粉笔直播课

方法精讲-数量 4

主讲教师：唐宋

授课时间：2017.10.02

方法精讲-数量 4（笔记）

第八节　容斥原理

【知识点】容斥原理：用于分析集合，容、斥是指一个元素包容于集合或排斥于集合，有两集合和三集合两种考法。

1. 例：小学考试中语文考试及格的有 30 人，数学考试及格的有 20 人，都及格的有 15 人，全班一共 38 人，问几个人都不及格？

有两种情况（语文、数学），有整体，多种情况（一般为 2~3 种情况）有交叉，集合问题。两种情况中间交叉是两集合问题，若加上外语，三种情况中间交叉是三集合问题。30+20＞38，都及格的计算了两遍（重复计算），语文的 30 人中包含 15 人，数学的 20 人中包含 15 人。语文+数学-都=全-都不=30+20-15=38-（　），（　）=3。

2. 公式：A+B-都=全-都不，适用于两种情况有交叉，考试时考查任意两种情况。

例 1（2017 江西）某乡有 32 户果农，其中有 26 户种了柚子树，有 24 户种了橘子树，还有 5 户既没有种柚子树也没有种橘子树，那么该乡同时种植柚子树和橘子树的果农有（　）。

A. 23 户　　　　B. 22 户

C. 21 户　　　　D. 24 户

【解析】例 1. “既没有……也没有……”即都不。同时种即都种，两种情况有交叉，公式法。A+B-都=全-都不=26+24-（　）=32-5，完整计算，解得（　）=50-27=23。或者考虑尾数法，6+4 尾数为 0，2-5 向前借一位，即 12-5 尾数为 7，0-7 向前借一位，即 10-7 尾数为 3。【选 A】

例 2（2016 河南）某公司组织歌舞比赛，共 68 人参赛。其中，参加舞蹈比赛的有 12 人，参加歌唱比赛的有 18 人，45 人什么比赛都没有参加。问其中参加歌唱比赛但不参加舞蹈比赛的有多少人？（　）

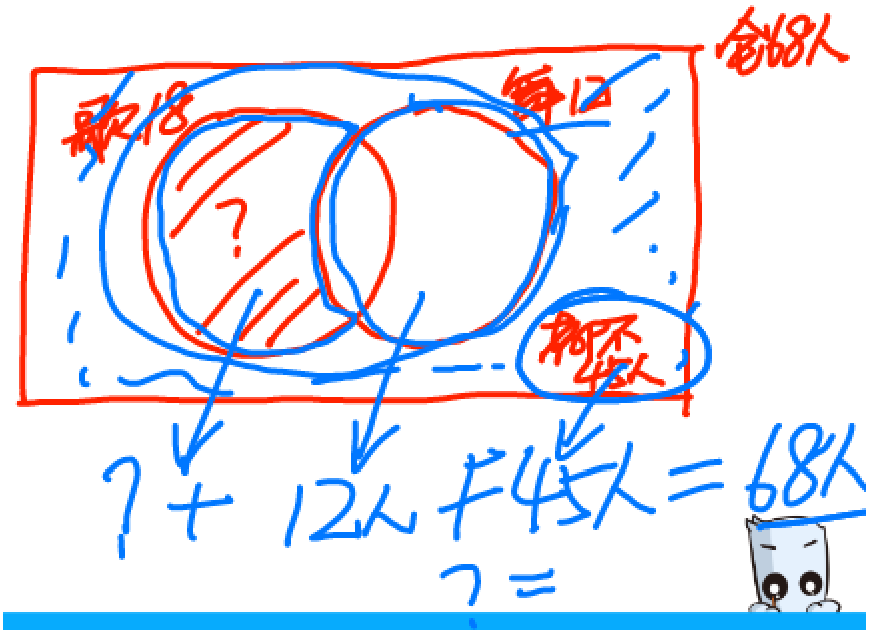
A. 9　　　　　　　　　　　　B. 11

C. 15　　　　　　　　　　　D. 17

【解析】例 2. 都不参加的有 45 人，已知两种情况（参加歌唱、参加舞蹈）、全和都不的情况。问题问只参加歌唱的人数，公式中不存在该数，考虑画图或是推导公式。

方法一：公式法：左边的圈表示 18 个歌唱的人，只参加歌唱的为左边月牙部分（红色阴影部分）。只参加歌唱的人=参加歌唱的人-都参加的人=18-都参加的人。只参加舞蹈的人=参加舞蹈的人-都参加的人。A+B-都=全-都不=12+18-都=68-45，尾数法或是直接计算均可，解得都参加的为 7。只参加歌唱的人=18-7=11。

方法二：画图法：把图形分割成几个部分，求左边月牙部分。右边的圈（参加舞蹈的人）和左边月牙部分无交叉。圈外框里的属于都不参加的。？+12+45=68，解得？=11 人。【选 B】



