

方法精讲-数量 2

主讲教师：唐宋

授课时间：2017.09.29



粉笔公考·官方微信

方法精讲-数量 2（笔记）

第四节 工程问题

【知识点】工程问题：

1. 公式：（1）工程量=效率*时间。如，派出甲、乙，或甲、乙、丙，或甲、乙、丙、丁（2~4人）做同一件事/一项工程/一批零件，他们的速度/快慢不同，问合作需要多少天。因为速度不同，所以效率不同（速度快的效率高，速度慢的效率低），根据时间的快慢，可以求出总量。例如，每小时做 10 个零件，做 8 天则可以做 $10 \times 8 = 80$ 个零件。

（2）效率=工程量/时间。

（3）时间=工程量/效率。知道三者的关系后，做题时可以灵活应用，知道两个量，可以求出第三个量。

2. 切入点：工程问题一般有三种题型：（1）给出时间。（2）给出效率。（3）给出具体的值。

3. 切入点一：给定时间型（完工时间）：

（1）赋总量（时间的公倍数）。绝大多数情况下题目不会给总量的值，所以可以自己设一个值，方便计算。

例：甲需要 3 天做完，乙需要 6 天做完，问两人合作需要几天做完？

答：赋总量=6，再求各自的效率：甲=2，乙=1。甲乙合作，则把效率加起来（不能把时间直接相加），即 $6 / (2+1) = 2$ 天。

（2）算效率：效率=总量/时间。

（3）根据题意完成工程。求时间的最小公倍数，一定要找完工的时间。如果条件给“甲完成需要 4 小时，乙完成需要 6 小时，丙做了一半用 2 小时”，则只需要找 4 和 6 的最小公倍数，而不需要看 2；或者根据丙做一半用 2 小时求出丙完成全部用的时间，再找 4、6、丙完工时间的最小公倍数。

例 1（2017 广东）现有一批零件，甲师傅单独加工需要 4 小时，乙师傅单独加工需要 6 小时。两人一起加工这批零件的 50%需要多少个小时？（ ）

A. 0.6

B. 1

C. 1.2

D. 1.5

【解析】例 1. 给定时间。(1) 赋总量。赋值工程总量为时间 4 和 6 的最小公倍数 12。(2) 算效率。甲=12/4=3，乙=12/6=2。(3) 列式求解。根据题意，合作 50%的时间= (12*50%) / (3+2) =6/5=1.2 小时。【选 C】

例 2 (2017 江苏) 若将一项工程的 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 依次分配给甲、乙、丙、丁四家工程队，分别需要 15 天、15 天、30 天和 9 天完成，则他们合作完成该项工程需要的时间是 ()。

A. 12 天

B. 15 天

C. 18 天

D. 20 天

【解析】例 2. 给定时间。(1) 赋总量。赋值总量为完工时间的最小公倍数。甲完成工程总量的 $\frac{1}{6}$ 需要 15 天，则甲全部完成需要 90 天，同理，乙全部完成需要 60 天，丙全部完成需要 90 天，丁全部完成需要 36 天。赋值总量为时间 90、60、36 (90 重复只看一个就可以) 的最小公倍数 180。(2) 算效率。甲=180/90=2，乙=180/60=3，丙=180/90=2，丁=180/36=5。(3) 列式求解。根据题意，合作时间=180 / (2+3+2+5) =15 天。【选 B】

【注意】1. 求 90、60、36 的公倍数，提出公约数 30 得：3、36、2，36 是 3 和 2 的倍数，则公倍数=30*36=1080，但这里不是最小公倍数，是容易找到的公倍数。用短除法求最小公倍数：90、36、60，提出公约数 6 得：15、6、10，提出公约数 3 得：5、2、10，提出公约数 5 得：1、2、2，提出公约数 2 得：1、1、1，则最小公倍数=6*3*5*2=180。

$$\begin{array}{r|rrr}
 6 & 90 & 36 & 60 \\
 \hline
 3 & 15 & 6 & 10 \\
 \hline
 5 & 5 & 2 & 10 \\
 \hline
 2 & 1 & 2 & 2 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 1
 \end{array}$$

2. 总量设为 1，则效率就变为分数，后面计算需要通分，仍然需要最小公倍数，而且设总量为 1，计算也比较麻烦，不如在前面直接赋总量为时间的最小公倍数。

例 3（2015 黑龙江）某项工程，甲施工队单独施工需要 30 天完成，乙施工队单独施工需要 25 天完成，甲队单独施工了 4 天后改由两队一起施工，期间甲队休息了若干天，最后整个工程共耗时 19 天完成，问甲队中途休息了几天？（ ）

- A. 1
B. 3
C. 5
D. 7

【解析】例 3. 给定时间。“4 天”是甲单独做的用时，不是完工时间；“19 天”中有休息的时间，也不是完工时间。（1）赋总量。赋值总量是完工时间 30 和 25 的最小公倍数 150。（2）算效率。甲=5，乙=6。（3）列式求解。

方法一：列式方法有两类：按时间和按人头。按时间算。因为中间有休息的时间，计算比较麻烦，逐一分析，“甲队单独施工了 4 天”，说明前面 4 天是甲单独干，即 5×4 ；后面几天甲和乙合作，即 $(5+6) \times (19-4)$ ，因为没有算甲队休息的天数，所以总量偏多。可以先假设甲不休息，算出总量，再减去甲休息天数的工作量。设甲休息了 x 天，根据题意列式， $5 \times 4 + (5+6) \times (19-4) - 5x = 150$ ，解得 $x = (185-150) / 5 = 7$ 。

方法二：按人头算。甲做的量+乙做的量=总的量，甲：设甲休息 x 天，则甲工作了 $19-x$ 天；乙：前 4 天没有工作，则乙工作了 $19-4=15$ 天。根据题意列式， $(19-x) \times 5 + 15 \times 6 = 150$ ，解得 $x=7$ 。【选 D】

【知识点】切入点二：给定效率的比例关系型：

1. 例：粉笔搬办公室，唐宋与张小龙一起搬桌子，唐宋与张小龙的效率比是 3: 2，如果全部由唐宋搬，需要 10 小时，如果唐宋与张小龙一起搬，需要多久？

答：有效率的比例关系。（1）赋效率，设唐宋效率是 3，龙哥效率是 2。（2）求总量。总量=3*10=30。（3）列式求解。一起搬需要的时间=30/（3+2）=6 小时。

