

第一节, 三角函数的正交性

三角函数的标准形式为公式 2.1 所示

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.1)$$

其中,
 t 为时间变量,
 A 为波幅,
 ω 为角速度,
 φ 为相位,
我们可以通过公式2.2求得这个正弦波的频率.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.2)$$

并由式2.2可知, 角速度和正弦波的频率是正相关的.

同时, 因为三角函数是周期函数, 其在 $-\pi$ 到 π 的积分必定为 0, 由此性质可写出式 2.3, 2.4

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0 \quad (2.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0 \quad (2.4)$$

设某三角函数为

$$f(x) = \sin(nx) \quad (2.5)$$

在式 2.5 两边同时乘以 $\sin(mx)$ 同时,对两边在 $-\pi$ 到 π 内进行积分, 得出

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx \quad (2.6)$$

由三角函数的积化和差公式,上式可变形为

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x] dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x] dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m+n)x] dx \quad (2.7)$$

依据上述推导方法我们可以继续推导出下列公式:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x] dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m+n)x] dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(m-n)x] dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(m+n)x] dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

因为三角函数在 $-\pi$ 到 π 内的积分为0, 因此当 $m \neq n$ 时, 式2.7、2.8、2.9的结果必定为0, 因此可以得出以下结论, **频率不同的三角函数相乘在一个周期内 $(-\pi$ 到 $\pi)$ 的积分必定为0.**

第二节 傅里叶级数推导

法国数学家傅里叶在提出傅里叶级数时认为, 任何一个周期信号都可以展开成傅里叶级数, 之后这个结论被进一步补充, 只有在满足狄利克雷条件时, 周期信号才能够被展开成傅里叶级数.

其中, 狄利克雷条件的定义如下:

1. 在一周期内, 连续或只有有限个第一类间断点.
2. 在一周期内, 极大值和极小值的数目应是有限个.
3. 在一周期内, 信号是绝对可积的.

现假设一函数 $f(t)$ 由一个直流分量和若干余弦函数组成, 如式2.10所示

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi) \quad (2.10)$$

利用三角函数的和差化积公式 上式可以进一步变形为

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos \varphi \cos(n\omega t) - c_n \sin \varphi \sin(n\omega t)] \quad (2.11)$$

设 a_n, b_n 为:

$$a_n = c_n \cos \varphi \quad (2.12)$$

$$b_n = -c_n \sin \varphi \quad (2.13)$$

那么,式2.11可写作

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (2.14)$$

式2.14实际上即是傅里叶级数的展开式, 从上式可知,若要将一个周期信号展开为傅里叶级数形式, 实现上就是确定级数 $a_n b_n$, 那么就下来我们讨论的就是如何求出 $a_n b_n$.

在式2.14的两边同时乘以一个 $\sin(k\omega t)$, 并对它们在一个周期内进行积分,那么就有

$$\begin{aligned} & \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \\ &= \int_0^T c_0 \sin(k\omega t) dt \\ &+ \int_0^T \sin(k\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] dt \end{aligned} \quad (2.15)$$

根据第一节的推论, 频率不同的三角函数相乘在一个周期内的积分必定为 0, 因此, 仅有 $k = n$ 时不为 0, 那么其中 $\int_0^T c_0 \sin(k\omega t) dt$ 结果为 0, $\int_0^T a_n \cos(n\omega t) \sin(k\omega t) dt$ 结果也必定为 0, 因此上式可以进一步化简为

$$\int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = b_n \int_0^T \sin(n\omega t)^2 dt = b_n \frac{T}{2} \quad (2.16)$$

因此,得出

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (2.17)$$

依照上述方法,同样可以计算出

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (2.18)$$

同时，通过以下公式可以得知傅里叶级数与波幅相位之间的关系

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.19)$$

$$\varphi = \arctan \left(-\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (2.20)$$

第三节 复变函数到傅里叶级数

常用复数函数表达式:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (3.0)$$

其中公式中 e 是自然对数的底， j 是虚数单位.

