第一节, 三角函数的正交性

三角函数的标准形式为公式 2.1 所示

$$f(t) = A\sin(\omega_t + \varphi) \tag{2.1}$$

其中,
t 为时间变量,
A 为波幅,
ω 为角速度,
φ 为相位,
我们可以通过公式2.2求得这个正弦波的频率.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2.2}$$

176-735-650

并由式2.2可知, 角速度和正弦波的频率是正相关的.

同时, 因为三角函数是周期函数, 其在 $-\pi$ 到 π 的积分必定为 0, 由此性质可写出式 2.3, 2.4

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\mathrm{nx})dx = 0 \tag{2.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mathrm{nx})dx = 0 \tag{2.4}$$

设某三角函数为

$$f(x) = \sin(nx) \tag{2.5}$$

在式 2.5 两边同时乘以 $\sin(\mathrm{mx})$ 同时,对两边在 $-\pi$ 到 π 内进行积分, 得出

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\mathrm{nx})\sin(mx)dx \tag{2.6}$$

由三角函数的积化和差公式,上式可变形为

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]\mathrm{dx} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x]\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m+n)x]\mathrm{dx} \tag{2.7}$$

依据上述推导方法我们可以继续推导出下列公式:

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mathrm{mx})\cos(\mathrm{nx})dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x] + \cos[(m+nx)]\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x]\mathrm{dx} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m+n)x]\mathrm{dx} \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\mathrm{x})\cos(\mathrm{nx})dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)x]\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin[(m-n)x]\mathrm{dx} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin[(m+n)x]\mathrm{dx} \end{aligned} \tag{2.9}$$

因为三角函数在- π 到 π 内的积分为 0 , 因此当 $m \neq n$ 时, 式 2.7、2.8、2.9 的结果必定为 0, 因此可以得出以下结论, **频率不同的三角函数相乘在一个周期内 $(-\pi$ 到 $\pi)$ 的积分必定为 0.**

第二节 傅里叶级数推导

法国数学家傅里叶在提出傅里叶级数时认为，任何一个周期信号都可以展开成傅里叶级数，之后这个结论被进一步补充，只有在满足狄利克雷条件时，周期信号才能够被展开成傅里叶级数.
其中，狄利克雷条件的定义如下:

1. 在一周期内，连续或只有有限个第一类间断点.
2. 在一周期内，极大值和极小值的数目应是有限个.
3. 在一周期内，信号是绝对可积的.
   现假设一函数 $f(t)$ 由一个直流分量和若干余弦函数组成，如式2.10所示

> $$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi) \tag{2.10}$$

利用三角函数的和差化积公式 上式可以进一步变形为

> $$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\cos\varphi\cos(n\omega t)-c_n\sin\varphi\sin(n\omega t)\right] \tag{2.11}$$

设 a_n, b_n 为:

$$a_n=c_n\cos\varphi \tag{2.12}$$

$$b_n=-c_n\sin\varphi \tag{2.13}$$

那么,式2.11可写作

> $$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(\mathrm{n}\omega \mathrm{t})+b_n\sin(\mathrm{n}\omega \mathrm{t})\right] \tag{2.14}$$

式2.14实际上即是傅里叶级数的展开式, 从上式可知,若要将一个周期信号展开为傅里叶级数形式,实 现上就是确定级数 $a_n b_n$ ，那么就下来我们讨论的就是如何求出 $a_n b_n$.
在式2.14的两边同时乘以一个 $\sin(\mathrm{k}\omega \mathrm{t})$, 并对它们在一个周期内进行积分,那么就有

$$\begin{aligned}&\int_0^T f(t)\sin(\mathrm{k}\omega \mathrm{t})dt\\&=\int_0^T c_0\sin(\mathrm{k}\omega \mathrm{t})\mathrm{dt}\\&+\int_0^T\sin(\mathrm{k}\omega \mathrm{t})\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(\mathrm{n}\omega \mathrm{t})+b_n\sin(\mathrm{n}\omega \mathrm{t})\right]\mathrm{dt}\end{aligned} \tag{2.15}$$

