分层训练与测评

第六章　平面向量及其应用

§6.1　平面向量的概念

1. ACD ［零向量的长度为 0,方向是任意的,它与任何向量都平行,所以 ACD 正确,B 错误.］

2. C ［温度没有方向,所以不是向量,故 A 错;由共线向量的定义可知,共线的向量,始点不同,终点可能相同,故 B 错;向量不可以比较大小,故 D 错;若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 必共线,故若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,则应均为非零向量,故 C 对.］

3. B ［$|\overrightarrow{AB}|$与$|\overrightarrow{DC}|$表示等腰梯形两腰的长度,故相等.］

4. D ［对于①,长度为 0 的向量都是零向量,①正确;对于②,零向量的方向是任意的,②错误;对于③,单位向量的长度都为 1,相等,③正确;对于④,单位向量的方向不一定相同,④错误;对于⑤,零向量的方向是任意的,所以任意向量与零向量都共线,⑤正确,综上,正确的命题是①③⑤.］

5. B ［因为 O 是$\triangle ABC$ 的外心,所以$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{CO}|$.］

6. ABC ［由于 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,因此与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量只有 $\overrightarrow{DC}$,而与 $\overrightarrow{AB}$ 的模相等的向量有 $\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BA}$,因此选项 A,B 正确.而在 Rt$\triangle AOD$ 中,

因为$\angle ADO=30°$,所以$|\overrightarrow{DO}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{DA}|$,

故$|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{DA}|$,因此选项 C 正确.由于 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$,因此 $\overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 是共线的,故选项 D 不正确.故选 ABC.］

7. 菱形

解析　$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$\therefore AB=DC$,$AB/\!/DC$,
$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\because |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$,$\therefore$四边形 $ABCD$ 是菱形.

8. ③

解析　①中,当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时,不能得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,①不正确;②中,向量的模相等,但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向不确定,②不正确;③中,若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,③正确;④中,$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$ 可与 $\boldsymbol{b}$ 共线,④不正确.

9. **解**　(1)与 $\overrightarrow{OA}$ 的模相等的线段是六条边和六条半径(如 OB),而每一条线段可以有两个向量,所以这样的向量共有 23 个.

(2)存在.由正六边形的性质可知,$BC/\!/AO/\!/EF$,所以与 $\overrightarrow{OA}$ 长度相等、方向相反的向量有 $\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{OD}$,$\overrightarrow{FE}$,$\overrightarrow{BC}$,共 4 个.

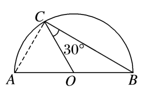
(3)由(2)知,$BC/\!/OA/\!/EF$,线段 OD,AD 与 OA 在同一条直线上,所以与 $\overrightarrow{OA}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{FE}$,$\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{OD}$,$\overrightarrow{DO}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{DA}$,共 9 个.

10. **证明**　$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$\therefore AB=DC$ 且 $AB/\!/DC$,
$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$,
又 $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}$,$\therefore CN=MA$,$CN/\!/MA$,
$\therefore$四边形 $CNAM$ 是平行四边形,
$\therefore \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NA}$,$\therefore CM=NA$,$CM/\!/NA$.
$\because CB=DA$,$CM=NA$,$\therefore MB=DN$.
又 $DN/\!/MB$,$\therefore \overrightarrow{DN}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的模相等且方向相同,
$\therefore \overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$.

11. ACD

12. A ［如图,连接 AC,由$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|$,得$\angle ABC=\angle OCB=30°$,又$\angle ACB=90°$,

则$|\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{2}\times 2=1$.］

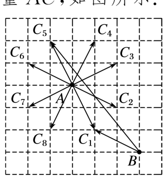


13. ACD ［若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,模相等,所以 A,C,D 正确,B 错误.］

14. $\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{CO}$,$\overrightarrow{DE}$　$\overrightarrow{CO}$,$\overrightarrow{DO}$,$\overrightarrow{BO}$,$\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{CF}$,$\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{DE}$.

15. C ［由向量相等及共线的概念,结合图形可知 C 不一定正确.］

16. **解**　(1)画出所有的向量 $\overrightarrow{AC}$,如图所示.



(2)由(1)所画的图知,
①当点 C 位于点 C_1 或 C_2 时,
$|\overrightarrow{BC}|$取得最小值 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$;
②当点 C 位于点 C_5 或 C_6 时,
$|\overrightarrow{BC}|$取得最大值 $\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.
所以$|\overrightarrow{BC}|$的最大值为 $\sqrt{41}$,最小值为$\sqrt{5}$.

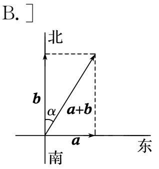
§6.2　平面向量的运算

6.2.1　向量的加法运算

1. C ［$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$.故选 C.］

2. B ［如图,易知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,所以 $\alpha=30°$.故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向是北偏东 30°.

又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$ km,故选 B.］



3. D ［$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CF}$.］

4. C ［$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{BC}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{BC}$.］

5. D ［由于$|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|=1$,$|\overrightarrow{BC}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,所以$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.故选 D.］

6. ABD ［由向量加法的平行四边形法则,知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 成立,故$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$也成立;由向量加法的三角形法则,知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}$ 成立,$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}$ 不成立.］

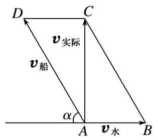
7. (1)$\overrightarrow{AD}$　(2)$\boldsymbol{0}$

8. 1　$\sqrt{3}$

解析　易知$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=1$,以 AB,AC 为邻边作平行四边形 $ABDC$,则$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{AB}|\times\sin 60°=2\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

9. **解**　(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BA}$.
(2)$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}=(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EA})+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.
(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

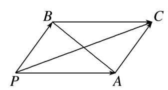
10. **解**　作出图形,如图所示.



设船速 $\boldsymbol{v}_{船}$ 与岸的方向成 α 角,
由图可知 $\boldsymbol{v}_{水}+\boldsymbol{v}_{船}=\boldsymbol{v}_{实际}$,
结合已知条件,得四边形 $ABCD$ 为平行四边形,
在 Rt$\triangle ACD$ 中,
$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{v}_{水}|=10$ m/min,
$|\overrightarrow{AD}|=|\boldsymbol{v}_{船}|=20$ m/min,
$\therefore \cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$,
$\therefore \alpha=60°$,从而船行进的方向与水流方向成 120°角.
$\therefore$船沿与水流方向成 120°角的方向行进.

11. ACD ［A 错,若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向是任意的;B 正确,若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,则它们的和的方向应该与 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{b}$)的方向相同,若它们的方向相反,而 $\boldsymbol{a}$ 的模大于 $\boldsymbol{b}$ 的模,则它们的和的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;C 错,当 A,B,C 三点共线时,也满足 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$;D 错,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.］

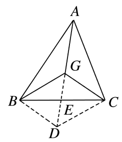
12. D ［$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}$,根据向量加法的平行四边形法则,如图,则点 P 在$\triangle ABC$ 外.故选 D.］



13. D ［由向量加法的平行四边形法则可知,
$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DF}\neq\overrightarrow{FD}$.］

14. $\boldsymbol{0}$

解析　如图所示,连接 AG 并延长交 BC 于点 E,则点 E 为 BC 的中点,延长 AE 到点 D,使 $GE=ED$,



则 $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$，$\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}=\mathbf{0}$，

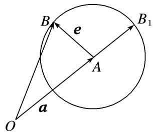
$\therefore\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.

15.3

解析 在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$，

因为 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，

所以点 B 在以点 A 为圆心的单位圆上(如图所示)，



由图可知当点 B 在点 B_1 时，O，A，B_1 三点共线，

$|\overrightarrow{OB}|$ 即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}|$ 最大，最大值是 3.

16.**证明** 由题意知，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}$.

由平面几何知识可知，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FA}$，

所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF})$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB})$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF})+\mathbf{0}$

$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\mathbf{0}$.

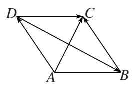
6.2.2 向量的减法运算

1.B ［由向量的加法、减法法则，得
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.］

2.D ［选项 D 中，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$.］

3.B

4.D ［如图，作菱形 $ABCD$，
则 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$
$=|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{3}$.］



5.BCD ［A 项，$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$；B 项，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$；C 项，$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$；D 项，$\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PN}=\mathbf{0}$.］

6.D ［$\because\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}$，$\therefore\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DF}$. 由三角形中位线定理得 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$，故选 D.］

7.0 2

解析 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为相反向量，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=0$，又 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，所以 $|\boldsymbol{a}|=|-\boldsymbol{b}|=1$，因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.

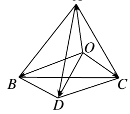
8.$4\sqrt{5}$ 8

解析 在矩形 $ABCD$ 中，因为 $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}$，所以 $|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DC}|=2|\overrightarrow{CA}|=4\sqrt{5}$. 因为 $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}$，所以 $|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}|=2|\overrightarrow{CB}|=8$.

9.**解** (1)如图所示，以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 为邻边作▱$OBDC$，连接 OD，AD，

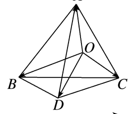
则 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，

所以 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}$.



(2)由(1)知，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，

则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DA}$.



10.**解** 由向量的平行四边形法则，得 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 时，平行四边形的两条对角线的长度相等，四边形 $ABCD$ 为矩形；

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时，平行四边形的两条邻边的长度相等，四边形 $ABCD$ 为菱形；

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时，四边形 $ABCD$ 为正方形.

11.B ［易知 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$，而在平行四边形 $ABCD$ 中有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$，即 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$，也即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\mathbf{0}$. 故选 B.］

12.2

解析 以 AB，AC 为邻边作平行四边形 $ACDB$(图略)，

由向量加减法的几何意义可知，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，

$\because|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，

$\therefore|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{CB}|$，

又 $|\overrightarrow{BC}|=4$，M 是线段 BC 的中点，

$\therefore|\overrightarrow{AM}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|=2$.

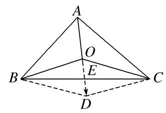
13.$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$

解析 由已知得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

则 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

14.重

解析 如图，以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 为邻边作▱$OBDC$，则 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.



又 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，

$\therefore\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$，

$\therefore\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$，

$\therefore A$，O，D 三点共线.

设 OD 与 BC 的交点为 E，则 E 是 BC 的中点，

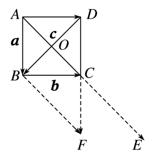
$\therefore AE$ 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边的中线.

同理可证另两条边的中线也过点 O，故 O 是 $\triangle ABC$ 的重心.

15.A ［①当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时成立；②当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$ 时成立；③当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，方向相反，且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$ 时成立；④当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，方向相同，且 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 时成立.］

16.**解** (1)由已知得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，

$\because\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，$\therefore$ 延长 AC 到 E，使 $|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{AC}|$，如图所示，



则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AE}$，

且 $|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{2}$.

$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=2\sqrt{2}$.

(2)作 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}$，连接 CF，则 $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DF}$，

而 $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}|=|\overrightarrow{DF}|$ 且 $|\overrightarrow{DF}|=2$.

$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=2$.

6.2.3 向量的数乘运算

1.D

2.ACD ［ACD 正确，B 错，$7(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-8\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.］

3.AB ［由向量数乘的运算律知 A，B 正确；C 中，当 $m=0$ 时，$m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，但 $\boldsymbol{a}$ 不一定等于 $\boldsymbol{b}$，故错误；D 中，当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 时等式成立，但 m 不一定等于 n，故错误.］

4.B ［①中，$\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

②中，$\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{2}-\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1}{2}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

③中，$\boldsymbol{b}=\dfrac{3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2}{2}=\dfrac{3}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，若 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，若 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.］

5.D ［$\because$ 向量 $\boldsymbol{m}$ 与向量 $\boldsymbol{n}$ 共线，

$\therefore$ 设 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}(\lambda\in\mathbf{R})$，

$\therefore-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{e}_2-2\lambda\boldsymbol{e}_1$，

$\because\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，

$\therefore\begin{cases}k=\lambda,\\-1=-2\lambda,\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2},\\k=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$］

6.A ［由 $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{p}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{q}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}$，

得 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}=-3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r})$，$\therefore\boldsymbol{r}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{p}+\dfrac{3}{2}\boldsymbol{q}$.］

7. $\pm\frac{3}{5}$

解析 由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,得 $|\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{b}|$.

$\because|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=5,\therefore|\lambda|=\frac{3}{5}$,即 $\lambda=\pm\frac{3}{5}$.

8. $-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

解析 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

9. **解** (1)原式 $=18\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}-18\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{b}$.

(2)原式 $=6\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}+4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$

$=(6\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{a})+(8\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b})+(6\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{c})$

$=6\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

10. **解** 由题意可知存在实数 λ 使 $2k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$,

即 $2k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=8\lambda\boldsymbol{a}+\lambda k\boldsymbol{b}$,

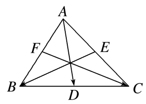
$\therefore\begin{cases}2k=8\lambda,\\1=\lambda k,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2},\\k=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2},\\k=-2,\end{cases}$

$\because 2k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 的方向相反,

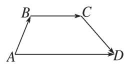
$\therefore k=2$ 不符合题意,舍去,

$\therefore k=-2$.

11. C [如图,$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\times2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$.]



12. A [如图所示.



$\because\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$

$=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

$\therefore\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$.

$\therefore\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线,且 $|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{BC}|$.

又$\because$这两个向量所在的直线不重合,

$\therefore AD/\!/BC$,且 $AD=2BC$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是以 AD,BC 为两条底边的梯形.]

13. B [$\because A,B,D$ 三点共线,

$\therefore\frac{1}{3}+\lambda=1$,解得 $\lambda=\frac{2}{3}$.]

14. 3

解析 **方法一** $\because\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,

$\therefore$点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心.

$\therefore\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AM}$,$\therefore m=3$.

方法二 在 $\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}$,

若 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$ 成立,则

$(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA})=m\overrightarrow{AM}$ 成立,

整理得,$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+(m-2)\overrightarrow{MA}=\mathbf{0}$,

由已知可得,$m-2=1$,即 $m=3$.

15. D [$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$. $\because\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,$\therefore x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$,

$\therefore\left(x-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}=\left(\frac{5}{6}-y\right)\overrightarrow{AD}$,又 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 不共线,

$\therefore x-\frac{1}{3}=0$ 且 $\frac{5}{6}-y=0$,故 $x=\frac{1}{3},y=\frac{5}{6}$. $\therefore 3x+6y=6$.]

16. **解** $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ 共线.证明如下:

$\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,

$\therefore$存在唯一实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$. ①

$\because\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,

$\therefore$存在唯一实数 μ,使得 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{a}$. ②

由①-②得,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{c}-\mu\boldsymbol{a}$.

$\therefore(1+\mu)\boldsymbol{a}=(1+\lambda)\boldsymbol{c}$.

又$\because\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线,$\therefore 1+\mu=0,1+\lambda=0$,

$\therefore\mu=-1,\lambda=-1$,$\therefore\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$,

即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$. $\therefore\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$.

故 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ 共线.

6.2.4 向量的数量积(一)

1. B [$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 135^\circ=3\times4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-6\sqrt{2}$.]

2. C [由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,知 $AB\perp BC$.由 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$,知 $BC\underline{\underline{/\!/}}AD$,所以四边形 $ABCD$ 是矩形.]

3. B [由题意,根据向量的数量积的定义,可得力 $\boldsymbol{F}$ 做的功 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=10\times10\cos 60^\circ=50(\mathrm{J})$,故选 B.]

4. B [设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

$\because|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta\,\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta\,\frac{1}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta=\frac{3}{2}$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.]

5. ACD [选项 B 中,$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta|$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,故 B 错误.]

6. A [$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$

$=-|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$.

同理 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{1}{2}$,$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}$.]

7. $\frac{12}{25}\boldsymbol{b}$

解析 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=12$,又 $|\boldsymbol{b}|=5$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\frac{12}{5}$,$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{5}$,

即 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{12}{25}\boldsymbol{b}$.

8. $\frac{\pi}{4}$

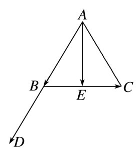
解析 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

由题意知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,

则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

又$\because 0\leqslant\theta\leqslant\pi$,$\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$.

9. **解** (1)$\because\triangle ABC$ 为等边三角形,



$\therefore\angle ABC=60^\circ$.

如图,延长 AB 至点 D,使 $BD=AB$,

则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$,

$\therefore\angle DBC$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角.

$\because\angle DBC=120^\circ$,

$\therefore$向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 120°.

(2)$\because E$ 为 BC 的中点,$\therefore AE\perp BC$,

$\therefore\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{EC}$ 的夹角为 90°.

10. **解** (1)若 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$,则 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$,

故 $x=y=\frac{1}{2}$.

(2)因为 $|\overrightarrow{OA}|=4,|\overrightarrow{OB}|=2,\angle BOA=60^\circ$,

所以 $\angle OBA=90^\circ$,

所以 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{3}$.

又因为 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$,

所以 $|\overrightarrow{PB}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$,$\cos\angle OPB=\frac{\sqrt{57}}{19}$.

所以 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角 θ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{57}}{19}$.

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta=-3$.

11. AB [对于选项 A,根据投影向量的定义,知 A 正确;对于选项 B,$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta<0$,则 $\cos\theta<0$,又$\because 0\leqslant\theta\leqslant\pi$,$\therefore\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$,故 B 正确;对于选项 C,若 $\triangle ABC$ 是等边三角形,则

$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 120°,故 C 错误;对于选项 D,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,故 D 错误.]

12. D [由题意知 $\angle ABC=90°$,

所以原式 $=0+4\times5\cos(180°-C)+5\times3\cos(180°-A)$

$=-20\cos C-15\cos A$

$=-20\times\frac{4}{5}-15\times\frac{3}{5}=-16-9=-25.$]

13. A [$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-6}{2\times5}=-\frac{3}{5}$,

$\because\theta\in[0,\pi]$,

$\therefore\sin\theta=\frac{4}{5}$.

$\therefore|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=2\times5\times\frac{4}{5}=8$. 故选 A.]

14. 等边三角形 -8

解析 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$,

即 $8=4\times4\cos\angle BAC$,

于是 $\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$,

因为 $0°<\angle BAC<180°$,

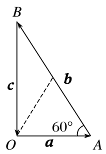
所以 $\angle BAC=60°$.

又 $AB=AC$,故 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

此时 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos120°=-8$.

15. 90°

解析 由题意可画出图形,如图所示,在 $\triangle OAB$ 中,



因为 $\angle OAB=60°$,$|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$,

所以 $\angle ABO=30°$,

$OA\perp OB$,

即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 90°.

16. **解** (1)由已知可得 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$,

四边形 $OAMB$ 是菱形,则 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,

所以 $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

(2)易知 $\angle DMC=60°$,且 $|\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MD}|$,

那么只需求 MC 的最大值与最小值即可.

当 $MC\perp OA$ 时,MC 最小,此时 $MC=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

则 $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos60°=\frac{3}{8}$.

当 MC 与 MO 重合时,MC 最大,此时 $MC=1$,

则 $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\cos60°=\frac{1}{2}$.

所以 $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ 的取值范围为 $\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right]$.

6.2.4 向量的数量积(二)

1. C [由题意得 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=4-1=3$.]

2. C [设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

因为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+2\cos\theta=3$,

所以 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$,又因为 $\theta\in[0,\pi]$,

所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$.]

3. A [**方法一** $\because|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=16+144+96=256$,$\therefore|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=16$.

方法二 由题意知 $2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,

$\therefore|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=|4\boldsymbol{b}|=4|\boldsymbol{b}|=16$.]

4. A [$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10$, ①

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=6$, ②

由①-②得 $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$.]

5. C [因为 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos60°-6|\boldsymbol{b}|^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|-96=-72$.

所以 $|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|-24=0$.

