+i}=\frac{5(1-i)}{2}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$.
$\therefore$复数 z 的虚部为 $-\frac{5}{2}$.]

3. B [设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$,所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{2|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2}$,
所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.]

4. B [因为 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,
所以 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，

所以 $\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{2}{9}$，从而 $\frac{\lambda}{\mu}=3$.]

5. C　[由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2b^2-2b^2\cos A$，

所以 $2b^2(1-\sin A)=2b^2(1-\cos A)$，

所以 $\sin A=\cos A$，即 $\tan A=1$，又 $0<A<\pi$，

所以 $A=\frac{\pi}{4}$.]

6. A　[因为 $m+(m^2-4)\mathrm{i}>0$，所以 $m+(m^2-4)\mathrm{i}$ 是实数，且 $\begin{cases}m>0,\\ m^2-4=0\end{cases}\Rightarrow m=2$，故 $\frac{m+2\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{2(1-\mathrm{i})}=\mathrm{i}$.]

7. B　[$\because\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$，$-\frac{1}{3}<x<0$，

$\therefore$ 由向量共线定理可知 O，B，C 三点共线.

$\because\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，$\therefore\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

又 $\because -\frac{1}{3}<x<0$，

$\therefore$ 点 O 在线段 CD 上，且不与 C，D 点重合.]

8. A　[由已知和正弦定理得 $a^2+b^2-c^2=4b^2\cos C$，

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4b^2\cos C}{2ab}=\frac{2b}{a}\cos C$，

$\because\triangle ABC$ 为非直角三角形，$\therefore\cos C\neq0$，$\therefore a=2b$，

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$，

$\therefore\frac{1}{2}b\cdot2b\sin C=\frac{1}{2}b\cdot b\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}b\cdot2b\sin\frac{C}{2}$，

即 $2\sin C=4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=3\sin\frac{C}{2}$，

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore\sin\frac{C}{2}\neq0$，$\therefore\cos\frac{C}{2}=\frac{3}{4}$，

$\therefore\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$.]

9. BC　[由向量的运算法则知 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$；$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$，故 A 错，B 对；

$\because(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2=0$，

$\therefore\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AC}^2$，即 $AB=AC$，

$\therefore\triangle ABC$ 为等腰三角形，故 C 对；

$\because\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}>0$，

$\therefore$ 角 A 为锐角，但三角形不一定是锐角三角形.

故选 BC.]

10. ACD　[由向量加法的三角形法则可知选项 A 正确；

当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，故选项 B 错误；

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，故选项 C 正确；

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向共线时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos0°=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向共线时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos180°=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，所以选项 D 正确.]

11. AC　[由复数乘法的运算律知，A 正确；

取 $z_1=1$，$z_2=\mathrm{i}$，满足 $z_1^2+z_2^2=0$，但 $z_1=0$ 且 $z_2=0$ 不成立，B 错误；

由复数的模及共轭复数的概念知结论 C 成立；

由 $z_1=z_2$ 能推出 $|z_1|=|z_2|$，但 $|z_1|=|z_2|$ 推不出 $z_1=z_2$，

因此 $|z_1|=|z_2|$ 是 $z_1=z_2$ 的必要不充分条件，D 错误.]

12. ABD　[对于 A，若 $\cos A=\cos B$，则 $A=B$，$\therefore\triangle ABC$ 为等腰三角形，故正确；

对于 B，若 $A>B$，则 $a>b$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$，得 $2R\sin A>2R\sin B$，

即 $\sin A>\sin B$ 成立. 故正确；

对于 C，由余弦定理可得 $b=\sqrt{8^2+10^2-2\times8\times10\times\frac{1}{2}}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$，只有一解，故错误；

对于 D，若 $\sin^2A+\sin^2B<\sin^2C$，

则根据正弦定理得 $a^2+b^2<c^2$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，

$\therefore C$ 为钝角，$\therefore\triangle ABC$ 是钝角三角形，故正确；

综上，正确的判断为 ABD.]

13. $4+\mathrm{i}$

解析　两式相加得 $2z_1=8+2\mathrm{i}$，$\therefore z_1=4+\mathrm{i}$.

14. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

解析　设 $AB=x$，则 $AD=x$，$BD=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$，$BC=\frac{4\sqrt{3}}{3}x$.

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理，得

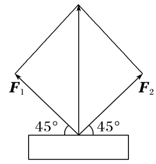
$\cos A=\frac{x^2+x^2-\frac{4}{3}x^2}{2x^2}=\frac{1}{3}$，则 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，

即 $\frac{x}{\sin C}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}x}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$，解得 $\sin C=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

15. 20

解析　如图，$\because|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=10\sqrt{2}$ N，

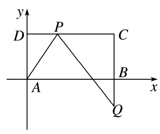


$\therefore|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=10\sqrt{2}\times\sqrt{2}=20$(N)，

$\therefore$ 物体的重力大小为 20 N.

16. $\frac{3}{4}$

解析　以点 A 为坐标原点，分别以 AB，AD 所在直线为 x 轴，y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，



设 $P(x,1)$，$Q(2,y)$，

由题意知 $0\leqslant x\leqslant2$，$-2\leqslant y\leqslant0$.

因为 $|\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{BQ}|$，所以 $|x|=|y|$，所以 $x=-y$.

因为 $\overrightarrow{PA}=(-x,-1)$，$\overrightarrow{PQ}=(2-x,y-1)$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=-x(2-x)-(y-1)=x^2-2x-y+1=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 取得最小值为 $\frac{3}{4}$.

17. **解**　(1)设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $b+2=0$，$b=-2$.

又 $\frac{z}{2-\mathrm{i}}=\frac{2a+2}{5}+\frac{a-4}{5}\mathrm{i}$，则 $\frac{a-4}{5}=0$，

解得 $a=4$，所以 $z=4-2\mathrm{i}$，

$|z|=2\sqrt{5}$.

(2)由题意得，$z_1=4+\frac{1}{m-1}+\left(2-\frac{7}{m+2}\right)\mathrm{i}$，

且 $\begin{cases}4+\frac{1}{m-1}>0,\\ 2-\frac{7}{m+2}<0,\end{cases}$

解得 $-2<m<\frac{3}{4}$ 或 $1<m<\frac{3}{2}$.

故 m 的取值范围为 $\left(-2,\frac{3}{4}\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

18. **解**　由 $b^2-a^2=\frac{1}{2}c^2$，$A=\frac{\pi}{4}$ 及正弦定理得

$\sin^2B-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin^2C$，所以 $-\cos2B=\sin^2C$.

又由 $A=\frac{\pi}{4}$，得 $B+C=\frac{3\pi}{4}$，

则 $-\cos2B=-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2C\right)=\sin2C=2\sin C\cos C$，

所以 $\sin^2C=2\sin C\cos C$，

又 $\sin C\neq0$，解得 $\tan C=2$.

19. **解** (1)因为 $\boldsymbol{c}/\!/\boldsymbol{a}$,所以存在实数 $\lambda(\lambda\in\mathbf{R})$,使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda,\sqrt{3}\lambda)$,

又 $|\boldsymbol{c}|=4$,即 $\sqrt{\lambda^2+3\lambda^2}=4$,解得 $\lambda=\pm 2$.

所以 $\boldsymbol{c}=(2,2\sqrt{3})$ 或 $\boldsymbol{c}=(-2,-2\sqrt{3})$.

(2)因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\left(\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}\right)$,

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\left(\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}\right)=0$,

即 $\boldsymbol{a}^2-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}^2=0$,

所以 $4-\frac{3}{2}\times 2\times 1\times\cos\theta-\frac{5}{2}=0$,

所以 $\cos\theta=\frac{1}{2}$,因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

20. **解** (1)由①$\frac{b-a}{c}=\frac{2\sqrt{6}a+3c}{3(a+b)}$得,$3(a^2+c^2-b^2)=-2\sqrt{6}ac$,

所以由余弦定理得,$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$,

由②$\cos 2A+2\cos^2\frac{A}{2}=1$ 得,$2\cos^2 A+\cos A-1=0$,

解得 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-1$(舍去),所以 $A=\frac{\pi}{3}$,

因为 $\cos B=-\frac{\sqrt{6}}{3}<-\frac{1}{2}$,且 $B\in(0,\pi)$,所以 $B>\frac{2\pi}{3}$,

所以 $A+B>\pi$,矛盾.

所以△ABC 不能同时满足①,②.

故△ABC 满足①,③,④或②,③,④.

(2)若△ABC 满足①,③,④,

因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,所以 $8=6+c^2+2\times\sqrt{6}\times c\times\frac{\sqrt{6}}{3}$,

即 $c^2+4c-2=0$.

解得 $c=\sqrt{6}-2$,又 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

若△ABC 满足②,③,④,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,即 $\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$,解得 $\sin B=1$,

即 $B=\frac{\pi}{2}$,

所以 $c=\sqrt{2}$,所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac=\sqrt{3}$.