根据第一节的推论，频率不同的三角函数相乘在一个周期内的积分必定为 0, 因此，仅有 $k=n$ 时不为 0, 那么其中 $\int_0^T c_0\sin(\mathrm{k}\omega \mathrm{t})\mathrm{dt}$ 结果为 0,
$\int_0^T a_n\cos(\mathrm{n}\omega \mathrm{t})\sin(\mathrm{k}\omega \mathrm{t})\mathrm{dt}$ 结果也必定为 0 ,
因此上式可以进一步化简为

$$\int_0^T f(t)\sin(\mathrm{k}\omega \mathrm{t})dt=b_n\int_0^T\sin(\mathrm{n}\omega \mathrm{t})^2dt=b_n\frac{T}{2} \tag{2.16}$$

因此,得出

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\mathrm{n}\omega \mathrm{t})\mathrm{dt} \tag{2.17}$$

依照上述方法,同样可以计算出

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\mathrm{n\omega t})\mathrm{dt} \tag{2.18}$$

同时，通过以下公式可以得知傅里叶级数与波幅相位之间的关系

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \tag{2.19}$$

$$\varphi=\arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{2.20}$$

第三节 复变函数到傅里叶级数

常用复数函数表达式:

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \tag{3.0}$$

其中公式中 e 是自然对数的底， i 是虚数单位.
该函数将晶数、指数函数与三角函数相互联系起来.如果定义一个散平面，其中以横坐标方向作为 实数方向，纵坐标方向作为虚数方向，担变函数实际上是一个绕原点旋转的一个圆，如图2.3.1:

由公式

$$\theta=\omega t=\frac{2\pi}{T}t \tag{3.1}$$

可知，该复变函数可以看做是一个角速度为 ω, 周期为 T 在复平面上绕原点旋转的半径为 1 的圆.
将公式代回到复变函数中，那么，是变函数可以写成公式3.2的形式

$$e^{\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t \tag{3.2}$$

设一组三角函数，其频率是 $\cos\omega t$ 的n倍，其中 n 是大于 0 的正整数，那么可以定义这一组三角函数为:

$$\cos(\mathrm{nwt})=\frac{e^{\mathrm{jwi}}+e^{-\mathrm{j}\omega t}}{2}(3.3)$$
$$\sin(\mathrm{nwt})=\frac{e^{\mathrm{j\omega t}}-e^{-\mathrm{m}\omega t t}}{2j}(3.4)$$

将公式3.3与3.4代回到式2.14中，可得到如下公式
进一步化简可以得到:

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(a_n-jb_n)}{2}e^{jn\omega t}+\frac{(a_n+jb_n)}{2}e^{-jn\omega t}\right](3.26)$$

因为

$$\begin{aligned}a_{-n}&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(-n\omega t)\mathrm{dt}=a_n\\ b_{-n}&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(-n\omega t)dt=-b_n\end{aligned}$$

因此，上式可变为

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(a_n-jb_n)}{2}e^{jn\omega t}+\frac{(a_{-n}-jb_{-n})}{2}e^{-jn\omega t}\right](3.29)$$

即

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n-jb_n)}{2}e^{jn\omega t}+\sum_{-\infty}^{-1}\frac{(a_n-jb_n)}{2}e^{jn\omega t}$$

这里注意一点 c_0 为直流分量，对应频率为 0 的情况, 即 c_0 为 $n=0$ 的情况

> $$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_n-jb_n)}{2}e^{jn\omega t}(3.30)$$

上式可写为

> $$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{jn\omega t},\quad A_n=\frac{(a_n-jb_n)}{2}\qquad(3.31)$$