2. 步骤：（1）赋效率（满足比例即可）。

（2）算总量：效率*时间=总量。

（3）根据题意完成工程。

例 4 (2016 江苏) 甲、乙、丙三人共同完成一项工程，他们的工作效率之比 5: 4: 6。先由甲、乙两人合作 6 天，再由乙单独做 9 天，完成全部工程的 60%，若剩下的工程由丙单独完成，则丙所需要的天数是 ()。

- A. 9
B. 11
C. 10
D. 15

【解析】例 4. 给定效率之比。(1) 赋效率。设甲效率是 5，乙效率是 4，丙效率是 6。(2) 求总量。按照时间列式子，总量= $[(5+4) \times 6 + 4 \times 9] / 60\% = 150$ 。(3) 列式求解。“剩下的工程由丙单独完成”，已经完成 60%，则剩余 40% 由丙单独做，丙的工作天数= $(150 \times 40\%) / 6 = 60 / 6 = 10$ 天。【选 C】

【注意】1. 计算总量的方法 (解析给出了按照时间求总量的方法，这里介绍另一种): 按人头算，甲做了 6 天，乙做了 4 天，则 $5 \times 6 + 4 \times (6+9) = 90$ ，甲乙“完成全部工程的 60%”，所以总量= $90 / 60\% = 150$ 。

2. 算出完成 60% 的量是 90，可以不算出总量。已完成 60%，则剩下的量是 $1 - 60\% = 40\%$ ，根据比重之比=量之比，所以已完成的: 剩下的= $60\% : 40\% = 3 : 2$ ，剩下的量= $90 \times 2 / 3 = 60$ 。结论: 同一个整体内，比重之比=量之比。

例 5 (2016 国考) 某浇水装置可根据天气阴晴调节浇水量，晴天浇水量为阴雨天的 2.5 倍。灌满该装置的水箱后，在连续晴天的情况下可为植物自动浇水 18 天。小李 6 月 1 日 0: 00 灌满水箱后，7 月 1 日 0: 00 正好用完。问 6 月有多少个阴雨天? ()。

- A. 10
B. 16
C. 18
D. 20

【解析】例 5. 方法一: 2.5 倍是倍数关系，也是比例关系。6 月有 30 天，要么阴雨天，要么晴天。根据“晴天浇水量为阴雨天的 2.5 倍”，说明阴雨天的天数小于晴天的天数。因为晴天用水量多，“连续晴天的情况下可自动浇水 18 天”，则总量= () $\times 18$ ，类似于工程问题。(1) 赋效率。设晴天每天浇水 5 份/天，阴雨天每天浇水 2 份/天。(2) 求总量。总量= $5 \times 18 = 90$ 份。(3) 列式求解。设阴雨天 x 天，则根据题意列式， $2x + (30 - x) \times 5 = 90$ ，解得 $x = 20$ 。

方法二: 本题可以快速蒙题。6 月=阴雨天+晴天=30 天，观察选项，A 项+D

项=10+20=30，则答案有 90% 的概率在 A、D 项。如果阴天是 10 天，则晴天是 20 天，与题干“18 天”矛盾，错误；所以晴天只能是 10 天，阴雨天是 20 天。【选 D】

【注意】1. 月份记忆：（1）一三五七八十腊，三十一天永不差。（2）2 月：
①平年 28 天。②闰年 29 天。区分平年、闰年，记住奥运会年份是闰年，每隔 4 年一届奥运会，2008 年是北京奥运会，2008 年是闰年，所以奥运会都在闰年召开。

2. 本题注意“坑”，设未知数时如果设为晴天，算出晴天是 10 天，注意雨天=30-10=20 天。

【答案汇总】 1-5: CBDCD

例 6（2017 河北）某件刺绣产品，需要效率相当的三名绣工 8 天才能完成；绣品完成 50% 时，一人有事提前离开，绣品由剩下的两人继续完成；绣品完成 75% 时，又有一人离开，绣品由最后剩下的那个人做完。那么，完成该件绣品一共用了（ ）。

- A. 10 天 B. 11 天
C. 12 天 D. 13 天

【解析】例 6. “某件刺绣产品，需要效率相当的三名绣工 8 天才能完成”说明三名工人的效率相等。（1）假设三名工人的效率均为 1，时间是 8 天；（2）总量=（1+1+1）*8 天=24 份；（3）列算式，总共需要 8 天，那么前 50%需要 4 天。中间是 25%，时间=（24*25%）/（1+1）=3 天。最后 25%由最后一个人做完，时间为（24*25%）/1=6 天。本工程分成三个阶段，一共需要 4+3+6=13 天。【选 D】

【注意】 1. 给时间，赋值总量，算效率。

2. 给效率，赋效率，算总量。

【知识点】1. 例：唐宋每小时搬 3 张桌子，张小龙每小时搬 2 张桌子，给具体单位，一共有 35 张桌子，问两人需要搬多长时间？此时有具体效率值，带单位，不能赋值。

2. 给具体的效率值:

(1) 设效率为未知数 (设小不设大或设中间量)。

(2) 根据工作过程列方程。

例 7 (2014 政法干警) 有一批汽车零件由 A 和 B 负责加工, A 每天比 B 少做 3 个零件, 如果 A 和 B 两个人合作需要 18 天才能完成, 现在让 A 先做 12 天, 然后 B 再做 17 天, 还剩这批零件的 $\frac{1}{6}$ 没有完成, 这批零件共有多少个? ()。

A. 240

B. 250

C. 300

D. 270

【解析】例 7. A 每天比 B 少做 3 个零件, 零件用个来表示, 已知具体数值, 需要设未知数。(1) 设 A 每天制作零件 x 个, 则 B 每天制作 $x+3$ 个; (2) 根据题意, 可列方程为: $(2x+3) \times 18 \times (\frac{5}{6}) = 12x + 17(x+3)$, 约分 $(2 \times 15 - 12 - 17) \times x = 3 \times 17 - 3 \times 15$, 解得 $x=6$, 故零件总数 $= (2 \times 6 + 3) \times 18 = 270$ 个。【选 D】

