第一节, 三角函数的正交性

三角函数的标准形式为公式 2.1 所示

其中， 为时间变量,
为波幅,
为角速度， 为相位, 我们可以通过公式2.2求得这个正弦波的频率.

—

并由式2.2可知, 角速度和正弦波的频率是正相关的.

同时, 因为三角函数是周期函数, 其在 到 的积分必定为 0, 由此性质可写出式 ,

设某三角函数为

在式 两边同时乘以 同时,对两边在 到 内进行积分, 得出

由三角函数的积化和差公式,上式可变形为

依据上述推导方法我们可以继续推导出下列公式:

因为三角函数在- 到 内的积分为 0 , 因此当 时, 式 的结果必定为 0, 因此可以得出以下结论, **频率不同的三角函数相乘在一个周期内 到 的积分必定为 0.**

第二节 傅里叶级数推导

法国数学家傅里叶在提出傅里叶级数时认为，任何一个周期信号都可以展开成傅里叶级数，之后这个结论被进一步补充，只有在满足狄利克雷条件时，周期信号才能够被展开成傅里叶级数.
其中，狄利克雷条件的定义如下:

1. 在一周期内，连续或只有有限个第一类间断点.
2. 在一周期内，极大值和极小值的数目应是有限个.
3. 在一周期内，信号是绝对可积的.

    现假设一函数 由一个直流分量和若干余弦函数组成，如式2.10所示

利用三角函数的和差化积公式 上式可以进一步变形为

设 为:

那么,式2.11可写作

式2.14实际上即是傅里叶级数的展开式, 从上式可知,若要将一个周期信号展开为傅里叶级数形式,实 现上就是确定级数 ， 那么就下来我们讨论的就是如何求出 .
在式2.14的两边同时乘以一个 , 并对它们在一个周期内进行积分,那么就有

根据第一节的推论，频率不同的三角函数相乘在一个周期内的积分必定为 0, 因此，仅有 时不为 0, 那么其中 结果为 0,
结果也必定为 0 ,
因此上式可以进一步化简为

—

因此,得出

依照上述方法,同样可以计算出

同时，通过以下公式可以得知傅里叶级数与波幅相位之间的关系

第三节 复变函数到傅里叶级数

常用复数函数表达式:

其中公式中 是自然对数的底， 是虚数单位.
该函数将晶数、指数函数与三角函数相互联系起来.如果定义一个散平面，其中以横坐标方向作为 实数方向，纵坐标方向作为虚数方向，担变函数实际上是一个绕原点旋转的一个圆，如图2.3.1:

由公式

可知，该复变函数可以看做是一个角速度为 , 周期为 在复平面上绕原点旋转的半径为 1 的圆.
将公式代回到复变函数中，那么，是变函数可以写成公式3.2的形式

设一组三角函数，其频率是 的n倍，其中 是大于 0 的正整数，那么可以定义这一组三角函 数

为:

将公式3.3与3.4代回到式2.14中，可得到如下公式
进一步化简可以得到:

因为

因此，上式可变为

即

这里注意一点 为直流分量，对应频率为 0 的情况, 即 为 的情况

上式可写为

式 就是复数形式的傅里叶级数，其中， 是一个复数,在式 的两边同时乘以一个 ，并对它们在一个周期内进行积分，得到式子

由第一节的正交性推论可知,当 与 不相等时,积分结果必定为 0 ,仅当 时，右表达式有值，因此， 推导出

即得出复数 的求法

通过求 的模(式2.19)，可求得该频率波的幅值的一半

而通过对其虚部与实部反正切，就可以求得该频率波的相位.

第四节 离散傅里叶变换.