21. **解** (1) $\overrightarrow{AB}=(n-8,t)$,$\because\overrightarrow{AB}\perp\boldsymbol{a}$,$\therefore 8-n+2t=0$.

又$\because\sqrt{5}|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$,

$\therefore 5\times 64=(n-8)^2+t^2=5t^2$,解得 $t=\pm 8$,

$\therefore\overrightarrow{OB}=(24,8)$ 或 $\overrightarrow{OB}=(-8,-8)$.

(2)$\overrightarrow{AC}=(k\sin\theta-8,t)$.

$\because\overrightarrow{AC}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,$\therefore t=-2k\sin\theta+16$.

$\because t\sin\theta=(-2k\sin\theta+16)\sin\theta=-2k\left(\sin\theta-\frac{4}{k}\right)^2+\frac{32}{k}$,

又$\because k>4$,$\therefore 0<\frac{4}{k}<1$,

当 $\sin\theta=\frac{4}{k}$ 时,$t\sin\theta$ 取最大值为 $\frac{32}{k}$.

由 $\frac{32}{k}=4$,得 $k=8$,此时 $\theta=\frac{\pi}{6}$,$\overrightarrow{OC}=(4,8)$,

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=8\times 4+0\times 8=32$.

22. **解** (1)设外轮到我国海岸线的距离 PQ 为 x 海里(图略),

在△ABP 中,$\sin\angle APB=\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$,

由正弦定理得 $\frac{BP}{\sin\angle PAB}=\frac{AB}{\sin\angle APB}$,所以 $BP=\frac{s\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$,

在 Rt△BPQ 中,$x=PQ=BP\sin(\pi-\beta)=BP\sin\beta=\frac{s\cdot\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$,

当 $x\leqslant d$,即 $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\leqslant\frac{d}{s}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,就该向外轮发出警告,令其退出我国海域.

(2)当 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$ 时,$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha+\frac{1-\cos 2\alpha}{4}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}$,

要使不被警告,则 $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}>\frac{d}{s}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

即 $\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}>\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{2}$,

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{6}<2\alpha-\frac{\pi}{6}<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ $(k\in\mathbf{Z})$,

即 $k\pi+\frac{\pi}{6}<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$,

又因为 $\alpha\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,所以 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

即当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 时可以避免使外轮进入被警告区域.

章末检测试卷三(第八章)

1. D [一个多面体至少有 4 个面,如三棱锥有 4 个面,不存在有 3 个面的多面体,所以选项 A 错误;选项 B 错误,反例如图 1;选项 C 错误,反例如图 2,上、下底面是全等的菱形,各侧面是全等的正方形,它不是正方体;根据棱柱的定义,知选项 D 正确. 故选 D.]

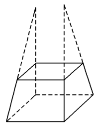


图 1

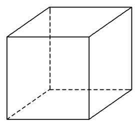
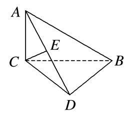


图 2

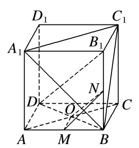
2. B [由条件知,在原平面图形中 $AB\perp BC$,从而 $AB<AD<AC$.]
3. C [选项 A,只有当 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$ 时,$m/\!/l$;
选项 B,只有当 $m\perp\beta$ 时,$m/\!/n$;
选项 C,由于 $l\subset\beta$,$\therefore n\perp l$;
选项 D,只有当 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$ 时,$m\perp n$.]
4. B [由题意知,刍童的体积为$[(4\times 2+3)\times 3+(3\times 2+4)\times 2]\times 3\div 6=26.5$(立方丈).]
5. B [因为平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD,$BD\perp CD$,所以 $CD\perp$ 平面 $A'BD$,所以 $CD\perp BA'$. 由勾股定理,得 $A'D\perp BA'$. 又因为 $CD\cap A'D=D$,所以 $BA'\perp$ 平面 $A'CD$,所以 $\angle BA'C=90°$,B 正确,其余均不正确.]
6. B [因为 $AC\perp$ 底面 BCD,$BD\subset$ 平面 BCD,
所以 $AC\perp BD$.
又 $BD\perp DC$,$AC\cap DC=C$,所以 $BD\perp$ 平面 ACD,
又 $BD\subset$ 平面 ABD,
所以平面 $ABD\perp$ 平面 ACD,
如图,过 C 作 $CE\perp AD$,平面 $ABD\cap$ 平面 $ACD=AD$,$CE\subset$ 平面 ACD,



所以 $CE\perp$ 平面 ABD,$AC=a$,$BC=\sqrt{3}a$,$CD=\frac{\sqrt{6}}{2}a$,

所以 $CE=\frac{AC\cdot CD}{AD}=\frac{a\times\frac{\sqrt{6}}{2}a}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2+a^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}a$.]

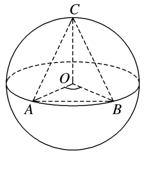
7. C [设正方体的棱长为 $2a$,如图,连接 AC,BD 交于点 O,连接 ON,OM,DB_1,易证 $B_1D\perp$ 平面 A_1BC_1,而 $ON/\!/B_1D$,故 $\angle ONM$ 就是直线 MN 与平面 A_1BC_1 所成角的余角. 又△OMN 为直角三角形且 $OM=a$,$MN=\sqrt{2}a$,$\angle OMN=90°$,所以 $\tan\angle ONM=\frac{\sqrt{2}}{2}$,



$\sin\angle ONM=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 设直线 MN 与平面 A_1BC_1 所成的角为 θ,

则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故选 C.]

8. A　[如图所示,当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时,三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大,



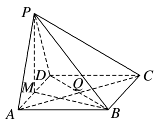
设球 O 的半径为 R,此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}R^2\times R=\frac{1}{6}R^3=\frac{4}{3}$,所以 $R=2$.
因此,球 O 的表面积为 $4\pi R^2=16\pi$.
故选 A.]

9. CD　[直线 AM 与 CC_1 是异面直线,直线 AM 与 BN 也是异面直线,故 A,B 错误;
直线 BN 与 MB_1 是异面直线,直线 AM 与 DD_1 是异面直线,故 C,D 正确.]

10. CD　[依题意得球的半径为 R,则圆柱的侧面积为 $2\pi R\times 2R=4\pi R^2$,∴A 错误;
圆锥的侧面积为 $\pi R\times\sqrt{5}R=\sqrt{5}\pi R^2$,∴B 错误;
球的表面积为 $4\pi R^2$,∵圆柱的侧面积为 $4\pi R^2$,∴C 正确;
∵$V_{圆柱}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$,
$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot 2R=\frac{2}{3}\pi R^3$,
$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$,
∴$V_{圆柱}:V_{圆锥}:V_{球}=2\pi R^3:\frac{2}{3}\pi R^3:\frac{4}{3}\pi R^3=3:1:2$,
∴D 正确. 故选 CD.]

11. ABD　[由 AB 是底面圆的直径,则 $\angle AEB=90^\circ$,
即 $AE\perp EB$.
∵四边形 $ABCD$ 是圆柱的轴截面,
∴$AD\perp$底面 AEB,$BC\perp$底面 AEB.
∴$BE\perp AD$,又 $AD\cap AE=A$,$AD,AE\subset$平面 ADE,
∴$BE\perp$平面 ADE,$DE\subset$平面 ADE,
∴$BE\perp DE$.
同理可得 $AE\perp CE$.
又∵$BE\subset$平面 BCE,
∴平面 $BCE\perp$平面 ADE.
可得 A,B,D 正确.]

12. ABC　[如图,对于 A,取 AD 的中点 M,连接 PM,BM,

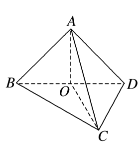


∵侧面 PAD 为正三角形,
∴$PM\perp AD$,又底面 $ABCD$ 是菱形,$\angle DAB=60^\circ$,
∴$\triangle ABD$ 是等边三角形,
∴$AD\perp BM$,又 $PM\cap BM=M$,$PM,BM\subset$平面 PMB,
∴$AD\perp$平面 PBM,故 A 正确.
对于 B,∵$AD\perp$平面 PBM,
∴$AD\perp PB$,即异面直线 AD 与 PB 所成的角为 90°,
故 B 正确.
对于 C,∵$BC/\!/AD$,
∴$BC\perp$平面 PBM,∴$BC\perp PB$,$BC\perp BM$,
∴$\angle PBM$ 是二面角 $P-BC-A$ 的平面角,设 $AB=1$,
则 $BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$PM=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
∵平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,$PM\subset$平面 PAD,$PM\perp AD$,∴$PM\perp$平面 $ABCD$,
在 Rt$\triangle PBM$ 中,$\tan\angle PBM=\frac{PM}{BM}=1$,
即 $\angle PBM=45^\circ$,故二面角 $P-BC-A$ 的大小为 45°,
故 C 正确.
对于 D,因为 BD 与 PA 不垂直,所以 BD 与平面 PAC 不垂直,故 D 错误.
故选 ABC.]

