

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki
Zakład Statystyki Matematycznej i Analizy Danych

Problem dwóch prób zależnych dla danych funkcjonalnych

Paired two-sample problem for functional data

Wojciech Przybyła

Kierunek: Matematyka

Specjalność studiów: Statystyka i analiza danych

Nr albumu: 456421

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. UAM dra hab. Łukasza Smagi

Poznań 2022

Poznań, dnia 27.05.2022 r.

OŚWIADCZENIE

Zdając sobie sprawę z odpowiedzialności prawnej, że przypisanie sobie w pracy dyplomowej autorstwa istotnego fragmentu lub innych elementów cudzego utworu lub ustalenia naukowego stanowi podstawę stwierdzenia nieważności postępowania administracyjnego w sprawie nadania tytułu zawodowego oświadczam, że przedkładana praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera ona treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami, a przy jej pisaniu, poza niezbędnymi konsultacjami, nie korzystano z pomocy innych osób.

Wojciech Przybyła

STRESZCZENIE

W pracy podjęta jest tematyka analizy powtarzanych pomiarów, które są danymi funkcjonalnymi. Omówione są różne testy statystyczne dla problemu dwóch prób zależnych, oparte o statystykę testową będącą pewną całką z funkcji średnich z próby. W celu przybliżenia rozkładu tej statystyki testowej przy prawdziwości hipotezy zerowej wykorzystano cztery metody: asymptotyczna, bootstrapowa, permutacyjna i procedura oparta o przybliżenie typu Boxa. Wykazano własności teoretyczne oraz, z pomocą badań symulacyjnych, własności skończenie próbkowe testów, takie jak rozmiar i moc. Zaprezentowano również praktyczny przykład zastosowania omawianych metod.

Słowa kluczowe: analiza powtarzanych pomiarów, dane funkcjonalne, metoda bootstrapowa, metoda permutacyjna, moc testu, przybliżenie Boxa, rozmiar testu, testy statystyczne

ABSTRACT

In the paper, the subject of analysis of repeated measures consisting of functional data is discussed. Various statistical tests for paired two-sample problem are described, which base on the test statistic being an integral of sample mean functions. In order to approximate the distribution of this test statistic under the null hypothesis, four methods are used: asymptotic, bootstrap, permutation and a procedure based on the Box-type approximation. Theoretical and, utilising simulated data, finite-sample properties of these tests, like size and power, are shown. Additionally, a practical example of using discussed methods is presented.

Key words: Box-approximation, bootstrap method, functional data, permutation method, power of test, repeated measurements analysis, size of test, statistical test

Spis treści

Wstęp	2
1 Problem dwóch prób zależnych dla danych funkcjonalnych	3
1.1 Analiza danych funkcjonalnych	3
1.2 Problem dwóch prób zależnych	4
1.3 Statystyka testowa	4
2 Testy statystyczne	6
2.1 Test asymptotyczny	6
2.2 Testy bootstrapowe i permutacyjne	9
2.3 Test oparty o przybliżenie Boxa	11
3 Badania symulacyjne	13
3.1 Opis eksperymentów	13
3.2 Kontrola błędu pierwszego rodzaju	16
3.3 Moc testu	17
4 Przykład praktyczny	20
Podsumowanie	24
Bibliografia	26

Wstęp

Analiza danych funkcjonalnych to nowoczesny dział statystyki matematycznej zajmujący się danymi reprezentowanymi przez funkcje określone na pewnym zbiorze domkniętym. Jej metody znajdują zastosowanie w wielu praktycznych zagadnieniach, w szczególności w medycynie, meteorologii, ekonomii, chemometrii. W pracy zostanie podjęta tematyka analizy powtarzanych pomiarów, które są danymi funkcjonalnymi. Omówione zostaną różne testy statystyczne dla problemu dwóch prób zależnych.

Praca składa się z następujących rozdziałów:

- **Rozdział 1:** opisanie problemu dwóch prób zależnych dla danych funkcjonalnych oraz przedstawienie odpowiedniej statystyki testowej,
- **Rozdział 2:** przedstawienie różnych metod prowadzących do postaci czterech testów statystycznych,
- **Rozdział 3:** przeprowadzenie symulacji mających na celu porównanie skończenie próbkowych własności przedstawionych testów statystycznych, tj. kontroli błędu pierwszego rodzaju i mocy testu,
- **Rozdział 4:** zastosowanie przedstawionych testów statystycznych do rzeczywistych danych.

Pisząc niniejszą pracę wykorzystano literaturę podaną w bibliografii. Jest ona podstawowym źródłem rozszerzającym informacje na tematy tu poruszane. Numeracja definicji, twierdzeń oraz przykładów jest oddzielna dla każdego rozdziału. Pierwsza cyfra oznacza numer rozdziału, a druga to kolejny numer twierdzenia, przykładu, itp. Analogicznie numerowane są wzory. Dowody kończą się symbolem ■.

Rozdział 1

Problem dwóch prób zależnych dla danych funkcjonalnych

1.1 Analiza danych funkcjonalnych

Przez *dane funkcjonalne* rozumie się dane, które można reprezentować przez funkcje, powierzchnie, czy obrazy. Dane te mogą być pozyskiwane przy pomocy różnych narzędzi pomiarowych, w regularnych lub nieregularnych odstępach czasu. Otrzymywane w ten sposób pomiary, w dyskretnej (choć najczęściej ogromnej) ich liczbie, można interpolować i wygładzać, w efekcie konstruując ciągłe funkcje oddające przebieg obserwowanego zjawiska w skali makro [5].

W praktyce dane funkcjonalne otrzymywane są przez obserwacje obiektów doświadczalnych w czasie, przestrzeni lub według innych, podobnych kryteriów [10]. Dane te, najczęściej ze względu na narzędzia wykorzystane do pomiarów, zawierają w sobie pewien błąd (szum). Jednym z głównych zadań statystyki jest odpowiedź na pytanie, czy ów szum ma istotny wpływ na zróżnicowanie przedstawianych danych.

Cele analizy danych funkcjonalnych są zasadniczo takie same jak dla innych dziedzin statystyki, m.in. (jak opisano w pracy [6]):

- reprezentacja danych funkcjonalnych w sposób ułatwiający ich dalszą analizę,
- przedstawianie danych, aby podkreślić pewne zachodzące zjawiska,
- wyszukiwanie wzorców i zmienności w obserwowanych danych,
- przewidywanie zachowania zmiennych zależnych na podstawie informacji o zmiennych niezależnych.

