

Projekt do předmětu FYO – Fyzikální optika

## Fourierovská optika. Úprava obrazu.

25. března 2013

**Řešitel:** Jan Wozniak ([xwozni00@stud.fit.vutbr.cz](mailto:xwozni00@stud.fit.vutbr.cz))  
Fakulta Informačních Technologií  
Vysoké Učení Technické v Brně

# 1 Úvod

Obraz, jak jej vnímáme, může být reprezentován jako diskrétní dvourozměrná funkce  $f[i, j]$ . Pro zobrazení v počítači lze rovněž pochopit tuto funkci jako matici, kde hodnoty  $i$  a  $j$  označují index řádku, resp. sloupce, této matice a hodnota prvku matice charakterizuje míru jasů pro daný prvek matice – pixel. V případě, že se jedná o černobílý obrázek, jas je tvořen skalární hodnotou, velmi často 8 bitové hloubky, barevné hodnoty jsou reprezentovány pomocí složených datových typů v konkrétním barevném modelu, tuto strukturu lze chápat jako vektorovou hodnotu.

Existuje mnoho způsobů jak se zabývat optikou, optickým zobrazováním a úpravami obrazu. Jeden z moderních pohledů spočívá ve využití Fourierovy transformace, která slouží k převodu obrazu z prostorové domény do domény frekvenční. Této konverze lze docílit jak digitálně díky matematickým vztahům ale analogickými postupy i s využitím fyzikálních zákonů a čočky.

## 1.1 Historie

Jean Baptiste Joseph Fourier objevil, že libovolná funkce může být rozložena v řadu harmonických funkcí o různých frekvencích a komplexních amplitudách, což se považuje za základ pro Fourierovskou optiku a harmonickou analýzu signálů.

Velmi přínosná pro aplikaci Fourierovy transformace byla práce pánů J. W. Cooleye a J. W. Tukeye, kteří publikovali výrazné zefektivnění výpočtu diskrétní transformace zvané rychlá Fourierova transformace. Tento algoritmus je dodnes nejpoužívanější variantou výpočtu transformace.

## 2 Fyzikální princip

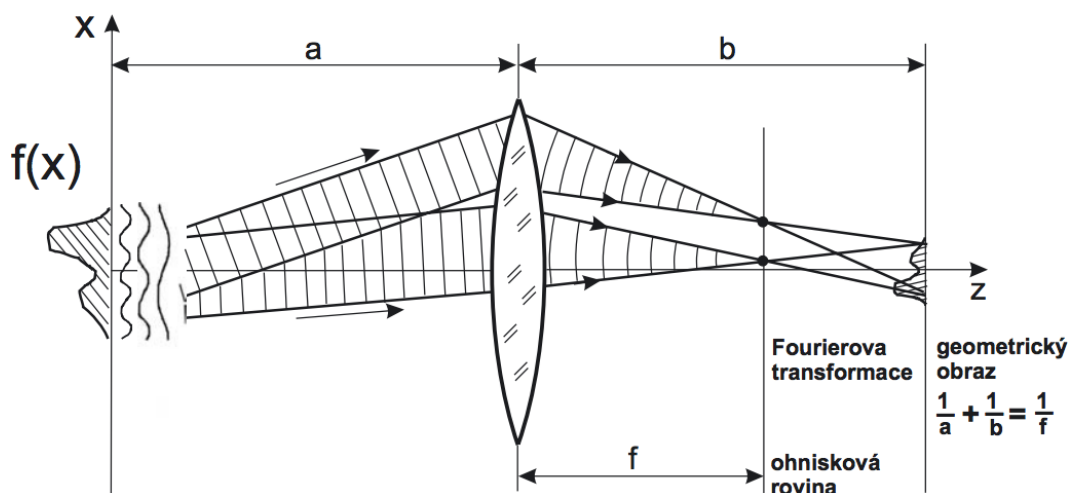
Fourierovská optika popisuje šíření světla pomocí Fourierovy analýzy. Velmi zjednodušené vysvětlení by se dalo definovat tak, že libovolnou vlnu ve volném prostoru je možné chápat jako superpozici rovinných vln. To znamená, že-li libovolná monochromatická vlna o vlnové délce  $\lambda$  a komplexní amplitudě dané funkcí  $f(x, y)$  složena z harmonických složek, pak každá harmonická složka odpovídá rovinné vlně. Každá rovinná vlna se šíří pod úhly  $\theta_x = \sin^{-1}(\lambda v_x)$ ,  $\theta_y = \sin^{-1}(\lambda v_y)$  a odpovídá složce s prostorovými frekvencemi  $v_x$ ,  $v_y$  a její amplituda je  $F(v_x, v_y)$  což je Fourierova transformace funkce  $f(x, y)$ .