该函数将三角函数、指数函数与三角函数相互联系起来.如果定义一个复平面，其中以横坐标方向作为实数方向，纵坐标方向作为虚数方向，复变函数实际上是一个绕原点旋转的一个圆，如图2.3.1:

由公式

$$\theta = \omega t = \frac{2\pi}{T} t \quad (3.1)$$

可知，该复变函数可以看做是一个角速度为 ω ，周期为 T 在复平面上绕原点旋转的半径为 1 的圆.

将公式代回到复变函数中，那么，复变函数可以写成公式3.2的形式

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (3.2)$$

设一组三角函数，其频率是 $\cos \omega t$ 的 n 倍，其中 n 是大于 0 的正整数，那么可以定义这一组三角函数为:

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \quad (3.3)$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \quad (3.4)$$

将公式3.3与3.4代回到式2.14中，可得到如下公式
进一步化简可以得到：

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(a_n - jb_n)}{2} e^{jn\omega t} + \frac{(a_n + jb_n)}{2} e^{-jn\omega t} \right] \quad (3.26)$$

因为

$$\begin{aligned} a_{-n} &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(-n\omega t) dt = a_n \\ b_{-n} &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(-n\omega t) dt = -b_n \end{aligned}$$

因此，上式可变为

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(a_n - jb_n)}{2} e^{jn\omega t} + \frac{(a_{-n} - jb_{-n})}{2} e^{-jn\omega t} \right] \quad (3.29)$$

即

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - jb_n)}{2} e^{jn\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(a_n - jb_n)}{2} e^{jn\omega t}$$

这里注意一点 c_0 为直流分量，对应频率为 0 的情况，即 c_0 为 $n = 0$ 的情况

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a_n - jb_n)}{2} e^{jn\omega t} \quad (3.30)$$

上式可写为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega t}, \quad A_n = \frac{(a_n - jb_n)}{2} \quad (3.31)$$

式 3.31 就是复数形式的傅里叶级数，其中， A_n 是一个复数，在式 3.31 的两边同时乘以一个 $e^{-jk\omega t}$ ，并对它们在一个周期内进行积分，得到式子 3.32

$$\int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{j(n-k)\omega t} dt \quad (3.32)$$

由第一节的正交性推论可知,当 n 与 k 不相等时,积分结果必定为 0 ,仅当 $n = k$ 时, 右表达式有值, 因此, 推导出 3.33

$$\int_0^T f(t)e^{-jn\omega t} dt = A_n T \tag{3.33}$$

即得出复数 A_n 的求法

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-jn\omega t} dt \tag{3.34}$$

通过求 A_n 的模(式2.19), 可求得该频率波的幅值的一半

$$|A_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n$$

而通过对其虚部与实部反正切, 就可以求得该频率波的相位.

第四节 离散傅里叶变换.

引言

由于计算机只能在离散的空间当中处理信息, 因此, 我们只能计算离散信号中所包含的离散频率的内容. 回顾之前在周期为 T 的原信号 $f(t)$ 中进行连续傅里叶变换:

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-jn\omega t} dt, \tag{4.0}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega t}. \tag{4.1}$$

可以看出, 原信号虽然周期已经确定, 为 T , 但是由于信号是连续的, 因此在周期 T 内有无穷多个采样点, 另外, 我们需要探究频率为 $(-\infty, +\infty)$ 的信号在原信号中所占据的频率, 由于要筛选的信号频率没有上界和下界, 且频率分辨率趋向于0, 因此我们要在无穷多个周期信号中筛选出构成原信号的那一部分, 对于计算机来说这非常困难.

离散傅里叶变换

假定原始信号 $f(t)$ 在周期 T 内均匀采样了 N 个数据点, 采样间隔为 T_s , 那么原始信号的周期 $T = N \cdot T_s$, 原始信号的频率为 $\frac{1}{N \cdot T_s}$, 原始信号的角频率为 $\frac{2\pi}{N \cdot T_s}$,

那么基础角频率 $\omega = \frac{2\pi}{N \cdot T_s}$,

这同样也决定了频率分辨率为 $\frac{1}{N \cdot T_s}$,

另外, 根据采样定理, 假定原始信号所包含的周期信号中的最高频率为 F_{max} , 那么采样率 S_r 必须满足:

$$S_r \geq 2F_{max}$$

因此, 如果采样率一旦确定, 那么我们所能分离出来的周期信号的最高频率也就确定了, 详细的内容见下一小节.