13. 3
解析　设圆锥筒的底面半径为 r,则 $2\pi r=\pi R=2\sqrt{3}\pi$,
则 $r=\sqrt{3}$,所以圆锥筒的高 $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$.

14. ②④

15. 45°
解析　如图所示,取 BD 的中点 O,连接 AO,CO.

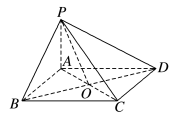


因为 $AB=AD$,所以 $AO\perp BD$,又平面 $ABD\perp$平面 BCD,平面 $ABD\cap$平面 $BCD=BD$,$AO\subset$平面 ABD,
所以 $AO\perp$平面 BCD.
因此,$\angle ACO$ 即为 AC 与平面 BCD 所成的角.
由于 $\angle BAD=90^\circ=\angle BCD$,所以 $AO=OC=\frac{1}{2}BD$,
又 $AO\perp OC$,所以 $\angle ACO=45^\circ$.

16. $48\sqrt{3}$　$48\sqrt{3}$
解析　设球的半径为 r,
则 $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{32}{3}\pi$,
得 $r=2$,柱体的高为 $2r=4$.
又正三棱柱的底面三角形的内切圆半径与球的半径相等,
所以底面正三角形的边长为 $4\sqrt{3}$,
所以正三棱柱的侧面积 $S_{侧}=3\times4\times4\sqrt{3}=48\sqrt{3}$,
体积 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2\times4=48\sqrt{3}$.

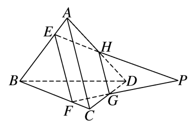
17. **解**　$V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times3\times4\times6=36(\text{cm}^3)$.
设圆柱底面圆的半径为 r,
则 $r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{AB+BC+AC}$
$=\frac{2\times\frac{1}{2}\times3\times4}{3+4+5}=1$,
$V_{圆柱OO_1}=\pi r^2h=6\pi(\text{cm}^3)$.
所以 $V=V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}-V_{圆柱OO_1}=(36-6\pi)\text{cm}^3$.

18. **证明**　(1)连接 AC,交 BD 于点 O,连接 PO.



因为四边形 $ABCD$ 为菱形,
所以 $BD\perp AC$.
又因为 $PB=PD$,O 为 BD 的中点,
所以 $BD\perp PO$.
因为 $PO\cap AC=O$,
所以 $BD\perp$平面 PAC,
因为 $PC\subset$平面 PAC,
所以 $BD\perp PC$.
(2)因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $BC/\!/AD$.
因为 $BC\not\subset$平面 PAD,$AD\subset$平面 PAD,
所以 $BC/\!/$平面 PAD.
又因为 $BC\subset$平面 PBC,平面 PBC 与平面 PAD 的交线为 l.
所以 $BC/\!/l$.

19. **证明**　如图所示,连接 EF,GH.



∵H,G 分别是 AD,CD 的中点,
∴$GH/\!/AC$,
且 $GH=\frac{1}{2}AC$.
∵$\frac{CF}{FB}=\frac{AE}{EB}=\frac{1}{3}$,
∴$EF/\!/AC$,且 $EF=\frac{3}{4}AC$.
∴$GH/\!/EF$,且 $GH\neq EF$.
∴EH 与 FG 相交,设交点为 P.
∵$P\in EH$,$EH\subset$平面 ABD,∴$P\in$平面 ABD.
同理 $P\in$平面 BCD.
又∵平面 $ABD\cap$平面 $BCD=BD$,
∴$P\in BD$.
∴直线 EH,BD,FG 相交于一点.

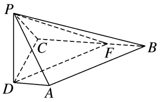
20. **证明**　(1)∵E,F 分别是 AB,BD 的中点,
∴EF 是$\triangle ABD$ 的中位线,∴$EF/\!/AD$.
∵$EF\not\subset$平面 ACD,$AD\subset$平面 ACD,
∴直线 $EF/\!/$平面 ACD.
(2)∵$AD\perp BD$,$EF/\!/AD$,∴$EF\perp BD$.
∵$CB=CD$,F 是 BD 的中点,∴$CF\perp BD$.
又∵$EF\cap CF=F$,$EF,CF\subset$平面 EFC,
∴$BD\perp$平面 EFC.
∵$BD\subset$平面 BCD,∴平面 $EFC\perp$平面 BCD.

21. (1)**解**　由已知 $AD/\!/BC$,故 $\angle DAP$ 或其补角即为异面直线 AP 与 BC 所成的角.
∵$AD\perp$平面 PDC,$PD\subset$平面 PDC,∴$AD\perp PD$.
在 Rt$\triangle PDA$ 中,由已知,得 $AP=\sqrt{AD^2+PD^2}=\sqrt{5}$,
故 $\cos\angle DAP=\frac{AD}{AP}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)**证明** $\because AD\perp$平面 PDC，$PD\subset$平面 PDC，
$\therefore AD\perp PD$.
又$\because BC/\!/AD$，$\therefore PD\perp BC$，
又 $PD\perp PB$，$BC\cap PB=B$，BC，$PB\subset$平面 PBC，
$\therefore PD\perp$平面 PBC.

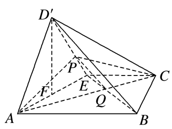
(3)**解** 过点 D 作 AB 的平行线交 BC 于点 F，连接 PF，



则 DF 与平面 PBC 所成的角等于 AB 与平面 PBC 所成的角.
$\because PD\perp$平面 PBC，故 PF 为 DF 在平面 PBC 上的射影，
$\therefore\angle DFP$ 为直线 DF 和平面 PBC 所成的角.
由于 $AD/\!/BC$，$DF/\!/AB$，可得 $BF=AD=1$.
由已知，得 $CF=BC-BF=2$.
又 $AD\perp DC$，故 $BC\perp DC$.
在 Rt$\triangle DCF$ 中，可得 $DF=\sqrt{CD^2+CF^2}=2\sqrt{5}$.
在 Rt$\triangle DPF$ 中，可得 $\sin\angle DFP=\dfrac{PD}{DF}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
$\therefore$直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

22.(1)**证明** 根据题意可知，在长方形 $ABCD$ 中，$\triangle DAE$ 和$\triangle CBE$ 为等腰直角三角形，$\therefore\angle DEA=\angle CEB=45°$，
$\therefore\angle AEB=90°$，即 $BE\perp AE$.
$\because$平面 $D'AE\perp$平面 $ABCE$，且平面 $D'AE\cap$平面 $ABCE=AE$，$BE\subset$平面 $ABCE$，
$\therefore BE\perp$平面 $D'AE$，
$\because AD'\subset$平面 $D'AE$，
$\therefore AD'\perp BE$.

(2)**解** 如图所示，取 AE 的中点 F，连接 $D'F$，则 $D'F\perp AE$，且 $D'F=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



$\because$平面 $D'AE\perp$平面 $ABCE$，
且平面 $D'AE\cap$平面 $ABCE=AE$，$D'F\subset$平面 $D'AE$，
$\therefore D'F\perp$平面 $ABCE$，
$\therefore V_{D'-ABCE}=\dfrac{1}{3}S_{\text{四边形}ABCE}\cdot D'F$
$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

(3)**解** 连接 AC 交 BE 于 Q，假设在 $D'E$ 上存在点 P，使得 $D'B/\!/$平面 PAC，连接 PQ.
$\because D'B\subset$平面 $D'BE$，平面 $D'BE\cap$平面 $PAC=PQ$，
$\therefore D'B/\!/PQ$，
$\therefore$在$\triangle EBD'$中，$\dfrac{EP}{PD'}=\dfrac{EQ}{QB}$.
$\because\triangle CEQ\backsim\triangle ABQ$，
$\therefore\dfrac{EQ}{QB}=\dfrac{EC}{AB}=\dfrac{1}{2}$，
$\therefore\dfrac{EP}{PD'}=\dfrac{EQ}{QB}=\dfrac{1}{2}$，即 $EP=\dfrac{1}{3}ED'$，
$\therefore$在棱 ED'上存在一点 P，且 $EP=\dfrac{1}{3}ED'$，
使得 $D'B/\!/$平面 PAC.

章末检测试卷四(第九章)

1.C [总体是这批零件的长度，个体是这批零件中每个零件的长度，样本是抽取的200个零件的长度，样本量是200.]

2.A [①中，考试成绩在不同分数段之间的同学有明显的差异，用分层随机抽样比较恰当；②中，总体包含的个体较少，用简单随机抽样比较恰当.]

3.B [样本数据落在[15,20]内的频数为 $100\times[1-5\times(0.04+0.1)]=30$.]

4.C [估计该校学生数学竞赛成绩的平均分 $\overline{x}=65\times0.2+75\times0.4+85\times0.3+95\times0.1=78$，故选 C.]

5.B [由题意可知，这是一个分层随机抽样的问题，其中北乡可抽取的人数为 $300\times\dfrac{8\,100}{8\,100+7\,488+6\,912}=300\times\dfrac{8\,100}{22\,500}=108$，故选 B.]

6.D [由题图可知纵坐标表示$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$.
故 $x=0.1-0.054-0.010-0.006-0.006-0.006=0.018$.]