S využitím čočky, která zaostří rovinné vlny sdružené s harmonickými Fourierovými komponentami vstupní funkce  $f(x, y)$  do bodů  $(\lambda v_x, \lambda v_y)$  v ohniskové rovině, můžeme jednotlivé komponenty světla zpracovávat individuálně. To znamená, že rozložení světla v zadní ohniskové rovině čočky je úměrné Fourierově transformaci rozložení světla v přední ohniskové rovině [1].

Demonstraci Fourierovy transformace v optice je možné fyzikálně provést pomocí difrakce. Na základě Fresnelovy difrakce jsme teoreticky schopni dojít až k Fourierově transformaci. Tato difrakce je totiž charakteristická tím, že v různě vzdálených rovinách pozorování lze sledovat různé difrakční obrazce. V jednom teoretickém případě, že-li vzdálenost mezi objektem a stínítkem nekonečná, je vzniklý Fresnelův difrakční obrazec totožný s Fraunhoferovým difrakčním obrazcem daného objektu. S použitím optických pomůcek jsme schopni vytvořit Fraunhoferův difrakční i v reálnějším schématu než-li v nekonečné vzdálenosti.

## 2.1 Fraunhoferova difrakce

Fraunhoferovu difrakci prakticky nemůžeme sledovat bez použití optiky (např. spojné čočky), proto není tolik názorná jako Fresnelova difrakce. Poskytuje nám však informace o úhlovém rozložení difraktované intenzity (rovina pozorování Fraunhoferovy difrakce je v nekonečnu a jednotlivým bodům roviny v nekonečnu odpovídají směry). Vyjdeme-li z paprskové optiky, víme, že směřům v předmětovém prostoru odpovídají obrazové body v ohniskové rovině čočky. Z toho tedy vyplývá, že můžeme Fraunhoferovu difrakci pozorovat, vložíme-li za difraktující objekt čočku. Je ovšem třeba, aby na překážku dopadal rovnoběžný svazek světla [2].



**Obrázek 1:** Optické zobrazování z hlediska Fourierovy transformace.

V levé části obrázku je zobrazovaný objekt, pomocí čočky je dosaženo zaostření paprsků a v ohniskové rovině můžeme pozorovat obrazec Fourierovy transformace. Za Fourierovou rovinou se vytvoří obraz objektu. Fraunhoferova difrakce hraje zásadní úlohu právě v zobrazovacích soustavách. Každá taková soustava se skládá ze dvou rovin

- **rovina s Fraunhoferovou difrakcí** – primární obraz
- **rovina obrazová** – sekundární obraz

K popisu sekundárního obrazu, Fraunhoferova obrazce a jejich vzájemného vztahu se používá tzv. Fourierova analýza a matematický aparát nazývaný Fourierovou transformací. Stejně jako je možné z obrazu získat pomocí Fourierovy transformace spektrum a ze spektra poté inverzní Fourierovou transformací opět obraz věrný předloze, je možno zpětně převést z Fraunhoferova difrakčního obrazce opět na obraz. Zásahem do tohoto Fraunhoferova difrakčního obrazce (např. zacloněním některých jeho částí) lze potom snadno ovlivnit výsledný sekundární obraz. Tento se pak může velmi výrazně lišit od věrného obrazové předlohy – objektu.

