Symulacja ruchu ciał niebieskich

Wiktor Przadka

Listopad 2020

Wstęp

Opis Problemu

Problem n-ciał polega na przewidywaniu toru ruchu planet w przestrzeni kosmicznej. Rozwiązanie problemu można sprowadzić do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Motywacja

Motywacją problemu jest chęć zrozumienia ruchu skomplikowanych formacji ciał, takich jak galaktyki i możliwość przewidzenia pozycji ciał niebieskich w czasie.

Rozwiązanie

Obecnie rozwiązanie analityczne jest znane jedynie dla problemu 2-ciał. dla większej ilości ciał nie znamy żadnych analitycznych metod rozwiązania układu równań opisujących ruch ciał. Z tego powodu musimy używać rozwiązań numerycznych.

Model matematyczny

Układ równań grawitacyjnych Newtona

Siły między ciałami o indeksach k i j opisywane są wzorami:

$$F_{k,j} = G\frac{m_k m_j}{\|x_k - x_j\|^2}\ \forall_{k,j\in n}$$

$$\vec{F_{k,j}} = G\frac{m_k m_j}{\|x_k - x_j\|^2}\left(\frac{x_k - x_j}{\|x_k - x_j\|}\right) = G\frac{m_k m_j}{\|x_k - x_j\|^3}(x_k - x_j)\ \forall_{k,j\in n}$$

Gdzie:

G $= 6.6743 \cdot 10^{-11}[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}]$ - stała grawitacyjna

m_i - masa i-tego ciała [kg]

x_i - pozycja i-tego ciała w przestrzeni

$\|x_i - x_j\|$ - odległość między ciałami i,j [m]

Model matematyczny

Układ równań różniczkowych zwyczajnych

Siła dla ciała o indeksie k opisana jest wzorem:

$$F_k = m_k a_k = m_k \frac{\partial v}{\partial t} = m_k \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

stąd dostajemy:

$$\vec{F_k} = \sum_{j=0}^{n} G \frac{m_k m_j}{\|x_k - x_j\|^3}(x_k - x_j)$$

$$m_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} = G \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{m_k m_j}{\|x_k - x_j\|^3}(x_k - x_j)$$

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} = G \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{m_j}{\|x_k - x_j\|^3}(x_k - x_j)$$

Model matematyczny

Model w postaci zmiennych stanu

(1)

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = v_k$$

(2)

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = G \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{m_j}{\|x_k - x_j\|^3}(x_k - x_j)$$

(*)

Jest to model, użyty w symulacji przedstawionej w kolejnej sekcji

Symulacja

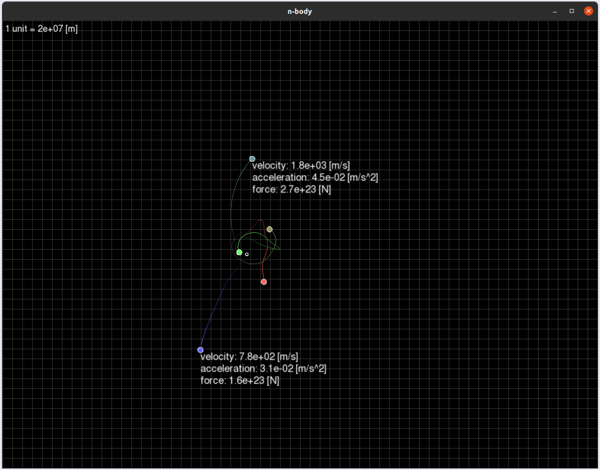
Symulacja została napisana w języku C++ przy użyciu biobliloteki graficznej SFML, kod dostępny jest w repozytorium na github'ie pod linkiem:
https://github.com/wprzadka/modeling_and_simulation/tree/main/n-body-problem

Dodatkowe założenia

Symulacja wyliczana jest na 2 wymiarowej płaszczyźnie, z tego powodu bliskie spotkania między ciałami niebieskimi nie są traktowane jako kolizje. Symulacja traktuje je raczej jako mijanie się ciał w 3 wymiarze przestrzennym.

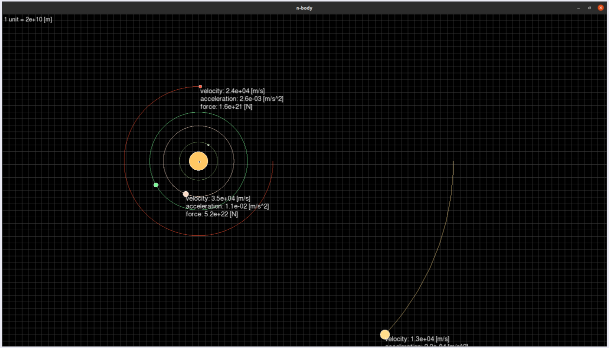
Symulacja

Ruch pięciu ciał o jednakowych masach



Symulacja

System słoneczny



Symulacja

Precyzja obliczeń

Wszelkie obliczenia oraz stałe wykorzystywane w symulacji są zapisane w zmiennych o dużej precyzji - long double

Niedokładności symulacji

Wszelkie niedokładności w symulacji wynikają z ograniczonej precyzji zmiennych wykorzystywanych do obliczeń oraz niedokładności metody Eulera wykorzystywanej do rozwiązywania układu równań różniczkowych zwyczajnych.