离散傅里叶变换的形式

$$A_n = \frac{1}{N \cdot T_s} \sum_{k=0}^{N-1} f(k \cdot T_s) e^{-jn \frac{2\pi}{N \cdot T_s} k \cdot T_s}, \quad (4.2)$$

$$f(k \cdot T_s) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{jn \frac{2\pi}{N \cdot T_s} k \cdot T_s}. \quad (4.3)$$

上述两个式子是离散傅里叶正变换和离散傅里叶逆变换, 其中

$f(k \cdot T_s)$ 表示第 k 个采样点时原始信号的值,

$\frac{2\pi}{N \cdot T_s}$ 表示原始信号的角频率,

我们对式(4.2) 和 (4.3) 进行化简 (约掉 T_s), 得到:

$$A_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k \cdot T_s) e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}, \quad (4.4)$$

$$f(k \cdot T_s) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{jn \frac{2\pi}{N} k}. \quad (4.5)$$

为了与科学计算包里的表达保持一致, 我们对式(4.4)和(4.5)重新表述一下:

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}, \quad (4.6)$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} y[k] e^{jn \frac{2\pi}{N} k}. \quad (4.7)$$

根据离散傅里叶的运算过程, 我们可以看出, 离散傅里叶变换只能确定频率为

$\frac{0}{N \cdot T_s}, \frac{1}{N \cdot T_s}, \frac{2}{N \cdot T_s}, \dots, \frac{(N-1)}{N \cdot T_s}$ 的周期信号的振幅和相位 (相应的角频率为 $\frac{2\pi 0}{N \cdot T_s}, \frac{2\pi 1}{N \cdot T_s}, \frac{2\pi 2}{N \cdot T_s}, \dots, \frac{2\pi(N-1)}{N \cdot T_s}$).

另外, 根据采样间隔, 我们可以计算出采样率 $S_r = \frac{1}{T_s}$, 采样率决定了可分离的周期信号的频率上限. 因此我们能分离出的周期信号的频率最高为 $\frac{1}{2T_s}$ ($S_r \geq 2F_{max}$).

我们注意到 式(4.6) 中能探测的最高频率为 $\frac{N-1}{N \cdot T_s}$, 这个频率其实非常接近 采样率 $\frac{1}{T_s}$, 根据采样率决定了可分离的周期信号的频率上限, 因此, 我们分离出的将近一半的频率都要废弃 (一半的频率都小于 $\frac{1}{2T_s}$).

为什么频幅图是接近左右对称的

每个频率的振幅是根据计算出的复数的模得到的. 而共轭复数的模会得出一致的结论.

证明如下

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j \frac{2\pi n}{N} \cdot k}$$
$$y[N-n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j \frac{2\pi(N-n)}{N} \cdot k}, n = 1, 2, \dots, N-1$$

可以看出 $y[n]$ 与 $y[N-n]$ 最大的不同在于 $e^{-j \frac{2\pi n}{N} \cdot k}$ 和 $e^{-j \frac{2\pi(N-n)}{N} \cdot k}$, 其中:

$$\begin{aligned} e^{-j \frac{2\pi n}{N} \cdot k} &= \cos\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right) + j \sin\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \\ e^{-j \frac{2\pi(N-n)}{N} \cdot k} &= \cos\left(-\frac{2\pi(N-n)k}{N}\right) + j \sin\left(-\frac{2\pi(N-n)k}{N}\right) \\ &= \cos\left(2\pi + \frac{2\pi nk}{N}\right) + j \sin\left(2\pi + \frac{2\pi nk}{N}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \end{aligned}$$

由上式可以看出每一个求和子项 $y[n]$ 和 $y[N-n]$ 都是共轭的, 那最后的求和结果也是共轭的, 因此有:

$$|y[n]| = |y[N-n]|, n = 1, 2, \dots, N-1.$$

而当 $n = 0$ 时, $y[0]$ 的值相当于对所有离散抽样点求和, 那么有:

$$y[0] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] = \text{常数}$$

因此, $y[0]$ 计算出的常数可以直接使用 (可能会觉得有点奇怪, 因为 $y[0] = |A_0| = \frac{c_0}{2}$, 但是问题不大, 这里形式虽然发生变化, 但是表示的仅仅值是一个常数), 其他的采样点构成的频幅图是呈现出左右对称

的, 且只有一半左右的频幅是有用的.

