Решение дифференциальных уравнений в частных производных

Алексей Козлов
Б04-103

Ноябрь, 2024

Определение

Линейное УРЧП от двух переменных это уравнение вида - это уравнение вида

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}(x,y)\frac{\partial^{i+j}}{\partial^i x \partial^j y}u(x,y) = 0$$

Существуют несколько типов уравнений:

- Параболическое
- Гиперболическое
- Эллиптическое
- Какая-то краказябра, которую не хочется решать

Напоминание из урматов

Определение

Линейное УРЧП от двух переменных это уравнение вида - это уравнение вида

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}(x,y)\frac{\partial^{i+j}}{\partial^i x \partial^j y}u(x,y) = 0$$

Существуют несколько типов уравнений:

- Параболическое - уравнение диффузии и теплопроводности. (1D)
- Гиперболическое
- Эллиптическое
- Какая-то кракозябра, которую не хочется решать

Базовые понятия численного решения ОДУ и УРЧП

Очевидно, что компьютер не может работать с континуумом, то есть необходимо построить сетку, на которой будем дискретизировать задачу:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$$

$$\tau = t_{n+1} - t_n$$

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = L$$

$$h = x_{n+1} - x_n$$

Также выберем численную схему для аппроксимации производной (для 1D)

$$\frac{du}{dt}\Big|_{t_0}, = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{u(t_n + \tau) - u(t_n)}{\tau} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}$$

Кратко опишем дискретизованную Задачу Коши и укажем характерные характеристики.
Если нам дано уравнение

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t, u), t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

То можно построить множество разностных схем. В качестве примера возьмем явную и неявную схемы Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n), t \in [0, T] \\ y_0 = u_0 \end{cases}$$

Кратко опишем дискретизованную Задачу Коши и укажем характерные характеристики.
Если нам дано уравнение

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t, u), t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

То можно построить множество разностных схем. В качестве примера возьмем явную и неявную схемы Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n), t \in [0, T] \\ y_0 = u_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_{n+1}, y_{n+1}), t \in [0, T] \\ y_0 = u_0 \end{cases}$$

Но чем же разностные схемы могут отличаться?
Можно выделить две характеристики:
Сходимость
Как хорошо сходится численное решение к истинному. То есть какой порядок убывания имеет невязка решения
Для явной схемы Эйлера (1D): $||\delta^{(h)}|| = O(h^p) = O(h^2)$, где $p = 2$ - порядок сходимости.

Но чем же разностные схемы могут отличаться?

Можно выделить две характеристики:

Сходимость

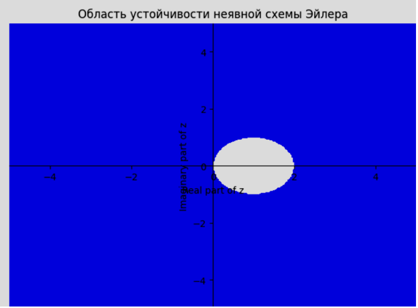
Как хорошо сходится численное решение к истинному. То есть какой порядок убывания имеет невязка решения

Для явной схемы Эйлера (1D): $||\delta^{(h)}|| = O(h^p) = O(h^2)$, где $p = 2$ - порядок сходимости.

Устойчивость

Как решение задачи зависит от колебаний начальных условий, параметров задачи и тд. По алгоритму Далквиста можно вычислить области устойчивости для явной схемы и неявной схемы Эйлера. (Далее будет понятно, почему пользуемся неявной схемой)

Базовые понятия численного решения ОДУ и УРЧП



Решение параболической задачи

Задача уравнения диффузии (теплопроводности) ставится следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(x,t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L]$$

Также ставятся начальное условие и граничные условия:

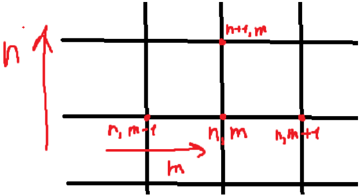
$$\begin{cases} u(0,x) = u_0(x), \quad t = 0, \\ u = f_1(t), \quad x = 0, \\ u = f_2(x), \quad x = L, \end{cases}$$

Решение параболической задачи

Можно привести некоторые разностные схемы, работающие для конкретного a. Каждой дискретизации можно сопоставить картинку, показывающую, какие конкретно узлы u_m^n связаны уравнением (n - время, m - координата.

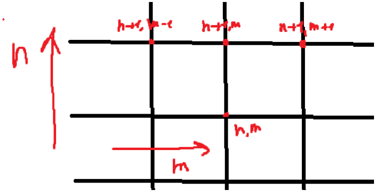
Явная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \cdot \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n$$



Неявная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \cdot \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + f_m^n$$



Пример

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad t \in [0, 0.2], \quad x \in [0, 1] \\ u(0, x) = 1 + \sin^2(2\pi x) + \sin(2\pi x), \quad t = 0, \\ u = 1, \quad x = 0, \\ u = 1, \quad x = 1, \end{cases}$$

Решим данную задачу явной схемой, то есть мы можем выразить следующий узел схемы таким образом:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\tau}{h^2} \cdot (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n)$$

Пример

```python
a = 1.0
L = 1.0
T = 0.2
Nx = 100
Nt = 100000
h = L/(Nx-1)
tau = T/(Nt-1)
x = np.linspace(0, L, Nx)
t = np.linspace(0, T, Nt)

# Начальные и граничные условия
def u0(x):
    return  1 + np.sin(2*np.pi*x/L)**2 + np.sin(np.pi*x/L)

def ul(t):
    return 1

def ur(t):
    return 1
```

Задаем начальные, граничные условия. Задаем сетку для времени и для координаты.

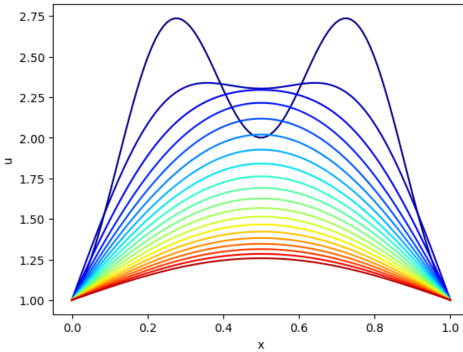
Пример

```
#Реализация метода
r = a*tau/h**2
u = np.zeros((Nx, Nt))

u[:, 0] = u0(x)

for n in range(Nt-1):

    u[0, n+1] = ul(t[n+1])
    u[-1, n+1] = ur(t[n+1])

    for m in range(1, Nx-1):
        u[m, n+1] = u[m, n] + r*(u[m-1, n] - 2*u[m, n] + u[m+1, n])
```

Описываем явный метод.

Пример

```
fig, ax = plt.subplots()
for n in range(0, Nt, 5000):
    color = cm.jet(n/Nt)
    ax.plot(x, u[:, n], color=color, label=f"t={t[n]:.2f}")
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("u")
norm = plt.Normalize(0, T)
cmap = cm.jet
sm = plt.cm.ScalarMappable(norm=norm, cmap=cmap)
sm.set_array([])
#cbar = fig.colorbar(sm)
#bar.ax.set_ylabel("Time")
plt.show()
```




Внимание!!!
Спасибо за внимание
301-1.ru