解得 $|\boldsymbol{a}|=6$ 或 $|\boldsymbol{a}|=-4$(舍去). 故选 C.]

6. A [$(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$,$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-|\boldsymbol{a}|^2=0$,$\lambda=\frac{2}{2\times\cos45°}=\sqrt{2}$.]

7. $\frac{3}{2}$

解析 $\because(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3\lambda\boldsymbol{a}^2+(2\lambda-3)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=3\lambda\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2=12\lambda-18=0$,

$\therefore\lambda=\frac{3}{2}$.

8. 9

解析 $\because\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$,$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-9=0$,

即 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=9$.

9. **解** (1)$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

$=2\times4-2\times1+3\times2\times1\times\frac{1}{2}=9$.

(2)$|\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{d}|^2=(4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2=16\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

$=16\times4+9\times1+24\times2\times1\times\frac{1}{2}=97$,

$\therefore|\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{d}|=\sqrt{97}$.

10. **解** 因为 $\boldsymbol{a}^2=(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)^2=9-2\times3\times2\times\cos\alpha+4=9$,

所以 $|\boldsymbol{a}|=3$,

因为 $\boldsymbol{b}^2=(3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2=9-2\times3\times1\times\cos\alpha+1=8$,

所以 $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$,

又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)\cdot(3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=9\boldsymbol{e}_1^2-9\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_2^2=9-9\times1\times1\times\frac{1}{3}+2=8$,

所以 $\cos\beta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{8}{3\times2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

11. CD [分析知 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 120°,故 B 结论错误;

$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3$,

$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,故 A 结论错误;

$\because(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\times1\times2\times\cos120°+4=0$,

$\therefore(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,故 C 结论正确;

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2\times\cos120°=-1$,故 D 结论正确.]

12. A [$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos45°-3|\boldsymbol{b}|^2=16+\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|-3|\boldsymbol{b}|^2=12$,

解得 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$ 或 $|\boldsymbol{b}|=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$(舍去). 故 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为

$|\boldsymbol{b}|\cos45°\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\boldsymbol{a}}{4}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$.]

13. A [因为 $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$,

即 $\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$,

又因为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$,

所以 $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$,

即 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$,

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.]

14. $[0,1]$

解析 $\because\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-|\boldsymbol{b}|^2=0$,

$\therefore|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\cos\theta$ (θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角)或 $|\boldsymbol{b}|=0$,又 $\theta\in[0,\pi]$,

$\therefore0\leqslant|\boldsymbol{b}|\leqslant1$.

15. C [因为 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 恒成立,

两边平方,化简得 $\boldsymbol{b}^2t^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}t+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2\geqslant0$,

对任意的 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立,

又 $|\boldsymbol{b}|\neq0$,则 $\Delta=4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-4\boldsymbol{b}^2(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2)\leqslant0$,

即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2)^2\leqslant0$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0$,所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,

即 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.]

16. (1)**证明** 因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,

且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 之间的夹角均为 120°,

所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

$=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos120°-|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos120°=0$,

所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$.

(2)**解** 因为 $|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|>1$,

所以 $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2>1$,

即 $k^2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}>1$,

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\cos120°=-\frac{1}{2}$,

所以 $k^2-2k>0$，
解得 $k<0$ 或 $k>2$.
所以实数 k 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

§6.3　平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1　平面向量基本定理

1. AC　[易知 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 不共线，$\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 不共线，故 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 可作为基底.]

2. D　[选项A中，两个向量为相反向量，即 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)$，则 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$ 为共线向量；选项B中，$2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=2\left(\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\right)$，也为共线向量；选项C中，$6\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2=-2(2\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1)$，为共线向量.根据不共线的向量可以作为基底，知只有选项D中的两向量可作为基底.]

3. A　[$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC})$
$=\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$.]

4. AB　[B正确，平面中的任意向量都可以用基底表示；C错，在平面 α 内任意向量都可表示为 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式，故 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 一定在平面 α 内；D错，这样的 λ_1,λ_2 是唯一的，而不是无数对.]

5. D　[由题意得 $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{8}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，故选D.]

6. A　[由题意可得，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$
$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$，
据此可知 $\lambda=\frac{1}{3},\mu=\frac{2}{9}$，
$\therefore\frac{\lambda}{\mu}=\frac{3}{2}$.]

7. $\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$

解析　$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{MA}+\frac{5}{6}(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})=\frac{1}{6}\overrightarrow{MA}+\frac{5}{6}\overrightarrow{MB}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$.

8. $\frac{5}{2}$　$-\frac{1}{2}$

解析　由条件可知 $\begin{cases}\lambda+\mu=2,\\ \lambda-\mu=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{5}{2},\\ \mu=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

9. **解**　**方法一**　设 AC,BD 交于点 O，
则有 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.
所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

方法二　设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{x}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{y}$，
则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{y}$，
又 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\\ \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD},\end{cases}$
所以 $\begin{cases}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\end{cases}$ 解得 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，
即 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

10. (1)**证明**　假设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R})$，
则 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$.
由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，得 $\begin{cases}\lambda=1,\\ 3\lambda=-2,\end{cases}$
所以 λ 不存在.
故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，可以作为一个基底.
(2)**解**　设 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(m,n\in\mathbf{R})$，
则 $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=m(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+n(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$
$=(m+n)\boldsymbol{e}_1+(-2m+3n)\boldsymbol{e}_2$.
所以 $\begin{cases}m+n=3,\\ -2m+3n=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2,\\ n=1.\end{cases}$
所以 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

11. D　[$\because\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，
$\therefore\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}=\lambda(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP})$，$\therefore(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}$，
$\therefore\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}=\frac{1}{1+\lambda}\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\boldsymbol{b}$.]

12. D　[连接 CD,OD，图略，
$\because$ 点 C,D 是半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的两个三等分点，
$\therefore\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，$\therefore CD/\!/AB$，$\angle CAD=\angle DAB=30^\circ$，
$\because OA=OD$，$\therefore\angle ADO=\angle DAO=30^\circ$，
$\therefore\angle CAD=\angle ADO=30^\circ$，
$\therefore AC/\!/DO$，
$\therefore$ 四边形 $ACDO$ 为平行四边形，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}$.
$\because\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，
$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.故选D.]

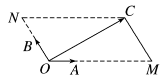
13. B　[$\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，$\therefore\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，
$\therefore\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，$\therefore$ 点 P 是线段 OC 的中点，即 AB 边中线的三等分点(非重心).]

14. $\frac{1}{2}$

解析　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}-y\overrightarrow{AD}$，
由 $\overrightarrow{PQ}/\!/\overrightarrow{BE}$，可设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{BE}$，
即 $x\overrightarrow{AB}-y\overrightarrow{AD}=\lambda(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB})=\lambda\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，所以 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\lambda,\\ y=-\lambda,\end{cases}$ 则 $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$.

15. 6

解析　如图，以 OA,OB 所在射线为邻边，OC 为对角线作▱$OMCN$，使得 M 在直线 OA 上，N 在直线 OB 上，



则存在 λ,μ，使 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{ON}=\mu\overrightarrow{OB}$，
即 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$.
在 $Rt\triangle OCM$ 中，$\because|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$，
$\angle COM=30^\circ$，$\angle OCM=90^\circ$，
$\therefore|\overrightarrow{OM}|=4$，$\therefore\overrightarrow{OM}=4\overrightarrow{OA}$，
又 $|\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{MC}|=2$，$\therefore\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OB}$，
$\therefore\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$，
即 $\lambda=4,\mu=2$，
$\therefore\lambda+\mu=6$.

16. **解**　(1)因为 $AN=\frac{1}{4}AB$，
所以 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$，
所以 $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.
因为 $BM=\frac{2}{3}BC$，所以 $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，
所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.
(2)因为 A,O,M 三点共线，所以 $\overrightarrow{AO}/\!/\overrightarrow{AM}$，
设 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AM}$，
则 $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\lambda\left(\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}\right)-\boldsymbol{b}$
$=\lambda\boldsymbol{a}+\left(\frac{2}{3}\lambda-1\right)\boldsymbol{b}$.
因为 D,O,N 三点共线，
所以 $\overrightarrow{DO}/\!/\overrightarrow{DN}$，存在实数 μ 使 $\overrightarrow{DO}=\mu\overrightarrow{DN}$，
则 $\lambda\boldsymbol{a}+\left(\frac{2}{3}\lambda-1\right)\boldsymbol{b}=\mu\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)$.

由于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,则 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{4}\mu,\\ \frac{2}{3}\lambda-1=-\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{3}{14},\\ \mu=\frac{6}{7}.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{3}{14}\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OM}=\frac{11}{14}\overrightarrow{AM}$,

所以 $AO:OM=3:11$.

6.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示

6.3.3 平面向量加、减运算的坐标表示

1. B [$\overrightarrow{NM}=(2,3)-(3,1)=(-1,2)$.]

2. ABD [由向量坐标的定义不难看出一个坐标可对应无数个相等的向量,故 C 错误.]

3. A [$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(3,2)-(2,4)=(1,-2)$.]

4. D [设 $D(x,y)$,因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,
所以 $(x-5,y+1)=(2,-5)$,
所以 $x=7,y=-6$.
所以 $D(7,-6)$.]

5. B [$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$
$=-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$
$=-(-1,4)-(m,n)-(2,3)$
$=(-1-m,-7-n)$.]

6. A [设 $C(x,y)$,则 $\overrightarrow{AC}=(x-4,y-1)$.
又 $\overrightarrow{AB}=(7,-3)-(4,1)=(3,-4)$,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$,
$\therefore(3,-4)+(x-4,y-1)=(0,0)$,
$\therefore\begin{cases}3+x-4=0,\\ -4+y-1=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=1,\\ y=5.\end{cases}\therefore C(1,5)$.]

7. $(-18,18)$

解析 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=(-8-2,10-(-4))+(-8-0,10-6)$
$=(-10,14)+(-8,4)=(-18,18)$.

8. $(-8,-15)$

9. **解** 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$,
$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2)$,

则 $a_1=|\boldsymbol{a}|\cos 45^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$,

$a_2=|\boldsymbol{a}|\sin 45^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$,

$b_1=|\boldsymbol{b}|\cos 120^\circ=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$,

$b_2=|\boldsymbol{b}|\sin 120^\circ=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$c_1=|\boldsymbol{c}|\cos(-30^\circ)=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

$c_2=|\boldsymbol{c}|\sin(-30^\circ)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$.

因此 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},\sqrt{2}),\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\boldsymbol{c}=(2\sqrt{3},-2)$.

10. **解** 设点 P 的坐标为 (x,y),
因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}$,
又 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(1-x,1-y)+(2-x,3-y)+(3-x,2-y)=(6-3x,6-3y)$.
所以 $\begin{cases}6-3x=0,\\ 6-3y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=2.\end{cases}$
所以点 P 的坐标为 $(2,2)$,故 $\overrightarrow{OP}=(2,2)$.

11. B [$\because A(2\,021,12),B(-1,8),\therefore\overrightarrow{AB}=(-2\,022,-4)$.
又 $\because\overrightarrow{AB}$ 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后不发生变化,
$\therefore$ 平移后 $\overrightarrow{AB}=(-2\,022,-4)$.]

12. D [向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标为 $(x^2+x+1,-x^2+x-1)$.
$\because x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,-x^2+x-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0$,
$\therefore$ 向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标位于第四象限.]

13. A [由题意知,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反,又 $|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|$.
$\therefore\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.
设 $B(x,y)$,则 $\overrightarrow{AB}=(x+1,y-2)$,
$\therefore\begin{cases}x+1+6=0,\\ y-2-8=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-7,\\ y=10,\end{cases}$
故点 B 的坐标为 $(-7,10)$.]

14. $\frac{\pi}{6}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$

解析 由题意知 $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=(\sin\alpha,\cos\beta)$,

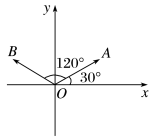
$\therefore\sin\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2}$,

又 $\because\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore\alpha=-\frac{\pi}{6},\beta=\frac{\pi}{3}$ 或 $-\frac{\pi}{3}$,

$\therefore\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$.

15. D [如图,设 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点 O 逆时针方向旋转 120° 得到的 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标为 (x,y),



则 $x=|\overrightarrow{OA}|\cos(120^\circ+30^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$y=|\overrightarrow{OA}|\sin(120^\circ+30^\circ)=\frac{1}{2}$,

故 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标是 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$,故选 D.]

16. **解** (1)过点 A 作 $AM\perp x$ 轴于点 M(图略),

则 $OM=OA\cdot\cos 45^\circ=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$,

$AM=OA\cdot\sin 45^\circ=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$,

$\therefore A(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$,故 $\boldsymbol{a}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.
$\because\angle AOC=180^\circ-105^\circ=75^\circ,\angle AOy=45^\circ$,
$\therefore\angle COy=30^\circ$. 又 $OC=AB=3$,

$\therefore C\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\therefore\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

即 $\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2)$\because\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2})+\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\left(2\sqrt{2}-\frac{3}{2},2\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(2\sqrt{2}-\frac{3}{2},2\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.3.4 平面向量数乘运算的坐标表示

1. A [$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-1,0)-(-2,-2)=(1,2)$.]

2. B [由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,得 $5\cos\alpha-3\sin\alpha=0$,即 $\tan\alpha=\frac{5}{3}$.]

3. B [$\because\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且方向相反,$\therefore$ 存在实数 $\lambda(\lambda<0)$,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,
即 $(4,k)=\lambda(k,1)=(\lambda k,\lambda)$,$\therefore\begin{cases}\lambda k=4,\\ k=\lambda,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}k=-2,\\ \lambda=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=2,\\ \lambda=2\end{cases}$(舍去).]

4. ABC [只有 D 正确,可令 $m=0$,则 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$,无论 x 为何值,都有 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{b}$.]

5. A [因为三点 $A(4,3),B(5,m),C(6,n)$ 在一条直线上,所以 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$,所以 $(1,m-3)=\lambda(2,n-3)$,所以 $\lambda=\frac{1}{2}$,所以 $m-3=\frac{1}{2}(n-3)$,即 $2m-n=3$.]

6. BD [$\because|AP|=2|PB|$,
$\therefore\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ 或 $\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{PB}$,
由定比分点坐标公式可知
当 $\lambda=2$ 时,$P\left(\frac{7}{3},-\frac{2}{3}\right)$,
当 $\lambda=-2$ 时,$P(5,-6)$.]

7. 7

解析 由于 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$,
即 $(9,4)=(2m,-3m)+(n,2n)=(2m+n,-3m+2n)$,
所以 $\begin{cases}2m+n=9,\\ -3m+2n=4,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}m=2,\\ n=5,\end{cases}$ 所以 $m+n=7$.

8. $\left(11,-\frac{11}{3}\right)$

解析　设 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,

$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$,

则 $(x_1-2,y_1-4)=\frac{3}{2}(-6,2)=(-9,3)$,

$\therefore x_1=-7,y_1=7$,即 $C(-7,7)$.

$\overrightarrow{BD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BA}$,

则 $(x_2+4,y_2-6)=\frac{4}{3}(6,-2)=\left(8,-\frac{8}{3}\right)$,

$\therefore x_2=4,y_2=\frac{10}{3}$,即 $D\left(4,\frac{10}{3}\right)$,

则 $\overrightarrow{CD}=\left(11,-\frac{11}{3}\right)$.

9. **解**　$m\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(2m,3m)+(-4,8)=(2m-4,3m+8)$,
$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2,3)-(-2,4)=(4,-1)$,
因为 $m\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 共线,
所以 $4(3m+8)-(-1)\times(2m-4)=0$,得 $m=-2$.
当 $m=-2$ 时,$m\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(-8,2)$,
所以 $m\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=-2(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,
所以 $m\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 方向相反.

10. **解**　设点 P 的坐标为 (x,y),

①若点 P 在线段 AB 上,则 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$,

$\therefore(x-3,y+4)=\frac{1}{2}(-9-x,2-y)$.

解得 $x=-1,y=-2$,
$\therefore P(-1,-2)$.

②若点 P 在线段 BA 的延长线上,则 $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$,

$\therefore(x-3,y+4)=-\frac{1}{4}(-9-x,2-y)$.

解得 $x=7,y=-6$,$\therefore P(7,-6)$.
综上可得,点 P 的坐标为 $(-1,-2)$ 或 $(7,-6)$.

11. D　[由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 可排除A,B,C,故选D.]

12. B　[$\because$ 向量 $\boldsymbol{a}=(-6,1)$,$\boldsymbol{b}=(7,-2)$,
$\therefore\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=(-6+7m,1-2m)$,$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-25,5)$.
$\because(\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b})/\!/(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,
$\therefore 5(-6+7m)-(-25)\times(1-2m)=0$,

解得 $m=-\frac{1}{3}$.]

13. C　[因为 A,B,C 三点不能构成三角形,则 A,B,C 三点共线,则 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$,又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,2)$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(k,k+1)$,所以 $2k-(k+1)=0$,即 $k=1$.]

14. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

解析　由题意,得 $\overrightarrow{AB}=(-a+2,-2)$,$\overrightarrow{AC}=(b+2,-4)$.
又 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$,所以 $-4(-a+2)=-2(b+2)$,整理得 $2a+b=2$,

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

$\geqslant\frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{b}{a}}\right)=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当 $b=\sqrt{2}a$ 时等号成立.

15. $\left(\frac{27}{7},\frac{16}{7}\right)$

解析　设 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{DP}=(x-1,y)$,$\overrightarrow{DB}=(5,4)$,$\overrightarrow{CA}=(-3,6)$,$\overrightarrow{DC}=(4,0)$.
由 B,P,D 三点共线可得 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DB}=(5\lambda,4\lambda)$.
又因为 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DC}=(5\lambda-4,4\lambda)$,
由 $\overrightarrow{CP}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 共线得,$(5\lambda-4)\times6+12\lambda=0$.

解得 $\lambda=\frac{4}{7}$,所以 $\overrightarrow{DP}=\frac{4}{7}\overrightarrow{DB}=\left(\frac{20}{7},\frac{16}{7}\right)$,

所以 P 的坐标为 $\left(\frac{27}{7},\frac{16}{7}\right)$.

16. **解**　由 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,知 $\begin{cases}\lambda+2=2m,\\ \lambda^2-\cos^2\alpha=m+2\sin\alpha,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\lambda=2m-2,\\ \lambda^2-m=\cos^2\alpha+2\sin\alpha,\end{cases}$

又 $\cos^2\alpha+2\sin\alpha=-\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1=-(\sin\alpha-1)^2+2$,
$\therefore -2\leqslant\cos^2\alpha+2\sin\alpha\leqslant2$,
$\therefore -2\leqslant\lambda^2-m=(2m-2)^2-m\leqslant2$,

$\therefore\frac{1}{4}\leqslant m\leqslant2$,

$\because\frac{\lambda}{m}=\frac{2m-2}{m}=2-\frac{2}{m}$,$\therefore -6\leqslant2-\frac{2}{m}\leqslant1$,

$\therefore\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围为 $[-6,1]$.

6.3.5　平面向量数量积的坐标表示

1. AD　[$|\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{b}^2=2$,故A正确,B,C显然错误,
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-1)$,所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1-1=0$,
所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$.故D正确.]

2. B　[由题意可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x\cdot1+1\times(-2)=x-2=0$,
解得 $x=2$.
再由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x+1,-1)=(3,-1)$,
可得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$.]

3. A　[由题设知 $\overrightarrow{AB}=(8,-4)$,$\overrightarrow{AC}=(2,4)$,$\overrightarrow{BC}=(-6,8)$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times8+(-4)\times4=0$,即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.所以 $\angle BAC=90°$,故 $\triangle ABC$ 是直角三角形.]

4. B　[$\boldsymbol{a}=(2,0)$,$|\boldsymbol{b}|=1$,
$\therefore|\boldsymbol{a}|=2$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1\times\cos60°=1$.
$\therefore|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=2\sqrt{3}$.]