7.D [**方法一** 因为每个数据都加上100，故平均数也增加100，而离散程度应保持不变.

方法二 由题意知 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=10\overline{x}$，$s^2=\dfrac{1}{10}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2]$，

则所求平均数 $\overline{y}=\dfrac{1}{10}[(x_1+100)+(x_2+100)+\cdots+(x_{10}+100)]=\dfrac{1}{10}(10\overline{x}+10\times100)=\overline{x}+100$.

而所求方差 $t^2=\dfrac{1}{10}[(x_1+100-\overline{y})^2+(x_2+100-\overline{y})^2+\cdots+(x_{10}+100-\overline{y})^2]=\dfrac{1}{10}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2]=s^2$.]

8.B [体重在[45,50)内的频率为 $0.1\times5=0.5$，体重在[50,55)内的频率为 $0.06\times5=0.3$，体重在[55,60]内的频率为 $0.02\times5=0.1$，
$\because 0.5:0.3:0.1=5:3:1$，
$\therefore$可估计该校初三学生适合参加跑步、跳远、投掷三项训练的集训人数之比为 $5:3:1$，故选 B.]

9.ACD [因为甲队的平均进球数比乙队多，所以甲队技术较好，A正确；乙队的标准差比甲队小，标准差越小越稳定，所以乙队发挥稳定，B错误；乙队平均每场进球数为1.8，且乙队全年进球数的标准差较小，所以乙队几乎每场都进球，C正确；由于 $s_{\text{甲}}=3$，$s_{\text{乙}}=0.3$，所以甲队与乙队相比，不稳定，所以甲队的表现时好时坏，D正确.]

10.BCD [对于选项A，由图易知，月接待游客量每年7,8月份明显高于12月份，故A错；
对于选项B，观察折线图的变化趋势可知，年接待游客量逐年增加，故B正确；
对于选项C，D，由图可知显然正确.]

11.BC [由频率分布直方图得，
在A中，样本中支出在[50,60]元的频率为 $1-(0.01+0.024+0.036)\times10=0.3$，故A错误；
在B中，样本中支出不少于40元的人数有$\dfrac{60}{0.3}\times0.36+60=132$，故B正确；
在C中，$n=\dfrac{60}{0.3}=200$，故 n 的值为200，故C正确；
在D中，若该校有2 000名学生，则可能有600人支出在[50,60]元，故D错误.]

12.ABC [对于A，甲运动员得分的极差为 $47-18=29$，乙运动员得分的极差为 $29-17=12$，甲运动员得分的极差大于乙运动员得分的极差，因此A正确；
对于B，甲的数据从小到大排列后，处于中间的数是33,35，所以甲运动员得分的中位数是34，同理求得乙运动员得分的中位数是22.5，因此甲运动员得分的中位数大于乙运动员得分的中位数，故B正确；
对于C，甲运动员得分的平均数为
$\dfrac{18+20+35+33+47+41}{6}\approx32.33$，乙运动员得分的平均数为
$\dfrac{17+19+19+26+27+29}{6}\approx22.83$，因此甲运动员得分的平均数大于乙运动员得分的平均数，故C正确；
对于D，分别计算甲、乙两个运动员得分的方差，方差小的成绩更稳定.可以算出甲的方差为 $s_{\text{甲}}^2\approx109.22$，乙的方差为 $s_{\text{乙}}^2\approx21.47$，因为乙的方差小于甲的方差，所以乙运动员的成绩比甲运动员的成绩稳定，故D不正确.]

13.2,4

解析 由题意知，抽样比为$\dfrac{50}{500}=\dfrac{1}{10}$，
则应抽取“不赞成改革”的教师人数为$\dfrac{1}{10}\times20=2$，学生人数为$\dfrac{1}{10}\times40=4$.

14.75

解析 利用组中值估算平均分，则有 $\overline{x}=55\times0.1+65\times0.2+75\times0.4+85\times0.2+95\times0.1=75$，故估计这次考试的平均分为75分.

15. 7.1　8.05

解析　把这组数据从小到大排列得 2.4,3.2,3.6,4.5,4.6,6.4,7.8,7.9,8.0,8.1,8.4,8.6,

∵$12\times50\%=6$,$12\times75\%=9$,

∴这组数据的 50%分位数是$\dfrac{6.4+7.8}{2}=7.1$,

75%分位数是$\dfrac{8.0+8.1}{2}=8.05$.

16. $a<b=c$

解析　依题意有

次数	0 次	1 次	2 次	3 次	4 次
人数	7 人	13 人	17 人	10 人	3 人

共统计了 50 人,众数为 2,中位数为 2,

∴平均数为$\dfrac{0\times7+13\times1+17\times2+10\times3+3\times4}{50}=\dfrac{89}{50}<2$,

∴$a<b=c$.

17. **解**　(1)分层随机抽样是按各层相关人数和抽取人数的比例进行的,所以有$\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{54}\Rightarrow x=18$,$\dfrac{y}{36}=\dfrac{3}{54}\Rightarrow y=2$. 故 $x=18$,$y=2$.

(2)总体容量和样本容量较小,所以应采用抽签法,过程如下:

第一步,将 36 人随机编号,号码为 1,2,3,…,36;

第二步,将号码分别写在相同的纸片上,揉成团,制成号签;

第三步,将号签放入一个不透明的容器中,充分搅拌,依次不放回地抽取 2 个号码,并记录上面的编号;

第四步,把与号码相对应的人选出,即可得到所要的样本.

18. **解**　将所有数据从小到大排列,得

6.2,6.8,7.2,7.5,7.8,7.8,8.0,8.0,8.2,8.5,8.6,8.9,

因为有 12 个数据,

所以 $12\times25\%=3$,$12\times50\%=6$,$12\times90\%=10.8$.

所以 25%分位数为$\dfrac{7.2+7.5}{2}=7.35$,

50%分位数为$\dfrac{7.8+8.0}{2}=7.9$,

90%分位数为 8.6.

所以估计该公司员工工资的 25%,50%,90%分位数分别为 7.35,7.9,8.6.

19. **解**　由样本频率分布直方图可知组距为 3.

(1)由样本频率分布直方图得样本在[15,18)内的频率等于$\dfrac{4}{75}\times3=\dfrac{4}{25}$.

(2)∵样本在[15,18)内的频数为 8,由(1)可知,样本容量为$\dfrac{8}{\frac{4}{25}}=8\times\dfrac{25}{4}=50$.

(3)∵在[12,15)内的小矩形面积为 0.06,故样本在[12,15)内的频率为 0.06,故样本在[15,33)内的频数为 $50\times(1-0.06)=47$,又在[15,18)内的频数为 8,故在[18,33)内的频数为 $47-8=39$.

20. **解**　依题意,甲、乙的得分情况如下表:

	第 1 局	第 2 局	第 3 局	第 4 局	第 5 局
甲	2	0	3	2	6
乙	0	5	3	5	0

$\overline{x}_{甲}=\dfrac{1}{5}\times(2+0+3+2+6)=2.6$,

$s_{甲}=\sqrt{\frac{1}{5}\times[(-0.6)^2+(-2.6)^2+0.4^2+(-0.6)^2+3.4^2]}$

≈1.96,

$\overline{x}_{乙}=\dfrac{1}{5}\times(0+5+3+5+0)=2.6$,

$s_{乙}=\sqrt{\frac{1}{5}\times[(-2.6)^2+2.4^2+0.4^2+2.4^2+(-2.6)^2]}$

≈2.24,

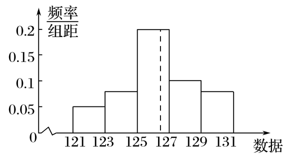
因为甲得分的平均数与乙得分的平均数相等.

甲得分的标准差小于乙得分的标准差,甲投篮得分比乙稳定,故甲投篮的水平高.

21. **解**　(1)频率分布表如下:

分组	频数	频率
[121,123)	2	0.10
[123,125)	3	0.15
[125,127)	8	0.40
[127,129)	4	0.20
[129,131]	3	0.15
合计	20	1.00

(2)频率分布直方图如下:



(3)在[125,127)中的数据最多,取这个区间的中点值作为众数的近似值,得众数为 126,事实上,众数的精确值为 125. 图中虚线对应的数据是 $125+2\times\dfrac{5}{8}=126.25$,

事实上中位数为 125.5. 使用"组中值"求平均数:

$\overline{x}=122\times0.1+124\times0.15+126\times0.4+128\times0.2+130\times0.15=126.3$,

平均数的精确值为 $\overline{x}=125.75$.

22. **解**　(1)∵$\dfrac{x}{2\ 000}=0.19$,∴$x=380$.

(2)初三年级人数为 $y+z=2\ 000-(373+377+380+370)=500$,现用分层随机抽样的方法在全校抽取 48 名学生,应在初三年级抽取的人数为$\dfrac{48}{2\ 000}\times500=12$.