Wiele klasycznych metod statystycznych znalazło już swoje odpowiedniki dla danych funkcjonalnych. Różne metody estymacji, testowania hipotez statystycznych, analizy skupień, regresji, klasyfikacji, wyznaczania obserwacji odstających itd. zostało zaproponowanych do analizy danych funkcjonalnych. Wiele z tych metod można znaleźć w monografiach i artykułach przeglądowych [1], [3], [6], [4], [9] i [10]. Tematem niniejszej pracy będzie testowanie hipotez statystycznych dotyczących danych funkcjonalnych.

1.2 Problem dwóch prób zależnych

Wiele metod statystycznych ma swoje przełożenie w kontekście analizy danych funkcjonalnych. Niniejsza praca jest poświęcona problemowi *dwóch prób zależnych*, gdzie bada się dane uzyskane dwukrotnie z tego samego źródła, najczęściej w wyniku zmiany warunków eksperymentu.

Tematyka ta została poruszona w [5] oraz rozwinięta w [8]. Celem tego dokumentu jest zestawienie i opisanie wyników badań w tej dziedzinie analizy danych funkcjonalnych.

Definicja 1.1. *Wartością oczekiwaną zmiennej losowej ciągłej X nazywamy liczbę*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx$$

gdzie f jest funkcją gęstości rozkładu zmiennej losowej X .

Definicja 1.2. *Dla procesu stochastycznego X na zbiorze D funkcja kowariancji $\mathbb{C} : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowana jako*

$$\mathbb{C}(s, t) = \text{Cov}(X(s), X(t)) = \mathbb{E}[(X(s) - \mathbb{E}(X(s)))(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))]$$

Obiekty matematyczne rozważane w dalszych częściach pracy oznaczane będą w myśl [5] oraz [8].

Założmy, że dysponujemy próbą funkcjonalną składającą się z niezależnych funkcji losowych X_1, X_2, \dots, X_n , które można przedstawić w następującej postaci:

$$X_i(t) = m(t) + \epsilon_i(t), \quad t \in [0, 2], \quad (1.1)$$

gdzie m jest daną funkcją, a ϵ_i są funkcjami losowymi o wartości oczekiwanej $\mathbb{E}(\epsilon_i(t)) = 0$ oraz funkcji kowariancji $\mathbb{C}(s, t)$. Hipoteza zerowa głosząca, że nie ma istotnych różnic pomiędzy dwoma różnymi warunkami eksperymentu, przyjmuje wówczas postać

$$\bigwedge_{t \in [0, 1]} H_0 : m(t) = m(t + 1). \quad (1.2)$$

Dla pomiarów $t \in [0, 2]$ ignorowane są możliwe okresy, podczas których obiekt nie był monitorowany.

1.3 Statystyka testowa

Na potrzeby testowania prawdziwości wyżej postawionej hipotezy, w pracy [5] została zaproponowana następująca statystyka testowa:

$$\mathcal{C}_n = n \int_0^1 (\bar{X}(t) - \bar{X}(t + 1))^2 dt, \quad (1.3)$$

gdzie

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(t), \quad t \in [0, 2]$$

jest funkcją średnią z próby. Ta statystyka testowa została skonstruowana na bazie idei, że hipoteza zerowa powinna zostać odrzucona w przypadku większego poziomu różnic *pomiędzy grupami*, definiowanego jako różnica między średnimi prób, czyli estymatorami funkcji średniej m [8].

Rozdział 2

Testy statystyczne

2.1 Test asymptotyczny

Niech $L^2[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ oznacza przestrzeń Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem określonych na przedziale $[a, b]$, tj.

$$f \in L^2[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b f^2(x) dx < \infty.$$

Niech

$$X_i(t) = m(t) + \epsilon_i(t), 1 \leq i \leq n$$

będą n niezależnymi procesami losowymi należącymi do przestrzeni $L^2[0, 2]$ definowanymi na przedziale $[0, 2]$, gdzie m jest daną funkcją, a ϵ_i jest procesem losowym o wartości oczekiwanej równej zero oraz funkcji kowariancji $\mathbb{C}(s, t)$.

W dalszym ciągu pracy wykorzystywane będą poniższe założenia:

$$\text{tr}(\mathbb{C}) := \int_0^2 \mathbb{C}(t, t) dt < \infty \tag{A1}$$

$$v_1(t) := X_1(t) - m(t) \text{ spełnia własność } \mathbb{E} \|v_1\|^4 = \mathbb{E} \left(\int_0^2 v_1^2(t) dt \right)^2 < \infty \tag{A2}$$

$$\bigwedge_{t \in [0, 2]} \left(\mathbb{C}(t, t) > 0 \quad \wedge \quad \max_{t \in [0, 2]} \mathbb{C}(t, t) < \infty \right) \tag{A3}$$

$$\bigwedge_{(s, t) \in [0, 2]^2} \mathbb{E}(v_1^2(s)v_1^2(t)) < C < \infty, \quad C - \text{const.} \tag{A4}$$

Definicja 2.1. Różną od zera funkcję f nazywamy **wektorem własnym (funkcją własną)** operatora liniowego D , jeżeli

$$Df = \lambda f$$

gdzie λ nazywamy **wartością własną** operatora D .

Definicja 2.2. Niech $X_i, i = 1, \dots, n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym standaryzowanym $N(0, 1)$.
Mówi się wówczas, że rozkład zmiennej losowej

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

jest **rozkładem χ^2 z n stopniami swobody** i zapisuje się jako $Y \sim \chi^2(n)$.

Jeśli X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(\mu, 1), \mu \neq 0$, wówczas mówi się o **niecentralnym rozkładzie χ^2** .

Definicja 2.3. Wyróżnia się m.in. następujące rodzaje **zbieżności** ciągu zmiennych losowych X_n do zmiennej losowej X :

- **według rozkładu:**

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

dla każdego punktu nieciągłości x dystrybuanty F_X

- **według prawdopodobieństwa:**

$$X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \bigwedge_{\epsilon > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

W podejściu asymptotycznym przedstawionym w pracy [5] formułuje się następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.1. Przy założeniach $A1$ oraz $A3$, przy prawdziwości hipotezy zerowej $H_0 : \bigwedge_{t \in [0,1]} m(t) = m(1+t)$ zachodzi

$$\mathcal{C}_n \xrightarrow{d} \mathcal{C}^* := \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k A_k,$$

gdzie A_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o centralnym rozkładzie $\chi^2(1)$, a $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ są wartościami własnymi funkcji kowariancji

$$\mathbb{K}(s, t) = \mathbb{C}(s, t) - \mathbb{C}(s, t+1) - \mathbb{C}(s+1, t) + \mathbb{C}(s+1, t+1), \quad s, t \in [0, 1]$$

takimi, że $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ i $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty$.