5. B　[$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,
$\therefore\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$,即 $(4-0,2-0)=(a-2,8-a)$,
$\therefore a=6$,$\because\overrightarrow{OA}=(4,2)$,$\overrightarrow{OC}=(2,6)$,
设向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 θ,

$\therefore\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{4\times2+2\times6}{\sqrt{4^2+2^2}\times\sqrt{2^2+6^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $\theta\in(0,\pi)$,$\therefore\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.]

6. A　[由题意,设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda,-2\lambda)(\lambda<0)$,
则 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\lambda^2+(-2\lambda)^2}=\sqrt{5}|\lambda|=3\sqrt{5}$,
又 $\lambda<0$,$\therefore\lambda=-3$,故 $\boldsymbol{b}=(-3,6)$.]

7. 4
解析　$\because\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,5)$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=4$.

8. -1
解析　由题意得 $m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(m+1,-m)$,
根据向量垂直的充要条件可得
$1\times(m+1)+0\times(-m)=0$,
所以 $m=-1$.

9. **解**　(1)设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$,由 $|\boldsymbol{c}|=3\sqrt{2}$,$\boldsymbol{c}/\!/\boldsymbol{a}$ 可得
$\begin{cases}y+x=0,\\ x^2+y^2=18,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=-3,\\ y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\ y=-3,\end{cases}$
故 $\boldsymbol{c}=(-3,3)$ 或 $\boldsymbol{c}=(3,-3)$.
(2)因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$,
即 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,

故 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $\theta\in[0,\pi]$,

所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

10. **解**　(1)因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{b}=(-2,0)$,
所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})-(-2,0)=(3,\sqrt{3})$,
设 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 之间的夹角为 θ,

所以 $\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$.

(2)$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{b}^2=4t^2+4t+4=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+3$.易知当 $t\in[-1,1]$ 时,$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|^2\in[3,12]$,

所以 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|$ 的取值范围是 $[\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

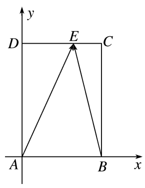
11. B　[由 $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=(2\lambda+3,3)$,$\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=(-1,-1)$,
$(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$,
可得 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})=(2\lambda+3,3)\cdot(-1,-1)=-2\lambda-6=0$,
解得 $\lambda=-3$.]

12. ABC [∵$\overrightarrow{AB}=(2,3)$,$\overrightarrow{AC}=(1,k)$,
∴$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-1,k-3)$.
若$\angle A=90^\circ$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times1+3\times k=0$,∴$k=-\frac{2}{3}$;
若$\angle B=90^\circ$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times(-1)+3(k-3)=0$,
∴$k=\frac{11}{3}$;
若$\angle C=90^\circ$,则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times(-1)+k(k-3)=0$,
∴$k=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.
故所求 k 的值为$-\frac{2}{3}$或$\frac{11}{3}$或$\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.]

13. C [设点 P 的坐标为$(x,0)$,则 $\overrightarrow{AP}=(x-2,-2)$,
$\overrightarrow{BP}=(x-4,-1)$.
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-2)(x-4)+(-2)\times(-1)$
$=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$,
所以当 $x=3$ 时,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最小值 1.
此时点 P 的坐标为$(3,0)$.]

14. $\frac{32}{9}$

解析 以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴、AD 所在直线为 y 轴建立如图所示平面直角坐标系.
∵$AB=\sqrt{2}$,$BC=2$,
∴$A(0,0)$,$B(\sqrt{2},0)$,$C(\sqrt{2},2)$,$D(0,2)$,
∵点 E 在边 CD 上,且 $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC}$,
∴ $E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},2\right)$. ∴ $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},2\right)$,$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{3},2\right)$,



∴$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{4}{9}+4=\frac{32}{9}$.

15. A [因为△ABC 是锐角三角形,所以 $A+B>\frac{\pi}{2}$,
即$\frac{\pi}{2}>A>\frac{\pi}{2}-B>0$,
又因为函数 $y=\sin x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,
所以 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$,
所以 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=\sin A-\cos B>0$,
设 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 的夹角为 θ,所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}>0$,
又因为 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 不共线,所以 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 的夹角是锐角.]

16. **解** (1)∵$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(x+4,y-2)$,
∴$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=(-x-4,2-y)$.
又 $\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{DA}$,且 $\overrightarrow{BC}=(x,y)$,
∴$x(2-y)-y(-x-4)=0$,
即 $x+2y=0$.
(2)$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(x+6,y+1)$,
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(x-2,y-3)$.
∵$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$,∴$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,
即$(x+6)(x-2)+(y+1)(y-3)=0$.
由(1)知 $x+2y=0$,与上式联立,化简得 $y^2-2y-3=0$,
解得 $y=3$ 或 $y=-1$.
当 $y=3$ 时,$x=-6$,
此时 $\overrightarrow{AC}=(0,4)$,$\overrightarrow{BD}=(-8,0)$;
当 $y=-1$ 时,$x=2$,此时 $\overrightarrow{AC}=(8,0)$,$\overrightarrow{BD}=(0,-4)$;
∴$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|=16$.

习题课 平面向量数量积的综合应用

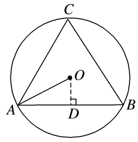
1. C [∵$\boldsymbol{a}=(1,-2)$,$\boldsymbol{b}=(-3,4)$,$\boldsymbol{c}=(3,2)$,∴$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-5,6)$,
∴$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-5)\times3+6\times2=-3$.]

2. C [∵$\boldsymbol{a}=(4,3)$,∴$2\boldsymbol{a}=(8,6)$.
又∵$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,18)$,
∴$\boldsymbol{b}=(-5,12)$,∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-20+36=16$.
又∵$|\boldsymbol{a}|=5$,$|\boldsymbol{b}|=13$,
∴$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{16}{5\times13}=\frac{16}{65}$.]

3. A [设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2\times(-4)+3\times7}{\sqrt{4+9}\times\sqrt{16+49}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos\theta\boldsymbol{e}=\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{5}}{5}\boldsymbol{e}=\frac{\sqrt{65}}{5}\boldsymbol{e}$.]

4. D [因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+4\times2=6$,所以 $\boldsymbol{c}=(2,4)-6(-1,2)=(8,-8)$,所以$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{8^2+(-8)^2}=8\sqrt{2}$.]

5. D [如图,过点 O 作 $OD\perp AB$ 于 D,
可知 $AD=\frac{1}{2}AB=3$,
则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times6+0=18$.]



6. A [∵$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1+2x,4)$,$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2-x,3)$,
$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 平行,∴$(1+2x)\cdot3=4(2-x)$,∴$x=\frac{1}{2}$.
∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,2)\cdot\left(\frac{1}{2},1\right)=1\times\frac{1}{2}+2\times1=\frac{5}{2}$.]

7. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}$

解析 由已知得 $\overrightarrow{AB}=(2,1)$,$\overrightarrow{CD}=(5,5)$,因此 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影向量为$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}\boldsymbol{e}=\frac{15}{5\sqrt{2}}\boldsymbol{e}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}$.

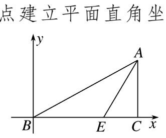
8. 120°

解析 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ,
由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2)=-\boldsymbol{a}$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$,
得 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\frac{-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\frac{-\frac{5}{2}}{5}=-\frac{1}{2}$.
∵$0\leqslant\theta\leqslant180^\circ$,∴$\theta=120^\circ$.

9. **解** (1)设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}=(\lambda,2\lambda)(\lambda>0)$,
则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda+4\lambda=10$,
∴$\lambda=2$,∴$\boldsymbol{a}=(2,4)$.
(2)∵$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1\times2-2\times1=0$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$,
∴$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,
$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=10\cdot(2,-1)=(20,-10)$.

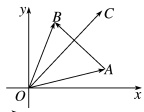
10. **解** (1)设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,
依题意有 $\overrightarrow{AB}=(4,3)$,$|\overrightarrow{AB}|=5$,$|\boldsymbol{a}|=1$,
且 $\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AB}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,
所以$\begin{cases}4x+3y=0,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$
解得$\begin{cases}x=-\frac{3}{5},\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{3}{5},\\y=-\frac{4}{5}.\end{cases}$
所以 $\boldsymbol{a}=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$或 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.
(2)设向量 $\overrightarrow{AC}$ 与单位向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 θ,$\overrightarrow{AC}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\boldsymbol{h}$,
则$|\boldsymbol{h}|=||\overrightarrow{AC}|\cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}=|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{a}|$.
又因为 $\overrightarrow{AC}=(1,4)$,所以
当 $\boldsymbol{a}=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$时,$|\boldsymbol{h}|=\left|1\times\left(-\frac{3}{5}\right)+4\times\frac{4}{5}\right|=\frac{13}{5}$;
当 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$时,$|\boldsymbol{h}|=\left|1\times\frac{3}{5}+4\times\left(-\frac{4}{5}\right)\right|=\frac{13}{5}$.
所以向量 $\overrightarrow{AC}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的模为$\frac{13}{5}$.
(3)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{h}|=\frac{1}{2}\times5\times\frac{13}{5}=\frac{13}{2}$.

11. C [以点 B 为坐标原点建立平面直角坐标系,如图所示.

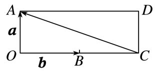


由题意知$\angle ABC=30^\circ$,$\angle AEC=60^\circ$,$CE=\frac{\sqrt{3}}{3}$,
∴$\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{CE}|}=3$,∴$\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{CE}$,即 $\lambda=-3$.]

12. A ［由图知,要使 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的投影向量相等,只需使 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OC}$,即 $(2-a,b-1)\cdot(4,5)=0$,得 $4a-5b-3=0$,即 $4a-5b=3$.］

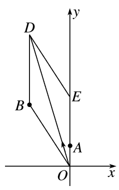


13. A ［如图,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$OA\perp OB$.延长 OB 至点 C,使 $OB=BC$,以 OA,OC 为邻边作矩形 $OCDA$,则 $\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,$\angle ACD$ 即为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角,$\cos\angle ACD=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|}$.又 $|\boldsymbol{a}|=1$,所以 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量.则向量 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|\cos\angle ACD\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.］



14. $\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5},\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)$

解析　如图,已知 $A(0,1)$,$B(-3,4)$,
设 $E(0,5)$,$D(-3,9)$,
∴四边形 $OBDE$ 为菱形,
∴$\angle AOB$ 的平分线是菱形 $OBDE$ 的对角线 OD.
设 $C(x_1,y_1)$,
∵$|\overrightarrow{OC}|=2$,$|\overrightarrow{OD}|=3\sqrt{10}$,
∴$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{3\sqrt{10}}\overrightarrow{OD}$.



∴$\overrightarrow{OC}=(x_1,y_1)=\dfrac{2}{3\sqrt{10}}\times(-3,9)=\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5},\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.

15. $(-3,2)$

解析　设点 B 的坐标为 (x,y),因为 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$,

所以 $\begin{cases}2x+3y=0,\\x^2+y^2=13,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=-2\end{cases}$(舍去).

故点 B 的坐标为 $(-3,2)$.

16. **解**　(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=\cos 2x$,

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$
$\sqrt{\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{2+2\left(\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}\right)}$

$=\sqrt{2+2\cos 2x}=2\sqrt{\cos^2 x}$,

因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以 $\cos x\geqslant 0$,

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\cos x$.

(2)由(1),可得 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\lambda|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\cos 2x-4\lambda\cos x$,

即 $f(x)=2\cos^2x-1-4\lambda\cos x$
$=2(\cos x-\lambda)^2-1-2\lambda^2$.

因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$.

①当 $\lambda<0$ 时,当且仅当 $\cos x=0$ 时,
$f(x)$ 取得最小值 -1,这与已知矛盾;

②当 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 时,当且仅当 $\cos x=\lambda$ 时,$f(x)$ 取得最小值 $-1-2\lambda^2$,

由已知得 $-1-2\lambda^2=-\dfrac{3}{2}$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$;

③当 $\lambda>1$ 时,当且仅当 $\cos x=1$ 时,$f(x)$ 取得最小值 $1-4\lambda$,

由已知得 $1-4\lambda=-\dfrac{3}{2}$,解得 $\lambda=\dfrac{5}{8}$,这与 $\lambda>1$ 相矛盾.

综上所述 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

习题课　平面向量中的最值与范围问题

1. C ［因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,所以 $2a-2=2-b$,所以 $2a+b=4$,所以 $b=4-2a>0$,所以 $0<a<2$,

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2a+b-ab=4-ab=4-a(4-2a)=2a^2-4a+4=2(a-1)^2+2\in[2,4)$.］

2. D ［由图可知 x,y 均为正,且 $x+y=1$,

∴$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)(x+y)=5+\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}$

$\geqslant 5+2\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{4x}{y}}=9$,当且仅当 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{4x}{y}$,

即 $x=\dfrac{1}{3}$,$y=\dfrac{2}{3}$ 时等号成立,

则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$ 的最小值为 9.］

3. B ［因为点 M 是 AC 的中点,

所以 $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

因为点 D 是 AC 边上的一点(包括端点),

所以 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CA}$,$\lambda\in[0,1]$,

$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}-\lambda\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}$,

则 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot[\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}]$

$=\dfrac{1}{2}\lambda\overrightarrow{BA}^2+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{BC}^2$.

因为 $AB=\sqrt{3}$,$BC=2$,$\angle B=150°$,

所以 $\overrightarrow{BA}^2=3$,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-3$,$\overrightarrow{BC}^2=4$,

所以 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda$.

因为 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,则 $0\leqslant\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$.

故 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.］

4. B ［∵$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=(1-\lambda,\lambda)$,$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}=(-\lambda,\lambda)$,$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$,

∴$(1-\lambda,\lambda)\cdot(-1,1)\geqslant(\lambda,-\lambda)\cdot(\lambda-1,1-\lambda)$,

∴$2\lambda^2-4\lambda+1\leqslant 0$,解得 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,因为点 P 是线段 AB 上的一个动点,所以 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,即满足条件的实数 λ 的取值范围是 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$.］

5. A ［以 A 为原点,AB,垂直于 AB 所在的直线分别为 x,y 轴建立平面直角坐标系(图略),

则 $B(2,0)$,$A(0,0)$,$D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

∵满足 $\dfrac{MD}{AD}=\dfrac{NC}{DC}=\lambda$,$\lambda\in[0,1]$,

∴$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+(1-\lambda)(2,0)=\left(\dfrac{5}{2}-2\lambda,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}$

$=(-2,0)+(1-\lambda)\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda,\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\right)$,

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\left(\dfrac{5}{2}-2\lambda,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda,\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)\right)$

$=\left(\dfrac{5}{2}-2\lambda\right)\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)$

$=\lambda^2+\lambda-3=\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$.

∵$\lambda\in[0,1]$,二次函数的对称轴为 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$,

则函数在 $[0,1]$ 上单调递增,

故当 $\lambda\in[0,1]$ 时,$\lambda^2+\lambda-3\in[-3,-1]$.］

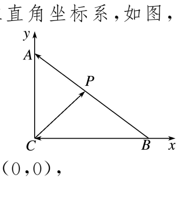
6. C ［∵$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(2+\sin\theta-\cos\theta,2-\cos\theta-\sin\theta)$,

∴$|\overrightarrow{P_1P_2}|=$
$\sqrt{(2+\sin\theta-\cos\theta)^2+(2-\cos\theta-\sin\theta)^2}$
$=\sqrt{10-8\cos\theta}\leqslant 3\sqrt{2}$.

当 $\cos\theta=-1$ 时,$|\overrightarrow{P_1P_2}|$ 有最大值 $3\sqrt{2}$.］

7. 9

解析　根据题意,建立直角坐标系,如图,



∴$A(0,3)$,$B(4,0)$,$C(0,0)$,

∴$\overrightarrow{AB}=(4,-3)$,
$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{AB}=(0,3)+(4\lambda,-3\lambda)=(4\lambda,3-3\lambda)$,$\lambda\in[0,1]$,
∴$\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=(4\lambda,3-3\lambda)\cdot(0,3)=9-9\lambda\in[0,9]$,
∴$\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$的最大值为9.

8.$2\sqrt{2}+1$
解析 因为$|\boldsymbol{b}|=1$,设$\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sin\theta)$,
则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2+\cos\theta,2+\sin\theta)$,
则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2+\cos\theta)^2+(2+\sin\theta)^2}=\sqrt{4(\cos\theta+\sin\theta)+9}$
$=\sqrt{4\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+9}\leqslant\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}=2\sqrt{2}+1$,当且仅当$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$时取等号.

9.**解** 由$|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2$,可知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,
根据向量求模公式得$|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|=\sqrt{4\lambda^2-2\lambda+1}$,
易知,当$\lambda=\frac{1}{4}$时,$|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|$取得最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.**解** 设$\overrightarrow{PC}=t\overrightarrow{AC}(0\leqslant t\leqslant1)$,
则$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AC}$,
因为$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-(1-t)\overrightarrow{AC}$,
所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=[\overrightarrow{AB}-(1-t)\overrightarrow{AC}]\cdot t\overrightarrow{AC}$
$=t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-t(1-t)\overrightarrow{AC}^2$
$=2\times2\sqrt{2}t\cdot\cos45^\circ-t(1-t)\times(2\sqrt{2})^2$
$=8t^2-4t$
$=8\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{2}$.
因为$0\leqslant t\leqslant1$,所以$-\frac{1}{2}\leqslant\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\leqslant4$,
所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的取值范围为$\left[-\frac{1}{2},4\right]$.

11.C [∵$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,
∴$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$
$=-\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$=-\frac{2}{3}\times4+\frac{1}{3}\times9+\frac{1}{3}\times2\times3\cos\theta=2\cos\theta+\frac{1}{3}$.
∵$-1<\cos\theta<1$,∴$-\frac{5}{3}<2\cos\theta+\frac{1}{3}<\frac{7}{3}$.
∴$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\in\left(-\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$.]

12.C [不妨设$AB=2BC=2$,$BD=x$,$x\in[0,1]$,由平面向量三点共线可知,$\overrightarrow{OB}=\frac{2}{2+x}\overrightarrow{OD}+\frac{x}{2+x}\overrightarrow{OA}$,
∴$\overrightarrow{OD}=\frac{2+x}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{x}{2}\overrightarrow{OA}$,
∴$\lambda=-\frac{x}{2}$,$\mu=\frac{2+x}{2}$,$x\in[0,1]$,
则$\lambda\mu=-\frac{(2+x)x}{4}=-\frac{1}{4}(x^2+2x)$,
∴$\lambda\mu\in\left[-\frac{3}{4},0\right]$.]

13.D [因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$,设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$,
则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}$,解得$\theta=\frac{\pi}{3}$,而$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,则可设$\boldsymbol{a}=(1,0)$,由$\theta=\frac{\pi}{3}$可得$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
由$|\boldsymbol{c}|=1$,设$\boldsymbol{c}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$,
则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
$=1+2-\sin\alpha-\left(\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)$
$=3-\left(\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)=3-\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.
所以当$\alpha=\frac{4\pi}{3}$时取得最大值为$3+\sqrt{3}$,当$\alpha=\frac{\pi}{3}$时取得最小值为$3-\sqrt{3}$,所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$的取值范围为$[3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}]$.]

14.$-\frac{49}{52}$
解析 ∵$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(1-4\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,
$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=(2-4\lambda)\boldsymbol{a}+(\lambda-1)\boldsymbol{b}$,
∴$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$
$=[(1-4\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}]\cdot[(2-4\lambda)\boldsymbol{a}+(\lambda-1)\boldsymbol{b}]$
$=(16\lambda^2-12\lambda+2)\boldsymbol{a}^2+(-8\lambda^2+7\lambda-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{b}^2$,
代入$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,
原式$=52\lambda^2-38\lambda+6$,
∴当$\lambda=\frac{19}{52}$时,原式取得最小值,为$-\frac{49}{52}$.