实际Python包是如何进行傅里叶变换的.

1-D discrete Fourier transforms

The FFT $y[k]$ of length N of the length- N sequence $x[n]$ is defined as

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi j \frac{kn}{N}} x[n],$$

and the inverse transform is defined as follows

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi j \frac{kn}{N}} y[k].$$

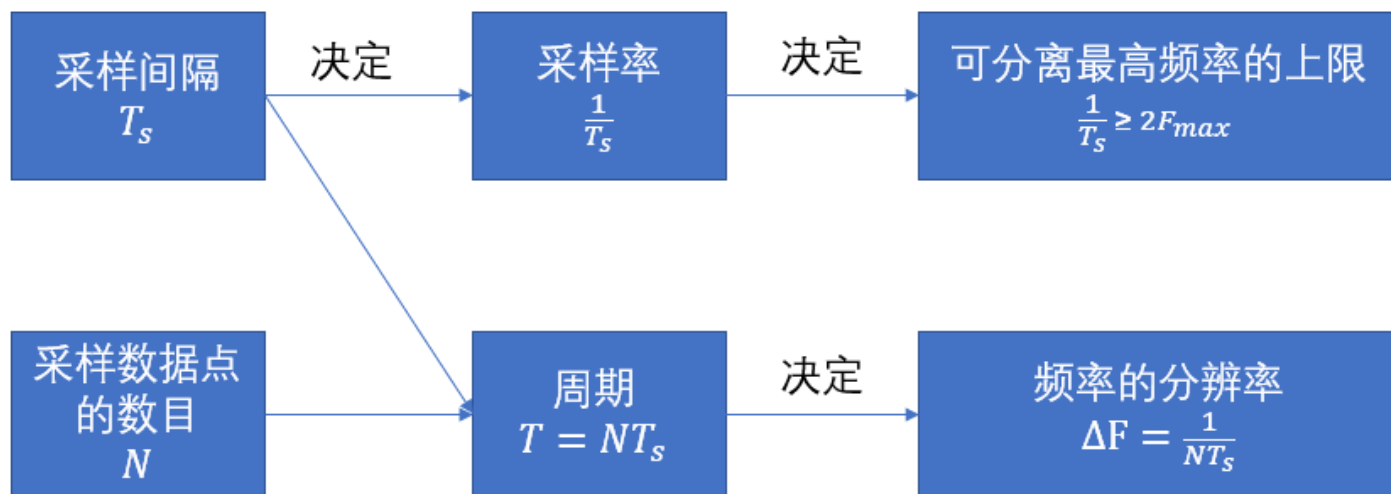
These transforms can be calculated by means of `fft` and `ifft`, respectively, as shown in the following example.

也就是说, 实际情况 scipy 进行正向傅里叶变换的时候会省略掉一个系数 $\frac{1}{N}$, 但是会在反向傅里叶变换的时候加回来, 由于我们根据式(4.6)的内容, 对 $y[n]$ 取模会得到原来振幅的 $\frac{1}{2}$, **但是** $y[0]$ **不需要乘以 2**. 又因为 scipy 计算 $y[n]$ 时没有乘以系数 $\frac{1}{N}$, 因此使用 scipy 计算出的 $y[n]$ 的模我们需要乘以 $\frac{1}{N}$ 然后乘以 2. **再次强调** $y[0]$ **不需要乘以 2**.