(3)初一年级应抽取学生的人数为$\dfrac{48}{2\ 000}\times750=18$,

初二年级应抽取学生的人数为$\dfrac{48}{2\ 000}\times750=18$,

∴该校所有学生体重的平均数约为 $\overline{x}=\dfrac{18}{48}\times40+\dfrac{18}{48}\times50+\dfrac{12}{48}\times60=48.75$(kg),

该校所有学生体重的方差约为

$s^2=\dfrac{18}{48}\times[1+(40-48.75)^2]+\dfrac{18}{48}\times[2+(50-48.75)^2]+\dfrac{12}{48}\times[3+(60-48.75)^2]$

$=62.812\ 5$.

章末检测试卷五(第十章)

1. D　[抛掷一枚硬币,有正面朝上和反面朝上两种可能,概率均为$\dfrac{1}{2}$,与第几次抛掷无关,故选 D.]

2. C　[根据概率的意义逐一判断可知 C 正确,ABD 不正确.]

3. A　[∵A,B 是互斥事件,

∴$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.5$,

∵$P(A)=0.2$,∴$P(B)=0.5-0.2=0.3$. 故选 A.]

4. D　[甲中学的女排要获胜,必须赢得其中两局,可以是第一、二局,也可以是第一、三局,也可以是第二、三局. 故甲中学的女排获胜的概率 $P=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{3}{5}\times\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{3}{5}+\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{81}{125}$,

故选 D.]

5. D　[用(x,y,z)表示乙、丙、丁抢到的红包分别为 x 元、y 元、z 元.

乙、丙、丁三人抢完 6 元钱的所有不同的可能结果有 10 种,分别为(1,1,4),(1,4,1),(4,1,1),(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),(2,2,2).

乙获得"手气最佳"的所有不同的可能结果有 4 种,分别为(4,1,1),(3,1,2),(3,2,1),(2,2,2).

根据古典概型的概率计算公式,得乙获得"手气最佳"的概率 $P=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.]

6. B [所有的样本点为(红,红,红),(红,红,蓝),(红,蓝,红),(蓝,红,红),(红,蓝,蓝),(蓝,红,蓝),(蓝,蓝,红),(蓝,蓝,蓝),共8个.三次都是蓝球的样本点只有1个,其概率是$\frac{1}{8}$,根据对立事件的概率之间的关系,所求的概率为$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$,故选B.]

7. D [设这周能进行决赛为事件A,恰好在周三、周四、周五进行决赛分别为事件A_3,A_4,A_5,则$A=A_3\cup A_4\cup A_5$,又事件A_3,A_4,A_5两两互斥,故$P(A)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$,故选D.]

8. C [设从质量在[80,85)内的苹果中抽取x个,则从质量在[95,100]内的苹果中抽取$(4-x)$个,因为频数分布表中[80,85),[95,100]两组的频数分别为5,15,所以$5:15=x:(4-x)$,解得$x=1$,即抽取的4个苹果中质量在[80,85)内的有1个,记为a,质量在[95,100]内的有3个,记为b_1,b_2,b_3,任取2个有$ab_1,ab_2,ab_3,b_1b_2,b_1b_3,b_2b_3$共6个样本点,其中有1个苹果的质量在[80,85)内的样本点有ab_1,ab_2,ab_3,共3个,所以所求概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.]

9. BD [AC是必然事件,BD是随机事件.]

10. ACD

11. CD [对于A,事件"至少一次击中"包含"一次击中"和"两次均击中",所以A错误;
对于B,事件"第一次击中"包含"第一次击中、第二次击中"和"第一次击中、第二次不中",
所以与事件"第二次击中"不是互斥事件,B错误;
对于C,事件"恰有一次击中"是"一次击中、一次不中",
它与事件"两次均击中"是互斥事件,C正确;
对于D,事件"两次均未击中"的对立事件是"至少一次击中",D正确.]

12. BD [使用1,5,6三个数字可以排成156,165,516,561,615,651,共6个不同的三位数.
三位数为偶数的有156,516,共2个,相应的概率$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$;三位数为奇数的有165,561,615,651,共4个,相应的概率$P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$;大于400的三位数的个数为4,所以相应的概率$P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.]

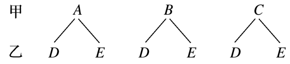
13. 0.25
解析 "年降水量在[200,300](mm)范围内"由"年降水量在[200,250)(mm)范围内"和"年降水量在[250,300](mm)范围内"两个互斥事件构成,因此概率为$0.13+0.12=0.25$.

14. 12 000
解析 设该保护区内有这种动物x只,因为每只动物被逮到的概率是相同的,所以$\frac{1\,200}{x}=\frac{100}{1\,000}$,解得$x=12\,000$.

15. $\frac{1}{3}$
解析 组成各个数位上的数字不重复的三位自然数的样本点共有24个,而满足三位数是"凹数"的有214,213,312,314,324,412,413,423,共8个,所以这个三位数为"凹数"的概率为$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.

16. $\frac{3}{4}$ $\frac{9}{10}$
解析 设"甲射击一次,命中目标"为事件A,"乙射击一次,命中目标"为事件B,则"甲射击一次,未命中目标"为事件$\overline{A}$,"乙射击一次,未命中目标"为事件$\overline{B}$,
则$P(A)=\frac{3}{5}$,$P(\overline{A})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$,
$P(B)=p$,$P(\overline{B})=1-p$,依题意得$\frac{3}{5}\times(1-p)+\frac{2}{5}\times p=\frac{9}{20}$,
解得$p=\frac{3}{4}$.
得分之和不少于2的对立事件为得分之和为0,
故所求概率为$1-\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{10}$.

17. **解** (1)画出树形图如图:



则选购方案为$(A,D),(A,E),(B,D),(B,E),(C,D),(C,E)$.
(2)A型号电脑被选中的情形为$(A,D),(A,E)$,即含2个样本点,所以A型号电脑被选中的概率为$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

18. **解** 记"甲从第一小组的10张票中任抽1张,抽到足球票"为事件A;"乙从第二小组的10张票中任抽1张,抽到足球票"为事件B;"甲从第一小组的10张票中任抽1张,抽到排球票"为事件$\overline{A}$;"乙从第二小组的10张票中任抽1张,抽到排球票"为事件$\overline{B}$,
于是$P(A)=\frac{3}{5}$,$P(\overline{A})=\frac{2}{5}$,$P(B)=\frac{2}{5}$,$P(\overline{B})=\frac{3}{5}$.
由于甲(或乙)是否抽到足球票,对乙(或甲)是否抽到足球票没有影响,因此A与B是相互独立事件.
(1)甲、乙两人都抽到足球票就是事件AB发生,根据相互独立事件的概率公式,得$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$.
(2)甲、乙两人均未抽到足球票(事件$\overline{A}\,\overline{B}$发生)的概率为$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$,
所以两人中至少有1人抽到足球票的概率为$P=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-\frac{6}{25}=\frac{19}{25}$.

19. **解** (1)融合指数在[7,8]内的"省级卫视新闻台"记为A_1,A_2,A_3;融合指数在[4,5)内的"省级卫视新闻台"记为B_1,B_2,从融合指数在[4,5)和[7,8]内的"省级卫视新闻台"中随机抽取2家的样本空间$\Omega=\{A_1A_2,A_1A_3,A_2A_3,A_1B_1,A_1B_2,A_2B_1,A_2B_2,A_3B_1,A_3B_2,B_1B_2\}$,共含10个样本点.其中,没有一家的融合指数在[7,8]内的样本点为B_1B_2,共1个,所以所求的概率$P=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.
(2)这20家"省级卫视新闻台"的融合指数平均数为$4.5\times\frac{2}{20}+5.5\times\frac{8}{20}+6.5\times\frac{7}{20}+7.5\times\frac{3}{20}=6.05$.

20. **解** (1)由互斥事件的概率加法公式和相互独立事件同时发生的概率公式得,所求的概率为$\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{6}$.
(2)设第i个电话打给甲为事件$A_i(i=1,2,3)$,
则这三个电话中恰有两个是打给甲的事件为$A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$,
∴其概率为$P(A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3)$
$=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$
$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$
$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{6}+\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{72}$.

21. **解** (1)工厂总数为$18+27+18=63$,样本容量与总体中的个体数比为$\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$,所以从A,B,C三个区分别抽取的工厂个数为2,3,2.
(2)设A_1,A_2为在A区中抽得的2个工厂,B_1,B_2,B_3为在B区中抽得的3个工厂,C_1,C_2为在C区中抽得的2个工厂,在这7个工厂中随机抽取2个,样本点有$(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_1,C_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),(A_2,C_2),(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_1,C_1),(B_1,C_2),(B_2,B_3),(B_2,C_1),(B_2,C_2),(B_3,C_1),(B_3,C_2),(C_1,C_2)$,共有21个.
随机抽取的2个工厂至少有1个来自A区(记为事件X)的样本点有$(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_1,C_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1)$,

(A_2,C_2),共有 11 个,所以这 2 个工厂中至少有 1 个来自 A 区的概率为 $P(X)=\frac{11}{21}$.