【注意】1. 例 2 的问法不是问公式中的数字，但可以通过简单推导得出，画图法、公式法均可。

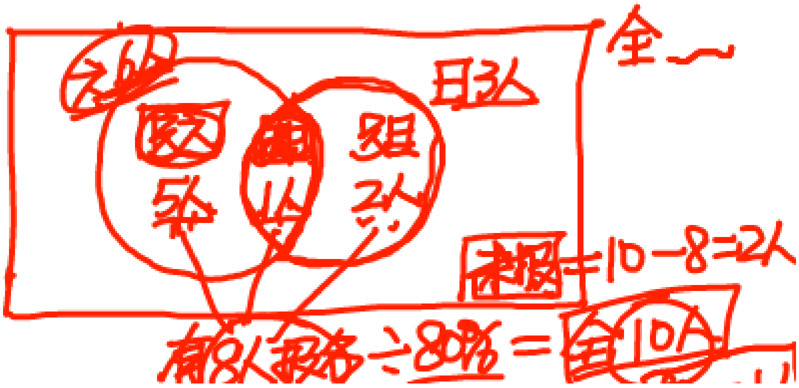
2. 例 1 是纯公式法，例 2 是画图法、公式法均可。例 3 是纯画图法。

例 3（2014 国考）工厂组织职工参加周末公益活动，有 80%的职工报名参加，报名参加周六活动的人数与报名参加周日活动的人数比为 2∶1，两天的活动都报名参加的为只报名参加周日活动的人数的 50%，则未报名参加活动的人数是只报名参加周六活动的人数的（　）。

A. 20%　　　　B. 30%

C. 40%　　　　D. 50%

【解析】例 3. 给出百分数（比例），并非具体人数，考虑赋值。两种情况（报周六、报周日）有交叉，两集合问题。报周日≠只报周日，只报周日=报周日-都参加，只报周六=报周六-都参加。题目中出现多个条件需要推公式，或者出现“只”字，考虑画图。周六、周日分别是一个圈，小圈代表周日，都报的人是只报周日的一半，求未报名的人数、只报周六的人数。若赋值总人数，则解题麻烦。赋值优先考虑交叉区域（中间量，和多个量相关）。赋值都参加的为 1 人，只报周日的为 2 人，报周日的为 3 人，周六：周日=2：1，报周六的为 6 人，只报周六的为 5 人。有 80%的人报名，有 5+1+2=8 人报名，则总人数为 10 人，未报名的为 2 人。2/5=40%。【选 C】



【注意】赋值优先考虑交叉区域（中间量）。此题为图示法结合赋值法。

【知识点】三集合标准型：

1. 公式：A+B+C-（A∩B+B∩C+A∩C）+A∩B∩C=全-都不。

2. 推导：A、B、C 相加为 A+B+C，A∩B 在 A、B 中分别加了一遍，共加了两遍，减去一遍。B∩C 在 B、C 中分别加了一遍，共加了两遍，减去一遍。A∩C

在 A、C 中分别加了一遍，共加了两遍，减去一遍。先各加一遍，再剔除重复的部分。A∩B∩C 在 A、B、C 中分别加了一遍，共加了三遍，在 A∩B、B∩C、A∩C 中分别减了一遍，共减了三遍，补漏即加一遍。即 A+B+C-（A∩B+B∩C+A∩C）+A∩B∩C=全-都不。

3. 记忆方法：各加、去重（减法）、补漏（加法）。

例 4（2015 陕西）针对 100 名旅游爱好者进行调查发现，28 人喜欢泰山，30 人喜欢华山，42 人喜欢黄山，8 人既喜欢黄山又喜欢华山，10 人既喜欢泰山又喜欢黄山，5 人既喜欢华山又喜欢泰山，3 人喜欢这三个景点，则不喜欢这三个景点中任何一个的有多少人？（ ）

A. 20　　B. 18

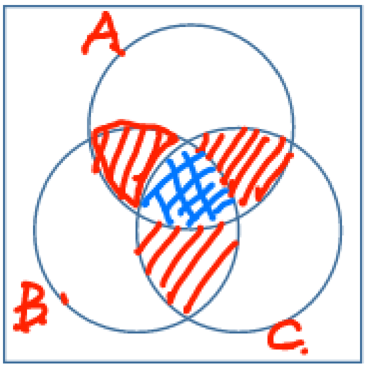
C. 17　　D. 15

E. 14　　F. 13

G. 12　　H. 10

【解析】例 4. 已知 A（泰山）、B（华山）、C（黄山）、A∩B、B∩C、A∩C、A∩B∩C、全，求都不。代入公式：A+B+C-（A∩B+B∩C+A∩C）+A∩B∩C=全-都不=28+30+42-（8+10+5）+3=100-（ ）。考虑尾数法，选项中有 2 个选项尾数为 0。8+0+2 尾数为 0，8+0+5 尾数为 3，0-3+3 尾数为 0，（ ）尾数为 0，正确选项在 A、H 项中。化简得 100-23+3=100-（ ），80=100-（ ），解得（ ）=20。【选 A】