【注意】1. 效率 \times 时间=总数, 时间是 9 的倍数, 效率是整数, 那么总数是 9 的倍数。例 7 中, $(A+B) \times 18 = 18N$, 总数是 18 的倍数, 说明总数既是 2 倍数又是 9 的倍数。观察选项只有 D 项满足。

2. 拓展: 已知有 270 个零件, 请问 A、B 合作几天完成? 选项为 16、17、18、20。 $270 = (A+B) \times \text{时间}$, 270 能被时间整除。观察选项只有 18 满足条件。

3. 前面例 1~6 题, 给的是时间或者效率的比例, 可以赋值。例 7 已知的是具体数值, 需要设未知数。

【答案汇总】6-7: DD



【小结】工程问题（必考题型）：

1. 赋值总量型：（1）识别：题干只给了多个完工时间；（2）方法：赋值总量——算出效率——列式求解；（3）技巧：总量一般设公倍，公倍难算用乘积。
2. 赋值效率型：（1）识别：题干给出了效率比、效率倍数等；（2）方法：赋值效率——求出总量——列示求解；（3）技巧：按照比例设效率，设值尽量设整数。
3. 给具体值型：（1）识别：题干有效率、总量的具体值；（2）方法：代公式——列方程求解。

第五节 行程问题

【知识点】1. 行程问题（与工程问题类似）：相遇问题类似合作完成一项工程，追及问题类似“拆台”，例如甲每天做5个零件，乙每天拆3个零件，问合作多少天完成等问题。数学中这两个模块知识点有相通的。

2. 基础公式：（1）路程=速度*时间；（2）速度=路程÷时间；（3）时间=路程÷速度。

3. 火车过桥问题：总路程=火车车身长度+桥长=火车速度*过桥时间。红色部分表示车长，黑色部分表示桥长，注意车头到车头的距离，火车上各个点运动的距离相同。

总路程=火车车身长度+桥长=火车速度×过桥时间



例 1（2015 江苏）一列火车途经两个隧道和一座桥梁，第一个隧道长 600 米，火车通过用时 18 秒；第二个隧道长 480 米，火车通过用时 15 秒；桥梁长 800 米，火车通过时速度为原来的一半，则火车通过桥梁所需的时间为（ ）

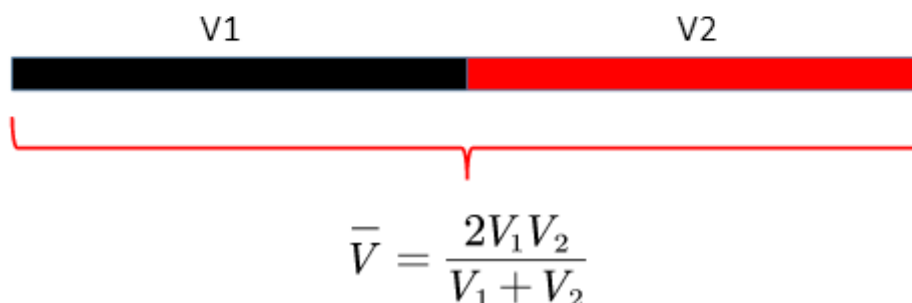
- A. 20 秒 B. 25 秒
C. 40 秒 D. 46 秒

【解析】例 1. 火车在隧道上和在桥上的算法相同， $600+S_{\text{车}}=V_{\text{车}} \times 18$ 秒， $480+S_{\text{车}}=V_{\text{车}} \times 15$ 秒。可以推出 $V_{\text{车}}=(600-480)/(18-15)=120/3=40$ ， $S_{\text{车}}=40 \times 15-480=120$ 。
 $800+120=40 \times 1/2 \times t$ ，解得 $t=46$ 秒。【选 D】

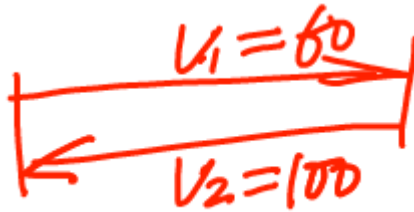
等距离平均速度

$$\text{公式：} \bar{V} = \frac{2V_1V_2}{V_1 + V_2}$$

适用于：往返、上下坡



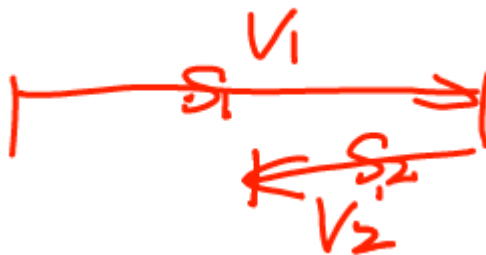
【知识点】1. 等距离平均速度：去时一个速度，回来时一个速度，来回速度不同，如去时 $v_1=60$ ，回来时速度 $v_2=100$ ，平均速度 $\neq (v_1+v_2)/2=(60+100)/2$ 。
正确公式： $v=2v_1v_2/(v_1+v_2)$ 。



(1) 推理（看懂即可，不需要记忆）：假设全程为 S ，来回两个全程为 $2S$ ，去时的时间为 S/v_1 ，回来时的时间为 S/v_2 ， $v = (S+S) \div (S/v_1 + S/v_2) = 2v_1v_2 / (v_1 + v_2)$ 。

(2) 适用于：往返、上下坡。去时一个路程，回来时同样的路程，或者前半段一段路程，后半段一段路程，前半段和后半段路程一样，路程相同时才能运用此公式。

2. 非等距离时：若去时速度为 v_1 ，路程为 S_1 ，回来时速度为 v_2 ，路程为 S_2 ，两个 S 不相等，则 v （通用公式）= $(S_1 + S_2) \div (S_1/v_1 + S_2/v_2)$ 。



3. 记忆方法： $v = 2v_1v_2 / (v_1 + v_2) = (2 \text{ 积}) / \text{和}$ 。

例 2（2015 政法干警）甲去北京出差，去时坐飞机，返回时坐高铁。若飞机的速度比高铁快 3 倍，且往返平均速度为 480 千米/小时，问甲乘坐的飞机速度为多少千米/小时？（ ）

- | | |
|--------|---------|
| A. 720 | B. 768 |
| C. 960 | D. 1200 |

【解析】例 2. 因求具体数值，故不能赋值。假设高铁速度为 v ，则飞机速度为 $4v$ ， $v = (2 \times 4v \times v) / (4v + v) = 8v^2 / 5v = 1.6v = 480$ ，解得 $v = 300$ ，飞机速度 $4v = 1200$ 。