Dowód: Założenie A1 gwarantuje słabą zbieżność (tj. wg rozkładu) funkcji średniej próby do procesu gaussowskiego. Na jego podstawie, jak podaje [10]:

$$\mathbb{E} \|X_1\|^2 = \|m\|^2 + \text{tr}(\mathbb{C}) < \infty.$$

Twierdzenie 2.2 (Centralne Twierdzenie Graniczne). *Jeśli X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi pochodzącymi z tej samej populacji o wartości oczekiwanej μ oraz dodatniej, skończonej wariancji σ^2 , to ciąg zmiennych losowych*

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

jest zbieżny według rozkładu do standardowego rozkładu normalnego $N(0, 1)$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Korzystając z tw. 2.2 (Centralnego Twierdzenia Granicznego) dla zmiennych losowych przyjmujących wartości w przestrzeni Hilberta $L^2[0, 2]$ z miarą probabilistyczną, zachodzi zbieżność

$$\sqrt{n}(\bar{X}(t) - m(t)) \xrightarrow{d} z(t),$$

gdzie z jest procesem gaussowskim o wartości oczekiwanej 0 i funkcji kowariancji $\mathbb{C}(s, t)$. Przy założeniu hipotezy zerowej, z twierdzenia o odwzorowaniach ciągłych (odwzorowania ciągle zachowują granice):

$$\mathcal{C}_n = n \int_0^1 (\bar{X}(t) - \bar{X}(t+1))^2 dt \xrightarrow{d} \int_0^1 (z(t) - z(1+t))^2 dt \quad (2.1)$$

Oznaczając $\xi(t) = z(t) - z(1+t)$ można zaobserwować, że również jest to proces gaussowski o wartości oczekiwanej 0. Funkcja kowariancji tego procesu:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(s, t) &= \text{Cov}(\xi(s), \xi(t)) \\ &= \mathbb{E} [(\xi(s) - \mathbb{E}(\xi(s))) (\xi(t) - \mathbb{E}(\xi(t)))] \\ &= \mathbb{E} [(z(s) - z(1+s) - \mathbb{E}(z(s) - z(1+s))) (z(t) - z(1+t) - \mathbb{E}(z(t) - z(1+t)))] \\ &= \mathbb{E} [(z(s) - \mathbb{E}[z(s)] - (z(1+s) - \mathbb{E}[z(1+s)])) \\ &\quad \cdot (z(t) - \mathbb{E}[z(t)] - (z(1+t) - \mathbb{E}[z(1+t)]))] \\ &= \mathbb{E} [(z(s) - \mathbb{E}[z(s)]) (z(t) - \mathbb{E}[z(t)])] \\ &\quad - \mathbb{E} [(z(s) - \mathbb{E}[z(s)]) (z(1+t) - \mathbb{E}[z(1+t)])] \\ &\quad - \mathbb{E} [(z(1+s) - \mathbb{E}(z(1+s))) (z(t) - \mathbb{E}[z(t)])] \\ &\quad + \mathbb{E} [(z(1+s) - \mathbb{E}(z(1+s))) (z(1+t) - \mathbb{E}[z(1+t)])] \\ &= \mathbb{C}(s, t) - \mathbb{C}(s, t+1) - \mathbb{C}(s+1, t) + \mathbb{C}(s+1, t+1). \end{aligned}$$

jest funkcją z przestrzeni Hilberta $L^2[0, 1]$.

Przy założeniach **A1** oraz **A3** $\text{tr}(\mathbb{K})$ jest skończony, na podstawie formuły

$$\mathbb{C}(s, t) \leq \sqrt{\mathbb{C}(s, s)\mathbb{C}(t, t)} \leq \max_{t \in [0, 2]} \mathbb{C}(t, t) < \infty$$

Na mocy tw. 4.2 w [10] $\|\xi\|^2$ ma ten sam rozkład co \mathcal{C}^* . Jako że $\mathcal{C}_n \xrightarrow{d} \|\xi\|^2$ przy $n \rightarrow \infty$, otrzymuje się ostatecznie tezę. ■

Wartości λ_i , będące wartościami własnymi funkcji $\mathbb{K}(s, t)$, mogą być wyestymowane, korzystając z naturalnego estymatora, jakim jest

$$\hat{\mathbb{K}}(s, t) = \hat{\mathbb{C}}(s, t) - \hat{\mathbb{C}}(s, t + 1) - \hat{\mathbb{C}}(s - 1, t) + \hat{\mathbb{C}}(s + 1, t + 1), \quad s, t \in [0, 1] \quad (2.2)$$

gdzie

$$\hat{\mathbb{C}}(s, t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i(s) - \bar{X}(s))(X_i(t) - \bar{X}(t)), \quad s, t \in [0, 2] \quad (2.3)$$

jest nieobciążonym estymatorem funkcji kowariancji $\mathbb{C}(s, t)$ [10].

Lemat 2.1. *Przyjmując założenia Twierdzenia 2.1 oraz założenia A1-A4 zachodzi jednostajna zbieżność według prawdopodobieństwa*

$$\hat{\mathbb{K}}(s, t) \xrightarrow{P} \mathbb{K}(s, t)$$

na $[0, 1]^2$.