22. **解**　由题意,知样本点总数为 36,列举如下:

(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),

所以事件 A 共包含 10 个样本点,分别为(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5),故 $P(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

事件 B 共包含 6 个样本点,分别为(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),故 $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

事件 C 共包含 12 个样本点,分别为(1,3),(1,5),(2,4),(2,6),(3,1),(3,5),(4,2),(4,6),(5,1),(5,3),(6,2),(6,4),

故 $P(C)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

因为 $P(B)<P(A)<P(C)$,

所以"两个同点"对应一等奖,概率为 $\frac{1}{6}$;

"两个连号"对应二等奖,概率为 $\frac{5}{18}$;

"同奇偶但不同点"对应三等奖,概率为 $\frac{1}{3}$;

其余事件为感谢奖,概率为 $1-\frac{5}{18}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

期末检测试卷(一)

1. A　[由复数的运算法则,可得

$\frac{(1-\mathrm{i})^2}{1+\mathrm{i}}=\frac{-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{-2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-2\mathrm{i}-2}{2}=-1-\mathrm{i}$,

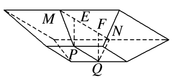
结合题意可得 $a+b\mathrm{i}=-1-\mathrm{i}$,即 $a=-1,b=-1$,

据此可得 $a+b=-2$. 故选 A.]

2. D　[根据题意得,用分层随机抽样在各层中的抽样比为 $\frac{100}{1\,000}=\frac{1}{10}$,

则高二年级抽取的人数是 $300\times\frac{1}{10}=30$(人).]

3. C　[依题意得"斗冠"的高为 $60.3-33.3=27$(米),



如图,$PE=27$,$ME=\frac{1}{2}(MN-EF)=\frac{1}{2}\times(139.4-69.9)=\frac{139}{4}$,

$\angle PME$ 为"斗冠"的侧面与上底面的夹角,

$\tan\angle PME=\frac{PE}{ME}=\frac{27}{\frac{139}{4}}=\frac{108}{139}\approx 0.78$,

而 $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.58$,$\tan 45°=1$,且 $y=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

因为 $0.58<0.78<1$,所以 $30°<\angle PME<45°$.]

4. D　[将这组数据按从小到大排列得

85　87　88　89　89　90　91　91　92　93　93　93　94　96　98

则 $15\times 60\%=9$,$15\times 90\%=13.5$,

所以 60%分位数为 $\frac{92+93}{2}=92.5$,90%分位数为 96.]

5. D　[∵正四棱柱的底面边长为 1,侧棱长为 $\sqrt{2}$,∴正四棱柱体对角线的长为 $\sqrt{1+1+2}=2$. 又∵正四棱柱的顶点在同一球面上,∴正四棱柱体对角线恰好是球的一条直径,得球的半径 $R=1$,根据球的体积公式,得此球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}$,故选 D.]

6. D　[由余弦定理得,$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$,$a=1$,

所以 $b^2+c^2-1=2bc\cos A$,

又 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$,$4S=b^2+c^2-1$,

所以有 $4\times\frac{1}{2}bc\sin A=2bc\cos A$,

即 $\sin A=\cos A$,$\tan A=1$,

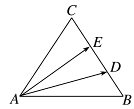
又 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{4}$,

由正弦定理得,$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=2R$($R$ 为△ABC 外接圆的半径),

得 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以△ABC 外接圆的面积为 $\frac{\pi}{2}$.]

7. C　[如图,



$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=2$,$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=60°$,

∵D,E 是边 BC 的两个三等分点,

∴$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{2}{9}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{2}{9}\times 4+\frac{5}{9}\times 2\times 2\times\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\times 4=\frac{26}{9}$.]

8. C　[由题意可知,满足条件的随机数组中,前两次抽取的数中,0 与 1 只能出现一个,第三次必须出现前两个数字中没有出现的 0 或 1,故符合条件的只有 021,001,130,031,所以可估计恰好在第三次停止的概率约为 $\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$.]

9. AD　[若复数 z 满足 $\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$,则 $z\in\mathbf{R}$,A 为真命题;

复数 $z=\mathrm{i}$ 满足 $z^2=-1\in\mathbf{R}$,而 $z\notin\mathbf{R}$,故 B 为假命题;

若复数 $z_1=\mathrm{i}$,$z_2=2\mathrm{i}$ 满足 $z_1z_2\in\mathbf{R}$,但 $z_1\neq\overline{z_2}$,故 C 为假命题;

若复数 $z\in\mathbf{R}$,则 $\overline{z}=z\in\mathbf{R}$,故 D 为真命题.]

10. ABC　[A 中,n 可能在 α 内,A 是假命题;B 中,m 也可能在 β 内,B 是假命题;C 中,m 与 n 可能平行,C 是假命题;D 中 $m\perp\alpha$,$\alpha\perp\beta$,则 $m\subset\beta$ 或 $m/\!/\beta$,若 $m\subset\beta$,则由 $n\perp\beta$ 得 $n\perp m$,若 $m/\!/\beta$,则 β 内有直线 $c/\!/m$,而易知 $c\perp n$,从而 $m\perp n$,D 是真命题.]

11. ABD　[C 中"至少有一个是奇数",即"两个奇数或一奇一偶",而从 1～7 中任取两个数,根据取到数的奇偶性可认为共有三个事件:"两个都是奇数"、"一奇一偶"、"两个都是偶数",故"至少有一个是奇数"与"两个都是偶数"是对立事件,易知其余都不是对立事件.]

12. AD　[甲地该月 5 天 14 时的平均气温为 $\frac{1}{5}\times(26+28+29+31+31)=29$,

乙地该月 5 天 14 时的平均气温为 $\frac{1}{5}\times(28+29+30+31+32)=30$,

故可得甲地该月 14 时的平均气温低于乙地该月 14 时的平均气温;

甲地该月 5 天 14 时温度的方差为 $s_{甲}^2=\frac{1}{5}\times[(26-29)^2+(28-29)^2+(29-29)^2+(31-29)^2+(31-29)^2]=3.6$;

乙地该月 5 天 14 时温度的方差为 $s_{乙}^2=\frac{1}{5}\times[(28-30)^2+(29-30)^2+(30-30)^2+(31-30)^2+(32-30)^2]=2$,

故可得甲地该月 14 时气温的方差大于乙地该月 14 时气温的方差,

所以甲地该月 14 时气温的标准差大于乙地该月 14 时气温的标准差.]

13. $5\sqrt{2}$

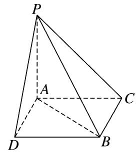
解析　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,

所以 $x-2\times 2=0$,解得 $x=4$,

则 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(2,1)+(3,4)=(5,5)$,

所以 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=5\sqrt{2}$.

14. $\frac{\sqrt{2}}{4}$



解析　过点 B 作 $BD/\!/AC$,且 $BD=AC$,连接 AD,

则四边形 $ADBC$ 为菱形,如图所示,

∴$\angle PBD$(或其补角)即为异面直线 PB 与 AC 所

成角.

设 $PA=AB=AC=BC=a$.

$\therefore AD=a, BD=a$,

$\because PA\perp$平面 ABC,

$\therefore PB=PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=\sqrt{2}a$,

$\therefore \cos\angle PBD=\dfrac{PB^2+BD^2-PD^2}{2\times PB\times BD}=\dfrac{2a^2+a^2-2a^2}{2\times\sqrt{2}a\times a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$\therefore$异面直线 PB 与 AC 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

15. 0.492

解析 设甲、乙、丙三人击中飞机为事件 A,B,C,依题意,A,B,C 相互独立,故所求事件概率为 $P=[P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)]\times0.2+[P(AB\bar{C})+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)]\times0.6+P(ABC)=(0.4\times0.5\times0.2+0.6\times0.5\times0.2+0.6\times0.5\times0.8)\times0.2+(0.4\times0.5\times0.2+0.6\times0.5\times0.8+0.4\times0.5\times0.8)\times0.6+0.4\times0.5\times0.8=0.492$.

16. 20 22

解析 因为足球由正五边形与正六边形构成,所以每块正五边形皮料周围都是正六边形皮料,

每两个相邻的多边形恰有一条公共边,每个顶点处都有三块皮料,

而且都遵循一个正五边形,两个正六边形结论.

设正五边形为 x 块,正六边形为 y 块,由题意知,

$\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{3}(5x+6y)-\dfrac{1}{2}(5x+6y)=2,\\ x+y=32,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=12,\\ y=20.\end{cases}$

所以足球有20个正六边形的面.

每个正六边形的面积为$\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{21})^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times6=\dfrac{63\sqrt{3}}{2}$.

每个正五边形的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{21}\times\dfrac{\sqrt{21}\times\tan54^\circ}{2}\times5=\dfrac{105\tan54^\circ}{4}$.

球的表面积 $S=20\times\dfrac{63\sqrt{3}}{2}+12\times\dfrac{105\tan54^\circ}{4}$

$=630\sqrt{3}+315\tan54^\circ\approx1\ 089.9+434.7=1\ 524.6$.