【注意】陕西省考题选项是八选一，数学题分值翻倍。



【知识点】三集合非标准型：

1. 公式：A+B+C-只满足两个条件-2*A∩B∩C=全-都不。

2. 推导：只满足两个条件即红色阴影部分的花瓣，中间部分满足三个条件，A+B+C 中红色阴影部分的花瓣各加了两遍，三朵花瓣之和加了两遍，去重一遍。A+B+C 中 A∩B∩C 加了三遍，只满足两个条件的不包含 A∩B∩C，去重两遍。即 A+B+C-只满足两个条件-2*A∩B∩C=全-都不。

3. 公式区分：（1）既……又……，用标准型公式。（2）（只）参加两项，用非标准型公式。

例 5（2015 广东）某乡镇举行运动会，共有长跑、跳远和短跑三个项目。参加长跑的有 49 人，参加跳远的有 36 人，参加短跑的有 28 人，其中只参加两个项目的有 13 人，参加全部项目的有 9 人。那么参加该次运动会的总人数为多少？（　）

A. 75　　　　B. 82

C. 88　　　　D. 95

【解析】例 5. 已知 A、B、C、只满足两个条件（13）、A∩B∩C，A∩B、B∩C、A∩C 未知，且 A∩B+B∩C+A∩C≠13，运动会总共三个项目，只计算参加人数（运动员人数），都不=0。A+B+C-只满足两个条件-2*A∩B∩C=全-都不=49+36+28-13-9*2=（　）。A、D 项尾数相同，可以考虑尾数法或是计算，9+6+8 尾数为 3，3-3 尾数为 0，0-8 尾数为 2，（　）尾数为 2。【选 B】

【答案汇总】1-5：ABCAB

【注意】题型分布：

1. 1~5 题为主要题型，可分为：

（1）两集合题目：

①运用公式（送分题）；

②画图：有技巧的取值，如赋值法从中间取值。

（2）三集合题目：区分标准型公式和非标准型公式。

①标准型公式：出现“既……又……”，如例 4；

②非标准型公式：出现“满足两项”，如例 3、例 5、例 7。

2.6~7 题为非常规考法。

例 6（2017 陕西）在一项课题研究中，数据搜集方式有问卷调研、当面访谈与电话访谈三种。参加问卷调研的有 27 人，参加电话访谈的有 21 人，参加了三种数据搜集方式的有 5 人，既参加问卷调研又参加当面访谈的有 9 人，既参加问卷调研又参加电话访谈的有 12 人，既参加当面访谈又参加电话访谈的有 7 人。已知只参加当面访谈的人数占数据搜集人员总数的 20%，则数据搜集人员共有（　）人。

A. 45　　B. 50

C. 55　　D. 60

E. 65　　F. 70

G. 75　　H. 80

【解析】例 6. 题干非常长，条件很多。题目有三种情况，但是只给了 2 种参加人数，参加当面访谈的人数未知。根据题意，只参加当面访谈的人数占总人数的 20%=1/5，故总人数为 5 的倍数，观察选项，都是 5 的倍数，不能排除选项。

假设总人数为 5x，只参加当面访谈的人数为 x，因题中出现具体人数，故不能赋值，只能设未知数。因参加当面访谈的人数未知，条件缺少过多，运用公式法较为复杂，则运用画图法。

如下图，参加问卷的、参加电话访谈的、参加当面访谈的分别用三个圈表示。参加问卷的 27 人写圈外，参加电话访谈的 21 人写圈外，参加当面访谈的人数未知，则先不标。

（1）参加三种数据收集方式的有 5 人（标正中，三个圈相交部分）。

（2）既参加问卷又参加当面访谈的有 9 人，即上面圈与右下角圈相交的椭圆部分为 9，为方便读懂，标椭圆右半部分为 9-5=4（若标 9 容易忘记 9 代表哪个部分）。

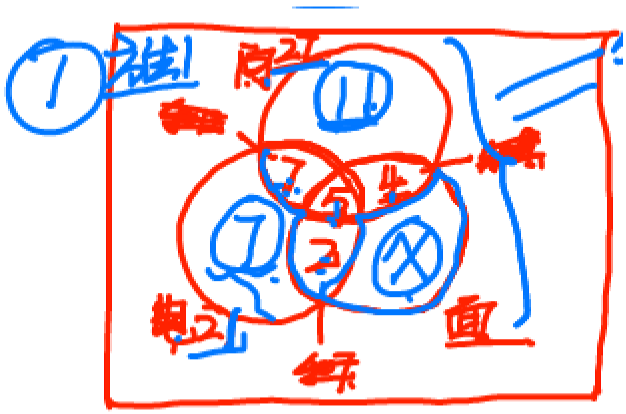
（3）既参加问卷又参加电话访谈的有 12 人，即上面圈与左下角圈相交的椭圆部分为 12，标椭圆左半部分为 12-5=7。