Dowód: Na podstawie wykorzystywanych założeń zachodzi $\hat{\mathbb{C}}(s, t) \xrightarrow{P} \mathbb{C}(s, t)$ jednostajnie na $[0, 2]^2$ (patrz Twierdzenie 4.17 w [10]). Korzystając z definicji estymatora podanej w (2.2) oraz z twierdzenia o odwzorowaniu ciągłym, otrzymuje się tezę. ■

Równanie (2.1) pozwala na skonstruowanie prostego **algorytmu Monte Carlo** w celu oszacowania końcowej p -wartości [5]. W tym celu dokonuje się dyskretyzacji danych oraz oszacowania na ich podstawie funkcji kowariancji \mathbb{C} , bazując na estymatorze $\hat{\mathbb{C}}$ danym wzorem (2.3). Następnie symulowanych jest B trajektorii na podstawie procesu gaussowskiego ($z(t)$ w Równaniu (2.1)) o macierzy kowariancji $\hat{\mathbb{C}}$. Na podstawie owych trajektorii oblicza się wartość ich statystyk testowych $\tilde{\mathcal{C}}_n^i = \int_0^1 (z_i(t) - z_i(1+t))^2 dt$, $i = 1, 2, \dots, B$ oraz końcową p -wartość ze wzoru

$$\frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(\mathcal{C}_n \leq \tilde{\mathcal{C}}_n^i) \quad (2.4)$$

2.2 Testy bootstrapowe i permutacyjne

Założenie addytywności przedstawione w równaniu (1.1) nie jest spełnione dla wielu różnych funkcji, w szczególności funkcji gęstości – muszą one spełniać konkretne warunki

(m.in. $f \geq 0$ oraz $\int_{\mathbb{R}} f = 1$). W związku z tym w pracy [5] przedstawia się dwa podejścia nieparametryczne, niewymagające wyżej wspomnianego założenia o addytywności.

Przy prawdziwości hipotezy zerowej spełniona jest równość

$$\mathcal{C}_n = n \int_0^1 (\bar{X}(t) - m(t) + m(1+t) - \bar{X}(1+t))^2 dt. \quad (2.5)$$

W celu przybliżenia rozkładu prawdopodobieństwa powyższej statystyki można wykorzystać **metodę bootstrapową**.

Definicja 2.4. *Próbką bootstrapową nazywa się próbę n -elementową pobraną z n -elementowej próby w procesie n -krotnego losowania pojedynczych obserwacji ze zwracaniem.*

Metoda ta przebiega w następujących krokach:

1. Obliczyć wartość statystyki \mathcal{C}_n na podstawie danych oryginalnych. Niech \mathcal{C}_0 oznacza tę wartość.
2. Wybrać B niezależnych prób bootstrapowych $\mathbf{X}_i^*, i = 1, \dots, B$. Każda z nich składa się z n funkcji:

$$\mathbf{X}_b^* = \{X_1^{*,b}(t), \dots, X_n^{*,b}(t)\}, \quad t \in [0, 2], b = 1, \dots, B$$

3. Dla każdej próby bootstrapowej wybranej w kroku 2. obliczyć wartości statystyki testowej \mathcal{C}_n . Niech $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_B$ oznaczają otrzymane wartości.
4. Obliczyć p -wartość według wzoru:

$$\frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(\mathcal{C}_i > \mathcal{C}_0).$$

Jeżeli \mathcal{C}^* jest statystyką testową obliczoną na podstawie powyższego algorytmu, to

$$\mathcal{C}_n^* = n \int_0^1 (\bar{X}^*(t) - \bar{X}(t) + \bar{X}(t+1) - \bar{X}^*(t+1))^2 dt \xrightarrow{d} \int_0^1 (z^*(t) - z^*(t+1))^2 dt \quad (2.6)$$

gdzie $z^*(t) - z^*(t+1)$ jest procesem gaussowskim o wartości oczekiwanej równej 0 i funkcji kowariancji

$$\mathbb{K}^*(s, t) = \mathbb{S}(s, t) - \mathbb{S}(s, t+1) - \mathbb{S}(s+1, t) + \mathbb{S}(s+1, t+1)$$

gdzie $\mathbb{S}(s, t), s, t \in [0, 2]$ jest funkcją kowariancji z próby, tj. funkcją kowariancji \bar{X} . W pracy [5] podana jest intuicja dowodu powyższej tezy, jednak dokładny dowód wymaga głębszej analizy.

Wyżej przedstawiony algorytm korzysta z własności estymatorów i można go uogólnić w celu oszacowania rozkładu dowolnej statystyki. Najbardziej powszechną do tego celu metodą jest **test permutacyjny**, który zakłada, że rodzaj zależności dla każdej pary danych jest taki sam, np. liniowy. Założenie to zwykle nie działa dla większej liczby prób [5].

Przy zastosowaniu techniki permutacyjnej do prowadzonych rozważań otrzymuje się następujący algorytm, będący nieznaczną modyfikacją algorytmu bootstrapowego:

1. Obliczyć wartość statystyki \mathcal{C}_n na podstawie danych oryginalnych. Niech \mathcal{C}_0 oznacza tę wartość.
2. Wybrać B niezależnych prób *permutacyjnych* $\mathbf{X}_i^*, i = 1, \dots, B$. Każda z nich składa się z n funkcji:

$$\mathbf{X}_b^* = \{X_1^{*,b}(t), \dots, X_n^{*,b}(t)\}, \quad t \in [0, 2], b = 1, \dots, B,$$

gdzie z prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{2}$ dla $i = 1, \dots, n$:

$$X_i^{*,b}(t) = X_i(t) \quad \vee \quad X_i^{*,b}(t) = X_i(t + (-1)^{I_{[1,2]}(t)}).$$

3. Dla każdej próby permutacyjnej wybranej w kroku 2. obliczyć wartości statystyki testowej \mathcal{C}_n . Niech $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_B$ oznaczają otrzymane wartości.
4. Obliczyć p -wartość według wzoru:

$$\frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(\mathcal{C}_i > \mathcal{C}_0).$$

2.3 Test oparty o przybliżenie Boxa

W [8] zwrócono uwagę na problem wyżej opisanych metod, jakim jest ich czasochłonność. W celu znalezienia szybszego sposobu przybliżenia rozkładu statystyki \mathcal{C}_n , w tej pracy wykorzystano przybliżenie Boxa przy założeniu hipotezy zerowej.

Wykorzystane zostaną założenia i wyniki Twierdzenia 2.1. Rozkład statystyki \mathcal{C}_n jest znany, z wyjątkiem wartości własnych $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$ funkcji kowariancji $\mathbb{K}(s, t)$. Te wartości własne można wyestymować, korzystając z estymatora (2.2).

Do oszacowania rozkładu statystyki \mathcal{C}_n przy założeniu hipotezy zerowej wykorzystane teraz zostanie **przybliżenie Boxa**. Metoda ta jest również znana jako *przybliżenie dwóch kumulant* [10]. Do oszacowań wykorzystywane są w niej *kumulanty*, często stosowane w analizie danych funkcjonalnych [8].