15.12
解析 设$\angle OAB=\theta$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,
则$A(4\cos\theta,0)$,$C\left(4\cos\theta+4\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right),4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\right)$,
所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=4\cos\theta\cdot\left[4\cos\theta+4\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\right]$
$=4\cos\theta(2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta)$
$=4\cos2\theta+4+4\sqrt{3}\sin2\theta$
$=8\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+4$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,
故当$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$\theta=\frac{\pi}{6}$时,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$有最大值12.

16.**解** (1)设$\boldsymbol{c}=(x,y)$,根据题意得$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\\sqrt{3}y+x=0.\end{cases}$
解得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\y=\frac{1}{2},\end{cases}$
∴$\boldsymbol{c}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$或$\boldsymbol{c}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.
(2)∵$\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-1)$,$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.
∵$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$,∴$-kt|\boldsymbol{a}|^2+(t^2+3)|\boldsymbol{b}|^2=0$.
∵$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=1$,
∴$t^2-4kt+3=0$.
问题转化为关于t的二次方程$t^2-4kt+3=0$在$[0,2]$内有解.
令$f(t)=t^2-4kt+3$,
则当$2k\leqslant0$,即$k\leqslant0$时,∵$f(0)=3$,
∴方程$t^2-4kt+3=0$在$[0,2]$内无解.
当$0<2k\leqslant2$,即$0<k\leqslant1$时,由$\Delta=16k^2-12\geqslant0$,
解得$k\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$或$k\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant k\leqslant1$.
当$2k>2$,即$k>1$时,由$f(2)\leqslant0$得$4-8k+3\leqslant0$,
解得$k\geqslant\frac{7}{8}$,∴$k>1$.
综上,实数k的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$.

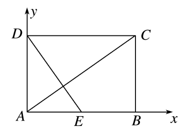
6.4 平面向量的应用

6.4.1 平面几何中的向量方法

1.C [$\overrightarrow{AB}=(19,4)-(-2,-3)=(21,7)$,
$\overrightarrow{AC}=(-1,-6)-(-2,-3)=(1,-3)$,
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=21-21=0$,∴$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.
则$\angle A=90^\circ$,又$|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{AC}|$,
∴$\triangle ABC$为直角三角形.]

2.D [∵$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,∴$AC\perp BD$.
∴四边形$ABCD$的面积
$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times2\sqrt{10}=10$.]

3.B [以A为坐标原点,AB所在直线为x轴,AD所在直线为y轴,建立如图所示的直角坐标系.



设$|\overrightarrow{AD}|=a(a>0)$,则$A(0,0)$,$C(4,a)$,
$D(0,a)$,$E(2,0)$,
所以$\overrightarrow{DE}=(2,-a)$,$\overrightarrow{AC}=(4,a)$.
因为$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,
所以$2\times4+(-a)\cdot a=0$,即$a^2=8$.
所以$a=2\sqrt{2}$,所以$\overrightarrow{DE}=(2,-2\sqrt{2})$,
所以$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$.]

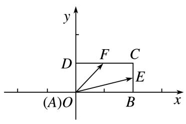
4.B　[$\because\overrightarrow{OP}=\dfrac{3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{2}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$,
$\therefore\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$,
$\therefore\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$,故选B.]

5.D　[$\because\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$,$\therefore(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}=0$,
$\therefore\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$,$\therefore OB\perp AC$.
同理$OA\perp BC$,$OC\perp AB$,
$\therefore O$为三条高所在直线的交点.]

6.C　[由题意知,$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA})=0$,
即$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,
即$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,
则$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$,故$\triangle ABC$的形状为直角三角形.]

7.$-\dfrac{9}{2}$

解析　如图,以A为坐标原点,以AB所在直线为x轴,以AD所在直线为y轴建立平面直角坐标系,



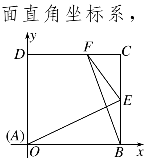
则$A(0,0)$,$B(2,0)$,$D(0,1)$,
$\therefore C(2,1)$.
$\because E,F$分别为BC,CD的中点,$\therefore E\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$,$F(1,1)$,
$\therefore\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{BD}=(-2,1)$,
$\therefore(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})\cdot\overrightarrow{BD}=3\times(-2)+\dfrac{3}{2}\times1=-\dfrac{9}{2}$.

8.$-\dfrac{5}{2}$

解析　由弦长$AB=\sqrt{5}$,可知$\angle ACB=60°$,故$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\angle ACB=-\dfrac{5}{2}$.

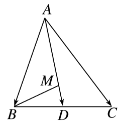
9.**证明**　设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}$,$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{d}$,
则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{d}$,
所以$\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c})^2-(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{d})^2=\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}^2$,
由条件知,$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{b}^2$,
所以$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d}$,即$\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})=0$,即$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,
所以$AD\perp BC$.

10.**解**　建立如图所示的平面直角坐标系,



(1)因为$AB=BC=2$,点F是边CD上靠近C的三等分点,E是BC边上的中点,
所以$A(0,0)$,$B(2,0)$,$C(2,2)$,$E(2,1)$,$D(0,2)$,$F\left(\dfrac{4}{3},2\right)$,
所以$\overrightarrow{AE}=(2,1)$,$\overrightarrow{EF}=\left(-\dfrac{2}{3},1\right)$,
所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}=-\dfrac{4}{3}+1=-\dfrac{1}{3}$.
(2)因为$AB=\sqrt{3}$,$BC=2$,
所以$A(0,0)$,$B(\sqrt{3},0)$,$E(\sqrt{3},1)$,$C(\sqrt{3},2)$,$D(0,2)$,
设$F(a,2)$,所以$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},1)$,$\overrightarrow{BF}=(a-\sqrt{3},2)$,
当$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$时$\Rightarrow\sqrt{3}(a-\sqrt{3})+2=0\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,
所以$CF=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

11.B　[如图,D为BC边的中点,



则$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.
因为$3\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$,
所以$3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AD}$,所以$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,
所以$S_{\triangle ABM}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.]

12.C　[假设BC的中点是O,则$\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$,即$(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,所以$\overrightarrow{MO}\perp\overrightarrow{BC}$,所以动点$M$在线段$BC$的中垂线上,所以动点$M$形成的图形必通过$\triangle ABC$的外心,选C.]

13.D　[将$\triangle ABC$各边及PA,PB,PC均用向量表示,
则$\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=\dfrac{\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2}{\overrightarrow{PC}^2}$
$=\dfrac{(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})^2+(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})^2}{\overrightarrow{PC}^2}$
$=\dfrac{2|\overrightarrow{PC}|^2+2\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{AB}^2}{|\overrightarrow{PC}|^2}$
$=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2}{|\overrightarrow{PC}|^2}-6=4^2-6=10$.]

14.等腰三角形

解析　$\because(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$
$=[(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})]\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$
$=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2=0$,
$\therefore|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$,
$\therefore\triangle ABC$是等腰三角形.

15.$-\dfrac{8}{9}$

解析　$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OD}$,$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE}$,且$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OE}$,
所以$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FE}=(\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE})$
$=\overrightarrow{FO}^2-\overrightarrow{OD}^2=\dfrac{1}{9}-1=-\dfrac{8}{9}$.

16.**证明**　因为M是边BC的中点,所以$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.
又因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$,
所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})$
$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE})$
$=\dfrac{1}{2}(0+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}-0)$
$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE})$
$=\dfrac{1}{2}[|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AF}|\cdot\cos(90°+\angle BAC)-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cdot\cos(90°+\angle BAC)]=0$,
所以$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{EF}$,即$AM\perp EF$.

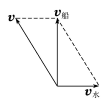
6.4.2　向量在物理中的应用举例

1.A　[在$\triangle ABC$中,两边之和大于第三边,即$s=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|>|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{a}|$,故选A.]

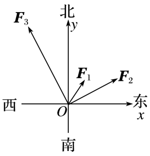
2.D　[因为$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=(1,2\lg 2)$,
所以$W=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{s}$
$=(1,2\lg 2)\cdot(2\lg 5,1)=2\lg 5+2\lg 2=2$.]

3.D　[为使物体平衡,则合力为$\boldsymbol{0}$,即$\boldsymbol{F}_4=(0-(-2)-(-3)-4,0-(-1)-2-(-3))=(1,2)$.]

4.B　[由题意知$|\boldsymbol{v}_{水}|=2$ m/s,$|\boldsymbol{v}_{船}|=10$ m/s,作出示意图如图.$\therefore|\boldsymbol{v}|=\sqrt{10^2+2^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$(m/s).]



5. D ［如图，建立直角坐标系，



则 $\boldsymbol{F}_1=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{F}_2=(2\sqrt{3},2)$，$\boldsymbol{F}_3=(-3,3\sqrt{3})$，则合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(2\sqrt{3}-2,2+4\sqrt{3})$.

又位移 $\boldsymbol{s}=(4\sqrt{2},4\sqrt{2})$，所以合力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=(2\sqrt{3}-2)\times4\sqrt{2}+(2+4\sqrt{3})\times4\sqrt{2}=24\sqrt{6}$ J.］

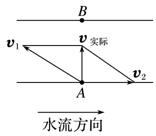
6. BD ［根据向量将船速 $\boldsymbol{v}$ 分解，当 $\boldsymbol{v}$ 垂直河岸时，用时最少.船垂直到达对岸时航行的距离最短.］

7. $\dfrac{\pi}{4}$

解析 设 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ，由 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$，得 $250\sqrt{2}=10\times50\times\cos\theta$，$\therefore\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $\theta\in[0,\pi]$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

8. 0.5

解析 如图，$\boldsymbol{v}_{实际}=\boldsymbol{v}_{船}+\boldsymbol{v}_{水}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，



$|\boldsymbol{v}_1|=20$，$|\boldsymbol{v}_2|=12$，

$\therefore|\boldsymbol{v}_{实际}|=\sqrt{|\boldsymbol{v}_1|^2-|\boldsymbol{v}_2|^2}$

$=\sqrt{20^2-12^2}=16(\text{km/h})$.

$\therefore$所需时间 $t=\dfrac{8}{16}=0.5(\text{h})$.

$\therefore$该船到达 B 处所需的时间为 0.5 h.

9. **解** (1) $\overrightarrow{AB}=(7,0)-(20,15)=(-13,-15)$，

$W_1=\boldsymbol{F}_1\cdot\overrightarrow{AB}=(3,4)\cdot(-13,-15)$

$=3\times(-13)+4\times(-15)=-99(\text{J})$，

$W_2=\boldsymbol{F}_2\cdot\overrightarrow{AB}=(6,-5)\cdot(-13,-15)$

$=6\times(-13)+(-5)\times(-15)=-3(\text{J})$.

$\therefore$力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 对质点所做的功分别为 -99 J 和 -3 J.

(2) $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\overrightarrow{AB}$

$=[(3,4)+(6,-5)]\cdot(-13,-15)$

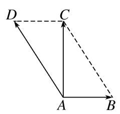
$=(9,-1)\cdot(-13,-15)$

$=9\times(-13)+(-1)\times(-15)$

$=-117+15=-102(\text{J})$.

$\therefore$合力 $\boldsymbol{F}$ 对质点所做的功为 -102 J.

10. **解** 如图所示，设 $\overrightarrow{AB}$ 表示水流的速度，$\overrightarrow{AD}$ 表示渡船在静水中的速度，$\overrightarrow{AC}$ 表示渡船实际垂直过江的速度.



因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，

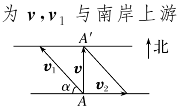
所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\angle ACD=90°$，$|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AB}|=12.5$，$|\overrightarrow{AD}|=25$，所以 $\angle CAD=30°$，

即渡船要垂直地渡过长江，其航向应为北偏西 30°.

11. B ［对于两个大小相等的共点力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，当它们的夹角为 90°，合力的大小为 20 N 时，可知这两个力的大小都是 $10\sqrt{2}$ N；当它们的夹角为 120°时，可知力的合成构成一个等边三角形，因此合力的大小为 $10\sqrt{2}$ N.］

12. D ［设船的实际速度为 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}_1$ 与南岸上游的夹角为 α，如图所示.



要使得游船正好到达 A' 处，

则 $|\boldsymbol{v}_1|\cos\alpha=|\boldsymbol{v}_2|$，

即 $\cos\alpha=\dfrac{|\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1|}=\dfrac{2}{5}$，

又 $\theta=\pi-\alpha$，所以 $\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{2}{5}$.］

13. $-\dfrac{5\sqrt{37}}{37}$

解析 因为物体处于平衡状态，

所以 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$.

因此 $\boldsymbol{F}_3=-(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)$，于是 $|\boldsymbol{F}_3|=\sqrt{(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)^2}$

$=\sqrt{|\boldsymbol{F}_1|^2+|\boldsymbol{F}_2|^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2}$

$=\sqrt{3^2+4^2+2\times3\times4\cdot\cos60°}=\sqrt{37}$，

设 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_3$ 的夹角是 θ.

又 $\boldsymbol{F}_2=-(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_3)$，所以 $|\boldsymbol{F}_2|=\sqrt{(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_3)^2}$

$=\sqrt{|\boldsymbol{F}_1|^2+|\boldsymbol{F}_3|^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_3}$

$=\sqrt{3^2+37+2\times3\times\sqrt{37}\cdot\cos\theta}=4$，

解得 $\cos\theta=-\dfrac{5\sqrt{37}}{37}$.

14. 0　98

解析 物体 m 的位移大小为 $|\boldsymbol{s}|=\dfrac{2}{\sin37°}=\dfrac{10}{3}(\text{m})$，则支持力对物体 m 所做的功为 $W_1=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos90°=0(\text{J})$；重力对物体 m 所做的功为 $W_2=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{G}||\boldsymbol{s}|\cos53°=5\times9.8\times\dfrac{10}{3}\times0.6=98(\text{J})$.

15. AC ［设水的阻力为 $\boldsymbol{f}$，绳的拉力为 $\boldsymbol{F}$，绳 AB 与水平方向的夹角为 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta=|\boldsymbol{f}|$，$\therefore|\boldsymbol{F}|=\dfrac{|\boldsymbol{f}|}{\cos\theta}$.

$\because\theta$ 增大，$\cos\theta$ 减小，$\therefore|\boldsymbol{F}|$ 增大.

$\because|\boldsymbol{F}|\sin\theta$ 增大，$\therefore$船的浮力减小.］

16. **解** 设 t h 后，台风中心移动到 Q 处，

此时城市开始受到台风的侵袭，$\angle OPQ=\theta-45°$.

$\because\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$，

$\therefore\overrightarrow{OQ}^2=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ})^2$

$=\overrightarrow{OP}^2+\overrightarrow{PQ}^2+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}$

$=\overrightarrow{OP}^2+\overrightarrow{PQ}^2-2|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{PQ}|\cos(\theta-45°)$

$=300^2+(20t)^2-2\times300\times20t\times\dfrac{4}{5}$

$=100(4t^2-96t+900)$.

依题意得 $\overrightarrow{OQ}^2\leqslant(60+10t)^2$，

解得 $12\leqslant t\leqslant24$.

从而 12 h 后该城市开始受到台风的侵袭.

6.4.3 余弦定理、正弦定理

第1课时 余弦定理

1. B ［由余弦定理，得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4+25-19}{2\times2\times5}=\dfrac{1}{2}$，

又 $0°<A<180°$，所以 $A=60°$.］

2. A ［由余弦定理，得 $c^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos60°=3$，

所以 $c=\sqrt{3}$.

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$A=30°$.］

3. B ［由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{25+64-49}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$.

又 $0°<B<180°$，所以 $B=60°$，所以 $A+C=120°$.］

4. A ［因为 $a^2=b^2-c^2+\sqrt{2}ac$，所以 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，

由余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $0°<B<180°$，所以 $B=45°$.］

5. BD ［由 $3a=\sqrt{3}b=12$，得 $a=4$，$b=4\sqrt{3}$，利用余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $16=48+c^2-12c$，解得 $c=4$ 或 $c=8$.］

6. A ［由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$，

得 $(a+b)^2-c^2=2ab(1+\cos C)$

$=2ab(1+\cos60°)=3ab=4$，

$\therefore ab=\dfrac{4}{3}$.］

7. $\dfrac{\pi}{3}$　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解析 由余弦定理，可得

$\cos A=\dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\dfrac{4^2+3^2-(\sqrt{13})^2}{2\times3\times4}=\dfrac{1}{2}$，

又 $0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

则 AC 边上的高为 $h=AB\sin A=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. $\sqrt{19}$

解析　由题意得,$a+b=5,ab=2$.

由余弦定理,得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab=5^2-3\times2=19$,

所以 $c=\sqrt{19}$.

9. **解**　(1)$\because(a+b+c)(b+c-a)=3bc$,

$\therefore a^2=b^2+c^2-bc$,

而 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,$\therefore 2\cos A=1$,

$\therefore\cos A=\frac{1}{2}$.

$\because A\in(0,\pi)$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

(2)在$\triangle ABC$中,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,且 $a=\sqrt{3}$,

$\therefore(\sqrt{3})^2=b^2+c^2-2bc\cdot\frac{1}{2}=b^2+c^2-bc$.　①

又$\because b+c=2\sqrt{3}$,与①联立,解得 $bc=3$,

$\therefore\begin{cases}b+c=2\sqrt{3},\\bc=3,\end{cases}\therefore b=c=\sqrt{3}$,

$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形.

10. **解**　(1)$\because\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$,$2\cos^2\frac{A}{2}+\cos A=0$,

$\therefore 2\cos A+1=0$,$\therefore\cos A=-\frac{1}{2}$,$\therefore A=120°$.

(2)由余弦定理,知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

又 $a=2\sqrt{3}$,$b=2$,$\cos A=-\frac{1}{2}$,

$\therefore(2\sqrt{3})^2=2^2+c^2-2\times2\times c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$,

化简,得 $c^2+2c-8=0$,解得 $c=2$ 或 $c=-4$(舍去).

11. A　[在$\triangle ABC$中,因为 $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2c}$,

所以$\frac{1+\cos A}{2}=\frac{b}{2c}+\frac{1}{2}$,

所以 $\cos A=\frac{b}{c}$.由余弦定理,知$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{c}$,

所以 $b^2+c^2-a^2=2b^2$,

即 $a^2+b^2=c^2$,所以$\triangle ABC$是直角三角形.]

12. B　[$\because b^2=ac$,$c=2a$,$\therefore b^2=2a^2$,

$\therefore\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+4a^2-2a^2}{2a\times2a}=\frac{3}{4}$.]

13. D　[设该等腰三角形为$\triangle ABC$,且 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,顶角为 C,周长为 l,

因为 $l=5c$,所以 $a=b=2c$,

由余弦定理,得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4c^2+4c^2-c^2}{2\times2c\times2c}=\frac{7}{8}$.]

14. -19

解析　设三角形的三边分别为 a,b,c,

依题意得,$a=5,b=6,c=7$.

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\pi-B)=-ac\cdot\cos B$.

由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$,

$\therefore -ac\cdot\cos B=\frac{1}{2}(b^2-a^2-c^2)=\frac{1}{2}(6^2-5^2-7^2)=-19$,

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-19$.

15. C　[$\because b=3$,$c=4$,且$\triangle ABC$是锐角三角形,

$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0$,

且 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$,$\therefore 7<a^2<25$,

$\therefore\sqrt{7}<a<5$.]

16. **解**　(1)由已知得,$-\cos(A+B)+\cos A\cos B-\sqrt{3}\sin A\cdot\cos B=0$,即 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$.

因为 $\sin A\neq0$,所以 $\sin B-\sqrt{3}\cos B=0$.

又 $\cos B\neq0$,所以 $\tan B=\sqrt{3}$.

又 $0<B<\pi$,

所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.

