

一、 绪论

1.1 连续介质

流体质点：微观上充分大，宏观上充分小，既能反映出流体宏观物理性质，又不具有变形和旋转等线性尺度效应的分子团。

流体微团：具有线性尺度效应的微小流体团。

1.2 压缩性

$$\beta_p = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

β_p ：体积压缩系数， Pa^{-1}

V ：原有的体积， m^3

dV ：体积的变化量， m^3

dp ：压力的变化量， Pa

1.3 体积弹性系数

$$E = \frac{1}{\beta_p} = -\frac{dp}{dV/V}$$

1.4 膨胀性

$$\beta_t = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}$$

β_t ：体积膨胀系数， K^{-1}

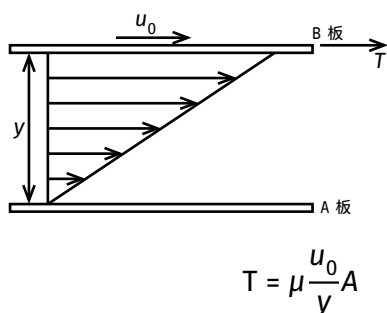
V ：原有的体积， m^3

dV ：体积的变化量， m^3

dT ：温度的变化量， K

1.5 黏性

牛顿内摩擦定律



T ：平板受到的内摩擦力， N

μ ：由流体性质决定的物质常数，称为动力黏度，单位是 $\text{Pa} \cdot \text{s}$ 或 $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$

u_0 ：平板运动的速度， m/s

y ：平板的间距， m

A ：平板与流体的面积， m^2

1.6 黏性切应力

$$\tau = \frac{T}{A} = \mu \frac{u_0}{y} = \mu \frac{du}{dy}$$

$\frac{du}{dy}$ ：单位距离上的速度差，即速度梯度（也称为角形变率）， s^{-1}

常见非牛顿流体有：原油、钻井液及高分子聚合物水溶液等

1.7 运动黏度

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

是动力黏度与密度的比值，单位为 m^2/s

1.8 界面张力

σ ，单位是 N/m

1.9 质量力

属于非接触力，常见有重力、引力、惯性力、电场力和电磁力

单位质量流体受到的质量力用 \mathbf{f} 表示

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta m}$$

在直角坐标系中表示为

$$\mathbf{f} = \frac{F_x}{m} \mathbf{i} + \frac{F_y}{m} \mathbf{j} + \frac{F_z}{m} \mathbf{k} = X \mathbf{i} + Y \mathbf{j} + Z \mathbf{k}$$

F_x, F_y, F_z ：质量力在 x, y, z 坐标方向上的分量

X, Y, Z ： \mathbf{f} 在三个坐标方向上的分量

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ：单位矢量

由其可推出：

$$\begin{cases} F_x = X \cdot m \\ F_y = Y \cdot m \\ F_z = Z \cdot m \end{cases}$$

1.10 表面力

如大气压力，摩擦力

单位面积上的表面力可表示为

$$p_n = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

微元面积 ΔA 上的力为 ΔP

P_n 分解出法向分量 p 为压强，流体力学中称为压力，

切向分量 τ 为压倒性剪切力

二、流体静力学

静止流体中的表面力只有法向力，即物理学中的压强，流体力学中称为流体静压力

$$1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$$

$$1 \text{ atm} = 10.34 \text{ mH}_2\text{O}$$

$$1 \text{ mmHg} = 133.28 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mH}_2\text{O} = 9800 \text{ Pa}$$

2.1 流体平衡微分方程

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{f} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$$