超参数之间的关系

采样率: 每秒获取多少个采样点

频率: 每秒进行多少次周期动作

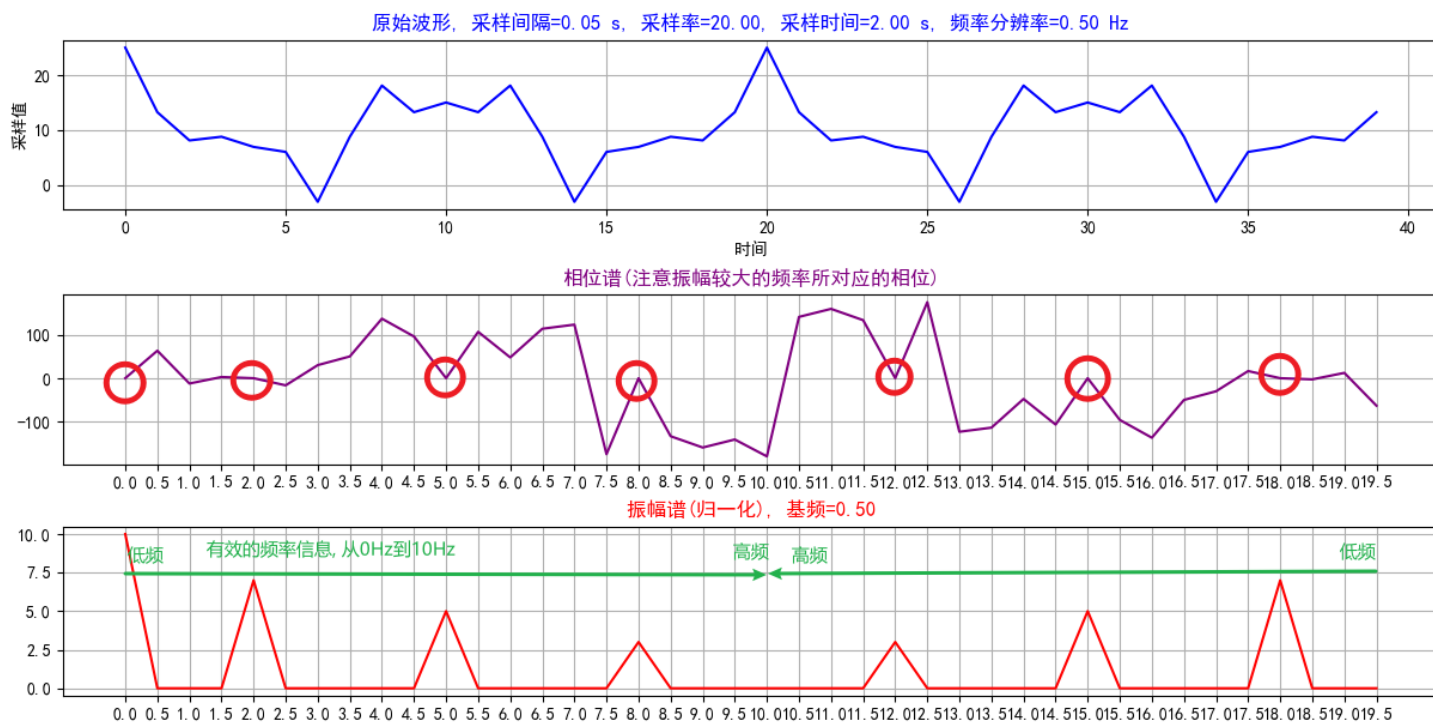


因此, 要想提高频率的分辨率, 那我们得增加采样点的数目或者使用较大的采样间隔.