（4）既参加当面访谈又参加电话访谈的有 7 人，即左下角圈与右下角圈相

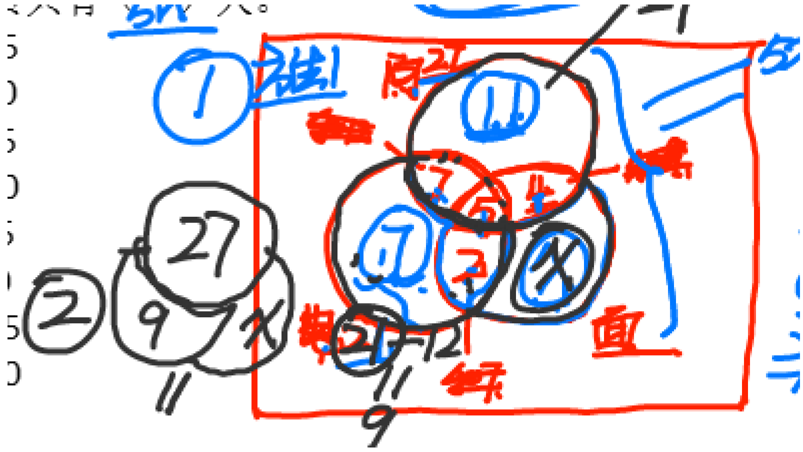
交的椭圆部分为 7，标椭圆下半部分为 7-5=2。

只参加当面访谈的为 x，最外面总人数为 5x，此题未出现三个都不满足的，故都不参加的为 0 人。

方法一：只参加问卷的=27-7-5-4=11 人，只参加电话访谈的=21-7-5-2=7 人，每个区域的人数都有了，则 5x=11+7+7+5+4+2+x，解得 x=36/4=9，总人数 5x=45。



方法二：求当面访谈的，则将其他部分看为两个整体，参加问卷的整个圈为 27，参加电话访谈的-既参加问卷又参加电话访谈的=21-7-5=9，则总人数=27+9+x=5x，解得 x=9，总人数=45。【选 A】



【注意】1.方法二类似于例 2。根据图形列式。

2.此题为三集合画图难度最高的题目。

例 7（2017 江苏）某单位有 72 名职工，为丰富业余生活，拟举办书法、乒乓球和围棋培训班，要求每个职工至少参加一个班。已知三个班报名人数分别为 36、20、28，则同时报名三个班的职工数至多是（ ）。

A. 6 人　　　　B. 12 人

C. 16 人　　　　D. 20 人

【解析】例 7. 出现“至少”，融合最值问题。每个职工至少参加一个班，说明都不报的为 0，且有交叉。三集合只有两种公式，此题运用非标准公式（标准公式数据很多，此题只有四个数据，故运用非标准公式）。此题满足两项和满足三项的未知，一个方程两个未知数，为不定方程。求不定方程，如 x+y=10，求 x 最多，则让 y 最少。代入公式：36+20+28-参加两项-参加三项*2=全部的人数，假设参加两项的人为 x，参加三项的为 y，则 84-x-2y=72，x+2y=12。

方法一：求 y 最多，要使 y 最大，则 2y 也最大，和为定值，则要 x 最小，x 最小可以为 0（题中未出现必须要参加两项）。当 x=0，解得 y=6，此时最大。

方法二：观察选项，若 y=12、16、20，则 x 为负数，不满足条件。【选 A】

【注意】1. 数据分析：

（1）标准公式：数据有 A、B、C、A∩B、B∩C、C∩A、A∩B∩C、总数，此题只知道 A、B、C、总数，只有四个数据，四个方程四个未知数，不能求解。

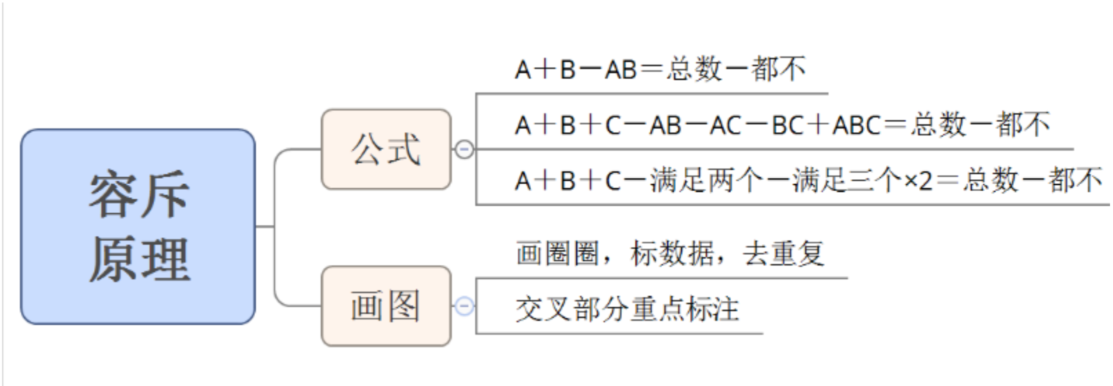
（2）非标准公式：数据有 A、B、C、满足两项、满足三项、总数，已知 A、B、C、总数，四项已知，两项未知，即一个方程两个未知数。