Definicja 2.5. Niech X będzie zmienną losową, a $\psi_X(t)$ jej funkcją charakterystyczną. Jeżeli

$$\log(\psi_X(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k(X) \frac{it^k}{k!}$$

to wielkości $\kappa_k(X)$ nazywane są **kumulantami** zmiennej losowej X .

W szczególności pierwszymi 4 kumulantami są

$$\begin{aligned} \kappa_1(X) &= \mathbb{E}(X), & \kappa_2(X) &= \text{Var}(X), \\ \kappa_3(X) &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^3, & \kappa_4(X) &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^4 - 3 \text{Var}^2(X). \end{aligned}$$

Główną ideą tejże metody jest oszacowanie rozkładu $\mathcal{C}_0^* := \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k A_k$ za pomocą rozkładu zmiennej losowej postaci

$$\beta \chi^2(d),$$

gdzie parametry β, d obliczane na podstawie przyrównania pierwszych dwóch kumulant zmiennych losowych \mathcal{C}_0^* oraz $\beta\chi^2(d)$. Wykorzystując obliczenia wykonane w pracy [10], otrzymuje się

$$\beta = \frac{\text{tr}(\mathbb{K}^{\otimes 2})}{\text{tr}(\mathbb{K})}, \quad d = \frac{\text{tr}^2(\mathbb{K})}{\text{tr}(\mathbb{K}^{\otimes 2})}, \quad (2.7)$$

gdzie

$$\text{tr}(\mathbb{K}) = \int_0^1 \mathbb{K}(t, t) dt, \quad \mathbb{K}^{\otimes 2} := \int_0^1 \mathbb{K}(s, u) \mathbb{K}(u, t) du.$$

Naturalnymi estymatorami parametrów ze wzoru (2.7) są te uzyskane poprzez podstawienie estymatora funkcji kowariancji $\hat{\mathbb{K}}(s, t)$ zdefiniowanego wzorem (2.2), co prowadzi do wzorów

$$\hat{\beta} = \frac{\text{tr}(\hat{\mathbb{K}}^{\otimes 2})}{\text{tr}(\hat{\mathbb{K}})}, \quad \hat{d} = \frac{\text{tr}^2(\hat{\mathbb{K}})}{\text{tr}(\hat{\mathbb{K}}^{\otimes 2})}. \quad (2.8)$$

Przy założeniu hipotezy zerowej otrzymuje się wówczas przybliżenie $\mathcal{C}_n \sim \hat{\beta}\chi^2(\hat{d})$, co prowadzi do testu, w którym p -wartość oblicza się wzorem

$$\mathbb{P} \left(\chi^2(\hat{d}) > \frac{\mathcal{C}_n}{\hat{\beta}} \right).$$

Rozdział 3

Badania symulacyjne

W celu porównania rozmiarów i mocy testów opisanych w niniejszej pracy, przeprowadza się badania symulacyjne. Wszystkie poszczególne metody będą oznaczone w następujący sposób:

- **test A** – test asymptotyczny,
- **test B** – test bootstrapowy,
- **test P** – test permutacyjny,
- **test BT** – test oparty o przybliżenie Boxa.

Wszystkie symulacje zostały przeprowadzone przy pomocy środowiska R [7].

3.1 Opis eksperymentów

Zgodnie z eksperymentami przeprowadzonymi w [5] oraz [8] dla testów A, B, P i BT, generuje się realizacje procesów losowych $X_i(t)$ postaci

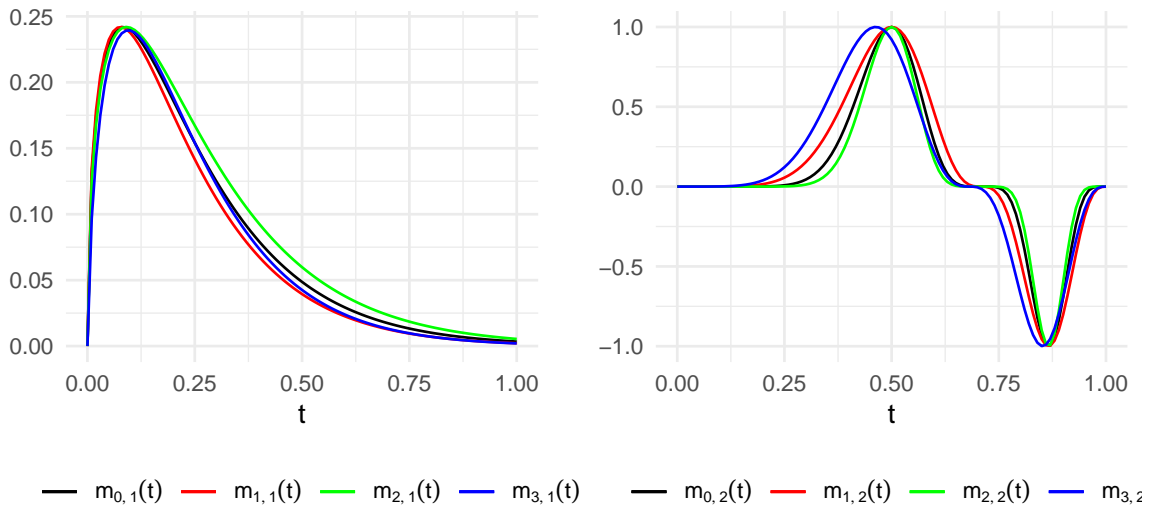
$$X_i(t) = \begin{cases} m_1(t) + \epsilon_{i1}(t), & t \in [0, 1] \\ m_2(t) + \epsilon_{i2}(t), & t \in [1, 2] \end{cases}, \quad i \in 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

dla funkcji $m_j(t)$ oraz $\epsilon_{ij}(t)$ opisanych poniżej. Rozpatrywany będzie rozmiar próby $n = 35$.

