**PRECONDICIONAMIENTO: UTILIDAD EN LA GENERACIÓN DE MALLAS CON PROCESOS ITERATIVOS**

**Christian Córdova, Wilbert Pumacay, José Castro, Joel Gallegos**

**Filiación 1,** [**christian.cordova@ucsp.edu.pe**](mailto:christian.cordova@ucsp.edu.pe)**, Filiación 2,** [**wilbert.pumacay@ucsp.edu.pe**](mailto:wilbert.pumacay@ucsp.edu.pe)**, Filiación 3,** [**jose.castro@ucsp.edu.pe**](mailto:jose.castro@ucsp.edu.pe)**, Filiación 4,** [**joel.gallegos@ucsp.edu.pe**](mailto:joel.gallegos@ucsp.edu.pe)

**RESUMEN**

El interés fundamental de este trabajo, se centra en como acelerar métodos iterativos para la solución numérica de un sistema de ecuaciones, esta se consigue con precondicionamiento. El precondicionar un sistema lineal es una de las principales fuentes para obtener resultados más eficientes computacionalmente. Es así que en los últimos años se ha desarrollado una mayor investigación con respecto a los métodos de solución directa. Una de sus aplicaciones da lugar en las ecuaciones diferenciales parciales, en las elípticas se generan una matriz sparse (con una gran cantidad de ceros en sus entradas).

Otro punto a tratar en este trabajo, es la importancia de los métodos iterativos que realizan mucho menos pasos con respecto a los métodos directos. Una aplicación directa es la generación de mallas, como caso particular se mostrará la generación de mallas en 2D y luego veremos la diferencia entre el número de iteraciones cuando se usa precondicionamiento.

PALABRAS CLAVES: precondicionamiento, malla, métodos iterativos, **key 4, key 5.**

**PRECONDITIONING: USEFULNESS IN THE MESH GENERATION WITH ITERATIVE PROCESSES**

**ABSTRACT**

The fundamental interest of this work, focuses on how to accelerate iterative methods for the numerical solution of an equitation system, this is achieved with preconditioning. Preconditioning a linear system is one of the main sources for obtaining more efficient computational results. Thus, in recent years, more research has been developed with respect to direct solution methods. One of its applications gives rise to the partial differential equations, in the elliptic ones a dispersed matrix is generated (with a lot of zeros in its entrances).

Another point to be addressed in this paper is the importance of iterative methods that perform much less steps with respect to direct methods. A direct application is the generation of meshes, as particular case will show the generation of meshes in 2D and then we will see the difference between the number of iterations when using preconditioning.

**KEY WORDS:** Preconditioning, mesh, iterative methods, **key word 4, key word 5**

1. **INTRODUCCIÓN**

El interes fundamental de este trabajo, se centra en mostrar maneras de como acelerar métodos iterativos para la solución numérica Ax = b, con la matriz A no singular de Rnxn y b ∈ Rn . la acelaración se consigue con precondicionamiento que será explicado con mas detalles es los siguientes puntos de este trabajo. Con algún detalle, se consideran precondicionamientos basados en métodos iterativos estacionarios y en factorización LU incompleta Otro punto a tratar en este trabajo, es la importancia de los metodos iterativos en la generación de mallas, como caso particular se mostrará la generación de malla en 2D.

1. **PRECONDICIONAMIENTO**

El término precondicionamiento se refiere a transformar un sistema original de ecuaciones lineales en otro con propiedades más favorables en cuanto a la solución iterativa y que siga manteniendo la solución. Un precondicionador es una matriz *M* que efectúa tal transformación.Sea *A* la matriz de orden del siguiente sistema

El número condicionante *cond(A)* se define como:

Luego de pre multiplicar al sistema lineal por la matriz M se debería verificar lo siguiente

Esta desigualdad es fundamental para garantizar al favorecimiento de los métodos iterativos, siempre que sea convergente. El mejor precondicionador para el sistema (1) sería pues como

Sería el óptimo y así el sistema convergería en tan solo una iteración, pero el problema es calcular el coste computacional de esto equivaldría a calcular por algún método directo. Es por ello que se debe buscar un sin coste elevado.

Para garantizar la convergencia de la matriz A, es suficiente mostrar que su radio espectral sea menor a la unidad, matemáticamente .Si en la ecuación (1) hacemos donde es una matriz no

singular, entonces

Donde es la matriz identidad de orden . En este caso para que el sistema lineal converja, se debe cumplir que

Además, mientras el radio espectral sea más cerca de cero entonces la velocidad de convergencia será mayor.

Los precondicionadores deben cumplir principalmente dos propiedades [1]:

* Facilidad de implementación (bajo coste computacional).
* Debe mejorar la convergencia del sistema lineal.

Cabe resaltar que los precondicionadores no solamente se obtienen multiplicando por una matriz a la izquierda, sino también por la derecha e incluso por ambos lados.

