Problem n-ciał

Wiktor Przadka

November 2020

Wstęp

Opis Problemu

Problem n-ciał polega na przewidywaniu toru ruchu planet w przestrzeni kosmicznej. Rozwiązanie problemu można sprowadzić do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Motywacja

Motywacją problemu jest chęć zrozumienia ruchu skomplikowanych formacji ciał, takich jak galaktyki i możliwość przewidzenia pozycji ciał niebieskich w czasie.

Rozwiązanie

Obecnie rozwiązanie analityczne jest znane jedynie dla problemu 2-ciał. dla większej ilości ciał nie znamy żadnych analitycznych metod rozwiązania układu równań opisujących ruch ciał. Z tego powodu musimy używać rozwiązań numerycznych.

Model matematyczny

Układ równań grawitacyjnych Newtona

Siły między ciałami o indeksach k i j opisywane są wzorami:

$$F_{k,j} = G\frac{m_k m_j}{\|r_k - r_j\|^2} \ \forall_{k,j \in n}$$

$$\vec{F_{k,j}} = G\frac{m_k m_j}{\|r_k - r_j\|^2}\left(\frac{r_k - r_j}{\|r_k - r_j\|}\right) = G\frac{m_k m_j}{\|r_k - r_j\|^3}(r_k - r_j) \ \forall_{k,j \in n}$$

Gdzie:

$\mathrm{G} = 6.6743 \cdot 10^{-11}[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}]$ - stała grawitacyjna

m_i - masa i-tego ciała [kg]

r_i - pozycja i-tego ciała w przestrzeni

Model matematyczny

Układ równań różniczkowych zwyczajnych

Siła dla ciała o indeksie k opisana jest wzorem:

$$F_k = m_k a_k = m_k \frac{\partial v}{\partial t} = m_k \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

,więc:

$$\vec{F_k} = \sum_{j=0}^{n} G \frac{m_k m_j}{\|x_k - x_j\|^3}(x_k - x_j)$$

$$m_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} = G \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{m_k m_j}{\|x_k - x_j\|^3}(x_k - x_j)$$

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} = G \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{m_j}{\|x_k - x_j\|^3}(x_k - x_j)$$

Model matematyczny

Model w postaci zmiennych stanu

(1)

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = v_k$$

(2)

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = G \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{m_j}{\|x_k - x_j\|^3}(x_k - x_j)$$

(*)

Jest to model, użyty w symulacji przedstawionej w kolejnej sekcji

Symulacja

Symulacja

Symulacja została napisana w języku C++ przy użyciu biobliotekі graficznej SFML, kod dostępny jest w repozytorium na github'ie pod linkiem:
https://github.com/wprzadka/modeling_and_simulation/tree/main/n-body-problem

Symulacja

Precyzja obliczeń

Wszelkie obliczenia oraz stałe wykorzystywane w symulacji są zapisane w zmiennych o dużej precyzji - long double

Niedokładności symulacji

Wszelkie niedokładności w symulacji wynikają z ograniczonej precyzji zmiennych wykorzystywanych do obliczeń oraz niedokładności metody Eulera wykorzystywanej do rozwiązywania układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Walidacja

Środek masy systemu

Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że środek masy systemu izolowanego od zewnętrznych sił może poruszać się jedynie ze stałą prędkością. Oznacza to, że jeśli w chwili rozpoczęcia symulacji t_0 ciała są w spoczynku to w każdym momencie czasu symulacji t_i koordynaty środka ciężkości systemu muszą być położone w jednym punkcie.

Walidacja

Siła między Ziemią a Słońcem

$$F_{z,s} = G \cdot \frac{m_z \cdot m_s}{distance(z,s)^2} = 6.6743 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.972 \cdot 10^{24} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}}{(1.496 * 10^{11})^2} = 3.5423961 \cdot 10^{22}$$

Ruch Ziemi wokół Słońca

Dystans między środkami masy ziemi i słońca wynosi $r_z = 1.496e11\ [m]$. Ziemia pokonuje więc $d_z = 2\pi \cdot 1.496 \cdot 10^{11}[m] = 9.39488 \cdot 10^{11}[m]$ w czasie $T_z = 365.25[dni] = 365.25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60[s] = 3.15576 \cdot 10^7[s]$. Co daje średnią szybkość ruchu ziemi równą

$$v_z = d_z / T_z = \frac{9.39488 \cdot 10^{11}}{3.15576 \cdot 10^7} = 2.97705782442 \cdot 10^4 [\frac{m}{s}]$$