因为 $a+c=1$,$\cos B=\frac{1}{2}$,

所以 $b^2=3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

又 $0<a<1$,

所以$\frac{1}{4}\leqslant b^2<1$,

即$\frac{1}{2}\leqslant b<1$.

第2课时　正弦定理(一)

1. B　[$\because A=105°$,$B=45°$,$\therefore C=30°$.

由正弦定理,得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{2\sqrt{2}\sin 30°}{\sin 45°}=2$.]

2. B　[由题意及正弦定理可知,$\frac{a}{\sin A}=b=\frac{b}{\sin B}$,

则 $\sin B=1$,

又 $B\in(0,\pi)$,故 B 为直角,$\triangle ABC$ 是直角三角形.]

3. C　[由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

得 $a\sin B=b\sin A$.]

4. D　[由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\frac{15}{\sin 60°}=\frac{10}{\sin B}$,

$\therefore\sin B=\frac{10\sin 60°}{15}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{15}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\because a>b$,$\therefore A>B$,

又$\because A=60°$,$\therefore B$ 为锐角.

$\therefore\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.]

5. D　[在$\triangle ABC$中,因为 $A:B:C=1:2:3$,所以 $B=2A$,$C=3A$,又 $A+B+C=180°$,所以 $A=30°$,$B=60°$,$C=90°$,所以 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sin 30°:\sin 60°:\sin 90°=1:\sqrt{3}:2$.]

6. ACD　[对于A,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,可得,$a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C=\sin A:\sin B:\sin C$,故A正确;

对于B,由 $\sin 2A=\sin 2B$,可得 $A=B$,或 $2A+2B=\pi$,

即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$,故B错误;

对于C,在$\triangle ABC$中,由正弦定理可得,$\sin A>\sin B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow A>B$,因此 $A>B$ 是 $\sin A>\sin B$ 的充要条件,故C正确;

对于D,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

可得右边$=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{2R\sin B+2R\sin C}{\sin B+\sin C}=2R=$左边,故D正确.]

7. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

解析　由正弦定理,得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $A\in(0,\pi)$,$a>b$,

$\therefore A>B$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

8. $\frac{63}{65}$　$\frac{21}{13}$

解析　在$\triangle ABC$中,由 $\cos A=\frac{4}{5}$,$\cos C=\frac{5}{13}$,

可得 $\sin A=\frac{3}{5}$,$\sin C=\frac{12}{13}$,

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{63}{65}$,

又 $a=1$,故由正弦定理得,$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{21}{13}$.

9. **解** $\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{10\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=10\sqrt{2}$.

$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$.

又$\because \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{10\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=20\sin 75^\circ$

$=20\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

10. **解** 由正弦定理，得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

得 $\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $b>c$，所以 $B>C=30^\circ$，所以 $B=60^\circ$或 120°.

当 $B=60^\circ$时，$A=90^\circ$，$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{6\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ}=12$.

当 $B=120^\circ$时，$A=30^\circ$，$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{6\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}=6$.

所以 $a=6$ 或 12.

11. B ［由正弦定理，知$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$，$\therefore \frac{\sin C}{c}=\frac{\cos C}{c}$，

$\therefore \cos C=\sin C$，$\therefore \tan C=1$，

又$\because 0^\circ<C<180^\circ$，$\therefore C=45^\circ$.］

12. C ［设 C 为最大角，则 A 为最小角，$\therefore A+C=120^\circ$，

$\therefore \frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin(120^\circ-A)}{\sin A}$

$=\frac{\sin 120^\circ\cos A-\cos 120^\circ\sin A}{\sin A}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{\cos A}{\sin A}=1$. $\therefore \tan A=1$.

又$\because A$ 为锐角，$\therefore A=45^\circ$，$C=75^\circ$.］

13. $(1,2)$

解析 因为 $A+B+C=\pi$，$C=2B$，

所以 $A=\pi-3B>0$，所以 $0<B<\frac{\pi}{3}$，

所以$\frac{1}{2}<\cos B<1$，$1<2\cos B<2$.

又$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B$，故 $1<\frac{c}{b}<2$.

14. $(\sqrt{3},2)$

解析 在$\triangle ABC$ 中，$B=60^\circ$，$c=2$，由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$. 若此三角形有两解，则必须满足的条件为 $c>b>c\sin B$，

即$\sqrt{3}<b<2$.

15. ①②③

解析 $A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow\sin A>\sin B$，故①成立.

函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上单调递减，

$\because A>B$，$\therefore \cos A<\cos B$，故②成立.

在锐角三角形中，$\because A+B>\frac{\pi}{2}$，

$\therefore 0<\frac{\pi}{2}-B<A<\frac{\pi}{2}$，

又函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

则 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$，即 $\sin A>\cos B$，

同理 $\sin B>\cos A$，故③成立.

16. **解** 由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

即$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，

$\therefore b=2\sin B$，$c=2\sin C$，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $L=a+b+c=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin C$

$=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)$

$=\sqrt{3}+3\sin B+\sqrt{3}\cos B$

$=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，

又 $B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，

$\therefore B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore \sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，

$\therefore L\in(2\sqrt{3},3\sqrt{3}]$.

即$\triangle ABC$ 的周长的取值范围为$(2\sqrt{3},3\sqrt{3}]$.

第 3 课时　正弦定理(二)

1. AC ［由正弦定理，得$\sqrt{3}\sin A=2\sin B\sin A$，所以 $\sin A\cdot(2\sin B-\sqrt{3})=0$. 因为 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，所以 $\sin A\neq0$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.］

2. A ［由余弦定理，得 $b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c^2\Rightarrow c=1$，即$\triangle ABC$ 的周长为 5，故选 A.］

3. C ［由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$和 $3\sin A=5\sin B$，得 $3a=5b$，即 $b=\frac{3}{5}a$，又 $b+c=2a$，$\therefore c=\frac{7}{5}a$，$\therefore$ 由余弦定理，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$，故选 C.］

4. A ［$\because a\sin A-b\sin B=4c\sin C$，

$\therefore$ 由正弦定理，得 $a^2-b^2=4c^2$，即 $a^2=4c^2+b^2$.

由余弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(4c^2+b^2)}{2bc}=\frac{-3c^2}{2bc}=-\frac{1}{4}$，$\therefore \frac{b}{c}=6$. 故选 A.］

5. ABC ［对于 A，根据余弦定理，可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，故 A 正确；

对于 B，根据正弦定理边角互化，可得 $a\sin B=b\sin A\Leftrightarrow ab=ab$，故 B 正确；

对于 C，根据正弦定理，得 $a=b\cos C+c\cos B$

$\Rightarrow\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin A$，故 C 正确；

对于 D，根据正弦定理的边角互化可得，

$\sin A\cos B+\sin B\cos C=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即 $\sin B\cos C=\cos A\sin B$，

又 $\sin B\neq0$，所以 $\cos C=\cos A$，当 $A=C$ 时，等式成立，故 D 不正确.］

6. C ［由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，及$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，得$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C}$，即 $\tan A=\tan B=\tan C$，所以 $A=B=C$，即$\triangle ABC$ 为等边三角形.］

7. $\frac{\pi}{3}$　$\sqrt{3}$

解析 由 $a^2+b^2-c^2=ab$，

得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{3\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$.

8. 直角三角形

解析 $\because b=a\cos C$，

$\therefore \sin B=\sin A\cos C$，
则 $\sin(A+C)=\sin A\cos C$.
即 $\cos A\sin C=0$，
$\because A,C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C\neq 0$，
$\therefore \cos A=0$，
$\therefore A=\dfrac{\pi}{2}$，
$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

9.**解**　(1)由 $a\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=b$，
得 $\sin A\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C=\sin B$.
因为 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，
所以$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C=\cos A\sin C$.
因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$.
(2)由正弦定理，得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$.
①当 $B=\dfrac{\pi}{3}$时，由 $A=\dfrac{\pi}{6}$，得 $C=\dfrac{\pi}{2}$，
所以 $c=2$；
②当 $B=\dfrac{2\pi}{3}$时，由 $A=\dfrac{\pi}{6}$，得 $C=\dfrac{\pi}{6}$，
所以 $c=a=1$.
综上可得 $c=1$ 或 2.

10.**解**　(1)由余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，
$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，
$\therefore$原式化为$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\dfrac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=-\dfrac{b}{2a+c}$，
整理，得 $a^2+c^2-b^2+ac=0$，
$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{-ac}{2ac}=-\dfrac{1}{2}$，
又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$.
(2)将 $b=\sqrt{13}$，$a+c=4$，$B=\dfrac{2\pi}{3}$，
代入 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得，
$13=a^2+(4-a)^2-2a(4-a)\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}$，
即 $a^2-4a+3=0$. 解得 $a=1$ 或 $a=3$.

11.D　[因为 $a\cos B+b\cos A=4\sin C$，所以由正弦定理可得，
$\sin A\cos B+\sin B\cos A=\dfrac{4\sin C}{2R}$，
化简得，$\sin(A+B)=\dfrac{4\sin C}{2R}$，
在$\triangle ABC$ 中，$\sin(A+B)=\sin C$，
解得 $R=2$，所以$\triangle ABC$ 外接圆的面积为 $S=\pi R^2=4\pi$.]

12.A　[因为在$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，且 $8b=5c$，$C=2B$，所以 $8\sin B=5\sin C=5\sin 2B=10\sin B\cos B$，又 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos B=\dfrac{4}{5}$，
所以 $\cos C=\cos 2B=2\cos^2 B-1=\dfrac{7}{25}$.]

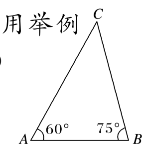
13.D　[由 $A=\dfrac{\pi}{4}$，$\sin B=\sqrt{2}\cos C\Rightarrow\dfrac{\sin B}{\cos C}=\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-C\right)}{\cos C}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+C\right)}{\cos C}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan C=\sqrt{2}\Rightarrow\tan C=1$，又 $C\in(0,\pi)$，
则 $C=\dfrac{\pi}{4}$，
所以 $B=\dfrac{\pi}{2}$，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 故选 D.]

14.2　$\dfrac{\pi}{3}$
解析　$\because 2\sin A\sin B\cos C=\sin^2 C$，
$\therefore 2ab\cos C=c^2\Rightarrow a^2+b^2-c^2=c^2\Rightarrow\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=2$，
$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2}{4ab}\geqslant\dfrac{1}{2}$，
$\because 0<C<\pi$，$\therefore 0<C\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.
即角 C 的最大值为$\dfrac{\pi}{3}$.

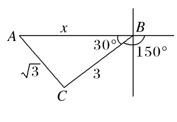
15.$\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$
解析　由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=5ac$，
由正弦定理，得 $\sin^2 B=5\sin A\sin C=\dfrac{3}{4}$，
所以 $\sin A\sin C=\dfrac{3}{20}$，
所以$\dfrac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\dfrac{\sin B}{\sin A\sin C}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

16.**解**　(1)在$\triangle ABC$ 中，设其外接圆半径为 R，
根据正弦定理得，$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$，
代入$\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin B-\sin A}$，得$\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{b}{b-a}$，
所以 $b^2-a^2=ab$.　①
因为 $\cos(A-B)+\cos C=1-\cos 2C$，
所以 $\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin^2 C$，
所以 $\sin A\sin B=\sin^2 C$.
由正弦定理，得$\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{b}{2R}=\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$，
所以 $ab=c^2$.　②
把②代入①得，$b^2-a^2=c^2$，
即 $a^2+c^2=b^2$.
所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.
(2)由(1)知 $B=\dfrac{\pi}{2}$，
所以 $A+C=\dfrac{\pi}{2}$，
所以 $C=\dfrac{\pi}{2}-A$.
所以 $\sin C=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=\cos A$.
根据正弦定理，得
$\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
因为 $ac<ab=c^2$，
所以 $a<c$，
所以 $0<A<\dfrac{\pi}{4}$，
所以$\dfrac{\pi}{4}<A+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}$.
所以$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)<1$，
所以 $1<\sqrt{2}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}$，
即$\dfrac{a+c}{b}$的取值范围是$(1,\sqrt{2})$.

第 4 课时　余弦定理、正弦定理应用举例



1.D　[如图所示，$C=180°-60°-75°=45°$，$AB=10$(海里).
由正弦定理，得$\dfrac{10}{\sin 45°}=\dfrac{BC}{\sin 60°}$，
所以 $BC=5\sqrt{6}$(海里).]



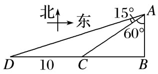
2.AB　[如图所示，在$\triangle ABC$ 中，$AB=x$，$BC=3$，$AC=\sqrt{3}$，$\angle ABC=30°$，
由余弦定理得，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$.

即$(\sqrt{3})^2=x^2+3^2-2x\cdot 3\cdot\cos 30°$.

$\therefore x^2-3\sqrt{3}x+6=0$.

解得$x=2\sqrt{3}$或$x=\sqrt{3}$.]

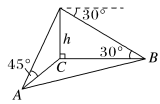
3. D [如图,依题意有$\angle BAC=60°$,$\angle BAD=75°$,所以$\angle CAD=\angle CDA=15°$,从而$CD=CA=10$(海里),在Rt$\triangle ABC$中,由正弦定理,可得$AB=5$(海里),所以这艘船的速度是10海里/时.故选D.]



4. A [如图所示,$BC=\sqrt{3}h$,$AC=h$,

$\therefore AB=\sqrt{3h^2+h^2}=2h$.

即此时两船间的距离为$2h$米.]



5. A [在$\triangle PAB$中,$\angle PAB=30°$,$\angle APB=15°$,$AB=60$ m,$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,由正弦定理,得$PB=\dfrac{AB\sin 30°}{\sin 15°}=30(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ m,所以建筑物的高度为$PB\sin 45°=30(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=(30+30\sqrt{3})$m.]

6. C [由题意知,$AB=24\times\dfrac{1}{4}=6$(km),$\angle BAS=30°$,$\angle ASB=75°-30°=45°$.

由正弦定理,得$BS=\dfrac{AB\sin\angle BAS}{\sin\angle ASB}=\dfrac{6\sin 30°}{\sin 45°}=3\sqrt{2}$(km).]

7. 210

解析 由题意知$\angle ACB=120°$,在$\triangle ACB$中,由余弦定理,得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=90^2+150^2-2\times 90\times 150\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=44\ 100$.

$\therefore AB=210$,$DE=210$.

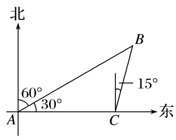
8. $30\sqrt{2}$

解析 如图所示,在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=30°$,$\angle ACB=105°$,

则$\angle ABC=45°$,

$AC=60$(km),根据正弦定理,得

$BC=\dfrac{AC\sin\angle BAC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{60\sin 30°}{\sin 45°}=30\sqrt{2}$(km).



9. **解** (1)依题意,知$\angle BAC=120°$,$AB=6$,$AC=5\times 2=10$.

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\angle BAC=6^2+10^2-2\times 6\times 10\times\cos 120°=196$,

解得$BC=14$,$v_{甲}=\dfrac{BC}{2}=7$,

所以渔船甲的速度为7 n mile/h.

(2)在$\triangle ABC$中,$AB=6$,$\angle BAC=120°$,$BC=14$,$\angle BCA=\alpha$.

由正弦定理,得$\dfrac{AB}{\sin\alpha}=\dfrac{BC}{\sin 120°}$,

即$\sin\alpha=\dfrac{AB\sin 120°}{BC}=\dfrac{6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{14}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

10. **解** 在$\triangle ABC$中,因为$\cos A=\dfrac{12}{13}$,$\cos C=\dfrac{3}{5}$,

所以$\sin A=\dfrac{5}{13}$,$\sin C=\dfrac{4}{5}$.

从而$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$

$=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{12}{13}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{63}{65}$.

由$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$,

得$AB=\dfrac{AC}{\sin B}\cdot\sin C=\dfrac{1\ 260}{\dfrac{63}{65}}\times\dfrac{4}{5}=1\ 040$(m).

所以索道AB的长为1 040 m.

11. ABC [对于A,利用内角和定理先求出$C=\pi-A-B$,再利用正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$解出$c$;对于B,直接利用余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$即可解出$c$;对于C,先利用内角和定理求出$C=\pi-A-B$,再利用正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$解出$c$;对于D,不知道长度,显然不能求$c$.]

12. D [**方法一** 设$AB=x$,则$BC=x$.

$\therefore BD=10+x$.$\therefore\tan\angle ADB=\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{x}{10+x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

解得$x=5(\sqrt{3}+1)$(m).

$\therefore A$点离地面的高AB等于$5(\sqrt{3}+1)$ m.

方法二 $\because\angle ACB=45°$,$\angle ADC=30°$,

$\therefore\angle CAD=45°-30°=15°$.

由正弦定理,得$AC=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}\cdot\sin\angle ADC$

$=\dfrac{10}{\sin 15°}\cdot\sin 30°=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$(m).

$\therefore AB=AC\sin 45°=5(\sqrt{3}+1)$(m).

即A点离地面的高AB等于$5(\sqrt{3}+1)$(m).]

13. B [依题意,可得$AD=20\sqrt{10}$,$AC=30\sqrt{5}$,

又$CD=50$,所以在$\triangle ACD$中,

由余弦定理,得$\cos\angle CAD=\dfrac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC\cdot AD}$

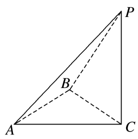
$=\dfrac{(30\sqrt{5})^2+(20\sqrt{10})^2-50^2}{2\times 30\sqrt{5}\times 20\sqrt{10}}=\dfrac{6\ 000}{6\ 000\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

又$0°<\angle CAD<180°$,

所以$\angle CAD=45°$,

所以从顶端A看建筑物CD的张角为45°.]

14. A [如图,设水柱的高度是h m,水柱底端为C,则在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=60°$,$AC=h$,$AB=100$,$BC=\sqrt{3}h$,根据余弦定理得,$(\sqrt{3}h)^2=h^2+100^2-2\times h\times 100\times\cos 60°$,即$h^2+50h-5\ 000=0$,即$(h-50)(h+100)=0$,解得$h=50$或$h=-100$(舍去),故水柱的高度是50 m.]



15. $\dfrac{132}{7}$ km,$\dfrac{48}{7}$ km,$\dfrac{258}{7}$ km

解析 由题意得,在$\triangle ABC$中,

$AB-AC=1.5\times 8=12$(km).

在$\triangle ACD$中,$AD-AC=1.5\times 20=30$(km).

设$AC=x$(km),

则$AB=(12+x)$(km),$AD=(30+x)$(km).

在$\triangle ABC$中,$\cos\angle ACB=\dfrac{x^2+400-(12+x)^2}{2\times 20\times x}$

$=\dfrac{256-24x}{40x}=\dfrac{32-3x}{5x}$,

在$\triangle ACD$中,$\cos\angle ACD=\dfrac{x^2+1\ 156-(30+x)^2}{68x}$

$=\dfrac{256-60x}{68x}=\dfrac{64-15x}{17x}$.

$\because B,C,D$在一条直线上,

$\therefore\dfrac{64-15x}{17x}=-\dfrac{32-3x}{5x}$,

即$\dfrac{64-15x}{17}=\dfrac{3x-32}{5}$,

解得$x=\dfrac{48}{7}$.即$AC=\dfrac{48}{7}$(km).

$\therefore AB=\dfrac{132}{7}$(km),$AD=\dfrac{258}{7}$(km).

16. **解** 设缉私船应沿CD方向行驶t小时,才能最快截获(在D点)走私船,

则$CD=10\sqrt{3}t$,$BD=10t$,

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$

$=(\sqrt{3}-1)^2+2^2-2(\sqrt{3}-1)\cdot 2\cdot\cos 120°=6$.