$$= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

由汉密尔顿算符 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ 可得一个矢量式

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

∇p 称为压力梯度

该方程又称欧拉平衡方程

当流体处于平衡状态时，作用在单位质量流体上的质量力与压力的合力相平衡

限定条件：同种相连通的绝对静止流体的水平面为等压面

压力全微分形式：

$$dp = \rho(X dx + Y dy + Z dz)$$

2.2 静力学基本方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = c$$

适用条件：重力作用下静止的均质流体

几何意义： z 称为位置水头， $\frac{p}{\rho g}$ 称为压力水头， $z + \frac{p}{\rho g}$ 称为管水头。

静止流体中测压管水头为常数

物理意义

单位重力流体所具有的位置势能为：

$$\frac{mgz}{mg} = z$$

因此， z 也被称为比位能

$\frac{p}{\rho g}$ 代表单位重力流体所具有的压力势能，简称比压能

静止流体中总比能为常数

2.3 U形测压管

$$p_A = p'gH - \rho gH$$

对气体，密度可忽略不计

$$p_A = p'gH$$

2.4 U形压差计

$$\Delta p = p_A - p_B = (\rho - \rho')gH$$

等加速水平容器中静力公式：

$$p = p_0 - \rho(ax + gz)$$

匀加速水平直线运动的容器中等压面方程：

$$ax + gz = c$$

自由表面方程：

$$ax + gz_s = 0$$

或

$$z_s = -\frac{a}{g}x$$

等角速度旋转容器中流体相对平衡
单位质量流体所受到到的质量力 \mathbf{f} 的三个分量：

$$\begin{cases} X = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x \\ Y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y \\ Z = -g \end{cases}$$

等解速度旋转容器中的静压力分布公式

$$p = p_0 + \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right)$$

2.5 液体对平面总压力

$$P = \rho g h_c A$$

$$y_D = y_C + \frac{J_C}{y_C A}$$

压力中心D永远低于平面形心

常见惯性矩

矩形: $J_C = \frac{BH^3}{12}$

H: 可见闸门边长

B: 不可见闸门边长

圆形: $J_C = \frac{\pi D^4}{64}$

2.6 静止流体作用在曲面上的总压力

$$P_x = \rho g h_c A_x$$

对于半球面: $A_x = \frac{\pi d^2}{4}$

$$P_y = \rho g h_c A_s$$

$$P_z = \rho g V \text{ (竖直方向)}$$

总压力可表示为

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$$

三、流体运动学

3.1 拉格朗日表达式

速度:

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial x}{\partial t} \\ u_y = \frac{\partial y}{\partial t} \\ u_z = \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$$

加速度:

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{cases}$$

3.2 欧拉表达式

速度:

$$u_x = u_x(x, y, z, t)$$

加速度:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

3.3 迹线

消去拉格朗日法表达式中的t就是迹线方程

3.4 流线

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

3.5 连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial t} = 0$$

或

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \mathbf{u} = 0$$

3.6 运动分析

1. 速度大小

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

2. 流线方程

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

3. 线率形速率

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} \begin{cases} = 0 \text{ 可压} \\ \neq 0 \text{ 不可压} \end{cases}$$

4. 角变形速度

$$\varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

5. 旋转角速度

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

$$\omega_z \begin{cases} = 0 & \text{无旋流动} \\ \neq 0 & \text{有旋流动} \end{cases}$$

四、带泵的伯努利方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + H = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}}$$

z : 位置水头

$\frac{p}{\rho g}$: 压力水头

$\frac{v^2}{2g}$: 流速水头

H : 泵的扬程

$h_{w_{1-2}}$: 水头损失

由此: 泵的扬程 H 等于泵前后两断面上的总比能差加上两断面的水头损失

4.1 泵的功率

有效功为:

$$W = \rho g Q H \, dt$$

有效功率为:

$$N_{\text{泵}} = \rho g Q H$$

泵效:

$$\eta_{\text{泵}} = \frac{N_{\text{泵}}}{N_{\text{轴}}}$$

泵的输入功率称为泵的额定功率, 也称之为轴功率, 以 $N_{\text{轴}}$ 表示

电动机效率:

$$\eta_{\text{电}} = \frac{N_{\text{轴}}}{N_{\text{泵}}}$$

五、相似原理

几何相似 $\begin{cases} \text{线段成比例} \\ \text{角度成比例} \\ \text{边界性质相同} \end{cases}$

运动相似: 两个流动对应点处的同名运动学量成比例。

重力相似准则:

$$Fr = v / \sqrt{gl}$$

黏性力相似准则:

$$Re = \rho v d / \mu = v d / \nu$$

压力相似准则:

$$Eu = p / \rho v^2$$

六、黏性流体动力学

6.1 N-S 方程

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = \frac{du}{dt}$$

6.2 达西公式

$$h_f = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

6.3 圆管层流速度分布

$$u_x = u_{x(y,z)}, u_y = u_z = 0, \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}$$

七、复杂管路水力计算

串联管路 $\begin{cases} \Sigma Q_i = 0 \\ h_f = \Sigma h_{f_i} \end{cases}$

并联管路 $\begin{cases} Q = \Sigma Q_i \\ h_f = h_{f_1} = h_{f_2} = \dots = h_{f_i} \end{cases}$

$$h_f = 0.0826 \lambda \frac{Q^2 l}{D^5}$$