【选 D】

【注意】1. 区分：

- (1) 若飞机速度是高铁的 3 倍，则飞机速度为 $3v$ ；
- (2) 若飞机速度比高铁快 3 倍，则飞机速度为 $4v$ ，假设高铁速度为 100，则飞机比高铁快 300， $4v$ 比 v 快 $3v$ ， $3v$ 为 v 的 3 倍。

2. 生活区分：

(1) 若 A 是 B 的一倍：假设 B 的工资为 5000 元，则 A 的工资也是 5000 元；

(2) 若 A 比 B 高一倍：B 为 5000 元，“高一倍”即多一个 5000，比 5000 多 5000，则 A 为 10000 元。

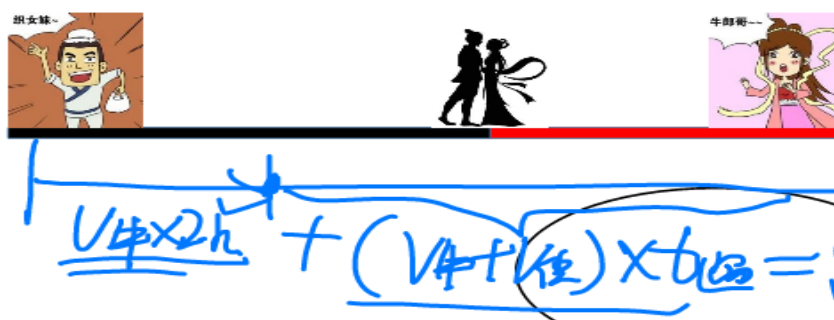
【知识点】直线相遇与环形相遇：

1. 直线相遇：牛郎和织女相遇， $S_{\text{牛}} = v_{\text{牛}} * t$ ， $S_{\text{织}} = v_{\text{织}} * t$ ，左边一半，右边一半，加在一起即为了相遇两人共走的路程。 $S_{\text{相遇}} = v_{\text{牛}} * t + v_{\text{织}} * t$ ，t 一般是相同的，因二人同时出发，故 $S_{\text{相遇}} = (v_{\text{牛}} + v_{\text{织}}) * t$ 。

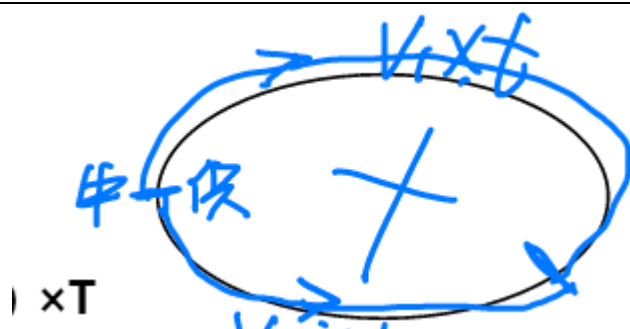
(1) 公式： $S_{\text{相遇}} = (v_1 + v_2) * T$ 。



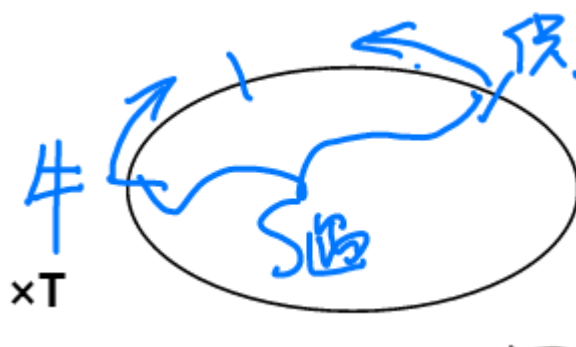
(2) 若牛郎先走 2 小时，剩下的路程两人再相遇，则 $S_{\text{相遇}} = v_{\text{牛}} * 2 \text{ 小时} + (v_{\text{牛}} + v_{\text{织}}) * t_{\text{相遇}}$ 。



2. 环形相遇：环形若考查相遇，两人往往在同一个位置，牛郎、织女两人背向而行，地球是圆的， $S_{\text{牛}} = v_1 * t$ ， $S_{\text{织}} = v_2 * t$ ，两人相加走了一整圈， $S_{\text{相遇(圈)}} = (v_1 + v_2) * T$ 。

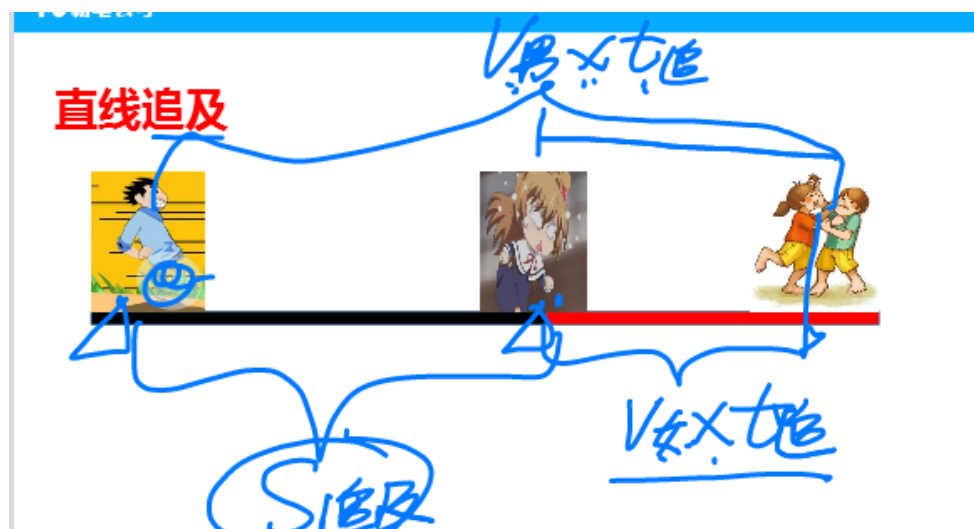


结论：若两人同点出发，相遇的距离等于 1 圈；若不同点出发，相遇的距离如下图所示。



【知识点】直线追及与环形追及：

1. 直线追及：如下图所示，男生在后，女生在前，男生追女生，追上后两人打架了， $S_{男} = v_{男} \times t_{追}$ ， $S_{女} = v_{女} \times t_{追}$ ，相遇是将两人跑的路程相加，但追及若将路程相加，男生所跑路程则重复了。观察图形，男生比女生多跑一段路，多走的部分为 $S_{追及}$ ， $S_{追及} = (v_{快} - v_{慢}) \times t_{追}$ 。



