http://blog.sciencenet.cn/blog-2472277-978252.html

# VR/AR背后的弄潮儿（1）：微分几何之逼近理论

**如何用简单的离散三角网格来逼近复杂的光滑曲面**成为VR/AR应用中的技术关键。更进一步，这个问题可以分解成两个子问题：如何在光滑曲面上**离散采样**和如何将采样点进行**三角剖分**。

丘：“**离散曲面不但位置上要逼近光滑曲面，法丛也要逼近**。”

欧拉认为曲面是由曲线编制而成，通过用曲线曲率，我们可以刻画曲面的几何。

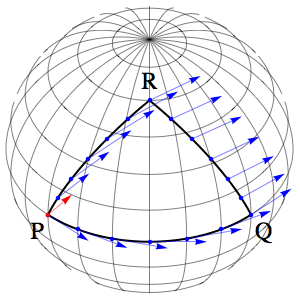
固定曲面上一点http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/162345zmd99vctz0xv4txu.png，任选一切方向http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/162558rr22xlpzx2k3lovk.png，法向量http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/1626124wr6bkg6vhkgc71p.png和切向量http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/1626268up1pupephtotj8p.png张成一张平面，平面和曲面相交于一条平面曲线，曲线在p点的曲率被称为是曲面在p点沿着方向http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/1626268up1pupephtotj8p.png的法曲率，记为http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/162642y6yyzg13k674xdcw.png。当我们旋转切向量http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/1626268up1pupephtotj8p.png时，法曲率连续变化。有两个相互垂直的方向http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/162654ojw3ooi3262gjm36.png，对应的法曲率取得最大值http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/162708aza5ajxxooqh55fs.png和最小值http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/162724gfy5nzzgnnobxybx.png。http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/162739krfk8uykqylinbl8.png被称为主曲率，http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/162654ojw3ooi3262gjm36.png被称为主方向。

对于艺术家而言，曲面明暗色调的模式主要是由主曲率线来刻画。因此，出色的画家对于主曲率线都具有异常敏锐的直觉。（原来是这样啊。。。）

主曲率的均值被称为平均曲率http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/1627594bcbp8cp4zxmpl3k.png，主曲率之积被称为高斯曲率http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/16281233nxfnvalgfwlz3g.png。

**高斯的观点**假设http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/16294174v0zx4ojvm2vj2s.png是一光滑曲面，光滑嵌入在三维欧式空间中http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/162954kbeb24f2ay5za2y2.png，这里http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/163006zpmmg0yzmpm0wpgu.png是位置向量。任给一点http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/162345zmd99vctz0xv4txu.png，我们任取局部参数http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/163032oydoiyotmz5ijfmy.png。曲面的法向量场记为http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/163048ratyrqqvsykmyymu.png，所谓高斯映射（Gauss Map）http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/163100b8jvctbm8wvbshtc.png就是将位置向量映射到法向量：http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/164042c8qw1z80ywvxvevv.png。直观上，高斯映射将曲面上邻域http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/164103fzip6y2wwkk3cqw6.png映到单位球面上区域http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/164120ld6zpkb6k87kpw6l.png，球面区域和曲面区域的面积比就是高斯曲率。曲面面元等于http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/1641327f6w005pp7tft09b.png，球面面元是http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/164143zsrvaggbrsxsyy7b.png，因此高斯曲率为

http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/16415651rjquqmi75ugwqw.png。

我们可以测量两点间的距离。如果两点相距不太远，则两点间的最短线就是所谓的测地线（可以定义为空间中两点的局域最短或最长路径）。给定曲面上的一个区域，我们用分段测地线包围。在边界曲线的起点处选择一个切向量，然后沿着测地线移动切向量，使得切向量和测地线的夹角不变，这就是平行移动。沿着边界平行移动一周之后，回到起点处，那么平移后的切向量和初始切向量一般不会重合，两者相差的角度就是区域内部的高斯总曲率。

离散高斯曲率

给定一个内顶点http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/164433ot0loztppptpp0zs.gif,考察和http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/164506zigpumnqpongk7gp.png相邻的三角形内角之和，其高斯曲率http://blog.sciencenet.cn/static/ueditor/themes/default/images/spacer.gifhttp://image.sciencenet.cn/album/201605/20/1646146nwzxne36y6dp11x.png是周角2http://blog.sciencenet.cn/static/ueditor/themes/default/images/spacer.gif和内角和之差；对于边界顶点, 其高斯曲率http://blog.sciencenet.cn/static/ueditor/themes/default/images/spacer.gifhttp://image.sciencenet.cn/album/201605/20/1646146nwzxne36y6dp11x.png是平角http://blog.sciencenet.cn/static/ueditor/themes/default/images/spacer.gif和内角和之差。因此，离散高斯曲率的公式为

黎曼度量：为了说明这一点，我们先回忆，在多元微积分中学过的，欧氏空间中（可微）曲线的长度计算公式（第二类曲线积分）， 在这里我们度量切向量的长度，使用的是三维实空间的内蕴度量（也就是直接用勾股定理算长度）。

但是如果我们**强行规定**度量切向量为另一个长度（对所有的自变量都这样做），那么就得到了沿着曲线的另一个度量。如果我们对所存在的流形M的每一点的每一个切向量都规定一个长度（实际上是对每个切空间规定一个内积，因为我们至少希望可以这个长度是线性增长的，且我们希望可以讨论“垂直”这个概念），那么我们就得到了一个黎曼度量（当然我们一般要求这个内积对底流形上的点是光滑依赖的）。

所以我们可以看出黎曼度量是个很flexible的东西，我们几乎可以“随心所欲”的操纵他，修改他。所以我们真正感兴趣的，往往是一些满足特定性质的度量，比如常截面曲面度量，恒正（或者恒负）截面曲率度量，常数量曲率度量，Einstein度量。

为几何逼近论建立的各种数学理论中，相对简洁并具有一般性的是离散法丛理论（Normal Cycle Theory）。给定一张光滑曲面http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/170939xs7un62j7z4t7rff.pnghttp://blog.sciencenet.cn/static/ueditor/themes/default/images/spacer.gif，其单位法丛http://blog.sciencenet.cn/static/ueditor/themes/default/images/spacer.gif是一张光滑曲面http://image.sciencenet.cn/album/201605/20/1709595o90x8w96k4o8098.png，嵌入在http://blog.sciencenet.cn/static/ueditor/themes/default/images/spacer.gifhttp://image.sciencenet.cn/album/201605/20/171014wkr04c3qjcapm7nu.png中