$\therefore BC=\sqrt{6}$.又$\because\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$,

$\therefore\sin\angle ABC=\dfrac{AC\cdot\sin\angle BAC}{BC}=\dfrac{2\cdot\sin 120°}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

又$0°<\angle ABC<60°$,$\therefore\angle ABC=45°$,

$\therefore B$点在C点的正东方向上,

$\therefore\angle CBD=90°+30°=120°$,

在$\triangle BCD$中,由正弦定理,得$\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}=\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}$,

$\therefore \sin\angle BCD=\frac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\frac{10t\cdot\sin 120^\circ}{10\sqrt{3}t}=\frac{1}{2}$.

又$\because 0^\circ<\angle BCD<60^\circ$，$\therefore\angle BCD=30^\circ$，

$\therefore$缉私船沿北偏东60°的方向行驶.

又在$\triangle BCD$中，$\angle CBD=120^\circ$，$\angle BCD=30^\circ$，

$\therefore\angle CDB=30^\circ$，$\therefore BD=BC$，

即$10t=\sqrt{6}$.

$\therefore t=\frac{\sqrt{6}}{10}$(小时)$\approx15$(分钟).

$\therefore$缉私船应沿北偏东60°的方向行驶，才能最快截获走私船，大约需要15分钟.

第5课时　余弦定理、正弦定理的应用

1. BD　[因为$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3}{2}$，

所以$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\sin A=\frac{3}{2}$，

所以$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为$0^\circ<A<180^\circ$，

所以$A=60^\circ$或120°.]

2. B　[在$\triangle ABC$中，$A=30^\circ$，$a=b=2$，

由等腰三角形的性质可得，$A=B=30^\circ$，

则$C=180-30^\circ-30^\circ=120^\circ$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.]

3. C　[在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$B=30^\circ$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得$\sin A=1$，

所以$A=90^\circ$，

所以$C=180^\circ-A-B=60^\circ$.]

4. AD　[$\because AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$B=\frac{\pi}{6}$，

又由余弦定理，得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$，

$\therefore BC^2-3BC+2=0$，

$\therefore BC=1$或$BC=2$，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin B$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.]

5. A　[因为$b=2$，$c=\sqrt{5}$，$S=\frac{\sqrt{5}}{2}\cos A=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{5}\sin A$，所以$\sin A=\frac{1}{2}\cos A$. 所以$\sin^2A+\cos^2A=\frac{1}{4}\cos^2A+\cos^2A=\frac{5}{4}\cos^2A=1$. 所以$\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 所以$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+5-2\times2\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=9-8=1$，故选A.]

6. B　[由题意及三角形的面积公式，得$\frac{1}{2}ab\sin C=5\sqrt{3}$，即$\frac{1}{2}a\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$，解得$a=4$，根据余弦定理，得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即$c^2=16+25-2\times4\times5\times\frac{1}{2}=21$，$c=\sqrt{21}$，所以$\triangle ABC$的周长为$9+\sqrt{21}$. 故选B.]

7. 45°　$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

解析　在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\sin 60^\circ}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$b<a$，所以$B<A$，所以$B=45^\circ$，则$C=75^\circ$，

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sin 75^\circ=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

8. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

解析　由正弦定理得$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，

即$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sin C}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，解得$\sin C=\frac{1}{2}$.

又$c<a$，所以$C<A$，且$0^\circ<C<180^\circ$，所以$C=30^\circ$，

故$B=90^\circ$，所以$S=\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

9. **解**　(1)$\because(\sin B+\sin C)^2=\sin^2A+\sin B\sin C$.

$\therefore$由正弦定理，得$(b+c)^2=a^2+bc$，

即$b^2+c^2-a^2=-bc$，

$\therefore\cos A=-\frac{1}{2}$，$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)$\because S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=2\sqrt{3}$，$\therefore bc=8$，

又$b+c=6$，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-bc=36-8=28$，

$\therefore a=2\sqrt{7}$.

10. **解**　(1)因为$D=2B$，$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\cos D=\cos 2B=2\cos^2B-1=-\frac{1}{3}$.

因为$D\in(0,\pi)$，

所以$\sin D=\sqrt{1-\cos^2D}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为$AD=1$，$CD=3$，

所以$\triangle ACD$的面积为$S=\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin D=\frac{1}{2}\times1\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$.

(2)在$\triangle ACD$中，$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos D=12$，

所以$AC=2\sqrt{3}$.

因为$BC=2\sqrt{3}$，$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$，

所以$\frac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{AB}{\sin(\pi-2B)}=\frac{AB}{\sin 2B}=\frac{AB}{2\sin B\cos B}$，

所以$AB=4$.

11. D　[因为$DC=5$，$DA=7$，$AC=8$，

所以$\cos\angle ADC=\frac{7^2+5^2-8^2}{2\times7\times5}=\frac{1}{7}$，

因此$\cos\angle ADB=-\frac{1}{7}$，所以$\sin\angle ADB=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

又$B=45^\circ$，$DA=7$，

由正弦定理，可得$\frac{DA}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，

所以$AB=\frac{DA\cdot\sin\angle ADB}{\sin B}=\frac{7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{6}$.]

12. A　[设向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，则由题意得，$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2\times2-1\times2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\times\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则$\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以平行四边形的面积为$S=2\times\frac{1}{2}\times|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=\sqrt{5}\times2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$，故选A.]

13. D　[由$b\sin 2A+\sqrt{3}a\sin B=0$，结合正弦定理，可得

$\sin B\sin 2A+\sqrt{3}\sin A\sin B=0$，

即$2\sin B\sin A\cos A+\sqrt{3}\sin A\sin B=0$，

由于$\sin B\sin A\neq0$，所以$\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

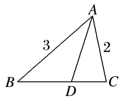
因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{5\pi}{6}$.

又$b=\sqrt{3}c$，由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3c^2+c^2+3c^2=7c^2$，

即$a^2=7c^2$，所以$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.]

14. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

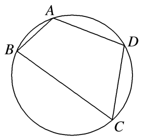
解析 如图,$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$,



$\therefore \frac{1}{2}\times 3\times 2\times \sin 60°=\frac{1}{2}\times 3AD\times \sin 30°+\frac{1}{2}\times 2AD\times \sin 30°$,

$\therefore AD=\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

15. C [如图,



由余弦定理,得

在$\triangle ABD$中,$BD^2=4+16-2\times 2\times 4\cos A=20-16\cos A$,

在$\triangle CBD$中,$BD^2=16+36-2\times 4\times 6\cos C=52-48\cos C$,

$\because A+C=180°$,

$\therefore 20-16\cos A=52+48\cos A$,

解得 $\cos A=-\frac{1}{2}$,

$\therefore A=120°, C=60°$.

$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times \sin 120°+\frac{1}{2}\times 4\times 6\times \sin 60°=8\sqrt{3}$.]

16. **解** (1)$f(x)=\sin x\cos x-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right), x\in\mathbf{R}$.

化简可得,$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}=\sin 2x-\frac{1}{2}$,

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

可得$-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$函数$f(x)$的单调递增区间是

$\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$.

(2)由$f\left(\frac{A}{2}\right)=0$,即$\sin A-\frac{1}{2}=0$,

可得$\sin A=\frac{1}{2}$,

$\because 0<A<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

可得$1+\sqrt{3}bc=b^2+c^2$.

$\because b^2+c^2\geqslant 2bc$,当且仅当$b=c$时等号成立.

$\therefore 1+\sqrt{3}bc\geqslant 2bc$,

$\therefore bc\leqslant 2+\sqrt{3}$.

$\therefore\triangle ABC$的面积为$S=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

故$\triangle ABC$面积的最大值为$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

第七章 复 数

§7.1 复数的概念

1. B [因为$a,b\in\mathbf{R}$,当"$a=0$"时,"复数$a+b\mathrm{i}$是纯虚数"不一定成立,也可能$b=0$,即$a+b\mathrm{i}=0\in\mathbf{R}$.
而当"复数$a+b\mathrm{i}$是纯虚数"时,"$a=0$"一定成立.
所以$a,b\in\mathbf{R}$,"$a=0$"是"复数$a+b\mathrm{i}$是纯虚数"的必要不充分条件.]

2. A [$-3+\mathrm{i}$的虚部为1,$3\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-1+3\mathrm{i}$的实部为$-1$,故所求复数为$1-\mathrm{i}$.]

3. B [因为复数$z=(a^2-2a)+(a^2-a-2)\mathrm{i}$是纯虚数,
所以$a^2-2a=0$且$a^2-a-2\neq 0$,所以$a=0$.]

4. D [因为$a+2\,021\mathrm{i}=2-b\mathrm{i}$,
所以$a=2, -b=2\,021$,即$a=2, b=-2\,021$,
所以$a^2+b\mathrm{i}=4-2\,021\mathrm{i}$.]

5. D [复数包括实数与虚数,所以实数集与纯虚数集无交集,所以$\mathbf{R}\cap\mathbf{I}=\varnothing$.]

6. BCD [由复数相等的定义知A正确;实数的虚部为0,故B错误;对于C,只有当$z_1,z_2,z_3\in\mathbf{R}$时,才有$z_1=z_2=z_3$,否则不成立,故C错误;D显然错误.]

7. 1

解析 由题意得$\begin{cases}x+y=2,\\x-y=0,\end{cases}$

所以$x=y=1$,所以$xy=1$.

8. $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

解析 由题意知$\sin 2\alpha=0, 1-\cos 2\alpha\neq 0$,

$\therefore 2\alpha=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

9. **解** 由$m^2+5m+6=0$,得$m=-2$或$m=-3$,
由$m^2-2m-8=0$,得$m=4$或$m=-2$.
(1)当$m^2-2m-8=0$时,复数z为实数,
$\therefore m=4$或$m=-2$.
(2)当$m^2-2m-8\neq 0$时,复数z为虚数,
$\therefore m\neq 4$且$m\neq -2$.

(3)当$\begin{cases}m^2-2m-8\neq 0,\\m^2+5m+6=0\end{cases}$时,复数$z$是纯虚数,

$\therefore m=-3$.

(4)当$\begin{cases}m^2-2m-8=0,\\m^2+5m+6=0\end{cases}$时,复数$z=0$,

$\therefore m=-2$.

10. **解** (1)$\because x,y\in\mathbf{R}$,

$\therefore$由复数相等的定义,得$\begin{cases}2x-1=x-y,\\y+1=-x-y,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=3,\\y=-2.\end{cases}$

(2)$\because x\in\mathbf{R}$,

$\therefore$由复数相等的定义,得$\begin{cases}\frac{x^2-x-6}{x+1}=0,\\x^2-2x-3=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}x=3\text{ 或 }x=-2,\text{且 }x\neq -1,\\x=3\text{ 或 }x=-1,\end{cases}$

$\therefore x=3$.

11. B [由已知可得$a^2>2a+3$,即$a^2-2a-3>0$,
解得$a>3$或$a<-1$,
因此,实数a的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.]

12. C [复数$a^2-a-2+(|a-1|-1)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$不是纯虚数,则有$a^2-a-2\neq 0$或$|a-1|-1=0$,解得$a\neq -1$.]

13. B [由题意知$(n^2+mn)+2n\mathrm{i}=-2-2\mathrm{i}$,

即$\begin{cases}n^2+mn=-2,\\2n=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=3,\\n=-1.\end{cases}$ $\therefore z=3-\mathrm{i}$.]

14. $\{3\}$

解析 由已知,得$\begin{cases}m^2-3m=0,\\m^2-4m+3=0,\\m^2<10,\end{cases}$解得$m=3$,

所以所求实数m的取值集合是$\{3\}$.

15. C [$\because$复数$z=\left(\cos\theta-\frac{4}{5}\right)+\left(\sin\theta-\frac{3}{5}\right)\mathrm{i}$是纯虚数,

$\therefore\cos\theta-\frac{4}{5}=0, \sin\theta-\frac{3}{5}\neq 0$,

$\therefore\sin\theta=-\frac{3}{5}$,$\therefore\tan\theta=-\frac{3}{4}$,

$\therefore\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1-\frac{3}{4}}=-7$.]

16. **解** (1)$\because z_1$为纯虚数,

$\therefore\begin{cases}4-m^2=0,\\m-2\neq 0,\end{cases}$解得$m=-2$.

(2)由$z_1=z_2$,得$\begin{cases}4-m^2=\lambda+2\sin\theta,\\m-2=\cos\theta-2,\end{cases}$

$\therefore\lambda=4-\cos^2\theta-2\sin\theta=\sin^2\theta-2\sin\theta+3$
$=(\sin\theta-1)^2+2$.
$\because -1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$,
$\therefore$当$\sin\theta=1$时,$\lambda_{\min}=2$,
当$\sin\theta=-1$时,$\lambda_{\max}=6$,
$\therefore$实数λ的取值范围是$[2,6]$.

7.1.2　复数的几何意义

1. C　[依题意得，$|z_1|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$|z_2|=\sqrt{(-1)^2}=1$，所以 $\frac{|z_1|}{|z_2|}=\sqrt{5}$.]

2. C　[由题意可知，点 A 的坐标为$(-1,-2)$，则点 B 的坐标为$(1,-2)$，故向量 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $1-2i$.]

3. B　[若复数 $z=(a^2-3a-4)+(a-4)i$ 是纯虚数，
则 $\begin{cases}a^2-3a-4=0,\\a-4\neq 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=4\text{ 或 }a=-1,\\a\neq 4,\end{cases}$ 即 $a=-1$，
则复数 $a-ai=-1+i$ 对应的点为$(-1,1)$，位于第二象限.]

4. A　[因为 z 在复平面内对应的点位于第二象限，
所以 $a<0$，由 $|z|=2$ 知，$\sqrt{a^2+(\sqrt{3})^2}=2$，解得 $a=\pm 1$，
故 $a=-1$，所以 $z=-1+\sqrt{3}i$.]

5. AC　[依题意可得 $\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}=2$，
解得 $m=1$ 或 $m=3$.]

6. A　[$\because |z|^2-2|z|-3=0$，
$\therefore (|z|-3)(|z|+1)=0$，$\therefore |z|=3$，
$\therefore$ 复数 z 对应的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心，以 3 为半径的一个圆. 故选 A.]

7. 2　4
解析　因为 z_1 与 z_2 互为共轭复数，所以 $a=2$，$b=4$.

8. $1+2i$ 或 $-1-2i$
解析　依题意可设复数 $z=a+2ai(a\in\mathbf{R})$，
由 $|z|=\sqrt{5}$，得 $\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}$，
解得 $a=\pm 1$，故 $z=1+2i$ 或 $z=-1-2i$.

9. **解**　(1)设向量 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $z_1=x_1+y_1i(x_1,y_1\in\mathbf{R})$，
则点 B 的坐标为(x_1,y_1)，
由题意可知，点 A 的坐标为$(2,1)$.
根据对称性可知，$x_1=2$，$y_1=-1$，
故 $z_1=2-i$.
(2)设点 C 对应的复数为 $z_2=x_2+y_2i(x_2,y_2\in\mathbf{R})$，
则点 C 的坐标为(x_2,y_2)，
由对称性可知，$x_2=-2$，$y_2=-1$，
故 $z_2=-2-i$.

10. **解**　$|w|=\sqrt{(x+y)^2+(x-y)^2}=\sqrt{2(x^2+y^2)}=\sqrt{2}|z|$，而 $1\leqslant|z|\leqslant\sqrt{2}$，故 $\sqrt{2}\leqslant|w|\leqslant 2$. 所以 w 对应点的集合是以原点为圆心，半径为 $\sqrt{2}$ 和 2 的圆所夹圆环内点的集合(包括圆环的边界)，其面积为 $S=\pi[2^2-(\sqrt{2})^2]=2\pi$.

11. BD　[A 中，$z_1+z_2=0$ 只能说明 $z_1=-z_2$；B 中，$|z_1|+|z_2|=0$，说明 $|z_1|=|z_2|=0$，即 $z_1=z_2=0$；C 中，$|z_1|=|z_2|$，说明 $|\overrightarrow{OZ_1}|=|\overrightarrow{OZ_2}|$，但 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 方向不一定相同；D 中，$|z_1-z_2|=0$，则 $z_1=z_2$，故 $\overline{z_1}=\overline{z_2}$. 故正确的为 B，D 选项.]

12. B　[复数对应的点为$(3,-\sqrt{3})$，对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$，则对应的点为$(0,-2\sqrt{3})$，所得向量对应的复数为 $-2\sqrt{3}i$.]

13. B　[因为 A，B 为锐角三角形的两个内角，所以 $A+B>\frac{\pi}{2}$，即 $A>\frac{\pi}{2}-B$，$\sin A>\cos B$，所以 $\cos B-\tan A=\cos B-\frac{\sin A}{\cos A}<\cos B-\sin A<0$，又 $\tan B>0$，所以点$(\cos B-\tan A,\tan B)$在第二象限，故选 B.]

14. 5
解析　由点$(3,-5)$，$(1,-1)$，$(-2,a)$共线可知 $a=5$.

15. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$
解析　因为点 A，B 对应的复数分别是
$z_1=\sin^2\theta+i$，$z_2=-\cos^2\theta+i\cos 2\theta$，
所以点 A，B 的坐标分别是 $A(\sin^2\theta,1)$，$B(-\cos^2\theta,\cos 2\theta)$，
所以 $\overrightarrow{AB}=(-\cos^2\theta,\cos 2\theta)-(\sin^2\theta,1)=(-\cos^2\theta-\sin^2\theta,\cos 2\theta-1)=(-1,-2\sin^2\theta)$，
所以 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数是 $z=-1+(-2\sin^2\theta)i$.
所以点 P 的坐标是$(-1,-2\sin^2\theta)$，代入 $y=\frac{1}{2}x$，
得 $-2\sin^2\theta=-\frac{1}{2}$，即 $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$，
所以 $\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$.
又因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$.

16. **解**　(1)由题意得 $|z|=\sqrt{(x-2)^2+(x+2)^2}=\sqrt{2x^2+8}\geqslant 2\sqrt{2}$，显然当 $x=0$ 时，复数 z 的模最小，最小值为 $2\sqrt{2}$.
(2)由(1)知当 $x=0$ 时，复数 z 的模最小，则 $Z(-2,2)$.
因为点 Z 在一次函数 $y=-mx+n$ 的图象上，所以 $2m+n=2$.
又 $mn>0$，
所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\left(m+\frac{n}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{m}{n}+\frac{n}{2m}\geqslant\frac{3}{2}+\sqrt{2}$. 当且仅当 $\frac{m}{n}=\frac{n}{2m}$，即 $n^2=2m^2$ 时等号成立.
又 $2m+n=2$ 且 $mn>0$，所以取等号时 $m=2-\sqrt{2}$，$n=2\sqrt{2}-2$.

§7.2　复数的四则运算

7.2.1　复数的加、减运算及其几何意义

1. B　[$z=3+4i-(5-6i)=(3-5)+(4+6)i=-2+10i$.]

2. BD　[$\because (3+mi)-(2+i)=3+mi-2-i=1+(m-1)i$，
$\therefore m-1>0$，$\therefore m>1$.]

3. A　[由图可知 $z=-2+i$，所以 $z+1=-1+i$，则复数 $z+1$ 所对应的向量的坐标为$(-1,1)$. 故选 A.]

4. D　[$z_1+z_2=2+i+3+ai=(2+3)+(1+a)i$
$=5+(1+a)i$.
$\because z_1+z_2$ 所对应的点在实轴上，
$\therefore 1+a=0$，$\therefore a=-1$.]

5. B　[设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，
则 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.
由题意知 $a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=5+\sqrt{3}i$，
即 $a+\sqrt{a^2+b^2}+bi=5+\sqrt{3}i$，
$\therefore \begin{cases}a+\sqrt{a^2+b^2}=5,\\b=\sqrt{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{11}{5},\\b=\sqrt{3}.\end{cases}$
$\therefore z=\frac{11}{5}+\sqrt{3}i$，$\overline{z}=\frac{11}{5}-\sqrt{3}i$，
$\therefore z-\overline{z}=2\sqrt{3}i$.]

