一、 绪论

1.1 连续介质

流体质点：微观上充分大，宏观上充分小，既能反映出流体宏观物理性质，又不具有变形和旋转等线性尺度效应的分子团。

流体微团：具有线性尺度效应的微小流体团。

1.2 压缩性

$$\beta_p = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}$$

β_p ：体积压缩系数，Pa^{-1}

V ：原有的体积，m^3

dV ：原有的体积，m^3

dp ：压力的变化量，Pa

1.3 体积弹性系数

$$E = \frac{1}{\beta_p} = -\frac{dp}{dV/V}$$

1.4 膨胀性

$$\beta_t = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT}$$

β_t：体积膨胀系数，K^{-1}

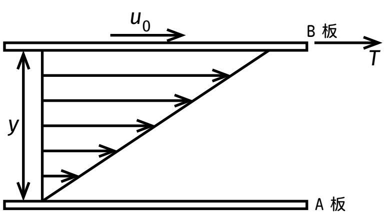
V：原有的体积，m^3

dV：体积的变化量，m^3

dT：温度的变化量，K

1.5 黏性

牛顿内摩擦定律



$$T = \mu\frac{u_0}{y}A$$

T：平板受到的压倒性阻力，N

μ：由**流体性质**决定的物质常数，称为动力黏度，单位是$Pa\cdot s$或$N\cdot s/m^3$

u_0：平板运动的速度，m/s

y：平板的间距，m

A：平板丰流体的面积，m^3

1.6 黏性切应力

$$\tau = \frac{T}{A} = \mu\frac{u_0}{y} = \mu\frac{du}{dy}$$

$\frac{du}{dy}$：单位距离上的速度差，即**速度梯度**（也称为**角形变率**），s^{-1}

常见非牛顿流体有：原油、钻井液及高分子聚合物水溶液等

1.7 运动黏度

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

是动力黏度与季度的比值，单位为m^2/s

1.8 界面张力

σ，单位是N/m

1.9 质量力

属于非力，常见有重力、引力、惯性力、电场力和电磁力

单位质量流体受到的质量力用$\boldsymbol{f}$表示

$$\boldsymbol{f} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{f}}{\Delta m}$$

在直角坐标系中表示为

$$\boldsymbol{f} = \frac{F_x}{m}\boldsymbol{i} + \frac{F_y}{m}\boldsymbol{j} + \frac{F_z}{m}\boldsymbol{k} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$$

F_x, F_y, F_z：质量力在x, y, z坐标方向上的分量

X, Y, Z：$\boldsymbol{f}$在三个坐标方向上的分量

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$：单位矢量

由其可推出：

$$\begin{cases} F_x = X\cdot m \\ F_y = Y\cdot m \\ F_z = Z\cdot m \end{cases}$$

1.10 表面力

如大气压力，摩擦力

单位面积上的表面力可表示为

$$\boldsymbol{p}_n = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta A}$$

微元面积ΔA上的力为ΔP

$\boldsymbol{p}_n$分解出法向分量 p 为压强，流体力学中称为压力，
切向分量τ为压倒性剪切力

二、 流体静力学

静止流体中的表面力只有法向力，即物理学中的压强，流体力学中称为流体静压力

$$1\ \text{bar} = 1 \times 10^5\ \text{Pa}$$
$$1\ \text{atm} = 1.01325 \times 10^5\ \text{Pa}$$
$$1\ \text{atm} = 760\text{mmHg}$$
$$1\ \text{atm} = 10.34\text{mH}_2\text{O}$$
$$1\text{mmHg} = 133.28\ \text{Pa}$$
$$1\text{mH}_2\text{O} = 9800\ \text{Pa}$$

2.1 流体平衡微分方程

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} \\ &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \end{aligned}$$