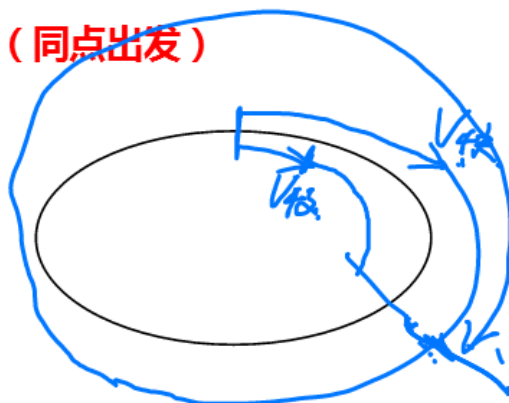
(1) 追及路程：为了追上谁，多走的那一段。

(2) 追及时间: $T = S_{\text{追}} / (v_{\text{快}} - v_{\text{慢}})$ 。

2. 环形追及:

(1) 同点出发: 同点时, 一个速度快一个速度慢, 如刘翔和赵本山赛跑, 赵本山慢慢跑, 刘翔第一次跑到中间的时候没有追上赵本山, 后来追上时, 刘翔比赵本山多跑一圈。画图能够看出, 但画图容易混乱, 故运用生活经验。环形上追上一次多跑一圈, 追上 n 次, 多跑 n 圈。

追及 (同点出发)

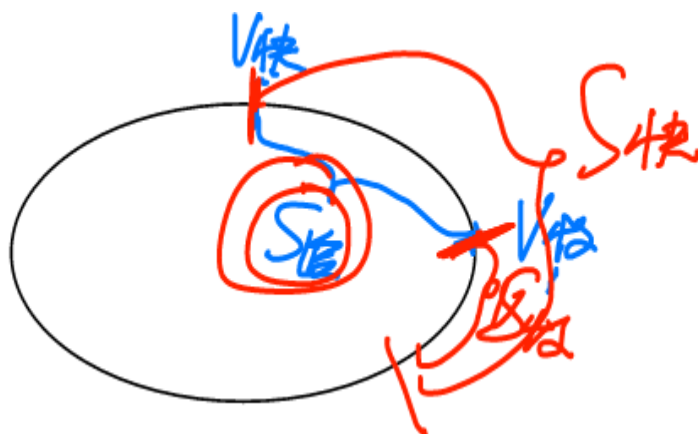


公式: $S_{\text{追及}} = (v_{\text{快}} - v_{\text{慢}}) * T$ 。

结论: 追上 1 次, $S_{\text{追及}} = 1$ 圈; 追上 N 次, $S_{\text{追及}} = N$ 圈。

(2) 非同点出发: 有 $v_{\text{快}}$ 和 $v_{\text{慢}}$ 就有速度差, 有速度差求时间只需找 $S_{\text{追}}$ (追及问题的核心即找 $S_{\text{追}}$)。

①快的人跑了一大段, 慢的人跑了一小段, 多跑距离即 $S_{\text{追}}$, 多跑的为二者相距的起点。



②若二者都往右边跑, $v_{\text{慢}}$ 在后, $v_{\text{快}}$ 在前, 快的人需要追慢的人, 则需要跑二者相距的一大段, 此时 $S_{\text{追}}$ 为大的一部分。



3. 小结:

- (1) 同一点出发: $S_{\text{追}} = N \text{ 圈}$;
- (2) 不同点出发: 如上图所示。
- (3) ①在环形追及中, 绝大多数考同点出发, 不同点出发考查的较少;
- ②直线追及不存在同点、不同点;
- ③直线相遇同点出发较多, 不同点出发很少。

例 3 (2017 江苏) 小车和客车从甲地开往乙地, 货车从乙地开往甲地, 它们同时出发, 货车与小车相遇 20 分钟后又遇客车。已知小车、货车和客车的速度分别为 75 千米/小时、60 千米/小时和 50 千米/小时, 则甲、乙两地的距离是()。

- A. 205 千米
- B. 203 千米
- C. 201 千米
- D. 198 千米

【解析】例 3. 画图理解, 小车和客车从甲开往乙, 货车从乙开往甲。根据“货车与小车相遇 20 分钟后又遇客车”, 表明货车与小车和客车都遇到了, 且先遇到小车, 两次相遇间隔 20 分钟。假设第一次相遇时间为 t , 20 分钟 = $1/3$ 小时, 故第二次相遇为 $t + 1/3$ 。根据题意, 小车与货车相遇相当于走一个全程, 客车与货车相遇也相当于一个全程。对于第一次相遇: $S_{\text{甲乙}} = (v_{\text{小车}} + v_{\text{货车}}) * t = (75 + 60) * t$; 对于第二次相遇: $S_{\text{甲乙}} = (v_{\text{客车}} + v_{\text{货车}}) * (t + 1/3) = (50 + 60) * (t + 1/3)$, 解得 $t = 110/3 \div 25 = 110/75$, $S = 135 * 110/75 = 27/3 * 22 = 9 * 22$, 尾数为 8, D 项满足条件。【选 D】

【注意】时间是 $1/3$, 非整数, 故 135 不是乘以一个整数, 所以不一定是 5

的倍数。

/小时，则甲、乙两地的距离是：



例 4（2017 广东）老林和小陈绕着周长为 720 米的小花园匀速散步，小陈比老林速度快。若两人同时从某一起点同向出发，则每隔 18 分钟相遇一次；若两人同时从某一起点反方向出发，则每隔 6 分钟相遇一次。由此可知，小陈绕小花园散步一圈需要多少分钟？（ ）

- A. 6 B. 9
C. 15 D. 18

【解析】例 4. 根据题意，同时同向从同一点出发，两人速度一快一慢，此非传统相遇（两人面对面相遇）。第一个条件：同向为追及问题，1 圈=720 米=（ $v_{快}-v_{慢}$ ）*18；第二个条件：反向为相遇问题，1 圈=720 米=（ $v_{快}+v_{慢}$ ）*6，则 $v_{快}-v_{慢}=720/18=40$ ①， $v_{快}+v_{慢}=720/6=120$ ②，①+②解得： $v_{快}=(40+120)/2=80$ ， $v_{慢}=120-80=40$ 。小陈的速度为 80， $t=720/80=9$ 分钟。【选 B】