## 2.2 Prostorový filtr

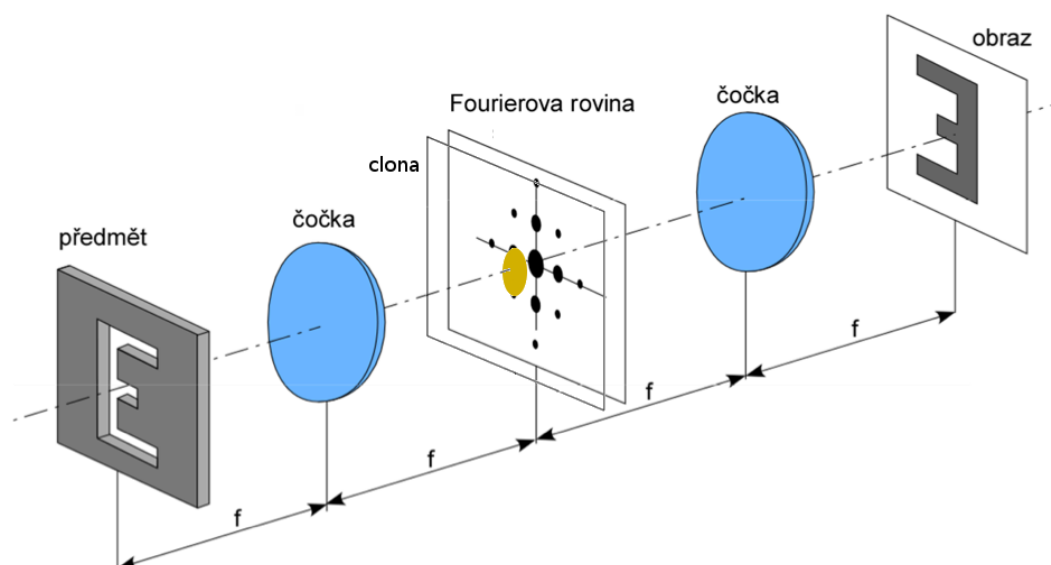
Ve své podstatě se jedná o optickou soustavu sestávající se ze dvou čoček se společným ohniskem. Do roviny ohniska je umístěn filtr, prakticky se jedná o clonku na určité části

Fourierova obrazu. Svazek paprsků je zaostřen první čočkou, část je zcloněna filtrem, a druhou čočkou je opět přeměněn na rovnoběžný svazek paprsků [3]. Filtr slouží k odstranění vad v obraze. Jde o difrakční a interferenční jevy, které zapříčiňují lokální změny intenzity svazku. Tyto jevy mohou vznikat na pevných částech ulpěných na povrchu optických prvků, bublinkách a mechanických poruchách ve skle atd. Pro odstranění poruch způsobených těmito jevy lze použít filtr zvaný dolní propust. Ve frekvenční oblasti jej lze realizovat jako malý otvor uprostřed obrazce. Velikosti dírkových clon se pohybují v řádech desítek  $\mu\text{m}$  a jejich nejvhodnější kombinace s určitým objektivem resp. mikroobjektivem je dána víceméně experimentálně. Je-li clonka příliš malá, nelze se zbavit soustavy interferenčních proužků kolem stopy a je-li clonka příliš velká, bude filtrace neúčinná.

Na obrázku 1 je schéma, jak taková optická soustava může být realizována pomocí 4-f systému, což není nic jiného, než dvoučočkový zobrazovací systém. Skládá se ze tří podcelků:

- vstupní obrazec - čočka - Fourierova rovina
- clona (stínítko)
- Fourierova rovina - čočka - výstupní obrazec

V první části dochází k rozkladu rovnoběžného svazku pomocí čočky, tento obraz je pomocí clony filtrován, neboť jednotlivé složky jsou oddělené a každému bodu odpovídá právě jedna příslušná prostorová frekvence. Filtrací jsme schopni selektivně ovlivnit, které frekvence propustíme a které budeme blokovat. V poslední třetí části dochází k inverzní transformaci kde výsledkem je odpovídajícím způsobem filtrovaný obraz. Kdyby do systému nebylo zahrnuto stínítko, výsledný obraz je totožný se vstupním obrazem.



Obrázek 2: Prostorová filtrace.