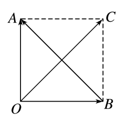
6. B　[$\because |z-1|=|z+1|$，$\therefore$ 点 Z 到$(1,0)$和$(-1,0)$的距离相等，即点 Z 在以$(1,0)$和$(-1,0)$为端点的线段的中垂线上，即在虚轴上.]

7. $\pm 2\sqrt{3}-2i$
解析　因为 $z+2i$ 是实数，所以可设 $z=a-2i(a\in\mathbf{R})$，
由 $|z|=4$ 得 $a^2+4=16$，
所以 $a^2=12$，所以 $a=\pm 2\sqrt{3}$，
所以 $z=\pm 2\sqrt{3}-2i$.

8. $3+3\sqrt{2}$
解析　$z_1+z_2=3+3i$，故 $f(z_1+z_2)=f(3+3i)=3+|3+3i|=3+3\sqrt{2}$.

9. **解**　(1)原式 $=\left(2+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+2\right)i=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$.
(2)$(3+2i)+(\sqrt{3}-2)i=3+(2+\sqrt{3}-2)i=3+\sqrt{3}i$.
(3)$(1+2i)+(i+i^2)+|3+4i|=1+2i+i-1+5=5+3i$.
(4)$(6-3i)+(3+2i)-(3-4i)-(-2+i)=[6+3-3-(-2)]+[-3+2-(-4)-1]i=8+2i$.

10. **解**　设 $\overrightarrow{OA}$ 对应的复数为 z_1，$\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 z_2，
则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 z_1+z_2，$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 z_1-z_2，
因为 $|z_1|=|z_2|=3$，且 $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$，
所以△AOB 为等腰直角三角形，
且 $|\overrightarrow{BA}|=3\sqrt{2}$.
作正方形 $AOBC$，如图所示



则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 对应的复数为 z_1+z_2，
故 $|z_1+z_2|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{BA}|=3\sqrt{2}$.

11. C　[$\because$ 点 A，B，C 对应的复数分别为 $1+3i$，$-i$，$2+i$，
$\therefore \overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $2+i-(-i)=2+2i$.
设点 D 对应的复数为 $x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，

∴$\overrightarrow{AD}$对应的复数为 $x-1+(y-3)\mathrm{i}$,
又 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,∴$x-1+(y-3)\mathrm{i}=2+2\mathrm{i}$,
由复数相等得 $\begin{cases}x-1=2,\\ y-3=2,\end{cases}$∴$\begin{cases}x=3,\\ y=5.\end{cases}$
∴点 D 对应的复数为 $3+5\mathrm{i}$.]

12. D [$|z_1-z_2|=|(1-\sin\theta)+(\cos\theta+1)\mathrm{i}|$
$=\sqrt{(1-\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2}=\sqrt{3+2(\cos\theta-\sin\theta)}$
$=\sqrt{3+2\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$.
∵$-1\leqslant\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$,
∴$|z_1-z_2|_{\max}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$.]

13. B [根据复数加(减)法的几何意义,可知以 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 为邻边所作的平行四边形的对角线相等,则此平行四边形为矩形,故$\triangle AOB$ 为直角三角形.]

14. 100
解析 因为 $x+y\mathrm{i}=(3+5\cos\theta)+\mathrm{i}(-4+5\sin\theta)$,
所以 $x^2+y^2=(3+5\cos\theta)^2+(-4+5\sin\theta)^2$
$=50+30\cos\theta-40\sin\theta=50+50\cos(\theta+\varphi)$,
其中 $\sin\varphi=\frac{4}{5}$,$\cos\varphi=\frac{3}{5}$.
又$-1\leqslant\cos(\theta+\varphi)\leqslant1$,所以$(x^2+y^2)_{\max}=50+50=100$.

15. $\sqrt{10}$
解析 由题意可设 $z_2=a+b\mathrm{i}(a<0,b>0)$,则 $\begin{cases}a^2+b^2=5,\\ 2a+b=0,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=2,\end{cases}$∴$z_2=-1+2\mathrm{i}$,∴$z_1+z_2=(2+\mathrm{i})+(-1+2\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}$,
∴$|z_1+z_2|=\sqrt{10}$.

16. **解** (1)∵向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 $1+2\mathrm{i}$,向量 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $3-\mathrm{i}$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$,
∴向量 $\overrightarrow{AC}$ 对应的复数为$(3-\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i})=2-3\mathrm{i}$.
又 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$,
∴点 C 对应的复数为$(2+\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})=4-2\mathrm{i}$.
∵$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,∴向量 $\overrightarrow{AD}$ 对应的复数为 $3-\mathrm{i}$,
∵$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$,∴$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$,
∴点 D 对应的复数为 $2+\mathrm{i}+3-\mathrm{i}=5$.
(2)∵$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B$,
∴$\cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{3-2}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.
∴$\sin B=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.
∴$S_{\square ABCD}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\sin B=\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=7$,
故$\square ABCD$ 的面积为 7.

7.2.2 复数的乘、除运算

1. C [$z=\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})=-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-1-2\mathrm{i}$,
故复平面内复数 $z=\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})$对应的点位于第三象限.]
2. B [∵$\frac{a}{1+\mathrm{i}}+\frac{1+\mathrm{i}}{2}=\frac{a(1-\mathrm{i})}{2}+\frac{1+\mathrm{i}}{2}=\frac{1+a}{2}+\frac{1-a}{2}\mathrm{i}$,
又∵$\left(\frac{a}{1+\mathrm{i}}+\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)\in\mathbf{R}$,∴$\frac{1-a}{2}=0$,解得 $a=1$.]
3. D [$(1+\mathrm{i})^2(2+3\mathrm{i})=2\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=-6+4\mathrm{i}$.]
4. BC [计算得 AD 为实数,BC 为纯虚数.]
5. C [∵$(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$,∴$(1+\mathrm{i})^4=-4$,
又$(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$,∴$(1-\mathrm{i})^4=-4$,
∴$(1+\mathrm{i})^{20}-(1-\mathrm{i})^{20}=(-4)^5-(-4)^5=0$.]
6. B [设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$,
由题意得 $\begin{cases}2a=6,\\ a^2+b^2=10,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=1\end{cases}$或 $\begin{cases}a=3,\\ b=-1,\end{cases}$
∴$z=3\pm\mathrm{i}$.]
7. $\frac{-3\pm\sqrt{23}\mathrm{i}}{4}$
解析 因为 $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times2\times4=9-32=-23<0$,
所以方程 $2x^2+3x+4=0$ 的根为
$x=\frac{-3\pm\sqrt{-(-23)}\ \mathrm{i}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{23}\ \mathrm{i}}{4}$.
8. 0
解析 ∵$z=-\frac{2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{-2(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}=-\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$
$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
∴$1+z+z^2=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2$
$=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=0$.
9. **解** (1)$\frac{(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{\mathrm{i}^3}=\frac{-3+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=-1-3\mathrm{i}$.
(2)$\frac{(1+2\mathrm{i})^2+3(1-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}=\frac{-3+4\mathrm{i}+3-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$
$=\frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$.
(3)$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^6+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\mathrm{i}}=\left[\frac{(1+\mathrm{i})^2}{2}\right]^6+\frac{\mathrm{i}(\sqrt{3}-\sqrt{2}\mathrm{i})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\mathrm{i}}$
$=\mathrm{i}^6+\mathrm{i}=-1+\mathrm{i}$.
10. **解** (1)$z=\frac{-2\mathrm{i}+3+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5}=1+\mathrm{i}$.
(2)把 $z=1+\mathrm{i}$ 代入 $z^2+az+b=1-\mathrm{i}$,
得$(1+\mathrm{i})^2+a(1+\mathrm{i})+b=1-\mathrm{i}$,
整理得 $a+b+(2+a)\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$,
所以$\begin{cases}a+b=1,\\ 2+a=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\ b=4.\end{cases}$
11. D [因为$\frac{5}{-3-\mathrm{i}}=\frac{5(-3+\mathrm{i})}{(-3-\mathrm{i})(-3+\mathrm{i})}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$,
所以 $a=-\frac{3}{2}$,$b=\frac{1}{2}$,所以 $A\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$,
把点 A 的坐标分别代入选项,只有 D 选项满足.]
12. BD [由$\frac{z+3}{z-1}=-\mathrm{i}$,
得 $z=\frac{-3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-1+2\mathrm{i}$,
故 z 的虚部为 2,
$|z|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$,
$\overline{z}=-1-2\mathrm{i}$,
则 $\overline{z}$ 对应的点位于第三象限.]
13. B [依题意,得 $z=\frac{(1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\mathrm{i}$,
所以 $\overline{z}=-\mathrm{i}$,所以 $z\cdot\overline{z}=\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})=1$,$z^{2\,021}=\mathrm{i}^{2\,021}=\mathrm{i}$,
所以$|z\cdot\overline{z}+z^{2\,021}|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.]
14. 3
解析 由题意,得 $a(2+3\mathrm{i})^2+(2+3\mathrm{i})+c=0$,
即$-5a+2+c+(12a+3)\mathrm{i}=0$.
由复数相等的充要条件,得$\begin{cases}-5a+2+c=0,\\ 12a+3=0,\end{cases}$
解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{4},\\ c=-\frac{13}{4},\end{cases}$所以 $a-c=3$.
15. A [欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x(x\in\mathbf{R})$,
则 $z=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}=\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$,
根据共轭复数定义可知 $\overline{z}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.]
16. **解** (1)设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则 $z+2\mathrm{i}=a+(b+2)\mathrm{i}$,
∵$z+2\mathrm{i}$ 为实数,∴$b+2=0$,解得 $b=-2$,
∴$\frac{z}{2-\mathrm{i}}=\frac{a-2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(a-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{2a+2}{5}+\frac{a-4}{5}\mathrm{i}$,
∵$\frac{z}{2-\mathrm{i}}$为实数,∴$\frac{a-4}{5}=0$,解得 $a=4$.
∴$z=4-2\mathrm{i}$.

(2)$\because$ 复数 $(z+x\mathrm{i})^2=[4+(x-2)\mathrm{i}]^2=16-(x-2)^2+8(x-2)\mathrm{i}=(12+4x-x^2)+(8x-16)\mathrm{i}$，且复数 $(z+x\mathrm{i})^2$ 在复平面内对应的点在第一象限，

$\therefore \begin{cases}12+4x-x^2>0,\\ 8x-16>0,\end{cases}$ 解得 $2<x<6$.

即实数 x 的取值范围是 $(2,6)$.

第八章　立体几何初步

§8.1　基本立体图形

第 1 课时　棱柱、棱锥、棱台

1. B ［由棱锥的结构特征可得.］

2. C ［显然 A 正确；底面边数最少的棱柱是三棱柱，它有五个面，故 B 正确；底面是正方形的四棱柱，有一对侧面与底面垂直，另一对侧面不垂直于底面，此时侧面并不全等，故 C 错误；D 正确.］

3. A ［A 是假命题，正六棱柱的两个相对的侧面互相平行，但不是棱柱的底面，B，C，D 都是真命题.］

4. B ［根据定义知，正方体是特殊的正四棱柱，正四棱柱是特殊的长方体，长方体是特殊的直四棱柱，所以{正方体}$\subsetneqq${正四棱柱}$\subsetneqq${长方体}$\subsetneqq${直四棱柱}，故选 B.］

5. B ［(1)图还原后，①⑤对面，②④对面，③⑥对面；
(2)图还原后，①④对面，②⑤对面，③⑥对面；
(3)图还原后，①④对面，②⑤对面，③⑥对面；
(4)图还原后，①⑥对面，②⑤对面，③④对面；
综上，可得还原成正方体后，其中两个完全一样的是(2)(3).］

6. AC ［有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体叫做棱锥，即其余各面的三角形必须有公共的顶点，故 A 错误；根据棱锥的概念知，B 正确；当棱锥的各个侧面的共顶点的角之和是 360° 时，各侧面构成平面图形，故这个棱锥不可能为六棱锥，故 C 错误；若每个侧面都是长方形，则说明侧棱与底面垂直，又底面也是长方形，符合长方体的定义，故 D 正确.］

7. 北

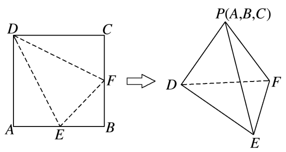
8. $5\sqrt{2}$

解析　依题意得，

$BD_1^2=AB^2+AD^2+AA_1^2=3^2+4^2+5^2=50$，

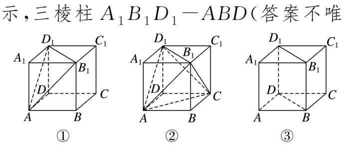
$\therefore BD_1=5\sqrt{2}$.

9. **解**　(1)如图折起后的几何体是三棱锥.



(2)$S_{\triangle PEF}=\dfrac{1}{2}a^2$，$S_{\triangle DPF}=S_{\triangle DPE}=\dfrac{1}{2}\times 2a\times a=a^2$，$S_{\triangle DEF}=\dfrac{3}{2}a^2$.

10. **解**　(1)如图①所示，三棱锥 $A_1-AB_1D_1$(答案不唯一).
(2)如图②所示，三棱锥 B_1-ACD_1(答案不唯一).
(3)如图③所示，三棱柱 $A_1B_1D_1-ABD$(答案不唯一).

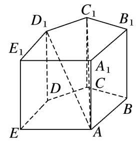


11. D ［设原棱锥的高为 h，由题意得 $\left(\dfrac{3}{h}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，则 $h=6$，因而棱台的高为 3，故选 D.］

12. C ［选项 A 中 $\dfrac{A_1B_1}{AB}\neq\dfrac{B_1C_1}{BC}$，故 A 不符合题意；选项 B 中 $\dfrac{B_1C_1}{BC}\neq\dfrac{A_1C_1}{AC}$，故 B 不符合题意；选项 C 中 $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{A_1C_1}{AC}$，故 C 符合题意；选项 D 中满足这个条件的可能是一个三棱柱，不可能是三棱台.］

13. 10

解析　如图，在五棱柱 $ABCDE-A_1B_1C_1D_1E_1$ 中，从顶点 A 出发的对角线有两条：AC_1，AD_1，同理从 B，C，D，E 点出发的对角线均有两条，共 $2\times5=10$(条).



14. $\sqrt{6}$

解析　设长方体长、宽、高为 x，y，z，

则 $yz=\sqrt{2}$，$xz=\sqrt{3}$，$yx=\sqrt{6}$，

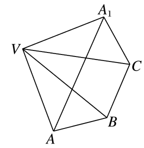
三式相乘得 $x^2y^2z^2=6$，即 $xyz=\sqrt{6}$，

解得 $x=\sqrt{3}$，$y=\sqrt{2}$，$z=1$，

所以 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3+2+1}=\sqrt{6}$.

15. $4\sqrt{2}$

解析　将三棱锥沿侧棱 VA 剪开，并将其侧面展开平铺在一个平面上，如图，线段 AA_1 的长为所求 $\triangle AEF$ 周长的最小值.



$\because \angle AVB=\angle A_1VC=\angle BVC=30°$，$\therefore \angle AVA_1=90°$.

又 $VA=VA_1=4$，$\therefore AA_1=4\sqrt{2}$.

$\therefore \triangle AEF$ 周长的最小值为 $4\sqrt{2}$.

16. **解**　(1)不对. 水面的形状就是用一个与棱(将长方体倾斜时固定不动的棱)平行的平面截长方体时截面的形状，因而可以是矩形，但不可能是非矩形的平行四边形.
(2)不对. 水的形状就是用与棱(将长方体倾斜时固定不动的棱)平行的平面将长方体截去一部分后剩余部分的几何体，此几何体是棱柱，水比较少时，是三棱柱，水多时，可能是四棱柱或五棱柱，但不可能是棱台或棱锥.
(3)用任意一个平面去截长方体，其截面形状可以是三角形、四边形、五边形、六边形，因而水面的形状可以是三角形、四边形、五边形、六边形，水的形状可以是棱锥、棱柱，但不可能是棱台，故此时(1)对，(2)不对.

第 2 课时　圆柱、圆锥、圆台、球、简单组合体

1. D

2. ACD

3. B ［截面可以从各个不同的部位截取，截得的截面都是圆面的几何体只有球.］

4. B ［圆面绕着直径所在的轴，旋转而形成球，矩形绕着轴旋转而形成圆柱. 故选 B.］

5. B ［当过 A，B 的直线经过球心时，经过 A，B 的截面所得的圆都是球的大圆，这时过 A，B 作球的大圆有无数个；当直线 AB 不经过球心 O 时，经过 A，B，O 的截面就是一个大圆，这时只能作出一个大圆.］

6. B ［当围成的圆柱底面周长为 4，高为 2 时，设圆柱底面圆的半径为 r，则 $2\pi r=4$，所以 $r=\dfrac{2}{\pi}$，所以轴截面是长为 2，宽为 $\dfrac{4}{\pi}$ 的矩形，所以轴截面的面积为 $2\times\dfrac{4}{\pi}=\dfrac{8}{\pi}$. 同理，当围成的圆柱底面周长为 2，高为 4 时，轴截面的面积也为 $\dfrac{8}{\pi}$.］

7. $\dfrac{\sqrt{Q}}{2}$

解析　设圆柱的底面半径为 r，则母线长为 $2r$.

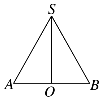
$\therefore 4r^2=Q$，解得 $r=\dfrac{\sqrt{Q}}{2}$，

$\therefore$ 此圆柱的底面半径为 $\dfrac{\sqrt{Q}}{2}$.

8. 12π

解析　因为圆锥的底面半径为 2，所以底面圆的周长为 4π，故将此圆锥沿一条母线展开，所得扇形的面积为 $\dfrac{1}{2}\times4\pi\times6=12\pi$.

9. **解**　如图轴截面 SAB，圆锥 SO 的底面直径为 AB，SO 为高，SA 为母线，则 $\angle ASO=30°$.



在 Rt$\triangle SOA$ 中，

$AO=SO\cdot\tan 30°=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$(cm).

$SA=\dfrac{SO}{\cos 30°}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$(cm).

所以 $S_{\triangle ASB}=\dfrac{1}{2}SO\cdot 2AO=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$(cm^2).

所以圆锥的母线长为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm，圆锥的轴截面的面积为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm^2.

10. **解**　当 $AD>BC$ 时，四边形 $ABCD$ 绕 EF 旋转一周所得的几何体是由底面半径为 CD 的圆柱和圆锥拼成的组合体，当 $AD=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 绕 EF 旋转一周所得的几何体是圆柱，当 $AD<BC$ 时，四边形 $ABCD$ 绕 EF 旋转一周所得的几何体是从圆柱中挖去一个同底的圆锥而得到的.

11. D　[圆台的母线长 l、高 h 和上、下两底面圆的半径 r，R 满足关系式 $l^2=h^2+(R-r)^2$，由题意知 $l=5$，$R=7$，$r=6$，求得 $h=2\sqrt{6}$，即两底面之间的距离为 $2\sqrt{6}$.]

12. A　[因为圆锥的侧面展开图是直径为 a 的半圆面，所以圆锥的底面圆的直径为 $\dfrac{a}{2}$，母线长也为 $\dfrac{a}{2}$，所以此圆锥的轴截面是等边三角形.]

13. AD　[一个圆柱挖去一个圆锥后，剩下的几何体被一个竖直的平面所截后，圆柱的轮廓是矩形除去一条边，圆锥的轮廓是三角形除去一条边或抛物线的一部分.]

14. ③④

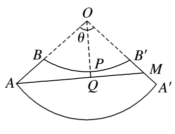
解析　题图中的半球可由③绕轴旋转一周而成，也可由④绕轴旋转 180°而成.

15. (1)①(或②或⑤)　(2)①②⑤(或①④⑤或②③④)

解析　(1)由图可知，①～⑤中选出的一个模块可以是①，也可以是②，也可以是⑤.