式 3.31 就是复数形式的傅里叶级数，其中， A_n 是一个复数,在式 3.31 的两边同时乘以一个 $e^{-jk\omega t}$，并对它们在一个周期内进行积分，得到式子 3.32

$$\int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt=\int_0^T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n e^{j(n-k)\omega t}dt\qquad(3.32)$$

由第一节的正交性推论可知,当 n 与 k 不相等时,积分结果必定为 0 ,仅当 $n=k$ 时，右表达式有值，因此， 推导出 3.33

$$\int_0^T f(t)e^{-jn\omega t}dt = A_n T \tag{3.33}$$

即得出复数 A_n 的求法

> $$A_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega t}dt \tag{3.34}$$

通过求 A_n 的模(式2.19), 可求得该频率波的幅值的一半

$$|An| = \frac{1}{2}\sqrt{an^2+b_n^2} = \frac{1}{2}c_n$$

而通过对其虚部与实部反正切，就可以求得该频率波的相位.

第四节 离散傅里叶变换.

引言

由于计算机只能在离散的空间当中处理信息, 因此, 我们只能计算离散信号中所包含的离散频率的内容. 回顾之前在周期为 T 的原信号 $f(t)$ 中进行连续傅里叶变换:

> $$A_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega t}dt, \tag{4.0}$$

> $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega t}. \tag{4.1}$$

可以看出, 原信号虽然周期已经确定, 为 T, 但是由于信号是连续的, 因此在周期 T 内有无穷多个采样点, 另外, 我们需要探究频率为 $(-\infty,+\infty)$ 的信号在原信号中所占据的频率, 由于要筛选的信号频率没有上界和下界, 且频率分辨率趋向于0, 因此我们要在无穷多个周期信号中筛选出构成原信号的那一部分, 对于计算机来说这非常困难.

离散傅里叶变换

假定原始信号 $f(t)$ 在周期 T 内均匀采样了 N 个数据点, 采样间隔为 T_s,
那么原始信号的周期 $T = N \cdot T_s$,
原始信号的频率为 $\frac{1}{N \cdot T_s}$,
原始信号的角频率为 $\frac{2\pi}{N \cdot T_s}$,

那么基础角频率 $\omega = \frac{2\pi}{N \cdot T_s}$,
这同样也决定了频率分辨率为 $\frac{1}{N \cdot T_s}$,
另外, 根据采样定理, 假定原始信号所包含的周期信号中的最高频率为 F_{max}, 那么采样率 S_r 必须满足:

$$S_r \geq 2F_{max}$$

因此, 如果采样率一旦确定, 那么我们所能分离出来的周期信号的最高频率也就确定了, 详细的内容见下一小节.

离散傅里叶变换的形式

> $$A_n = \frac{1}{N \cdot T_s} \sum_{k=0}^{N-1} f(k \cdot T_s) e^{-jn \frac{2\pi}{N \cdot T_s} k \cdot T_s} T_s, \tag{4.2}$$

> $$f(k \cdot T_s) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{jn \frac{2\pi}{N \cdot T_s} k \cdot T_s}. \tag{4.3}$$

上述两个式子是离散傅里叶正变换和离散傅里叶逆变换, 其中
$f(k \cdot T_s)$ 表示第 k 个采样点时原始信号的值,
$\frac{2\pi}{N \cdot T_s}$ 表示原始信号的角频率,
我们对式(4.2) 和 (4.3) 进行化简 (约掉 T_s), 得到:

> $$A_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k \cdot T_s) e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}, \tag{4.4}$$

> $$f(k \cdot T_s) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{jn \frac{2\pi}{N} k}. \tag{4.5}$$

为了与科学计算包里的表达保持一致, 我们对式(4.4)和(4.5)重新表述一下:

> $$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}, \tag{4.6}$$

> $$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{jn \frac{2\pi}{N} k}. \tag{4.7}$$