所以 $4\pi R^2=\pi(2R)^2=1\ 524.6, 2R\approx22$.

所以足球的直径为 22 cm.

17. **解** (1)因为$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=61$,

所以 $4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2=61$.

又$|\boldsymbol{a}|=4, |\boldsymbol{b}|=3$,

所以 $64-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-27=61$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$,

所以 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-6}{4\times3}=-\dfrac{1}{2}$.

又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$

$=4^2+2\times(-6)+3^2=13$,

所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$.

(3)因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$,

所以$\angle ABC=\pi-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$.

又$|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|=4, |\overrightarrow{BC}|=|\boldsymbol{b}|=3$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cdot\sin\angle ABC$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

18. **解** (1)由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,得

$\sqrt{3}\sin B\cos C=\sin B\sin C$,

在$\triangle ABC$ 中,因为 $\sin B\neq0$,

所以$\sqrt{3}\cos C=\sin C$,

故 $\tan C=\sqrt{3}$,

又因为 $0<C<\pi$,所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由已知,得$\dfrac{1}{2}ab\sin C=6\sqrt{3}$.

又 $C=\dfrac{\pi}{3}$,所以 $ab=24$.

由已知及余弦定理,得 $a^2+b^2-2ab\cos C=28$,

所以 $a^2+b^2=52$,从而$(a+b)^2=100$. 即 $a+b=10$,

又 $c=2\sqrt{7}$,

所以$\triangle ABC$ 的周长为 $10+2\sqrt{7}$.

19. **解** (1)$\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\dfrac{2+4\mathrm{i}+\mathrm{i}-2}{5}=\mathrm{i}$,

$\dfrac{-4+3\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\dfrac{(-4+3\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}$

$=\dfrac{-12+16\mathrm{i}+9\mathrm{i}+12}{25}=\mathrm{i}$,

$\dfrac{-1-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-1-\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=\dfrac{1+2\mathrm{i}-1}{2}=\mathrm{i}$(选择其中一个式子即可).

(2)根据三个式子的结构特征及(1)的计算结果,可以得到:

$\dfrac{a+b\mathrm{i}}{b-a\mathrm{i}}=\mathrm{i}$($a,b\in\mathbf{R}$ 且 a,b 不同时为零),

下面进行证明:

$\dfrac{a+b\mathrm{i}}{b-a\mathrm{i}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})(b+a\mathrm{i})}{(b-a\mathrm{i})(b+a\mathrm{i})}$

$=\dfrac{(ab-ab)+(a^2+b^2)\mathrm{i}}{b^2+a^2}$

$=\mathrm{i}$.

20. **证明** (1)$\because BC\parallel$平面 PAD,而 $BC\subset$平面 $ABCD$,

平面 $ABCD\cap$平面 $PAD=AD$,

$\therefore BC\parallel AD$.

$\because AD\not\subset$平面 PBC, $BC\subset$平面 PBC,

$\therefore AD\parallel$平面 PBC.

(2)$\because PA=PB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$,满足 $PA^2+PB^2=AB^2$,

$\therefore PA\perp PB$.

由$\angle ABC=90^\circ$知 $BC\perp AB$.

又$\because$平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,

平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$, $BC\subset$平面 $ABCD$,

$\therefore BC\perp$平面 PAB.

又$\because PA\subset$平面 PAB, $\therefore BC\perp PA$.

又$\because PB\cap BC=B$, $PB\subset$平面 PBC, $BC\subset$平面 PBC,

$\therefore PA\perp$平面 PBC.

又$\because PA\subset$平面 PAD, $\therefore$平面 $PBC\perp$平面 PAD.

21. **解** (1)$\bar{x}_{甲}=\dfrac{87+88+91+91+93}{5}=90$,

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{85+89+91+92+93}{5}=90$,

$s^2_{甲}=\dfrac{1}{5}[(87-90)^2+(88-90)^2+(91-90)^2+(91-90)^2+(93-90)^2]=\dfrac{24}{5}$,

$s^2_{乙}=\dfrac{1}{5}[(85-90)^2+(89-90)^2+(91-90)^2+(92-90)^2+(93-90)^2]=8$,

显然 $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$, $s^2_{甲}<s^2_{乙}$,可知,甲单位的成绩比乙单位稳定,即甲单位的职工比乙单位的职工对文明城市知识掌握得更好.

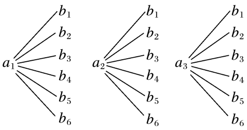
(2)从乙单位5名职工中随机抽取2名,他们的成绩组成的所有样本点(用数对表示)为(85,89),(85,91),(85,92),(85,93),(89,91),(89,92),(89,93),(91,92),(91,93),(92,93),共10个,且每个样本点出现的可能性相等.记“抽取的2名职工的成绩差的绝对值不小于4”为事件 A,则事件 A 包含的样本点为(85,89),(85,91),(85,92),(85,93),(89,93),共5个.

由古典概型概率公式可知 $P(A)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$.

22. **解** (1)由题设知,分层随机抽样的抽取比例为6%,所以各组抽取的人数如下表.

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50
抽取人数	3	6	9	9	3

(2)记从 A 组抽到的 3 位评委分别为 a_1,a_2,a_3，其中 a_1,a_2 支持 1 号歌手；从 B 组抽到的 6 位评委分别为 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6，其中 b_1,b_2 支持 1 号歌手，从 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}$ 中各抽取 1 人的所有样本点如图：



由树形图知所有样本点共 18 个，且是等可能的，其中 2 人都支持 1 号歌手的有 $a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2$，共 4 个，

故所求概率 $P=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$.

期末检测试卷(二)

1. C　[A,B,D 是必然事件.]

2. B　[由正弦定理得，$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.]

3. A　[$z=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i(1-i)}{2}=1+i$，对应的点为(1，1)，在第一象限.]

4. C　[由题意知这是一个分层随机抽样问题，

∵青年、中年、老年职员的人数之比为 10∶8∶7，从中抽取 200 名职员作为样本，

∴要从该单位青年职员中抽取的人数为

$\frac{10}{10+8+7}\times200=80$，

∵每人被抽取的概率为 0.2，

∴该单位青年职员共有 $\frac{80}{0.2}=400$(人).]

5. D　[∵$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，

∵$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

∴$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=6$，

∴$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$.]

6. C　[设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，则有 $\begin{cases}2x-3y=0,\\x-2y=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2.\end{cases}$ 故 $\boldsymbol{c}=(-3,-2)$.]

7. A　[甲、乙两个人进行"剪子、包袱、锤"的游戏，所以可能出现的样本点列表如下：

乙＼甲	锤	剪子	包袱
锤	(锤，锤)	(锤，剪子)	(锤，包袱)
剪子	(剪子，锤)	(剪子，剪子)	(剪子，包袱)
包袱	(包袱，锤)	(包袱，剪子)	(包袱，包袱)

因为由表格可知，共有 9 个样本点.

其中平局的有 3 种(锤，锤)、(剪子，剪子)、(包袱，包袱).

设事件 A 为"甲和乙平局"，则 $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.]

8. C　[设圆锥的底面半径为 r，高为 h，$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2h=\frac{1}{12\pi}l^2h$，由 $\frac{1}{12\pi}\approx\frac{25}{942}$，得 $\pi\approx\frac{157}{50}$，故选 C.]

9. AB　["至少有一个黑球"中包含"都是黑球"，A 正确；

"至少有一个黑球"与"至少有一个红球"可能同时发生，B 正确；

"恰好有一个黑球"与"恰好有两个黑球"不可能同时发生，C 不正确；

"至少有一个黑球"与"都是红球"不可能同时发生，D 不正确.]

10. ABD　[$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A$，由 $|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos A=|\overrightarrow{AC}|$ 可得 $|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，即选项 A 正确，

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B$，由 $|\overrightarrow{BA}|\cdot\cos B=|\overrightarrow{BC}|$ 可得 $|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，即选项 B 正确，

由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CD}|\cos(\pi-\angle ACD)<0$，又 $|\overrightarrow{AB}|^2>0$，知选项 C 错误，

由图可知 $Rt\triangle ACD\backsim Rt\triangle ABC$，所以 $AC\cdot BC=AB\cdot CD$，

由选项 A，B 可得 $|\overrightarrow{CD}|^2=\frac{(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})\times(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}|^2}$，即选项 D 正确.]

11. ABC　[在 A 中，由题图可知，众数的估计值为最高的矩形的中点对应的值 $\frac{75+80}{2}=77.5$，A 正确；在 B 中，车速超过 80 km/h 的频率为 $0.05\times5+0.02\times5=0.35$，用频率估计概率知 B 正确；在 C 中，由题意可知，车速在[60，65)内的车辆数为 2，车速在[65，70)内的车辆数为 4，运用古典概型概率公式求概率得，至少有一辆车的车速在[65，70)的概率为 $\frac{14}{15}$，即车速都在[60，65)内的概率为 $\frac{1}{15}$，故 C 正确，D 错误. 故选 A，B，C.]