1. **MÉTODOS ITERATIVOS**

La importancia de los métodos iterativos en álgebra lineal se deriva de un simple hecho: los métodos directos requieren de , mientras que los métodos iterativos pueden llegar a requerir solamente , Es así que para matrices con se va volviendo intratable el no pensar resolverlo con un algoritmo iterativo. Aunque los métodos iterativos requieren menos almacenamiento no tienen la habilidad de los métodos directos en cuanto a precisiones de solución se requiere. En algunas aplicaciones, los métodos iterativos fallan y es donde el precondicionamiento es necesario, lamentablemente no siempre es suficiente, para lograr la convergencia en un tiempo razonable. Mientras que los métodos directos están prácticamente basados en alguna actualización de la eliminación gaussiana, mientras que los métodos iterativos comprenden una gran variedad de técnicas, que van desde métodos verdaderamente iterativos, como el Jacobi clásico, Gauss-Seidel e iteraciones SOR al subespacio de Krylov, que teóricamente convergen en un número \_nito de pasos. Por ejemplo, cuando A es definida positiva y simétrica (hermitiana en el caso complejo) el método del Gradiente Conjugado resuelve el sistema (1) muy rápido bajo ciertas condiciones con respecto a sus autovalores.

1. **GENERACIÓN DE MALLAS**

La idea principal en la generación de mallas, está dada en la idea de mallar un espacio dado algunos límites de un dominio, por ejemplo el ala de un avión. Existen métodos de generación de mallas estructuradas y no estructuradas. Para nuestro fin se realizó los métodos de generación de mallas estructuradas, dentro del cual se analizó los métodos Algebraicos y los Basados en EDPs. Es necesario mencionar que las mallas estructuradas tienen un orden al momento de ser generadas, lo cual nos permite hacer un precondicionamiento para acelerar el proceso de generación de la malla.

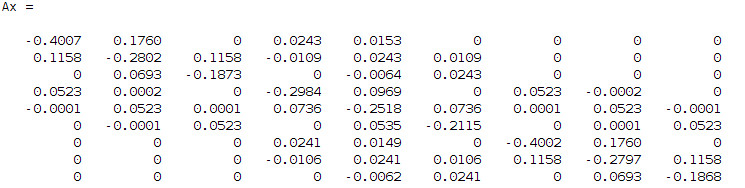
Cuando se quiere representar una geometría que no se puede representar en el sistema de coordenadas ortogonales, es necesario hacer una trasformación que permita mapear la región física a una región computacional.

Para ilustrar los conceptos básicos del mapeo se considera un dominio físico bidimensional en coordenadas cartesianas “” y un dominio computacional en coordenadas cartesianas “”. La transformación entre las coordenadas “” y “” debería ser tal que las fronteras del dominio físico deben coincidir con las coordenadas curvilíneas.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| a) | b) |
| Figura1: a) Plano Físico b) Plano Computacional | |

1. **CONCLUSIONES**

Un ejemplo de la matriz generada por el generador el´ıptico, para el caso de un grid de 3x3 es la siguiente:

Figura 5: Matriz del sistema obtenida por el generador el´ıptico

Si seguimos generando más matrices, veremos que la matriz del sistema es banda. El ancho de la banda

depende del tamaño del grid que se use, siendo este igual a n + 1, con n igual al tamaño del grid a usar. Al

analizar la matriz también pudimos observar que no era ni simétrica ni definida positiva, lo que nos limita en

el caso de la elección del precondicionador ( por ejemplo, no gradiente-conjugado-precondicionado ). Debido

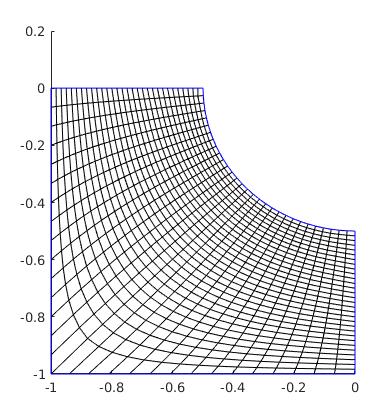
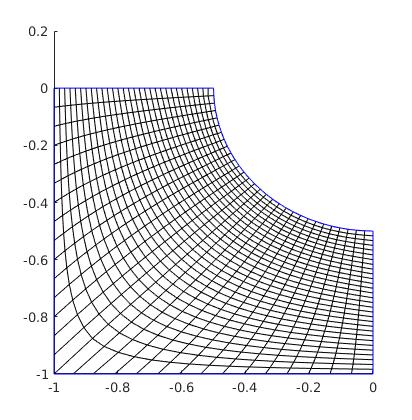
a que es banda y sparse, tenemos que un buen método es trabajar el sistema por bloques. Para este propósito

se uso el método de gauss seidel por bloques como matriz de precondicionamiento, y como se podrá observar

en la siguiente figura ambas mallas son generadas correctamente con ambos métodos, con la diferencia que el

método de gauss seidel por bloque converge con mucho menos iteraciones que el método de gauss seidel

tradicional.



a) b)

Figura 6: a)Gauss seidel por bloque. Converge con 13iteraciones b)Gauss seidel. Converge con 715 iteraciones

1. **REFERENCIAS**
2. BENZI, Michele. “Preconditioning Techniques for Large Linear Systems: A Survey”. Mathematics and Computer Science Department, 2002.
3. SAAD, Yousef. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Second edition, 2000. 447pp
4. THOMPSON, Joe; SONI, Bharat; WEATHERILL, Nigel. Grid Generation. 1999. 1096pp
5. TEJA, Víctor. “Generación de Mallas Numéricas para Geometrías Irregulares y Complejas”, 2011