如果想要提高可分离最高频率的上限, 那我们得使用较高的采样率(或使用较小的采样间隔),

一个实例

$$y = 10 + 7 \cos(2\pi 2t) + 5 \cos(2\pi 5t) + 3 \cos(2\pi 8t)$$



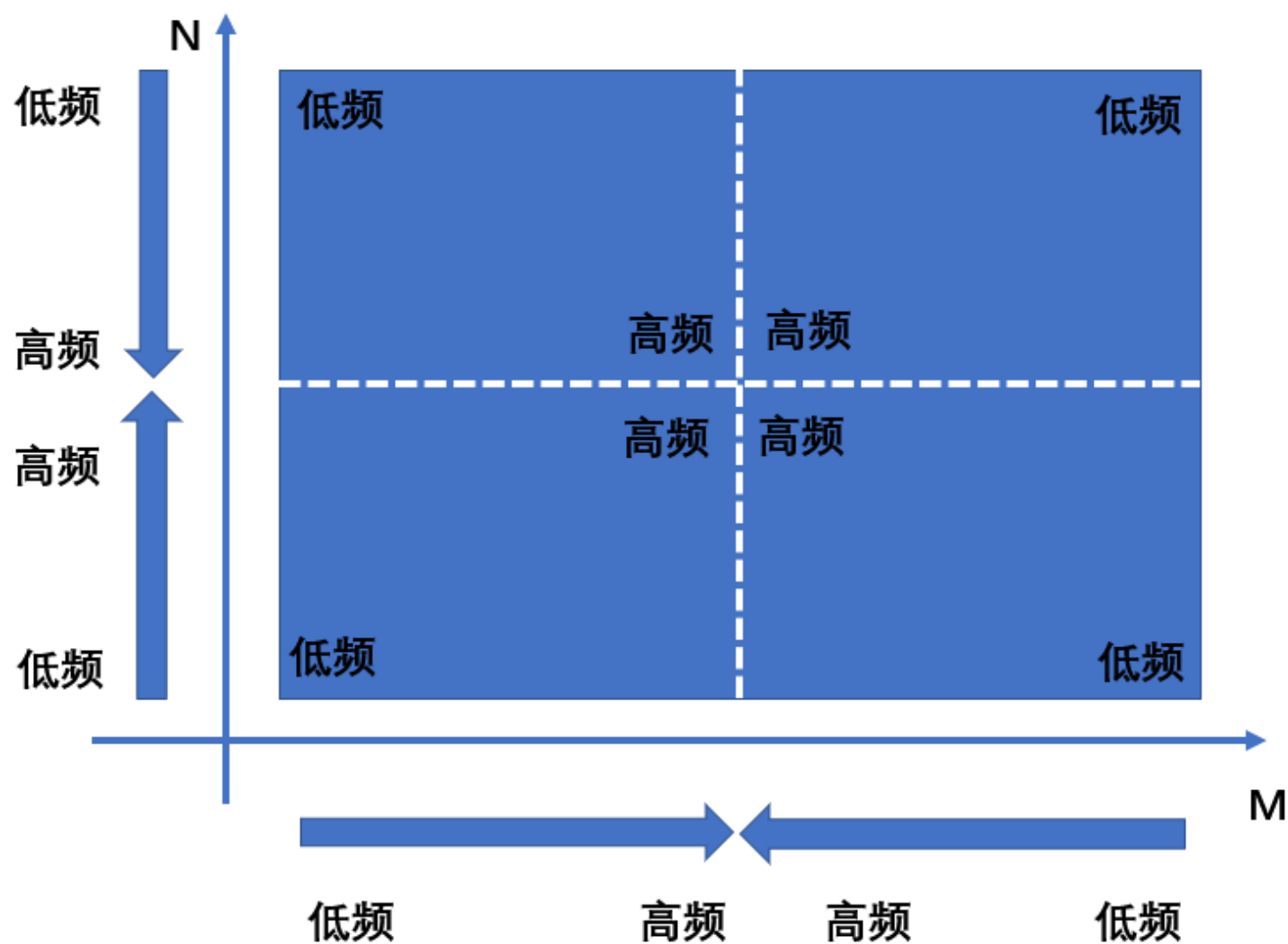
可以看出, 离散傅里叶变换精确的判断出原信号中所含有的频率信号的振幅和相位.

并且, 频谱图呈现出关于 x 轴对称的情况, 并且只有一半的频谱图是可用的, 一半的频谱图我们可以废弃.

二维图像的频谱图分布

平移变换之前的图像频谱图

如果对图像傅里叶变换不做平移变化所显示的频谱图分布



平移变换之后的图像的频谱图

如果对图像傅里叶变换做平移变化所显示的频谱图分布

与不做平移变换的频谱图相比平移变换会频率图沿对
角线对调