### 3 Matematické principy

Tento projekt se zabývá úpravami obrazu, a jak bylo řečeno v úvodu, obraz lze pochopit jako 2D diskretní signál, proto vztahy pro Fourierovu transformaci budou popsány rovněž z pohledu dvourozměrného signálu [4].

$$F[k, l] = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N f[m, n] e^{(-i) \frac{2\pi km}{N}} \cdot e^{(-i) \frac{2\pi ln}{N}} \quad (1)$$

Kde  $N$  jsou rozměry obrazu v pixelech, tedy  $N^2$  dává celkový počet pixelů, a hodnoty  $k$  a  $l$  jsou diskrétní pozice v obrazu. Fourierova transformace pracuje s hodnotami intenzit vstupního obrazu proto je nutné v případě barevného obrázku převést z barevného modelu do hodnot odstínu šedé. Experimentálně stanovena byla pro převod z RGB modelu rovnice 2

$$Y = 0.299 * R + 0.587 * G + 0.114 * B \quad (2)$$

Převod se počítá pro každý pixel obrazu, kde  $Y$  je výsledná jasová hodnota na dané pozici v obraze,  $R$ ,  $G$  a  $B$  jsou hodnoty intenzity v jednotlivých kanálech barevného modelu a konstanty násobící kanálové složky jsou předem vhodně stanoveny aby odpovídaly skutečnému obrazovému vjemu. Výsledkem Fourierovy transformace je obraz stejné velikosti jako byl vstupní, ale místo hodnoty jasu je komplexní číslo.

Neboť velmi častou aplikací pro Fourierovu transformaci je prostorová filtrace, je vhodné uvést vztah pro konvoluci. Dále budou vztahy pro Fourierovu transformaci a konvoluci porovnávány z hlediska časové složitosti.

$$g[m, n] = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N f[k, l] \cdot h[m - k, n - l] \quad (3)$$

### 3.1 Spektrum

Zobrazovaná funkce po provedení Fourierovy transformace se nazývá spektrum. Toto spektrum má z hlediska definice Fourierovy transformace nejnižší frekvence v rozích obrazu. Je zvykem pro názornější vizualizaci spektrum centrovat – přesunout tak, aby nejnižší frekvence byly ve středu obrazu. Díky symetrii spektra jej lze rozdělit na 4 kvadranty a ty pak podél příslušné diagonály prohodit. Počátek funkce pak bude uprostřed obrazu.



**Obrázek 3:** Obraz a jeho centrované spektrum.

## 4 Aplikace

Mimo zpracování obrazu je Fourierova transformace používána v mnoha dalších oblastech jako například řešení parciálních diferenciálních rovnic, rychlé násobení dvou velkých čísel. Výrazně lze pozorovat důležitost Fourierovy transformace na faktu, že v dnešní době velká řada moderních DSP procesorů obsahuje instrukce pro optimalizaci výpočtů rychlé Fourierovy transformace a zároveň existuje široké spektrum paralelních implementací, urychlujících tento výpočet pomocí SIMD instrukční sady na běžných CPU [5].

### 4.1 Analýza složitosti

Pro ideální využití Fourierovy transformace je vhodné znát i složitost výpočtu. Aby bylo možné se abstrahovat od konkrétní implementace či architektury stroje výpočet provádějící, pokusím se provést analýzu pouze na základě asymptotického časového chování algoritmu, paměťové nároky nejsou vzhledem k charakteru výpočtu brány v úvahu.

Ze vzorce 1 pro Fourierovu transformaci lze usoudit, že algoritmus ve dvou vnořených cyklech násobí vektor  $f[n, m]$  komplexní konstantou  $e^{(-i)\frac{2\pi}{N}}$  umocněnou na  $k \cdot m$  resp.  $l \cdot n$ , z čehož by vyplýval horní odhad asymptotické složitosti  $\mathcal{O}(N^3)$ . Algoritmus výpočtu diskrétní Fourierovy transformace je možné výrazně urychlit metodou zvanou *rychlá Fourierova transformace*. Její princip se zakládá na myšlence, že diskrétní fourierovu transformaci délky  $N$  lze vyjádřit jako součet dvou transformací délky  $N/2$ , v jedné jsou liché a ve druhé sudé vzorky a takto lze opět rekurzivně dělit obě poloviny. Výpočet rychlé Fourierovy transformace spadá do nižší třídy složitosti  $\mathcal{O}(N^2 \cdot \log_2 N)$ . Jelikož aplikace filtru na signál ve frekvenční doméně je realizovatelná s kvadratickou složitostí  $\mathcal{O}(N^2)$ , nejnáročnějším výpočtem zůstává stále převod do frekvenční oblasti a zpět.