(2)以①②⑤为例，中间层用⑤补齐，最上层用①②.(答案不唯一)

16. **解**　(1)如图所示，将侧面展开，绳子的最短长度为侧面展开图中 AM 的长度，



设 $OB=l$，

则 $\theta\cdot l=2\pi\times 5$，$\theta\cdot(l+20)=2\pi\times 10$，

解得 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$l=20$ cm.

$\therefore OA=40$ cm，$OM=30$ cm.

$\therefore AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=50$ cm.

即绳子最短长度为 50 cm.

(2)作 $OQ\perp AM$ 于点 Q，交弧 BB' 于点 P，

则 PQ 为所求的最短距离.

$\because OA\cdot OM=AM\cdot OQ$，$\therefore OQ=24$ cm.

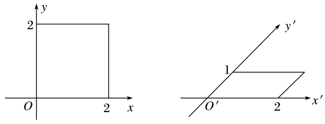
故 $PQ=OQ-OP=24-20=4$(cm)，即上底圆周上的点到绳子的最短距离为 4 cm.

§8.2　立体图形的直观图

1. ACD

2. C　[根据斜二测画法可知，此直观图的平面图形可能是 C.]

3. A　[如图，由正方形的直观图是平行四边形可知①②③错误，易知④正确，故选 A.]



4. AB　[等于 4 的一边在原图形中可能等于 4，也可能等于 8，所以正方形的面积为 16 或 64.]

5. A　[由$\triangle ABC$ 的直观图，知在原$\triangle ABC$ 中，$AO\perp BC$.

$\because A'O'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AO=\sqrt{3}$.

$\because B'O'=C'O'=1$，$\therefore BC=2$，$AB=AC=2$，

$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形.]

6. C

7. (4,2)

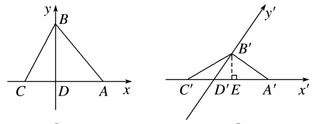
解析　由直观图画法"横不变，纵折半"可得点 M' 的坐标为(4，2).

8. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析　画出直观图(图略)，则 B' 到 x' 轴的距离为

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}OA=\dfrac{\sqrt{2}}{4}OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

9. **解**　(1)①以 D 为原点，AC 所在直线为 x 轴，DB 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，如图①，



①　　②

②画出对应的 x'，y' 轴，使其 $\angle x'D'y'=45°$，

在 x' 轴上取点 A'，C'，使 $D'A'=DA$，$D'C'=DC$，

在 y' 轴上取点 B'，使 $D'B'=\dfrac{1}{2}DB$，

连接 $A'B'$，$C'B'$，

则$\triangle A'B'C'$，即为$\triangle ABC$ 的直观图，如图②.

(2)在图②中，作 $B'E\perp A'C'$，E 为垂足，

$\because D'B'=\dfrac{1}{2}DB=6$，$\angle B'D'E=45°$，

$\therefore B'E=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{1}{2}\times A'C'\times B'E=\dfrac{1}{2}\times 12\times 3\sqrt{2}$

$=18\sqrt{2}$ (cm^2).

10. **解**　一个水平放置的平面图形的直观图是一个底角为 45°，腰和上底均为 1 的等腰梯形，所以原图形 $ABCD$ 为直角梯形，且 $AB\perp BC$，且 $AB=2A'B'=2$，$AD=A'D'=1$，又等腰梯形 $A'B'C'D'$ 中，

$B'C'=1+2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$，

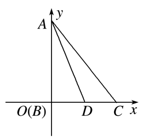
$\therefore BC=B'C'=1+\sqrt{2}$，$\therefore S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB=\dfrac{1}{2}(1+1+\sqrt{2})\times 2=2+\sqrt{2}$，$\therefore$原图形的面积为 $2+\sqrt{2}$.

11. A　[由直观图可知$\triangle ABO$ 为直角三角形且 $AB\perp BO$，$OB=4$，

$S_{\triangle ABO}=\dfrac{1}{2}\times 4\times AB=16$，

$\therefore AB=8$，$\therefore A'B'=4$，$\therefore A'C'=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.]

12. CD　[由直观图知$\triangle ABC$ 为直角三角形，$AB\perp BC$，$AB=2A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，D 为 BC 的中点，如图所示，



又 $A_1B_1=B_1C_1$，

故 AB 错误，CD 正确.]

13. 4　0.5　3.6

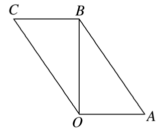
解析　由比例可知长方体的长、宽、高分别为 4 cm，1 cm，2 cm，四棱锥的高为 1.6 cm，

所以长方体的直观图的长、宽、高应分别为 4 cm，0.5 cm，2 cm，四棱锥的直观图的高为 1.6 cm.

所以直观图中建筑物的高为 2+1.6=3.6(cm).

14. 8 cm

解析　由题意知正方形 $O'A'B'C'$ 的边长为 1 cm，它是水平放置的一个平面图形的直观图，所以 $O'B'=\sqrt{2}$ cm，对应原图形平行四边形 $OABC$ 的高 $OB=2O'B'=2\sqrt{2}$ cm，如图所示.



所以原图形中，$OA=BC=1$ cm，$AB=OC=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$ (cm)，

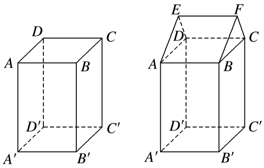
故原图形的周长为 $2\times(1+3)=8$(cm).

15. D　[设$\triangle AOB$的边OB上的高为h，因为$S_{原图形}=2\sqrt{2}S_{直观图}$，所以$\frac{1}{2}\times OB\times h=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times 2\times O'B'$.

又$OB=O'B'$，所以$h=4\sqrt{2}$.]

16. **解**　(1)先按照斜二测画法画出直四棱柱的直观图$A'B'C'D'-ABCD$；

(2)以直四棱柱的上底面$ABCD$为三棱柱的侧面画出三棱柱的直观图$ADE-BCF$.直观图如图所示.



§8.3　简单几何体的表面积与体积

8.3.1　棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

1. B

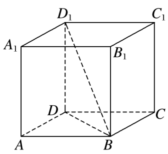
2. D

3. B　[设棱柱的高为h，底面积为S，则棱锥的高为h，底面积为$\frac{3}{2}S$，故二者的体积之比为$\frac{V_1}{V_2}=\frac{Sh}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}Sh}=\frac{2}{1}=2$.]

4. C　[$\because V_{三棱锥C-A'B'C'}=\frac{1}{3}V_{三棱柱ABC-A'B'C'}=\frac{1}{3}$，

$\therefore V_{四棱锥C-AA'B'B}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.]

5. C　[如图所示，正四棱柱的侧棱长为$AA_1=5$，对角线长为$BD_1=\sqrt{43}$，则$(\sqrt{2}AB)^2+5^2=43$，解得$AB=3$，所以这个棱柱的表面积为$2\times3\times3+4\times5\times3=78$.]



6. BD　[依题意，上部分为小棱锥，下部分为棱台，
所以小棱锥与原棱锥的底面边长之比为1∶3，高之比为1∶3，
所以小棱锥与原棱锥的侧面积之比为1∶9，体积之比为1∶27，
即小棱锥与棱台的侧面积之比为1∶8，体积之比为1∶26.]

7. 1

解析　$\because$正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面边长为2，侧棱长为$\sqrt{3}$，D为BC的中点，

$\therefore$底面B_1DC_1的面积为$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

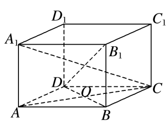
三棱锥$A-B_1DC_1$的高就是底面正三角形的高$\sqrt{3}$.

三棱锥$A-B_1DC_1$的体积为$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$.

8. 1 012

解析　易知正四棱台侧面为等腰梯形，其高为$\sqrt{13^2-5^2}=12$，所以正四棱台的表面积$S=4\times\frac{1}{2}\times(8+18)\times12+8^2+18^2=1\,012(\mathrm{cm}^2)$.

9. **解**　如图，设底面对角线$AC=a$，$BD=b$，交点为O，



体对角线$A_1C=15$，$B_1D=9$，

$\therefore a^2+5^2=15^2$，$b^2+5^2=9^2$，

$\therefore a^2=200$，$b^2=56$.

$\because$该直四棱柱的底面是菱形，

$\therefore AB^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{200+56}{4}=64$，

$\therefore AB=8$.

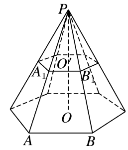
$\therefore$直四棱柱的侧面积$S_{侧}=4\times8\times5=160$.

直四棱柱的底面积$S_{底}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=20\sqrt{7}$.

直四棱柱的表面积$S_{表}=160+2\times20\sqrt{7}=160+40\sqrt{7}$.

10. **解**　(1)由题意知$S_{小棱锥侧}∶S_{大棱锥侧}=1∶4$，则$S_{大棱锥侧}∶S_{小棱锥侧}∶S_{棱台侧}=4∶1∶3$.

(2)如图所示，$\because$小棱锥的底面边长为4 cm，



$\therefore$大棱锥的底面边长为8 cm，

又$PA=12$ cm，$\therefore A_1A=6$ cm.

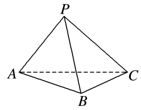
又梯形ABB_1A_1的高$h'=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}(\mathrm{cm})$，

$\therefore S_{棱台侧}=6\times\frac{4+8}{2}\times4\sqrt{2}=144\sqrt{2}(\mathrm{cm}^2)$，

$\therefore S_{棱台表}=S_{棱台侧}+S_{上底}+S_{下底}=144\sqrt{2}+24\sqrt{3}+96\sqrt{3}=(144\sqrt{2}+120\sqrt{3})(\mathrm{cm}^2)$.

11. B　[设正六棱柱的底面边长为a m，高为h m，则$2ah=1$，$\sqrt{3}a=1$，解得$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$h=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以六棱柱的体积$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}(\mathrm{m}^3)$.]

12. A　[如图，PA，PB，PC两两垂直且$PA=PB=PC$，



$\triangle ABC$为等边三角形，$AB=a$，

$\therefore PA=PB=PC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore$表面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\times3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2=\frac{3+\sqrt{3}}{4}a^2$.]

13. D　[设三棱台的高为h，则由题可知三棱锥A_1-ABC的体积$V_1=\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle ABC}$，三棱锥$A_1-B_1C_1B$的体积$V_2=\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\times h\times\frac{1}{4}\times S_{\triangle ABC}$，三棱锥$A_1-C_1BC$的体积$V_3=2V_2$，所以三棱锥$A_1-ABC$，$A_1-B_1C_1B$，$A_1-C_1BC$的体积之比为4∶1∶2.]

14. $\frac{1}{12}$

解析　连接AD_1，CD_1，B_1A，B_1C，AC(图略)，

$\because E$，H分别为AD_1，CD_1的中点，

$\therefore EH/\!/AC$，$EH=\frac{1}{2}AC$.

$\because F$，G分别为B_1A，B_1C的中点，

$\therefore FG/\!/AC$，$FG=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore EH/\!/FG$，$EH=FG$，$\therefore$四边形$EHGF$为平行四边形，

又$EG=HF$，$EH=HG$，$\therefore$四边形$EHGF$为正方形.

又四棱锥$M-EFGH$的高为$\frac{1}{2}$，

$\therefore$四棱锥$M-EFGH$的体积为$\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

15. 36

解析　易知由下向上三个正方体的棱长依次为2，$\sqrt{2}$，1，

$\therefore S_{表}=2\times2^2+4\times[2^2+(\sqrt{2})^2+1^2]=36$.

$\therefore$该几何体的表面积为36.

16. **解**　设点B到平面EMC的距离为h_1，点D到平面EMC的距离为h_2，

连接MD，因为M是AE的中点，

所以$V_{M-ABCD}=\frac{1}{2}V$，

所以$V_{E-MBC}=\frac{1}{2}V-V_{E-MDC}$.

而$V_{E-MBC}=V_{B-EMC}$，$V_{E-MDC}=V_{D-EMC}$，

所以$\frac{V_{E-MBC}}{V_{E-MDC}}=\frac{V_{B-EMC}}{V_{D-EMC}}=\frac{h_1}{h_2}$.

因为B，D到平面EMC的距离即为到平面EAC的距离，而$AB/\!/CD$，且$2AB=3CD$，

所以$\frac{h_1}{h_2}=\frac{3}{2}$.

所以$V_{E-MBC}=V_{M-EBC}=\frac{3}{10}V$.

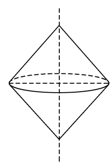
8.3.2 圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

1. B [由两球的体积之比为 8∶27，
可得半径之比为 2∶3，
故表面积之比是 4∶9.]

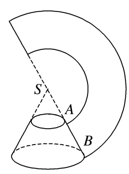
2. D [设该等边圆锥的半径为 R，
则母线 $l=2R$，
$\therefore S_{底}=\pi R^2$，
$S_{侧}=\pi Rl=2\pi R^2$，
$\therefore S_{侧}=2S_{底}$.]

3. D [由题意，得 $r=\dfrac{1}{3}$，$d=\dfrac{2}{3}$，
所以 $\dfrac{2}{3}\approx\sqrt[3]{\dfrac{16V}{9}}$，
解得 $V\approx\dfrac{1}{6}$.]

4. B [绕等腰直角三角形的斜边所在的直线旋转一周形成的曲面围成的几何体为两个底面重合，等体积的圆锥，如图所示. 每一个圆锥的底面半径和高都为 $\sqrt{2}$，故所求几何体的体积 $V=2\times\dfrac{1}{3}\times2\pi\times\sqrt{2}=\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.]



5. ABD [如图所示，设圆台的上底面周长为 C，因为扇环的圆心角为 180°，
所以 $C=\pi\cdot SA$，又 $C=10\times2\pi$，
所以 $SA=20$，同理 $SB=40$，
故圆台的母线 $AB=SB-SA=20$，
高 $h=\sqrt{AB^2-(20-10)^2}=10\sqrt{3}$，
体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\times10\sqrt{3}\times(10^2+10\times20+20^2)=\dfrac{7\,000\sqrt{3}\pi}{3}$，
表面积 $S=\pi(10+20)\times20+100\pi+400\pi=1\,100\pi$.]

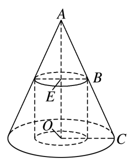


6. D [由题意知，该神人纹玉琮王的体积为底面边长为 17.6 cm，高为 8.8 cm 的正方体的体积减去底面直径为 4.9 cm，高为 8.8 cm 的圆柱的体积.
则 $V=17.6\times17.6\times8.8-\pi\times\left(\dfrac{4.9}{2}\right)^2\times8.8\approx2\,560\ (\mathrm{cm}^3)$.
结合该神人纹玉琮王外面方形偏低且去掉雕刻部分，可估计该神人纹玉琮王的体积约为 2 350 cm^3.]

7. 12π
解析 由正方体的体积为 8 可知，正方体的棱长 $a=2$. 又正方体的体对角线是其外接球的一条直径，即 $2R=\sqrt{3}a$（R 为正方体的外接球半径），所以 $R=\sqrt{3}$，故所求球的表面积 $S=4\pi R^2=12\pi$.

8. 2∶1 $2\sqrt{3}$∶1
解析 $S_{圆柱}=2\cdot\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+2\pi\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a=\dfrac{3\pi}{2}a^2$.
$S_{圆锥}=\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\pi\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a=\dfrac{3\pi}{4}a^2$.
$\therefore S_{圆柱}:S_{圆锥}=2:1$.
$V_{圆柱}=\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\cdot a=\dfrac{\pi}{4}a^3$，
$V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}a^3$，
$\therefore V_{圆柱}:V_{圆锥}=\dfrac{\pi}{4}a^3:\dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}a^3=2\sqrt{3}:1$.

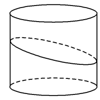
9. **解** 设圆锥的底面半径为 R，圆柱的底面半径为 r，高为 h，表面积为 S.



则 $R=OC=2$，$AC=4$，$AO=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，$h=AO-AE=\sqrt{3}$.
如图所示，易知$\triangle AEB\backsim\triangle AOC$，$\therefore\dfrac{AE}{AO}=\dfrac{EB}{OC}$，
即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{r}{2}$，$\therefore r=1$，
$S_{圆柱底}=2\pi r^2=2\pi$，$S_{圆柱侧}=2\pi r\cdot h=2\sqrt{3}\pi$.
$\therefore S=S_{圆柱底}+S_{圆柱侧}=2\pi+2\sqrt{3}\pi=(2+2\sqrt{3})\pi$.

10. **解** 该组合体的表面积 $S=4\pi r^2+2\pi rl=4\pi\times1^2+2\pi\times1\times3=10\pi$.
该组合体的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2l$
$=\dfrac{4}{3}\pi\times1^3+\pi\times1^2\times3=\dfrac{13\pi}{3}$.

11. D [用一个完全相同的几何体把题中几何体补成一个圆柱，如图，则圆柱的体积为 $\pi\times2^2\times5=20\pi$，故所求几何体的体积为 10π.]

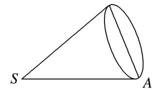


12. C [设正方体的棱长为 a，则其内切球的半径为 $\dfrac{a}{2}$，
$\therefore V_{内}=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^3=\dfrac{\pi a^3}{6}$，
正方体的外接球的半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，
$\therefore V_{外}=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$，
$\therefore V_{内}:V_{外}=1:3\sqrt{3}$.]

13. B [由已知得天池盆盆口半径为 14 寸，盆底半径为 6 寸，
则盆口面积为 196π，盆底面积为 36π，
又盆深 18 寸，盆中水深 9 寸，
则积水水面的半径为 $\dfrac{14+6}{2}=10$（寸），
$\therefore$积水水面面积为 100π，
$\therefore$积水的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times(36\pi+\sqrt{36\pi\times100\pi}+100\pi)\times9=588\pi$，
$\therefore$平地降雨量为 $\dfrac{588\pi}{196\pi}=3$（寸）.]

14. 3∶1∶2
解析 设球的半径为 R，则
$V_{圆柱}=\pi R^2\cdot2R=2\pi R^3$，
$V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi R^2\cdot2R=\dfrac{2}{3}\pi R^3$，
$V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，
故 $V_{圆柱}:V_{圆锥}:V_{球}=2\pi R^3:\dfrac{2}{3}\pi R^3:\dfrac{4}{3}\pi R^3=3:1:2$.

15. 20 224π
解析 设圆锥的母线长为 l，如图，以 S 为圆心，SA 为半径的圆的面积 $S=\pi l^2$.
又圆锥的侧面积 $S_{圆锥侧}=\pi rl=8\pi l$.
根据圆锥在平面内转到原位置时，圆锥本身滚动了 2.5 周，
$\therefore\pi l^2=2.5\times8\pi l$，
$\therefore l=20$ cm.
圆锥的表面积 $S=S_{圆锥侧}+S_{底}=\pi\times8\times20+\pi\times8^2$
$=224\pi(\mathrm{cm}^2)$.



16. **解** 要使冰淇淋融化后不会溢出杯子，则必须有 $V_{圆锥}\geqslant V_{半球}$，
而 $V_{半球}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\pi}{3}\times4^3$，$V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi\times4^2\times h$，
则有 $\dfrac{1}{3}\pi\times4^2\times h\geqslant\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\pi}{3}\times4^3$，解得 $h\geqslant8$，
即当圆锥形杯子的高大于或等于 8 cm 时，冰淇淋融化后不会溢出杯子.
又因为 $S_{圆锥侧}=4\pi\sqrt{h^2+16}$，
所以当高为 8 cm 时，制作的杯子最省材料，材料最省为 $16\sqrt{5}\pi\ \mathrm{cm}^2$.

习题课 与球有关的内切、外接问题

1. D [由正方体性质知，它的外接球的半径为 $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，内切球的半径为 $r=\dfrac{1}{2}$，