12. AD　[连接 BD(图略)，A. 因为 $AC\perp BD$，而 $BD/\!/B_1D_1$，所以 $AC\perp B_1D_1$，即 $AC\perp EF$，若 $AC\perp AF$，则 $AC\perp$ 平面 AEF，即可得 $AC\perp AE$，由图分析显然不成立，故 A 不正确；

B. 因为 $EF/\!/BD$，$EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $EF/\!/$ 平面 $ABCD$，故 B 正确；

C. $V_{A-BEF}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BEF}\times\frac{1}{2}AC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times EF\times BB_1\times\frac{1}{2}AC=\frac{1}{12}\times EF\times BB_1\times AC$，所以体积是定值，故 C 正确；

D. 设 B_1D_1 的中点是 O，点 A 到直线 EF 的距离是 AO，而点 B 到直线 EF 的距离是 BB_1，所以 $AO>BB_1$，$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\times EF\times AO$，$S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}\times EF\times BB_1$，所以 $\triangle AEF$ 的面积与 $\triangle BEF$ 的面积不相等，D 不正确.]

13. 0.2　0.8

解析　"有人感冒"这一事件包括甲、乙中有一人感冒和全都感冒.

设事件 A：甲患感冒，事件 B：乙患感冒.

则两人都不感冒这一事件的概率为

$P(\overline{A}\ \overline{B})=[1-P(A)]\cdot[1-P(B)]=0.2$，

两人中有人感冒这一事件的概率为

$P(\overline{A}B+A\overline{B}+AB)=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})+P(AB)$

$=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})+P(A)P(B)$

$=P(\overline{A})P(B)+P(A)$

$=0.4\times0.5+0.6=0.8$.

14. $\frac{2\pi}{3}$

解析　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，根据题意，可得 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$，即 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta+2\boldsymbol{b}^2=0$，代入 $|\boldsymbol{a}|=4|\boldsymbol{b}|$，得到 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，于是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.

15. 4

解析　由题意可得，$x+y=20$，$(x-10)^2+(y-10)^2=8$，

设 $x=10+t$，$y=10-t$，则 $2t^2=8$，解得 $t=\pm2$，

∴$|x-y|=2|t|=4$.

16. $\frac{\pi}{4}$

解析　∵$c^2=2b^2(1-\sin C)$，

∴$\sin C=1-\frac{c^2}{2b^2}$，

又∵$a=b$，由余弦定理可得，

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1-\frac{c^2}{2b^2}=\sin C$，

∴$\tan C=1$，

∵$C\in(0,\pi)$，

∴$C=\frac{\pi}{4}$.

17. **解** (1)由向量的数量积的运算公式，

可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120°=4\times8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-16$，

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$

$=\sqrt{4^2+8^2+2\times(-16)}=4\sqrt{3}$.

(2)因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

所以$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=k\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2+(2k-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

整理得 $16k-128+(2k-1)\times(-16)=0$，

解得 $k=-7$.

即当 $k=-7$ 时，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

18. **证明** (1)因为在$\triangle BCD$中，点 E,F 分别是 BD,BC 的中点，

所以 $EF\parallel CD$，

又因为 $EF\not\subset$平面 ACD，$CD\subset$平面 ACD，

从而 $EF\parallel$平面 ACD.

(2)因为点 E 是 BD 的中点，且 $AB=AD$，

所以 $AE\perp BD$，

又因为 $AE\perp BC$，$BC\subset$平面 BCD，$BD\subset$平面 BCD，

$BC\cap BD=B$，故 $AE\perp$平面 BCD，

因为 $CD\subset$平面 BCD，

所以 $AE\perp CD$.

19. **解** **方法一** 选择条件①：

(1)$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=-6$，

$\because\cos A=-\frac{1}{4}$，

$\therefore bc=24$.

由$\begin{cases}bc=24,\\b-c=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=6,\\c=4\end{cases}$或$\begin{cases}b=-4,\\c=-6\end{cases}$(舍去)，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36+16-2\times6\times4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=64$，

$\therefore a=8$.

(2)$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{64+36-16}{2\times8\times6}=\frac{7}{8}$，

又 $0<C<\pi$，

$\therefore\sin C=\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，

$\therefore\cos 2C=2\cos^2C-1=\frac{17}{32}$，

$\sin 2C=2\sin C\cos C=\frac{7\sqrt{15}}{32}$，

$\therefore\cos\left(2C+\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2C\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2C\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{17\sqrt{3}-7\sqrt{15}}{64}$，

方法二 选择条件②：

(1)由$\begin{cases}b^2+c^2=52,\\b-c=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=6,\\c=4\end{cases}$或$\begin{cases}b=-4,\\c=-6\end{cases}$(舍去)，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36+16-2\times6\times4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=64$，

$\therefore a=8$.

(2)同方法一.

方法三 选择条件③：

(1)$\because\cos A=-\frac{1}{4}$，$0<A<\pi$，

$\therefore\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}bc=3\sqrt{15}$，

$\therefore bc=24$.

由$\begin{cases}bc=24,\\b-c=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=6,\\c=4\end{cases}$或$\begin{cases}b=-4,\\c=-6\end{cases}$(舍去)，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36+16-2\times6\times4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=64$，

$\therefore a=8$.

(2)同方法一.

20. **解** (1)设“当罚金定为 100 元时，某员工迟到”为事件 A，

则 $P(A)=\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$，

不处罚时，某员工迟到的概率为$\frac{80}{200}=\frac{2}{5}$.

$\therefore$当罚金定为 100 元时，比不进行处罚员工迟到的概率会降低$\frac{1}{5}$.

(2)由题意知，A 类员工和 B 类员工各有 40 人，分别从 A 类员工和 B 类员工各抽出两人，

设从 A 类员工抽出的两人分别为 A_1,A_2，从 B 类员工抽出的两人分别为 B_1,B_2，

设“从 A 类与 B 类员工按分层随机抽样的方法抽取 4 人依次进行深度问卷调查”为事件 M，

则事件 M 中首先抽出 A_1 的样本点有(A_1,A_2,B_1,B_2)，(A_1,A_2,B_2,B_1)，(A_1,B_1,A_2,B_2)，(A_1,B_1,B_2,A_2)，(A_1,B_2,A_2,B_1)，(A_1,B_2,B_1,A_2)，共 6 个，

同理，首先抽出 A_2,B_1,B_2 的样本点也各有 6 个，故事件 M 共有 $4\times6=24$(个)样本点，

设“抽取 4 人中前两位均为 B 类员工”为事件 N，则事件 N 有(B_1,B_2,A_1,A_2)，(B_1,B_2,A_2,A_1)，(B_2,B_1,A_1,A_2)，(B_2,B_1,A_2,A_1)，共 4 个样本点，

$\therefore P(N)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$，

$\therefore$抽取 4 人中前两位均为 B 类员工的概率是$\frac{1}{6}$.

21. **解** (1)第 3 组的人数为 $0.06\times5\times100=30$，第 4 组的人数为 $0.04\times5\times100=20$，第 5 组的人数为 $0.02\times5\times100=10$，

因为第 3,4,5 组共有 60 名志愿者，所以利用分层随机抽样的方法在 60 名志愿者中抽取 6 名志愿者，每组抽取的人数分别为：

第 3 组：$\frac{30}{60}\times6=3$；第 4 组：$\frac{20}{60}\times6=2$；第 5 组：$\frac{10}{60}\times6=1$.

所以应从第 3,4,5 组中分别抽取 3 人，2 人，1 人.

(2)设“第 5 组的志愿者有被抽中”为事件 A.

记第 3 组的 3 名志愿者为 A_1,A_2,A_3，第 4 组的 2 名志愿者为 B_1,B_2，第 5 组的 1 名志愿者为 C_1，则从 6 名志愿者中抽取 2 名志愿者有

(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,C_1)，(A_2,A_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,C_1)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_3,C_1)，(B_1,B_2)，(B_1,C_1)，(B_2,C_1)，共有 15 个样本点.

其中第 5 组的志愿者被抽中的有 5 个样本点，

$P(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

22. **解** (1)设 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，

则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(x-1)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=(x-1)\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\because A,M,D$ 三点共线，

$\therefore\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}$ 共线，从而$\frac{1}{2}(x-1)=-y$， ①

又 C,M,B 三点共线，

$\therefore\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}$ 共线，

又 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=x\boldsymbol{a}+(y-1)\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

同理可得$\frac{1}{3}(y-1)=-x$， ②

联立①②，解得$\begin{cases}x=\frac{1}{5},\\y=\frac{2}{5},\end{cases}$故 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}$.

(2)$\because\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OE}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}-p\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{5}-p\right)\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=q\boldsymbol{b}-p\boldsymbol{a}$.

$\because\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EF}$ 共线，

$\therefore\left(\frac{1}{5}-p\right)q=-\frac{2}{5}p$，整理得$\frac{1}{p}+\frac{2}{q}=5$.