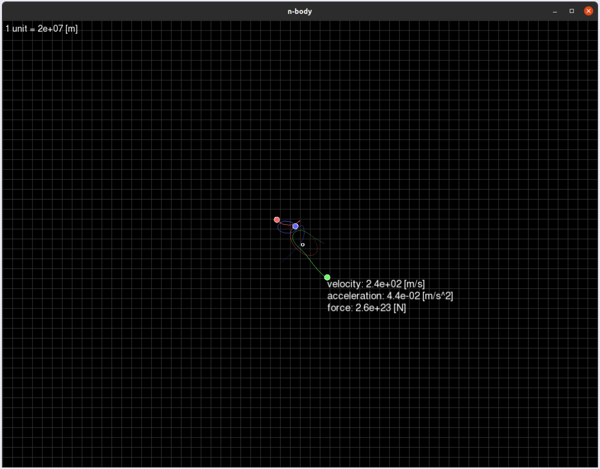
Walidacja

Środek masy systemu

Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że środek masy systemu izolowanego od zewnętrznych sił może poruszać się jedynie ze stałą prędkością. Oznacza to, że jeśli w chwili rozpoczęcia symulacji t_0 ciała są w spoczynku to w każdym momencie czasu symulacji t_i koordynaty środka ciężkości systemu muszą być położone w jednym punkcie.

Walidacja

Środek masy układu trzech ciał



Walidacja

Siła między Ziemią a Słońcem

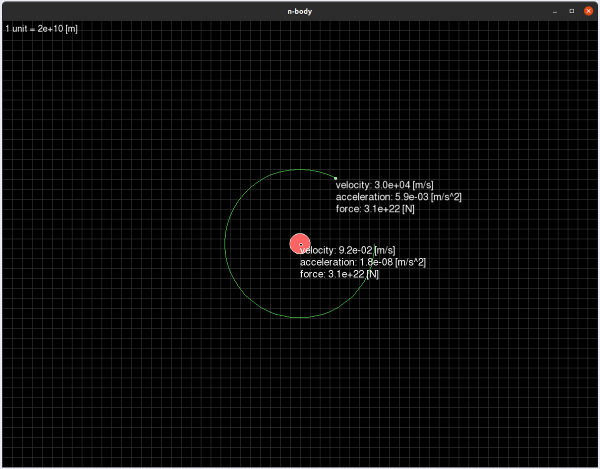
$F_{z,s} = G \cdot \frac{m_z \cdot m_s}{(r_{s,z})^2} =$
$= 6.6743 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.972 \cdot 10^{24} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}}{(1.496 * 10^{11})^2} = 3.5423961 \cdot 10^{22}\ [N]$

Ruch Ziemi wokół Słońca

Dystans między środkami masy ziemi i słońca wynosi
$r_{s,z} = 1.496e11\ [m]$.
Ziemia pokonuje więc
$d_z = 2\pi \cdot 1.496 \cdot 10^{11}[m] = 9.39488 \cdot 10^{11}[m]$
w czasie
$T_z = 365.25[dni] = 365.25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60[s] = 3.15576 \cdot 10^{7}[s]$.
Co daje średnią szybkość ruchu ziemi równą
$v_z = d_z / T_z = \frac{9.39488 \cdot 10^{11}}{3.15576 \cdot 10^{7}} = 2.97705782442 \cdot 10^{4}[\frac{m}{s}]$

Walidacja

Słońce - Ziemia



Walidacja

Siła między Ziemią a Księżycem

$F_{z,k} = G \cdot \frac{m_z \cdot m_k}{(r_{z,k})^2} =$

$= 6.6743 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.972 \cdot 10^{24} \cdot 7.34767309 \cdot 10^{22}}{(3.844 * 10^8)^2} = 1.9820225 \cdot 10^{20}\ [N]$

Ruch Księżyca wokół Ziemi

Dystans między środkami masy ziemi i słońca wynosi
$r_{z,k} = 384.4e6\ [m]$.
Ziemia pokonuje więc
$d_k = 2\pi \cdot 384.4 \cdot 10^6 [m] = 2.41525643208 \cdot 10^9 [m]$
w czasie
$T_k = 27.3[dni] = 27.3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60[s] = 2.358720 \cdot 10^6[s]$.
Co daje średnią szybkość ruchu księżyca równą
$v_k = d_k / T_k = \frac{2.41525643208 \cdot 10^9}{2.358720 \cdot 10^6} = 1.02396911549 \cdot 10^3 [\frac{m}{s}]$

Walidacja

Ziemia - Księżyc