7. Egenvärden och egenvektorer.

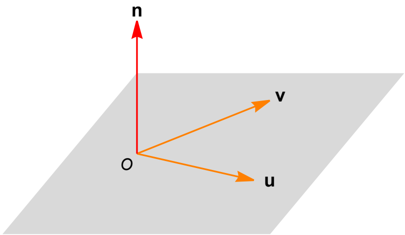
Per-Sverre Svendsen

Högskolan i Halmstad,
Akademin för informationsteknologi (ITE).

Antag att matrisen A är avbildningsmatris för linjära avbildningen spegling i ett plan genom origo, O. En vektor $\boldsymbol{n}$ är normalvektor för planet och vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ är parallella med planet. Motsvarande kolonnvektorer är N, U och V. Det innebär att:

$$AN = -N = (-1) \cdot N, \quad AU = U = 1 \cdot U, \quad AV = V = 1 \cdot V.$$

Vektorerna N, U, V är då **egenvektorer** till matrisen A med **egenvärden** -1 respektive 1.



Mer allmänt för en $n \times n$ matris A, en $n \times 1$ kolonnvektor $X \neq 0$ och $\lambda \in \mathbb{R}$:

Egenvärden och -vektorer.

Om $A\,X = \lambda\,X$ är X en egenvektor till A med tillhörande egenvärde λ.

Vi vill alltså bestämma en icke-trivial ($X \neq 0$) lösning till ekvationssystemet:

$A\,X = \lambda\,X \Leftrightarrow \lambda\,E\,X - A\,X = 0 \Leftrightarrow (\lambda\,E - A)\,X = 0.$

Om nu $\det(\lambda\,E - A) \neq 0$ har ekvationssystemet ovan enbart lösningen $X = 0$.
Egenvärdena ges därför av lösningar av

Sekularekvationen (karakteristiska ekvationen).

$\det(\lambda\,E - A) = 0$, där $p_A(\lambda) = \det(\lambda\,E - A)$ är **det karakteristiska polynomet**.

- Eftersom $p_A(\lambda)$ är av samma grad i λ som matrisens ordning, får vi upp till 3 distinkta egenvärden för en 3×3 matris, 4 för en 4×4 - matris etc.
- Efter framtagning av egenvärdena får vi egenvektorerna från lösning av ekvationssystemet $A\,X = \lambda\,X$.
- Om X är en egenvektor med egenvärde λ är även $t\,X$ ($t \neq 0$) en egenvektor med samma egenvärde eftersom $A(tX) = t(AX) = t\,(\lambda\,X) = \lambda\,(tX)$.

Allmänna resultat för egenvektorer och egenvärden.

Antag att matrisen A har egenvektorn X med egenvärdet λ. Då gäller:

- cA har egenvektorn X med egenvärdet $c\,\lambda$,
- A^n har egenvektorn X med egenvärdet λ^n,
- $A + aE$ har egenvektorn X med egenvärdet $\lambda + a$.

Om A dessutom är inverterbar gäller:

- Alla egenvärden för matrisen är skilda från noll,
- A^{-1} har egenvektorn X med egenvärdet λ^{-1}.

Givet en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med avbildningsmatris A.
Antag vidare att A har 3 linjärt oberoende egenvektorer X_1, X_2, X_3, dvs.

$$\left\{\begin{array}{lcl} AX_1 & = & \lambda_1 X_1 \\ AX_2 & = & \lambda_2 X_2 \\ AX_3 & = & \lambda_3 X_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcrcrcr} F(\boldsymbol{x}_1) & = & \lambda_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 & + & 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 & + & 0 \cdot \boldsymbol{x}_3 \\ F(\boldsymbol{x}_2) & = & 0 \cdot \boldsymbol{x}_1 & + & \lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 & + & 0 \cdot \boldsymbol{x}_3 \\ F(\boldsymbol{x}_3) & = & 0 \cdot \boldsymbol{x}_1 & + & 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 & + & \lambda_3 \cdot \boldsymbol{x}_3 \end{array}\right.$$

Välj nu en ny bas med A's egenvektorer som basvektorer, dvs. basbytesmatrisen blir $S = (X_1\ X_2\ X_3)$. Eftersom bilden av basvektorerna är kolonnvektorer i den nya avbildningsmatrisen är denna enligt resultatet ovan nu en **diagonalmatris**:

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Vi säger i detta fall att matrisen A är **diagonaliserbar**. Notera vidare:

- $D = S^{-1}AS \Leftrightarrow A = SDS^{-1} \Rightarrow A^n = SDS^{-1}\,SDS^{-1} \cdots SDS^{-1} = SD^nS^{-1}$.
- Om A har 3 distinkta egenvärden finns alltid 3 linjärt oberoende egenvektorer och matrisen är därmed diagonaliserbar.
  Med mindre än 3 distinkta egenvärden *kan* matrisen vara diagonaliserbar (men den behöver inte vara det).
- En symmetrisk matris, A, är alltid diagonaliserbar med en ortogonal basbytesmatris S, dvs. $D = S^{-1}AS = S^TAS$.
- Resultaten ovan gäller även för en matris av godtycklig ordning n.