结论：条件少一般运用非标准公式。

2. 出现不定方程，可以运用代入排除。

3. 若将题目改为同时报两个班的最多有多少人：即求 x 最多，则 2y 尽量小，y 最小为 0，则 x 最大为 12，此时选 B。

【答案汇总】6-7：AA



【小结】容斥原理：

1. 公式：

（1）两集合（两个情况有交叉）：A+B-AB=总数-都不。

（2）三集合标准型（出现“既……又……”）：A+B+C-AB-AC-BC+ABC=总数-都不。

（3）三集合非标准型（①出现“满足两项，满足三项”；②缺条件）：A+B+C-满足两个-满足三个*2=总数-都不。

2. 画图：

（1）画圈圈，标数据，去重复（如例 6，已知中间数据为 5，总体为 9，则另一部分为 9-5=4，求总数时所有数字分别相加）。

（2）交叉部分重点标注（赋值从切入点开始）。

【注意】1. 满足一项的考试很少出现，只有陕西出现过一次。总人数=只满足一项+满足两项+满足三项+都不，一般求出后两项前面也能求出来。假设总人数为 100，满足两项的为 40 人，满足三项的为 20 人，都不满足的为 5 人，则只满足一项的为 35 人。

2. 溶液问题、牛吃草问题，在后面学霸课和专项课中讲解。

第九节　最值问题

【知识点】最值问题：

1. 题型：

（1）至少……保证……；

（2）某个主体最……；

（3）都……至少；

（4）最值思维（如第八节例7，x+2y=12）。

注意：（1）、（2）最重要，占主导地位；（3）为套路题，学会套路就是送分题。前面三种题型都运用到第四种思维。

2. 至少……保证……：最不利构造问题。

（1）【引例】袋子中装有 5 个红球，8 个白球，10 个黄球。问：

①至少取（ ）个，才能保证有红球？

答：运气好取一个即可，运气不好可能取 10 个黄球，也没有红球，故考虑最倒霉的情况，最倒霉情况+1=8 白球+10 黄球+下 1 个=19 个球。

②至少取出（ ）个，才能保证至少有 2 个同色的球？

答：要保证至少 2 个同色，最倒霉为每种颜色 1 个，即 1 红+1 白+1 黄+下 1 个=4 个，能保证至少 2 个同色的球。

③至少取出（ ）个，才能保证至少有 8 个同色的球？

答：要保证有 8 个同色的球，惯性思维为每种颜色取 7 个，但红球没有 7 个，故至少 5 红+7 白+7 黄+下 1 个（白或黄）=20 个球。

（2）方法：要保证同种情况至少 n 个，应每种情况各取（n-1）个（如果有不够 n-1 的有多少取多少），最后再加 1。

（3）例子：至少取（ ）张扑克牌，才能保证至少有 5 张同种花色的牌（从一副完整的牌取，广告牌不算）？

答：每种花色各取5-1=4张，大小王没有花色，需取出来，则至少取4*4+2+1=19张。

例 1（2015 河北）有软件设计专业学生 90 人，市场营销专业学生 80 人，财务管理专业学生 20 人及人力资源管理专业学生 16 人参加求职招聘会，问至少有多少人找到工作就一定保证有 30 名找到工作的人专业相同？（ ）

A. 59　　B. 75

C. 79　　D. 95

【解析】例 1. 出现“至少……保证”，考虑最不利+1。要保证至少 n 个人同种情况（专业），应每种情况（专业）各取 n-1=30-1=29 人，再加 1，则至少 29+29+20+16+1，注意财务管理和人力资源凑不够 30 人，全部取完，最后 1 人为软件或市场营销专业，A、C 项尾数相同，B、D 项尾数相同，不能用尾数法，计算可得 95 人。【选 D】