Výpočetní složitost konvoluce dvourozměrného signálu vzhledem k vzorci 3 je  $\mathcal{O}(N^2 \cdot M^2)$ , kde  $N^2$  je velikost obrazu a  $M^2$  je velikost konvolučního jádra. Je tedy patrné, že časová složitost aplikace filtru ve frekvenční oblasti spadá do nižší třídy složitosti oproti aplikaci filtru v prostorové oblasti. Zároveň jsme ale schopni usoudit, že máme-li dostatečně malý obraz a filtr, reálná doba zpracování může být nižší pro výpočet pomocí konvoluce.

### 4.2 Využití

Fyzikální využití Franhouferovy difrakce je velmi široké, používá se například k analýze snímků z elektronového mikroskopu a snímků rozptylu částic (posouzení kvality zaostření, zjištění rozlišení, identifikace astigmatismu ...), ke kontinuální kontrole tloušťky vláken a drátů a ke korekci zobrazování v optických soustavách.

V oblasti počítačového vidění patří mezi jedny z nejpoužívanějších a nejrobustnějších obrazových příznaků Gaborův filter [6], který se skládá z banky několika Gáborových vlnek o různé magnitudě a orientaci, kde všechny vlny lze generovat z báze vlnky pomocí operací dilatace a rotace. Princip, jak tento filter funguje je velmi podobný principu, jakým analyzuje obraz lidský mozek. Pro popis Gáborovy vlnky je třeba vysvětlit termín *krátkodobá Fourierova transformace*, což je postupná aplikace Fourierovy transformace na krátké úseky signálu. Tím získáme nejen možnost frekvenčně analyzovat signál ale zároveň zachováme informaci i z prostorové domény, bez které by přesná lokalizace objektů v obraze byla takřka nemožná. Těmito krátkými úseky se říká okna. Pokud aplikujeme Gaussovu funkci na tyto krátké okna, jedná se o speciální případ krátkodobé Fourierovy transformace zvaný Gáborova vlnka.

Příbuzné transformace našly praktického využití i přímo v populárních datových formátech jako například cosinova transformace, která tvoří základ pro kompresi obrazových dat ve formátu JPEG nebo diskrétní vlnková transformace pro bezztrátový formát PNG [7, 8].

## 5 Závěr

Výsledkem tohoto projektu bylo seznámit se se základy Fourierovské optiky a vytvořit vhodnou demonstrační aplikaci na toto téma. Výstup aplikace je vidět i na obrázku 3, je volně k dispozici včetně zdrojových kódů ve veřejném git repozitáři <https://github.com/wozniakjan/FY0.git>.

## Reference

- [1] F. Chlup, “Metody pro ovládání amplitudových a fázových modulátorů světla,” diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, 2007 [cit. 2013-03-20].
- [2] J. Lipták, “Studijní text k fyzikálnímu praktiku – Difrakce (ohyb) [online].” [http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt\\_u303.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_u303.pdf). [cit. 2013-03-19].
- [3] “Prostorové filtry.” <http://www.pals.cas.cz/cz/laser/spatial-filters/>. [cit. 2013-03-20].
- [4] J. Černocký, “Zpracování řečových signálů – studijní opora,” 2006 [cit. 2013-03-20].
- [5] “Fast fourier transform (fft).” <http://www.xilinx.com/products/intellectual-property/FFT.htm>. [cit. 2013-03-21].
- [6] W. L. Chao, “Gabor wavelet transform and its application.” <http://disp.ee.ntu.edu.tw/~pujols/Gabor%20wavelet%20transform%20and%20its%20application.pdf>. [cit. 2013-03-20].
- [7] “Recommendation t.81 [online].” <http://www.w3.org/Graphics/JPEG/itu-t81.pdf>. [cit. 2013-03-19].
- [8] “Portable network graphics (png) specification (second edition).” <http://www.w3.org/TR/PNG/>. [cit. 2013-03-19].