【注意】1. 相遇分为两种：如果是狭义的相遇只为面对面相遇；广义的相遇为从背后相遇（又称为追及）。

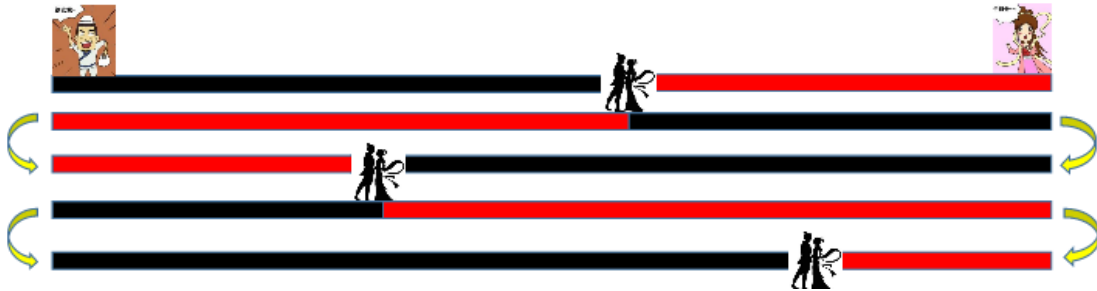
2. 如果出现同向出发，永远为追及问题，考虑追及公式；如果出现反向、背向、相向，运用相遇公式。

3. 在周期问题中，每隔 3 天即每 4 天，但只在天数中才加 1，分钟、小时不用加 1。

【知识点】多次相遇（两端出发）：纯粹的套路题。

1. 例：如下图，牛郎和织女相遇后决定分手，两个人继续往前走，红色部分是织女走的路线，黑色部分是牛郎走的路线，牛郎回到原地后又决定回去找织女，

两人再次相遇。两人在两地之间不断地往返。第一次相遇时两人共走了 $1S$ ，第二次相遇时两人共走了 $3S$ ，第三次相遇时两人共走了 $5S$ 。



2. 结论：两端出发相遇：

第 1 次相遇，共走 $1S$ 。

第 2 次相遇，共走 $3S$ 。

第 3 次相遇，共走 $5S$ 。

第 n 次相遇，共走 $(2n-1)S$ ，是奇数数列，共走奇数个全程。

例：（1）2 人从两端出发相向而行，相遇 8 次共走了 $2 \times 8 - 1 = 15$ 个全程。

（2）两人共走了 9 个全程， $9S = (2n-1)S$ ，可得： $n=5$ ，说明相遇了 5 次。

例 5（2015 河北）某高校两校区相距 2760 米，甲、乙两同学从各自校区同时出发到对方校区，甲的速度为每分钟 70 米，乙的速度为每分钟 110 米，在路上两人第一次相遇后继续行进，到达对方校区后马上返回。那么两人从出发到第二次相遇需要多少分钟？（ ）

A. 32

B. 46

C. 61

D. 64

【解析】例 5. 两人在两地之间不断地往返，问第二次相遇时的情况，直接使用结论，看到“第几次相遇”，判定题型为多次相遇的行程问题，第二次相遇共走 $2n-1=3$ 个全程，考试时直接记：第 1、2、3 次相遇对应的全程为 1、3、5。

相遇问题，求时间 t ， $S_{\text{遇}}$ 是两个人为了相遇共同走的全程， $S_{\text{遇}} = (v_1 + v_2) \times t$ ， $3 \times 2760 = (70 + 110) \times t$ ， $t = 3 \times 2760 / 180 = 46$ ，完整计算为 46。【选 B】

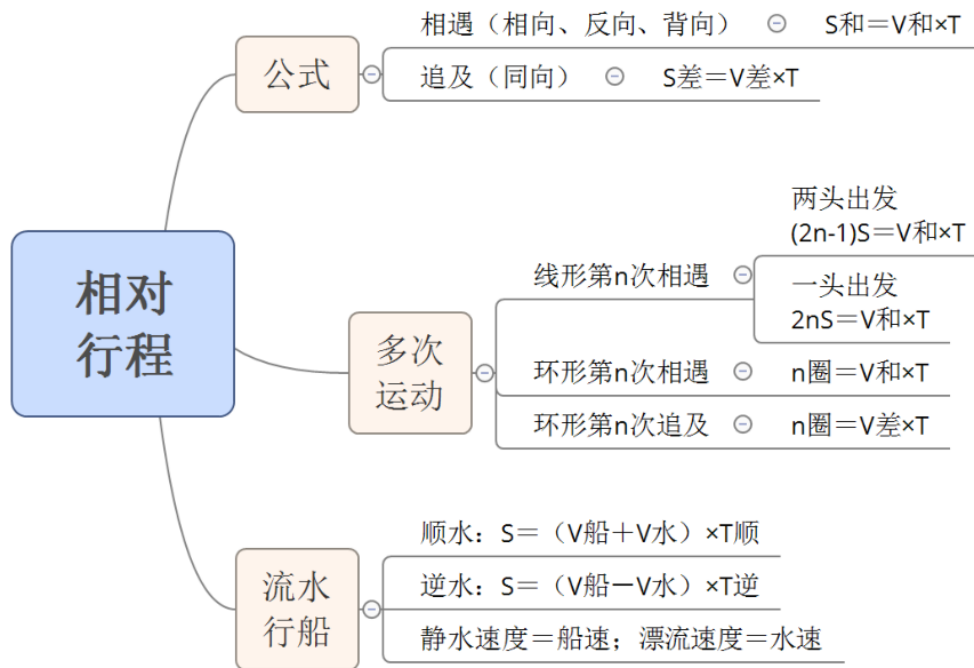
【答案汇总】1-5：DDDBB

例 7（2017 山东）有 A、B 两家工厂分别建在河流的上游和下游，甲、乙两船分别从 A、B 港口出发前往两地中间的 C 港口。C 港与 A 厂的距离比其与 B 厂的距离远 10 公里。乙船出发后经过 4 小时到达 C 港，甲船在乙船出发后 1 小时出发，正好与乙船同时到达。已知两船在静水中的速度都是 32 公里/小时，问河水流速是多少公里/小时？（ ）