例 2（2016 山东）某个社区老年协会的会员都在象棋、围棋、太极拳、交谊舞和乐器五个兴趣班中报名了至少一项。如果要在老年协会中随机抽取会员进行

调查，至少要调查多少个样本才能保证样本中有 4 名会员报的兴趣班完全相同？（ ）

A. 93　　B. 94

C. 96　　D. 97

【解析】例 2. 方法一：出现“至少……保证”，考虑最不利+1。要保证至少 4 人报同种兴趣班，应每种兴趣班取（4-1）人，再加 1。五个兴趣班至少报名一项，需计算报兴趣班的种数。正面算：选兴趣班没有顺序，共 C（5,1）+C（5,2）+C（5,3）+C（5,4）+C（5,5）=5+10+10+5+1=31 种；则至少要调查 31 种*（4-1）+1=94 人。

方法二：猜题，最不利构造为最不利+1，观察选项，A 项+1=B 项，C 项+1=D 项，则 A 项和 C 项很有可能是忘记加 1，故在 B、D 项中蒙。

方法三：报兴趣班的种数可能不知道是多少，但答案为报兴趣班的种数*(4-1)+1，则答案=3*？+1，故答案不是 3 的倍数，观察选项，A、C 项能被 3 整除，排除。【选 B】

【注意】1. 反面算报兴趣班的种数：报名至少一项的反面为全都不报。报名情况数=总数-都不报的情况，总情况为每个班都可以选，即每个班都有选和不选 2 种选法，则五个班共 2^5 种选法，则至少报一项的种数=2^5-1=31 种。

2. 结论：从 n 个课程中任意选择，至少选一项的情况=2^n-1。

例 3（2014 联考）箱子里有大小相同的 3 种颜色玻璃珠各若干颗，每次从中摸出 3 颗为一组，问至少要摸出多少组，才能保证至少有 2 组玻璃珠的颜色组合是一样的？（ ）

A. 11　　B. 15

C. 18　　D. 21

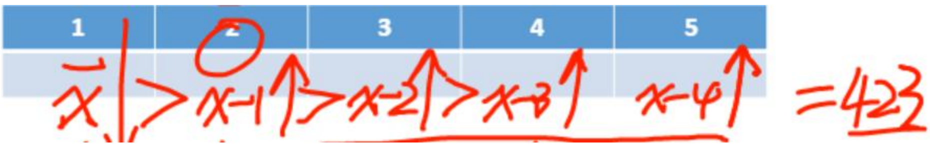
【解析】例 3. 出现“至少……保证”，考虑最不利+1。要保证 2 组是同种颜色组合，则每种颜色组合各取（2-1）组，再加 1，则（ ）=颜色组合种数*（2-1）+1，故只需要求出颜色组合种数即可。假设三种颜色分别为 A、B、C，摸玻璃珠无顺序，颜色组合分类：（1）三色（ABC）：1 种；（2）两色（AAB）：C（3,2）*C（2,1）=3*2=6 种；（3）同色（AAA）：C（3,1）=3 种；则颜色组合有 10 种情况，

故至少摸出 10*1+1=11 组。【选 A】

【知识点】某个主体最……（考的频率最高）

1.【引例】5 个人分 423 斤肉，分到的重量均为整数且互不相等。分得最多的人，最少分（ ）斤。

答：第一个“最多”强调名次为第一，第二个“最少”强调具体数字最少，故题目并不矛盾。设第一名为 x，根据最值思维中的此消彼长思维，要使 x 最少，则剩下四名应尽量多，故第二名为 x-1，第三名为 x-2，第四名为 x-3，第五名为 x-4，求和：5x-10=423，解得：x=86.6；故第一名最少 86.6，即≥86.6，向上取整，则最多的最少分 87 斤。

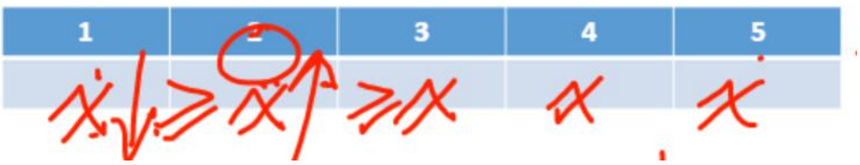


2.注意：问少选多/问多选少。若算出来为 86，则直接选 86 即可，只有小数才需要考虑往哪个方向取整。

3.方法：定位设 x——反推其它——求和列式。

4.易错点：注意有无“互不相等”的条件。

5.若引例中去掉“互不相等”的条件，则可以并列，设第一名为 x，其余的并列第一，则 5x=423，解得：x=84.6，问最少，向上取整为 85。



例 4（2016 上海）现有 21 本故事书要分给 5 个人阅读，如果每个人得到的数量均不相同，那么得到故事书数量最多的人至少可以得到（ ）本。

A.5　　　　B.7

C.9　　　　D.11

【解析】例 4.出现“均不相同”，第一名最多，设第一名为 x，要让它最少，则后面四个人尽量多，分别为 x-1，x-2，x-3，x-4。相加为 5x-10=21，解得 x=6.2，