Rozpatrywane będą następujące funkcje:

$$\begin{aligned}
m_{0,1}(t) &= \sqrt{\frac{6t}{\pi}} \exp(-6t) I_{[0,1]}(t) & m_{0,2}(t) &= (\sin(2\pi t^2))^5 I_{[0,1]}(t) \\
m_{1,1}(t) &= \sqrt{\frac{13t}{2\pi}} \exp\left(-\frac{13t}{2}\right) I_{[0,1]}(t) & m_{1,2}(t) &= (\sin(2\pi t^2))^3 I_{[0,1]}(t) \\
m_{2,1}(t) &= \sqrt{\frac{11t}{2\pi}} \exp\left(-\frac{11t}{2}\right) I_{[0,1]}(t) & m_{2,2}(t) &= (\sin(2\pi t^2))^7 I_{[0,1]}(t) \\
m_{3,1}(t) &= \sqrt{5t^{\frac{2}{3}}} \exp(-7t) I_{[0,1]}(t) & m_{3,2}(t) &= (\sin(2\pi t^{\frac{9}{5}}))^3 I_{[0,1]}(t)
\end{aligned}$$

Wykresy powyższych funkcji są przedstawione na Rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Wykresy funkcji $m_{i,j}(t)$, $t \in [0, 1]$, wykorzystanych do przeprowadzenia symulacji

Skonstruowanych zostanie 8 różnych modeli spełniających równanie modelu (3.1):

- dla **modeli M0-M3** przyjmuje się $m_1 = m_{0,1}$, $m_2 = m_{j,1}$, $j = 0, 1, 2, 3$
- dla **modeli M4-M7** przyjmuje się $m_1 = m_{0,2}$, $m_2 = m_{j,2}$, $j = 0, 1, 2, 3$

Warto zauważyć, że dla modeli M0 oraz M4 hipoteza zerowa jest prawdziwa.

Występujące w równaniu (3.1) procesy $\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}$ konstruuje się na bazie procesów gaussowskich. Rozpatrywane będą trzy rodzaje procesów losowych, dalej nazywanych *błędami*:

- **normalny**: $\epsilon_{i1}(t) := \xi B_{i1}(t)$, $\epsilon_{i2}(t) := \rho \epsilon_{i1}(t) + \xi \sqrt{1 - \rho^2} B_{i2}(t)$ ($\rho = 0, 0.25, 0.5$),
- **lognormalny**: $\epsilon_{ij}(t) := \exp(\epsilon_{ij}(t))$, $j = 1, 2$,
- **mieszany**: $\epsilon_{i1}(t) := \epsilon_{i1}(t)$, $\epsilon_{i2}(t) := \exp(\epsilon_{i2}(t))$,

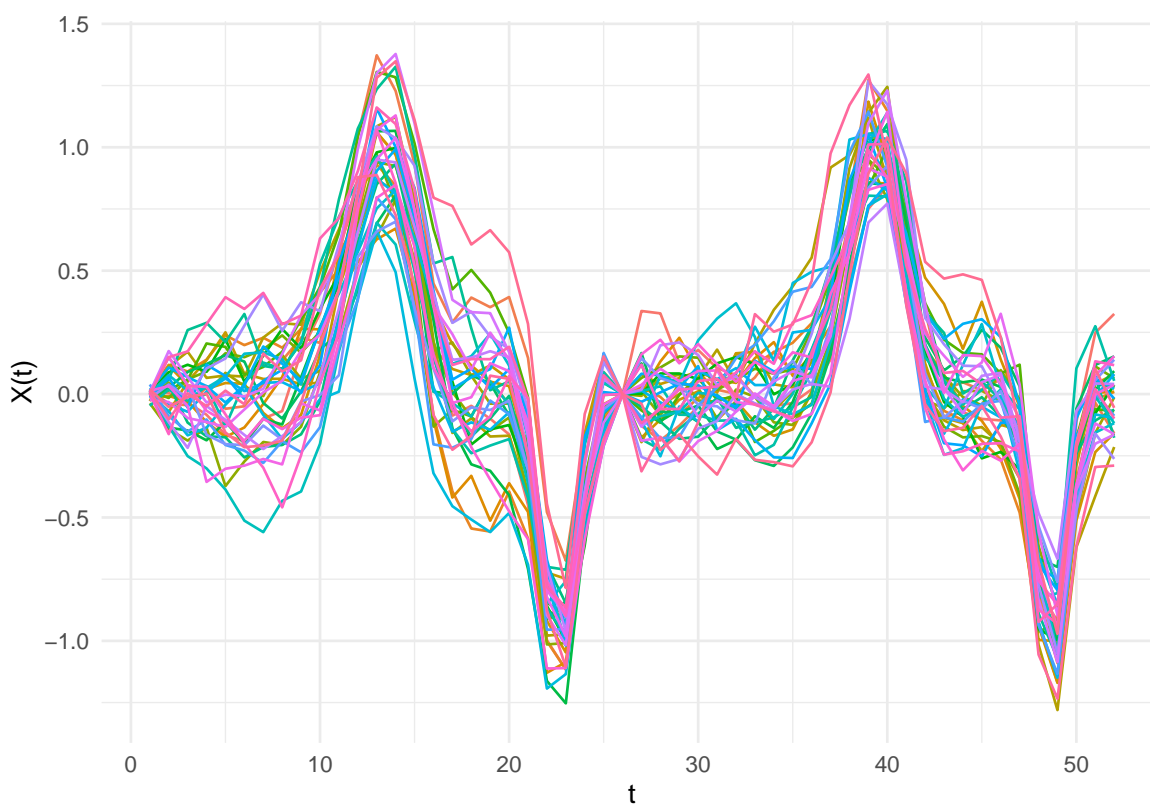
gdzie B_{ij} są standardowymi mostami Browna, a $\xi = \begin{cases} 0.05, & \text{modele } M0 - M3 \\ 0.5, & \text{modele } M4 - M7 \end{cases}$.

Definicja 3.1. *Mostem Browna* nazywa się proces gaussowski $X(t), t \in [0, 1]$ o ciągłych trajektoriach takich, że

$$\mathbb{E}X = 0 \quad \wedge \quad \text{Cov}(X(s), X(t)) = s(1 - t), \quad s \leq t$$

Jako że obliczenie wartości danych funkcji jest możliwe jedynie w dyskretnej liczbie punktów, na potrzeby symulacji wartości procesów $X_i(t), X_i(t+1)$ wygenerowane zostały dla I punktów ($I = 26$): $t_r \in [0, 1], r \in 1, 2, \dots, I$, dzielących odcinek $[0, 1]$ na I równych fragmentów.

Jako przykład danych, na podstawie których przeprowadzone będą testy, na Rysunku 3.2 pokazano wykresy procesów jednego z rozpatrywanych modeli.



Rysunek 3.2: Symulacja procesów modelu M6 przy parametrach: $\rho = 0, n = 35, I = 26$, błąd mieszany. Kolorami zaznaczono różne replikacje eksperymentu

Dokonano obliczeń **rozmiarów** i **mocy** empirycznych rozważanych testów na poziomie istotności $\alpha = 5\%$, na podstawie 1000 replikacji. Wyniki przedstawiono w tabelach zaprezentowanych w dalszej części pracy.

