

Школа анализа данных

Машинное обучение, часть 2

Домашнее задание №3

Решите предложенные задачи. Решения необходимо оформить в виде PDF документа. Каждая задача должна быть подробно обоснована, задачи без обоснования не засчитываются. Решения пишутся в свободной форме, однако так, чтобы проверяющие смогли разобраться. Если проверяющие не смогут разобраться в решении какой-нибудь задачи, то она автоматически не засчитывается. Дедлайн очников 5 декабря 2017 09:00MSK, дедлайн заочников и филиалов +2 суток.

Задача 1 (2 балла) ЕМ-алгоритм и смеси распределений.

Рассмотрим модель смеси двух одномерных гауссовских распределений:

$$p(x) = w_1 N(x | \mu_1, \sigma_1^2) + w_2 N(x | \mu_2, \sigma_2^2).$$

Пусть дана выборка $X^\ell = \{x_1, \dots, x_\ell\}$.

1. (1 балл) Докажите, что правдоподобие этой выборки в данной модели не ограничено.
2. (1 балл) Пусть дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 известны. Введите в модель скрытые переменные и выведите формулы шагов ЕМ-алгоритма для настройки параметров w_1, w_2, μ_1, μ_2 .

Задача 2 (1 балл) Нейронные сети. Реализуйте следующую булеву функцию трех переменных с помощью нейронной сети:

$$f(x) = (\bar{x}_1 \vee x_3) \& (x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Все нейроны должны использовать функцию активации $\sigma(x) = [x > 0]$.

Задача 3 (2 балла) Нейронные сети, word2vec, back-prop.

Рассмотрим нейронную сеть для модели семантической близости слов word2vec. Для простоты будем считать, что по слову x предсказывается одно слово y из его контекста. Эту задачу можно трактовать как задачу многоклассовой классификации, где в роли классов выступают слова словаря. На вход нейронной сети подается слово x из словаря V , закодированное с помощью вектора размерности $|V|$ из нулей и одной единицы (one-hot encoding):

$$x = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)_{|V|}$$

Полносвязный слой с матрицей весов W размерности $|V| \times d$ преобразует вектор x в скрытое представление h некоторой размерности $d \approx 300$:

$$h = xW$$

Функции активации нет, еще один полносвязный слой с матрицей весов W' размерности $d \times |V|$ преобразует скрытое представление в вектор оценок a за каждый класс, в данном случае — за каждое слово:

$$a = hW'$$

Чтобы получить из этих оценок вероятности, используется softmax. Например, вероятность встретить j -ое слово словаря в контексте слова x согласно нейронной сети выглядит так:

$$p_j = \frac{\exp(a_j)}{\sum_{k=1}^{|V|} \exp(a_k)}$$

В качестве функции потерь используется cross-entropy loss:

$$\mathcal{L} = - \sum_{j=1}^{|V|} y_j \log p_j,$$

где y — one-hot encoding для истинного слова из контекста.

Итак, мы полностью описали проход по нейронной сети вперед: как по входному вектору x найти вероятности классов p_j и вычислить значение функции потерь, зная ответ y на рассматриваемом объекте. Опишите обратный проход по нейронной сети: выпишите формулы изменения матриц весов W и W' в стохастическом градиентном спуске для метода обратного распространения ошибки (backpropagation).

Задача 4 (3 балла).

Пусть мы решаем задачу показа рекламы на сайте. Всего имеется n рекламных объявлений с некоторыми вознаграждениями. Вознаграждения выбираются из известного нам вероятностного распределения с плотностью $p(x)$, $x > 0$ и фиксируются перед началом эксперимента; при этом сами вознаграждения нам заранее не известны. Всего нужно сделать n показов объявлений.

Будем следовать простой стратегии: сначала покажем несколько различных объявлений и узнаем их вознаграждения, а затем будем использовать самое дорогое из них. Допустим, мы попробовали t объявлений и выяснили, что вознаграждения за них равны r_1, \dots, r_t — это известные нам значения реализаций случайной величины. Поэтому теперь можно воспринимать их как фиксированные числа и оценить, что нас ждет в будущем. Зафиксируем некоторое $\alpha > 1$.

1. Покажем еще одно новое объявление. Какова вероятность того, что его вознаграждение r_{t+1} будет хотя бы в α раз больше, чем лучшее из r_1, \dots, r_t ?
2. Покажем k новых объявлений. Какова вероятность того, что хотя бы одно из вознаграждений r_{t+1}, \dots, r_{t+k} будет хотя бы в α раз больше, чем лучшее из r_1, \dots, r_t ?
3. Продолжим показывать новые объявления до тех пор, пока не найдем объявление с вознаграждением не меньше, чем $\lceil \alpha \max(r_1, \dots, r_t) \rceil$, или не достигнем лимита по количеству показов, а затем во всех оставшихся показах будем использовать это объявление. Оцените матожидание прибыли при такой стратегии. Ответ можно оставить в виде суммы.

Задача 5 (1 балл) Бутстрэппинг.

Пусть подвыборка \hat{X}^l генерируется с помощью бутстрэппинга из выборки X^l размера l . Найдите вероятность того, что фиксированный объект $x \in X^l$ попадает в подвыборку \hat{X}^l . Чему равна эта вероятность, если $l \rightarrow \infty$?

Задача 6 (1 балла) Марковский процесс принятия решений (markov decision process).

На рисунке показан марковский процесс принятия решений (markov decision process), описывающий поведение среды. Агент играет со средой, использует жадную стратегию, действует методом Q -обучения с коэффициентом $\gamma = 0.5$, аппроксимируя в каждый момент времени функцию ценности действия Q . Значения Q в момент времени t даны в таблице. Известно, что в текущий момент времени агент находился в состоянии S_1 ; подействовав на среду, агент получил премию $+5$ и перешел в состояние S_0 . Как изменится стратегия агента и аппроксимация Q ?

Пояснение к рисунку: распределение премии на каждом шаге обозначено желтыми стрелками, если стрелка отсутствует — премия нулевая, иначе — в соответствии со значением.