问至少，向上取整为 7，对应 B 项。【选 B】

1	2	3	4	5
x	x-1	x-2	x-3	x-4

例 5（2017 江苏）在一次竞标中，评标小组对参加竞标的公司进行评分，满分 120 分。按得分排名，前 5 名的平均分为 115 分，且得分是互不相同的整数，则第三名得分至少是（　）。

A. 112 分　　　　B. 113 分

C. 115 分　　　　D. 116 分

【解析】例 5. 只看前五名，设第三名为 x，要让 x 最少，则让其他人尽量多。得分互不相同，说明第二名＞x，第四名＜x，则第一名为 120，第二名为 119，第四名为 x-1，第五名为 x-2。前 5 名的平均分为 115 分，总分=115*5=120+119+x+x-1+x-2，整理得：3x+336=575，解得 x=113。【选 B】

【注意】如果让大于 x 的尽量大，则取封顶的值；如果让大于 x 的尽量小，则取 x+1，x+2，……

1	2	3	4	5
120	119	x	x-1	x-2=

【答案汇总】1-5：DBABB

例 6（2013 国考）某单位 2011 年招聘了 65 名毕业生，拟分配到该单位的 7 个不同部门。假设行政部门分得的毕业生人数比其他部门都多，问行政部门分得的毕业生人数至少为多少名？（　）

A. 10　　　　B. 11

C. 12　　　　D. 13

【解析】例 6.行政部门比其他部门都多，则行政部门为第一名。设行政部门为 x，要让 x 最少，则其他部门人数尽量多。第二名小于行政部门且尽量多，为 x-1，题目没有要求互不相等，则后面可以并列，即其他部门都并列第二，都为 x-1。相加为 7x-6=65，解得 $x=10\frac{1}{7}$，问至少，向上取整为 11。【选 B】

1	2	3	4	5	6	7
x	x-1	x-1	x-1	x-1	x-1	x-1

例 7（2015 陕西）植树节到来之际，120 人参加义务植树活动，共分成人数不等且每组不少于 10 人的 6 个小组，每人只能参加一个小组，则参加人数第二多的组最多有多少人？（　）

A. 32　　B. 33

C. 34　　D. 35

E. 36　　F. 37

G. 38　　H. 39

【解析】例 7.“不少于 10 人”的意思是“≥10”，设第二名为 x，要让 x 尽量多，则其他小组尽量少，第一名为 x+1。题目要求每组不少于 10 人，则第三名为 13 人，第四名为 12 人，第五名为 11 人，第六名为 10 人。汇总求和，即 2x+1+23*2=120，解得 x=36.5。问最多，向下取整为 36。【选 E】

1	2	3	4	5	6
x+1	x	13	12	11	10

【注意】如果让小于 x 的尽量大，则取 x-1，x-2，……；如果让小于 x 的尽量小，则取最低值（如 1，2，3……）。

【知识点】都……至少（多集合反向构造）

1.引例：有 100 人，其中高的 80 人，富的 70 人，帅的 60 人，问“高富帅”至少有几人？

答：正向思考：A+B+C-满足两项-2*满足三项=全部人数，即 80+70+60-x-y*2=100，整理得：x+2y=110，要让 y 最少，则 x 尽量大，x 取到 100 时，y=5，此时 x+y 超过总人数，出现矛盾，如果想要继续分析还需要加上条件“x+y≤100”。

正向考虑比较复杂，因此从反面想：“高富帅至少有几人”的反面是“只要有一项不满足的人最多有几人”，不高的有 20 人，不富的有 30 人，不帅的有 40 人，反面最多有 20+30+40=90 人，则正面最少为 100-90=10 人。

2.结论：S_n-（n-1）M。如果高的为 a_1，富的为 a_2，帅的为 a_3，总数有 M 人，只要有一项不满足的人数：$M-a_1+M-a_2+M-a_3$=3M-S3（反面最多）；正面最少为 M-（3M-S_3）=S_3-2M。即 n=3 时为 S_3-2M，n=4 时为 S_4-3M。

例 8（2015 广东）阅览室有 100 本杂志，小赵借阅过其中 75 本，小王借阅过 70 本，小刘借阅过 60 本，则三人共同借阅过的杂志最少有（　）本。

A.5　　B.10

C.20　　D.30

【解析】例 8.判定题型为多集合反向构造。代入公式：S_n-（n-1）M=75+70+60-2*100=205-200=5。【选 A】

例 9（2013 深圳）一小偷藏匿于某商场，三名保安甲、乙、丙分头行动搜查商场的 100 家商铺。已知甲检查过 80 家，乙检查过 70 家，丙检查过 60 家，则三人都检查过的商铺至少有多少家？（　）

A.5　　B.10

C.20　　D.30

【解析】例 9.直接代入公式：80+70+60-2*100=210-200=10 家。【选 B】

【注意】如果考试中忘记需要减去总数的几倍也没有关系。比如前面计算出 210，此时如果减去 1 倍为 210-100=110，超过总人数，排除；如果减去 3 倍为 210-300=负数，排除；因此只能减去 2 倍。