Uwaga: ze względu na ograniczenia mocy obliczeniowej dostępnej autorowi, rozważane symulacje nie obejmują wszystkich kombinacji wartości parametrów, jakie zostały

wykorzystane w pracy [8], tj. $n = 25, 35, 50$; $I = 26, 101, 251$; $\rho = 0, 0.25, 0.5$. Bardziej rozbudowane wyniki badań można znaleźć tamże.

3.2 Kontrola błędu pierwszego rodzaju

W tym podrozdziale podane zostaną empiryczne rozmiary testów zastosowanych do symulowanych modeli.

Definicja 3.2. Niech \mathbf{X} będzie próbą, a B obszarem krytycznym testu statystycznego. **Rozmiarem** testu statystycznego jest prawdopodobieństwo nieprawidłowego odrzucenia hipotezy zerowej, tj. błędu I rodzaju:

$$\mathbb{P}_0(\mathbf{X} \in B).$$

Badanie rozmiaru testu statystycznego pozwala określić, czy test dobrze kontroluje poziom błędu pierwszego rodzaju lub też czy test może być uznawany za *konserwatywny* lub *liberalny*. Stanowi on dosłownie błąd I rodzaju, zatem większy rozmiar testu mówi, że będzie on statystycznie częściej odrzucał hipotezę zerową. Wówczas może być on nazywany liberalnym. W odwrotnym przypadku, gdy rozmiar testu jest niewielki, oznacza to stosunkowo rzadkie odrzucenie hipotezy zerowej – test jest wtedy nazywany konserwatywnym. Podczas konstruowania testów statystycznych dąży się do tego, by rozmiar testu był teoretycznie równy jego poziomowi istotności. Na podstawie tegoż można obliczyć przedział ufności orzekający o liberalności testu.

Ponieważ rozmiar testu statystycznego jest prawdopodobieństwem przy założeniu hipotezy zerowej, rozpatrywane w tym przypadku są modele M0 oraz M4, gdzie z założenia funkcje średnie są równe. Wyniki badań przedstawiono w Tabeli 3.1. Kolumny „A”, „B”, „P” oraz „BT” odpowiadają wynikom doświadczeń przeprowadzonym dla odpowiednich testów, opisanych na początku tego rozdziału.

Tabela 3.1: Empiryczne rozmiary testów (w procentach) dla modeli M0 oraz M4

błąd	Model M0				Model M4			
	A	B	P	BT	A	B	P	BT
$\rho = 0$								
normalny	5.7	5.8	5.3	5.7	5.6	5.8	5.3	5.7
lognormalny	5.7	5.6	5.7	5.7	5.4	6.1	5.9	5.6
mieszany	5.2	5.2	5.4	5.4	5.8	5.8	5.9	5.5
$\rho = 0, 25$								
normalny	6.6	6.6	6.3	6.4	6.7	6.6	6.3	6.4
lognormalny	4.3	3.9	4.2	4.1	3.7	3.4	4.3	3.7
mieszany	6	6.3	6.1	6.4	6.5	6.7	6.2	6.4
$\rho = 0, 5$								
normalny	5.5	5.6	5	5.5	5.6	5.6	5	5.5
lognormalny	5.6	5.7	5.7	5.8	5.4	5.7	5.8	5.6
mieszany	5.6	5.8	5.5	5.7	5.9	6	6.2	6.1

Empiryczne rozmiary testów powinny mieścić się w przedziale $[3.6\%, 6.4\%]$ z prawdopodobieństwem 95% [2, 8]. Zdecydowana większość wartości przedstawionych w tabeli mieści się w tym przedziale (wartości wykraczające poza przedział zostały pogrubione), co świadczy o satysfakcjonującym działaniu rozpatrywanych testów.

Test bootstrapowy B jest najbardziej liberalny spośród wszystkich testów, na co wskazują największe rozmiary testu. Niemniej wszystkie testy zachowują się w pożądanym sposób, poprawnie kontrolując poziom błędu I rodzaju, co uzasadnia ich zastosowanie do celów analizy danych funkcjonalnych.

3.3 Moc testu

Definicja 3.3. Niech \mathbf{X} będzie próbą, a B obszarem krytycznym testu statystycznego. **Mocą** testu statystycznego jest prawdopodobieństwo poprawnego odrzucenia hipotezy zerowej, tj. zdarzenia przeciwnego do błędu II rodzaju:

$$\mathbb{P}_1(\mathbf{X} \in B).$$

Podczas gdy rozmiar testu opisuje prawdopodobieństwo popełnienia błędu przez test statystyczny, moc testu mówi o jego poprawności. Duża moc testu świadczy o tym, że odrzucenie hipotezy zerowej – jeśli nastąpi – jest uzasadnione. Zgodnie z ideą weryfikacji hipotez, dąży się do minimalizacji błędu II rodzaju, a w konsekwencji do maksymalizacji mocy testów statystycznych.

Analogicznie do poprzedniego przypadku, jako że moc testu statystycznego jest prawdopodobieństwem przy założeniu hipotezy alternatywnej, rozpatrywać w tym przypadku

można wszystkie pozostałe modele, gdzie z założenia wyniki dwóch prób zależnych są od siebie istotnie różne. Wyniki badań przedstawiono w kolejnych tabelach.