由汉密尔顿算符$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$可得一个矢量式

$$\boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

∇p称为压力梯度

该方程又称欧拉平衡方程

当流体处于平衡状态时，作用在单位质量流体上的质量力与压力的合力相平衡

限定条件：同种相连通的绝对静止流体的水平面为等压面

压力全微分形式：

$$\mathrm{d}p = \rho(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z)$$

2.2 静力学基本方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = c$$

适用条件：重力作用下静止的均质流体

几何意义：z称为位置水头，$\frac{p}{\rho g}$称为压力水头，$z + \frac{p}{\rho g}$称为管水头。

静止流体中测压管水头为常数

物理意义

单位重力流体所具有的位置势能为：

$$\frac{mgz}{mg} = z$$

因此，z也被称为比位能

$\frac{p}{\rho g}$代表单位重力流体所具有的压力势能，简称比压能

静止流体中总比能为常数

2.3 U 形测压管

$$p_A = \rho' gH - \rho gH$$

对气体，密度可忽略不记

$$p_A = \rho' gH$$

2.4 U 形压差计

$$\Delta p = p_A - p_B = (\rho - \rho')gH$$

等加速水平容器中静力公式：

$$p = p_0 - \rho(ax + gz)$$

匀加速水平直线运动的容器中等压面方程：

$$ax + gz = c$$

自由表面方程：

$$ax + gz_s = 0$$

或

$$z_s = -\frac{a}{g}x$$

等角速度旋转容器中流体相对平衡
单位质量流体所受到到的质量力$\boldsymbol{f}$的三个分量：

$$\begin{cases}X = \omega^2 r\cos\alpha = \omega^2 x\\ Y = \omega^2 r\sin\alpha = \omega^2 y\\ Z = -g\end{cases}$$

等解速度旋转容器中的静压力分布公式

$$p = p_0 + \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right)$$

2.5 液体对平面总压力

$$P = \rho g h_c A$$

$$y_D = y_C + \frac{J_C}{y_C A}$$

压力中心D永远低于平面形心

常见惯性矩

矩形：$J_C = \frac{BH^3}{12}$
H：可见闸门边长
B：不可见闸门边长

圆形：$J_C = \frac{\pi}{64}D^4$

2.6 静止流体作用在曲面上的总压力

$$P_x = \rho g h_C A_x$$

对于半球面：$A_x = \frac{\pi d^2}{4}$

$$P_y = \rho g h_C A_s$$

$$P_z = \rho g V\ (\text{竖直方向})$$

总压力可表示为

$$\boldsymbol{P} = P_x\boldsymbol{i} + P_y\boldsymbol{j} + P_z\boldsymbol{k}$$

三、 流体运动学

3.1 拉格朗日表达式

速度：

$$\begin{cases}u_x = \frac{\partial x}{\partial t}\\ u_y = \frac{\partial y}{\partial t}\\ u_z = \frac{\partial z}{\partial t}\end{cases}$$

加速度：

$$\begin{cases}a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\\ a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\\ a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\end{cases}$$

3.2 欧拉表达式

速度：

$$u_x = u_x(x, y, z, t)$$

加速度：

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

3.3 迹线

消去拉格朗日法表达式中的t就是迹线方程

3.4 流线

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y}$$

3.5 连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_x}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_y}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_z}{\partial t} = 0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\boldsymbol{u} = 0$$

3.6 运动分析

1. 速度大小

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

2. 流线方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y}$$

3. 线率形速率

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\begin{cases}= 0\ \text{可压}\\ \neq 0\ \text{不可压}\end{cases}$$

4. 角变形速度

$$\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

5．旋转解速度

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

$$\omega_z\begin{cases}=0\text{无旋流动}\\ \neq 0\text{有旋流动}\end{cases}$$

四、 带泵的伯努利方程

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+H=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+h_{w_{1-2}}$$

z：位置水头
$\frac{p}{\rho g}$：压力水头
$\frac{v}{2g}$：流速水头
H：泵的扬程
$h_{w_{1-2}}$：水头损失

由此：泵的扬程H等于泵前后两断面上的总比能差加上两断面的水头损失

4.1 泵的功率

有效功为：

$$W=\rho gQH\,\mathrm{d}t$$

有效功率为：

$$N_{\text{泵}}=\rho gQH$$

泵效：

$$\eta_{\text{泵}}=\frac{N_{\text{泵}}}{N_{\text{轴}}}$$

泵的输入功率称为泵的额定功率，也称之为轴功功率，以$N_{\text{轴}}$表示

电动机效率：

$$\eta_{\text{电}}=\frac{N_{\text{轴}}}{N_{\text{泵}}}$$

五、 相似原理

$$\text{几何相似}\begin{cases}\text{线段成比例}\\ \text{角度成比例}\\ \text{边界性质相同}\end{cases}$$

运动相似：两个流动对应点处的同名运动学量成比例。

重力相似准则：

$$Fr=v/\sqrt{gl}$$

黏性力相似准则：

$$Re=\rho vd/\mu=vd/v$$

压力相似准则：

$$Eu=p/\rho v^2$$

六、 黏性流体动力学

6.1 N-S 方程

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+v\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

6.2 达西公式

$$h_f=\lambda\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$$

6.3 圆管层流速度分布

$$u_x=u_{x(y,z)},u_y=u_z=0,\frac{\partial A}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\Delta p}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}$$

七、 复杂管路水力计算

$$\text{串联管路}\begin{cases}\Sigma Q_i=0\\ h_f=\Sigma h_{f_i}\end{cases}$$

$$\text{并联管路}\begin{cases}Q=\Sigma Q_i\\ h_f=h_{f_1}=h_{f_2}=\cdots=h_{f_i}\end{cases}$$

$$h_f=0.0826\lambda\frac{Q^2 l}{D^5}$$