根据离散傅里叶的运算过程, 我们可以看出, 离散傅里叶变换只能确定频率为
$\frac{0}{N \cdot T_s}, \frac{1}{N \cdot T_s}, \frac{2}{N \cdot T_s}, \cdots, \frac{(N-1)}{N \cdot T_s}$ 的周期信号的振幅和相位 (相应的角频率为
$\frac{2\pi 0}{N \cdot T_s}, \frac{2\pi 1}{N \cdot T_s}, \frac{2\pi 2}{N \cdot T_s}, \cdots, \frac{2\pi (N-1)}{N \cdot T_s}$).
另外, 根据采样间隔, 我们可以计算出采样率 $S_r = \frac{1}{T_s}$, 采样率决定了可分离的周期信号的频率上限. 因此我们能分离出的周期信号的频率最高为 $\frac{1}{2T_s}$ ($S_r \geq 2F_{max}$).

我们注意到 式(4.6) 中能探测的最高频率为 $\frac{N-1}{N \cdot T_s}$, 这个频率其实非常接近 采样率 $\frac{1}{T_s}$, 根据采样率决定了可分离的周期信号的频率上限, 因此, 我们分离出的将近一半的频率都要废弃 (一半的频率都小于 $\frac{1}{2T_s}$).

为什么频幅图是接近左右对称的

每个频率的振幅是根据计算出的复数的模得到的. 而共轭复数的模会得出一致的结论.
证明如下

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi n}{N}\cdot k} \\
y[N-n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi(N-n)}{N}\cdot k}, n=1,2,\cdots,N-1
\end{aligned}
$$

可以看出 $y[n]$ 与 $y[N-n]$ 最大的不同在于 $e^{-j\frac{2\pi n}{N}\cdot k}$ 和 $e^{-j\frac{2\pi(N-n)}{N}\cdot k}$, 其中:

$$
\begin{aligned}
e^{-j\frac{2\pi n}{N}\cdot k} &= \cos\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right) + j\sin\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \\
e^{-j\frac{2\pi(N-n)}{N}\cdot k} &= \cos\left(-\frac{2\pi(N-n)k}{N}\right) + j\sin\left(-\frac{2\pi(N-n)k}{N}\right) \\
&= \cos\left(2\pi+\frac{2\pi nk}{N}\right) + j\sin\left(2\pi+\frac{2\pi nk}{N}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)
\end{aligned}
$$

由上式可以看出每一个求和子项 $y[n]$ 和 $y[N-n]$ 都是共轭的, 那最后的求和结果也是共轭的, 因此有:

$$
|y[n]| = |y[N-n]|, n=1,2,\cdots,N-1.
$$

而当 n=0 时, $y[0]$ 的值相当于对所有离散抽样点求和, 那么有:

$$
y[0] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k] = \text{常数}
$$

因此, 除了y[0]计算出的值可以直接使用, 其他的采样点构成的频幅图是呈现出左右对称的, 且只有一半左右的频幅是有用的.

实际Python包是如何进行傅里叶变换的.

1-D discrete Fourier transforms

The FFT *y[k]* of length N of the length-N sequence *x[n]* is defined as

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi j \frac{kn}{N}} x[n] \, ,$$

and the inverse transform is defined as follows

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi j \frac{kn}{N}} y[k] \, .$$

These transforms can be calculated by means of `fft` and `ifft`, respectively, as shown in the following example.

也就是说, 实际情况 scipy 进行正向傅里叶变换的时候会省略掉一个系数 $\frac{1}{N}$,但是会在反向傅里叶变换的时候加回来, 由于我们根据式(4.6)的内容, 对 $y[n]$ 取模会得到原来振幅的 $\frac{1}{2}$, **但是**$y[0]$ **不需要乘以** 2. 又因为scipy 计算 $y[n]$ 时没有乘以系数 $\frac{1}{N}$, 因此使用 scipy 计算出的 $y[n]$ 的模我们需要乘以 $\frac{1}{N}$ 然后乘以 2. **再次强调** $y[0]$ **不需要乘以** 2.