- A. 4
B. 5
C. 6
D. 7

【解析】例 7. 本题约 200 字，题干较长，很多同学便因此放弃了。本题考查画图的能力，对计算要求不高。如下图，甲在上面，乙在下面，上到下为顺水，“两地中间”不是两地的中点， $CA-CB=10\text{km}$ ①，乙船从下游往上走，为逆水行舟，乙船走了 4 小时，路程为 $BC=4v_{\text{逆}}$ ②，甲船晚出发 1 小时，说明少走了 1 小时，走了 3 小时，路程为 $AC=3v_{\text{顺}}$ ③，将②③代入①中： $3*(32+v_{\text{水}})-4*(32-v_{\text{水}})=10$ ，一个方程一个未知数，解方程。只有一个未知数，可以使用代入排除法，运气好也许只需要代入一个选项， $v_{\text{水}}=[10+(4-3)*32]/7=42/7=6$ 。或者代入验证尾数，排除 A、B 项，选择 C 项。【选 C】





【小结】相对行程：

1. 公式：

- (1) 相遇（相向、反向、背向）： $S_{和}=V_{和} \times T$ 。
- (2) 追及（同向）： $S_{差}=V_{差} \times T$ 。可以通过方向来辨认相遇和追及。

2. 多次运动：相遇考得多，追及考得少。

(1) 线形第 n 次相遇：①两头出发： $S_{遇}=(2n-1)S=V_{和} \times T$ ；②一头出发（很少考，2012 年或 2013 年浙江省考、2017 年深圳/广州市考考过）： $2nS=V_{和} \times T$ 。

例：如下图，甲、乙同点出发，第一次相遇共走 2 个全程，第二次相遇共走了 4 个全程，每多相遇一次多走 2 个全程，共走了偶数个全程。



- (2) 线形第 n 次相遇： $n \text{ 圈}=V_{和} \times T$ 。考得少，难度低。
- (3) 环形第 n 次追及： $n \text{ 圈}=V_{差} \times T$ 。考得少，难度低。

3. 流水行船（题目不难）：

- (1) 顺水： $S=(V_{船}+V_{水}) \times T_{顺}$ 。
- (2) 逆水： $S=(V_{船}-V_{水}) \times T_{逆}$ 。
- (3) 静水速度=船速；漂流速度=水速。

【知识点】比例行程（几乎没有难度，考查比例）：

1. $S=V \times T$ 。

(1) S 一定， V 与 T 成反比。

例：走同一个 S ，走得快的人需要的时间少，速度慢的人所需的时间多。

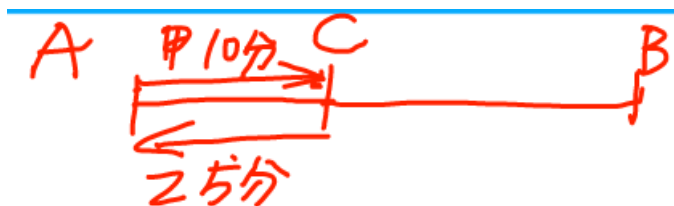
(2) V 一定， S 与 T 成正比。

(3) T 一定， S 与 V 成正比。

注：记住 (1) 即可，(2) (3) 很少考，与 (1) 相反，类比着去记即可。

2. 方法：确定一个不变量，找比例。找一段 S ，让甲、乙两人都经过 S 。

例：如下图，A、B 之间有 C 点，甲、乙两人都经过了 AC（方向可能不同），甲用了 10 分钟，乙用了 5 分钟，看到同一不变量 AC，可得： $v_{甲} : v_{乙} = 5 : 10 = 1 : 2$ 。



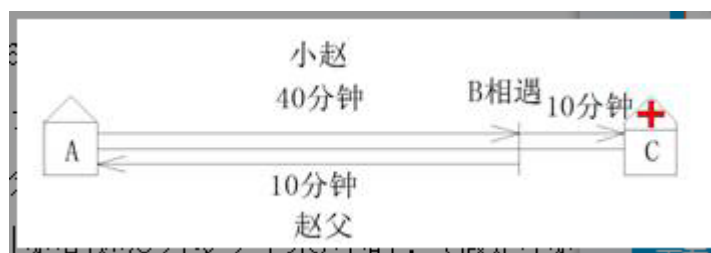
例 8（2016 北京）小赵骑车去医院看病，父亲在发现小赵忘带医保卡时以 60 千米/小时的速度开车追上小赵，把医保卡交给他并立即返回。小赵拿着医保卡后又骑了 10 分钟到达医院，小赵父亲也同时到家。假如小赵从家到医院共用时 50 分钟，则小赵的速度为多少千米/小时？（假定小赵及其父亲全程都匀速行驶，忽略父子二人交接卡的时间）（ ）

A. 10

B. 12

C. 15

D. 20



【解析】例 8. 如下图，小赵的父亲开车给小赵送卡，送完卡后又开车回家了，小赵拿到医保卡后，又用了 10 分钟到达医院，小赵走后半段用了 10 分钟，

小赵父亲用 10 分钟的时间开车回到家中，小赵从家到医院总共用了 50 分钟，说明小赵从家到相遇点用了 40 分钟，小赵父亲用了 10 分钟，两人同时走了左半部分的路程，可知小赵和小赵父亲的速度之比为 $10/40=1/4=(15\text{km/h})/60\text{km/h}$ ，小赵的速度为 15km/h 。【选 C】

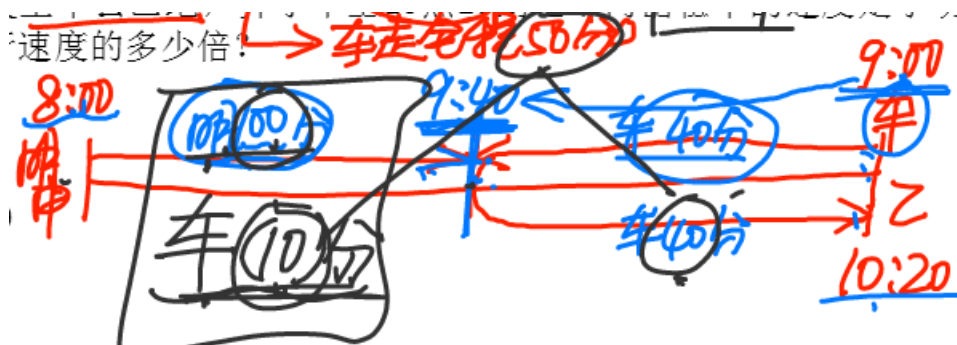


【注意】本题给了父亲的速度，问小赵的速度，根据父亲的速度推小赵的速度，涉及速度的比例，题目中只有时间，没有路程，求速度比，要找同一段路的时间比，父亲没有到达医院，因此找左半段。题目中给一个速度求另一个速度时，是求速度比，考虑利用速度的比例关系来做。

