2017年随机过程大作业：保险公司破产估计

November 30, 2017

1 说明

1. 本次Project 讨论给了大家充分的发挥空间。请大家以课上所讲原理与思维方式为基础，从理论推导和计算机仿真两方面解决问题。（请详细说明你的仿真思路和逻辑过程，注意报告中不要粘贴仿真程序，仿真程序需要单独打包提交。）
2. 题目中没有明确定义的地方可以自由假设，但需要在报告中说明。
3. 引用他人学术成果的要在参考文献中说明。
4. 本次Project题目要求独立完成，如果发现抄袭现象，则计0分。
5. 截止日期前在网络学堂上提交实验报告（PDF 版本）与源程序（Matlab 等，要求可运行即可），希望大家按时提交作业，迟交会扣除相应分数。
6. 实验报告格式请见附件。

2 题目

2.1 问题背景

考虑一种基本的保险公司运行问题。投保人平时按照一定的数额缴纳保险费。当他们发生事故时，便会向保险公司理赔。投保人的投保费主要包含两个部分。一部分是要承担平均意义下的赔偿费用，而另一部分则是在赔偿金额与平均情况有很大偏差时保证公司正常运行同时为公司提供资本的积累。

为了分析该问题，我们首先需要建立一个数学模型。假设在时刻t发生的理赔事件的个数为$(N(t) : t \geq 0)$。通常人们利用泊松过程来对它进行描述。在第k个事件中的理赔金额Y_k组成了一个随机序列。这个序列平稳而且强相关，满足$E(Y_k) = \mu > 0$。另外假设公司原始的资金为$u > 0$，投保人在每个时间单位需要支付的整体的投保资金为$c > 0$。这样就可以用以下的式子来描述公司的资金风险

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \tag{1}$$

保险公司的破产时间T可以定义为公司首次出现负资产的时间

$$T = inf\{t > 0 : R(t) < 0\} \tag{2}$$

如果$T = \infty$，公司就不会出现破产。而如果$T < \infty$，公司最终会破产。

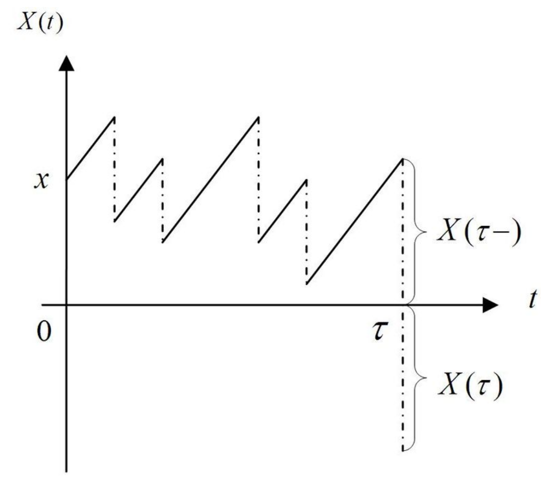

Figure 1: 保险公司财产变化示意图

2.2 求解问题

式(1)的财产计算式可以用下面的含有分形布朗运动的式子来近似。

$$u + c_1 t - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \Rightarrow u + c_2 t - \lambda^H B_H(t) \tag{3}$$

其中$B_H(t)$是一种分形布朗运动。跟一般的布朗运动相比，它不满足独立增量性质。作为布朗运动一个主要的一般化结果，它满足如下的性质。

$$E(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2}\sigma^2\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\} \tag{4}$$

$$E(B_H(t)) = 0 \tag{5}$$

$$E(B_H^2(1)) = \sigma^2 \tag{6}$$

在(3)中，u，c_1，c_2，λ，H都是正的常数，其中$\frac{1}{2} < H < 1$。

基于以上的结果，可以设

$$Q(t) = u + ct - \lambda^H B_H(t) \tag{7}$$

$$\psi(u,t) = P(\underset{0\le s\le t}{inf}(Q(s)) < 0) \tag{8}$$

其中$\psi(u,t)$描述了保险公司在时间t内出现破产的概率，也是最终需要被估计的对象。

问题1：针对式(3)中等号两边的财产变化表达式，请分别编程仿真财产随时间的变化，比较两种随机模型的变化趋势。(其中的参数可以自行设置。针对H，λ，c_2有很多文献给出了估计方法，这里不要求进行估计，主要看变化趋势)

问题2：请计算估计$\psi(u,t)$上界的表达式；请编程生成随机的样本得到实际统计的$\psi(u,t)$，将之与计算得到的上界进行对比，验证上界的合理性。请变换所选的u和H，得到多组对比数据，给出数据表格。（为了简便，假设$\lambda=1$）

上界推导提示：

引理1：令X_1和X_2为连续的高斯随机过程。对于$T>0$，如果有$E[X_1(s)X_1(t)]\geq E[X_2(s)X_2(t)]$，$E[X_1(t)]=E[X_2(t)]=0$，$E[X_1^2(t)]=E[X_2^2(t)]$，其中$0\leq s,t\leq T$。则有

$$P\left\{\underset{0\leq s\leq T}{sup}(X_1(s)-cs)>u\right\}\leq P\left\{\underset{0\leq s\leq T}{sup}(X_2(s)-cs)>u\right\} \tag{9}$$

引理2：假设B是一个标准的布朗运动，并且$u\geq 0$，$c\geq 0$，则有

$$P\left\{\underset{s\geq 0}{inf}(u+cs+B(s))<0\right\}=exp(-2uc) \tag{10}$$

$\phi(x)$是高斯分布$N(0,1)$的分布函数，matlab中可以直接调用，仿真计算上界可能会用到。

注意：$\frac{1}{2}<H<1$。

参考思路：构造随机过程$Y(s)=B(s^{2H})$，结合引理1对$\psi(u,t)$进行放缩，如果上界中有随机变量，需要取期望。