【知识点】最值思维：

1. 此消彼长：（1）x+2y=12，要让 y 最多，总和是定值，则要让 x 最小。（2）例 4~例 7：数列构造问题（和定最值问题）

2. 找极端情况：如例 1~例 3，问“至少……保证……”，要考虑最极端的情况，即最倒霉的情况。

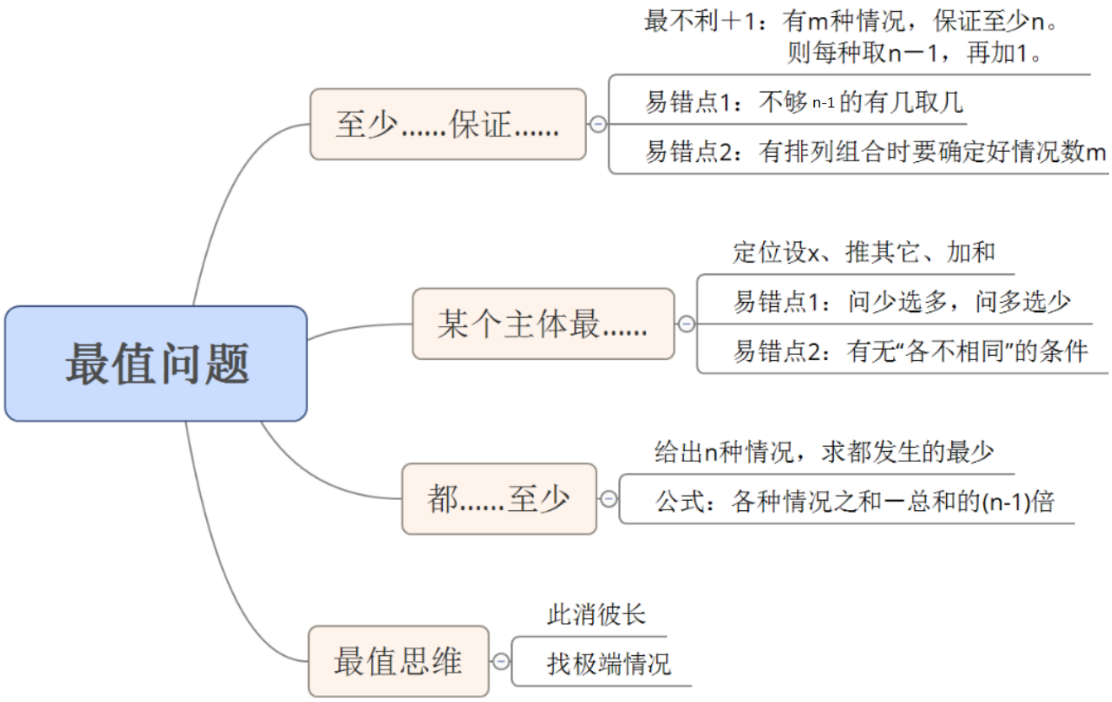
例 10（2013 河南）射箭运动员进行训练，10 支箭共打了 93 环，且每支箭的环数都不低于 8 环。问命中 10 环的箭数最多能比命中 9 环的多几支？（　）

A. 2　　　　B. 3

C. 4　　　　D. 5

【解析】例 10. 每支箭都不低于 8 环，则只能为 8 环、9 环、10 环，设命中 8 环、9 环、10 环的支数分别为 x、y、z，列式：x+y+z=10①，8x+9y+10z=93②，消去 x，②-①*8 得：y+2z=13，要让（z-y）最多，则要让 z 尽量大且 y 尽量小，如果 y=0，z=6.5，不是整数；则让 y=1，此时 z=6，z-y=5，对应 D 项。【选 D】

【注意】本题可以考虑从最大的 D 项代入验证。



【小结】最值问题：

1.“至少……保证……”（重点）：

（1）最不利+1：有 n 种情况，保证至少 n。则每种取 n-1，再加 1。

（2）易错点 1：不够 n-1 的有几取几。

（3）易错点 2：有排列组合时要确定好情况数 m。

2.某个主体最……（重点）：

（1）定位设 x、推其他、加和。

（2）易错点 1：问少选多，问多选少。

（3）易错点 2：有无“各不相同”的条件。

3.“都……至少”：

（1）给出 n 种情况，求都发生的最少。

（2）公式：各种情况之和-总和的（n-1）倍。

4.最值思维。

（1）此消彼长。

（2）找极端情况。

【答案汇总】6-10：BEABD

【答案汇总】

容斥原理：1-5：ABCAB；6-7：AA

最值问题：1-5：DBABB；6-10：BEABD

遇见不一样的自己

come to meet a different you