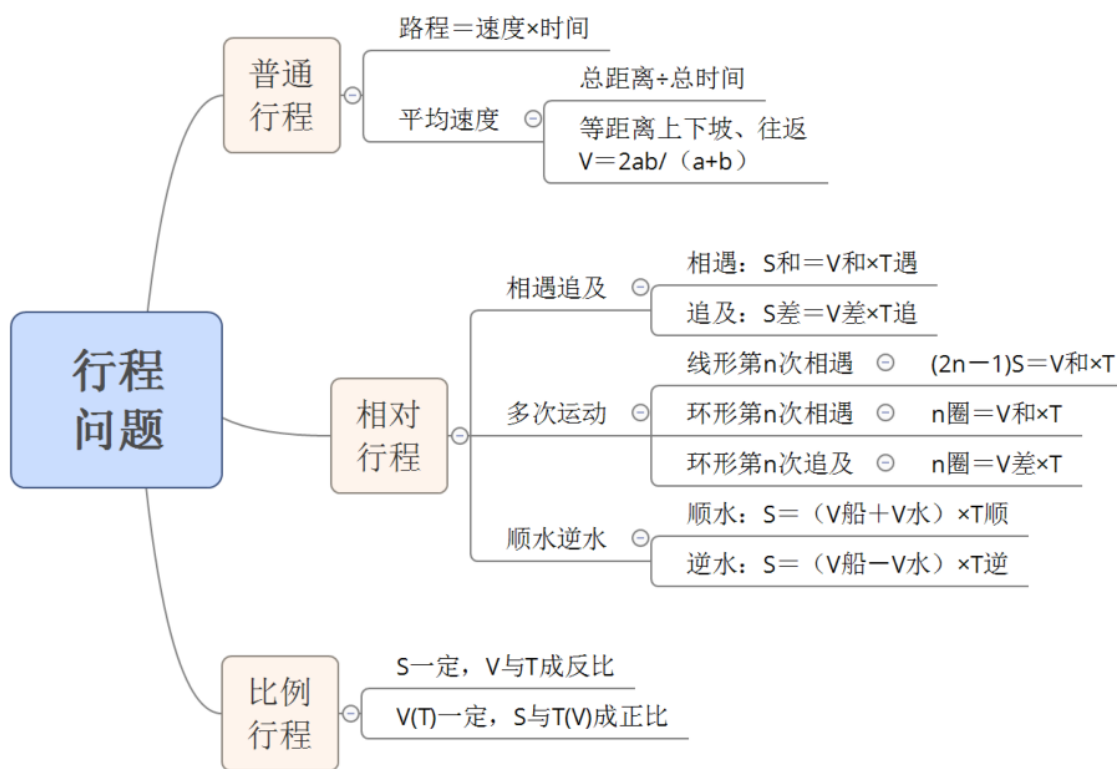
例 9（2016 河南）出租车以固定速度从乙地出发到甲地再回到乙地，往返需要 1 小时 40 分。这一天，小明早上 8 点从甲地出发步行去乙地，出租车在上午 9 点从乙地出发，小明中途遇到这辆出租车便坐车去乙地，并于上午 10 点 20 分到达。问出租车的速度是小明步行速度的多少倍？（ ）

- A. 4
B. 6
C. 8
D. 10

【解析】例 9. “出租车的速度是小明步行速度的多少倍”说明求的是速度比，题目给的全是时间，没有路程，出题老师的目的是只给时间问速度，找时间的比例关系，利用比例来做。如下图，要寻找同一段路，小明 8:00 出发，出租车 9:00 出发，速度固定，车往返需要 1 小时 40 分钟=100 分钟，车单程需要 50 分钟，小明和车相遇的时间未知，车 9:00 出发，10:20 回到起点，往返用时 80 分钟，单程用时 40 分钟，说明车 9:40 接到小明，小明从 8:00 走到 9:40，说明小明走左半段路程用了 100 分钟。看下图左半部分，车走全程需要 50 分钟，车走右半段用了 40 分钟，因此车走左半段需要 10 分钟，速度比= $v_{\text{车}}/v_{\text{明}}$ =100/10=10 倍。【选 D】



【答案汇总】6-9: CCCD



【小结】行程问题：平均速度、相遇追及、顺水逆水、比例行程是重点。

1. 普通行程：

- (1) 路程=速度*时间。考得不多，江苏考得相对多点。
- (2) 平均速度：①总路程/总时间。②等距离上下坡、往返： $V = \frac{2ab}{a+b}$ 。

2. 相对行程：

- (1) 相遇追及：①相遇： $S_{和} = V_{和} \times T_{遇}$ 。
- ②追及（同向）， $S_{差} = V_{差} \times T_{追}$ 。
- (2) 多次运动：①线形第 n 次相遇： $(2n-1) S = V_{和} \times T$ 。

②环形第 n 次相遇: $n \text{ 圈} = V_{\text{和}} * T$ 。

③环形第 n 次追及: $n \text{ 圈} = V_{\text{差}} * T$ 。

(3) 顺水逆水: ①顺水: $S = (V_{\text{船}} + V_{\text{水}}) * T_{\text{顺}}$ 。

②逆水: $S = (V_{\text{船}} - V_{\text{水}}) * T_{\text{逆}}$ 。

3. 比例行程: (1) S 一定, V 和 T 成反比。

(2) V (T) 一定, S 和 T (V) 成正比。

【答案汇总】 第四节工程问题: 1-5: CBD CD; 6-7: DD

第五节行程问题: 1-5: DDD BB; 6-9: CCC D

遇见不一样的自己

come to meet a different you