Tabela 3.2: Empiryczne moce testów (w procentach) dla modeli M1 oraz M2

błąd	Model M1				Model M2			
	A	B	P	BT	A	B	P	BT
$\rho = 0$								
normalny	51.6	51.1	50.8	52.0	63.6	64.1	62.3	63.4
lognormalny	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
mieszany	77.9	77.7	77.2	78.2	85.4	85.1	84.7	85.4
$\rho = 0,25$								
normalny	65.6	65.3	63.6	65.0	78.9	78.6	77.4	78.9
lognormalny	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
mieszany	83.3	82.7	82.9	83.4	89.6	89.7	89.5	89.5
$\rho = 0,5$								
normalny	82.8	83.1	81.2	82.6	91.8	91.5	91.2	91.7
lognormalny	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
mieszany	87.9	88.0	87.8	88.3	95.0	94.9	94.7	94.8

Tabela 3.3: Empiryczne moce testów (w procentach) dla modeli M3 oraz M5

błąd	Model M3				Model M5			
	A	B	P	BT	A	B	P	BT
$\rho = 0$								
normalny	26.1	26.1	24.6	26.1	91.9	92.5	92.7	92.5
lognormalny	94.2	93.6	95.4	94.9	100.0	100.0	100.0	100.0
mieszany	50.3	49.6	52.2	50.0	99.7	99.9	100.0	99.7
$\rho = 0,25$								
normalny	38.1	37.6	37.1	38.2	99.0	99.3	99.1	99.2
lognormalny	99.6	99.7	99.7	99.6	100.0	100.0	100.0	100.0
mieszany	58.1	57.2	58.2	57.6	100.0	100.0	100.0	100.0
$\rho = 0,5$								
normalny	60.1	60.7	60.4	60.3	100.0	100.0	100.0	100.0
lognormalny	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
mieszany	64.7	65.4	64.9	64.8	99.9	99.9	99.9	99.9

Tabela 3.4: Empiryczne moce testów (w procentach) dla modeli M6 oraz M7

błąd	Model M6				Model M7			
	A	B	P	BT	A	B	P	BT
$\rho = 0$								
normalny	32.9	33.5	31.9	32.8	100	100	100	100
lognormalny	80.0	80.5	81.1	80.6	100	100	100	100
mieszany	49.0	49.8	52.0	49.5	100	100	100	100
$\rho = 0, 25$								
normalny	46.3	46.2	47.0	46.3	100	100	100	100
lognormalny	93.1	93.9	94.6	94.1	100	100	100	100
mieszany	60.7	61.0	62.2	60.3	100	100	100	100
$\rho = 0, 5$								
normalny	74.2	74.6	74.6	73.8	100	100	100	100
lognormalny	99.5	99.7	99.7	99.7	100	100	100	100
mieszany	72.5	71.7	73.5	72.3	100	100	100	100

Symulacje wskazują na rozsądną moc rozważanych testów, szczególnie rozpatrując błąd lognormalny. Na uwagę zasługuje model M7, w którym we wszystkich przypadkach testy osiągają stuprocentową moc. Ponadto, wszystkie testy mają bardzo podobną moc. Znaczący to, że wykorzystanie każdego z przedstawionych w tej pracy testów statystycznych jest uzasadnione do badania zależności między dwoma próbami zależnymi danych funkcjonalnych.

W pracy [8] porusza się również problem złożoności obliczeniowej każdego z testów. Badania przeprowadzono, modyfikując parametry n oraz I ($n = 100, 200, \dots, 1000$; $I = 500, 1000$) i mierząc czas wykonania procedur obliczających p -wartości rozpatrywanych testów statystycznych. Zgodnie z Rysunkiem 3 w tejże pracy można zauważyć, że testy asymptotyczny A oraz oparty o przybliżenie Boxa BT wykonywane są zdecydowanie szybciej w przypadku większej ilości danych oraz porównywalnie szybko w przypadku mniejszych zbiorów danych. Wyniki te uzasadniają stosowanie testów A oraz BT w przypadku dużej liczby replikacji – dla przykładu test BT wykonuje się najdłużej w kilka sekund.

Rozdział 4

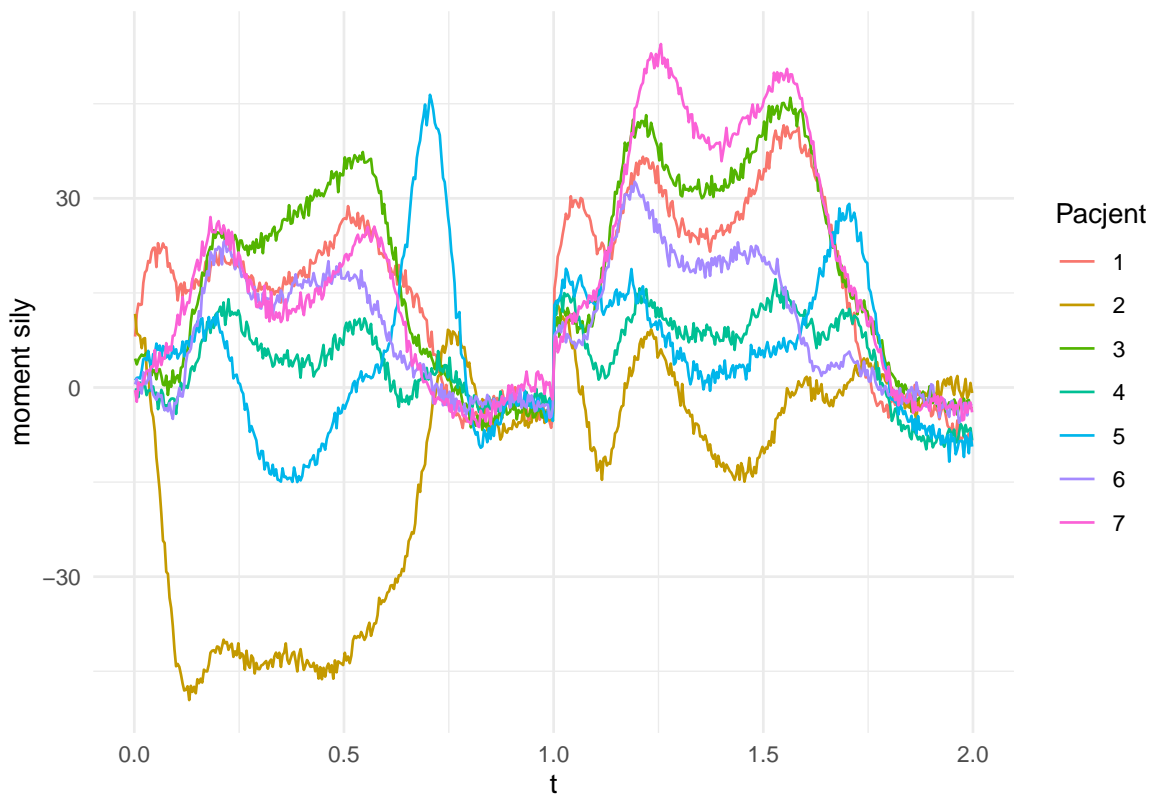
Przykład praktyczny

Jako ilustrację wyżej przeprowadzonych eksperymentów, opisywane testy zastosowano do danych powiązanych z badaniami dotyczącymi ortez, opisanych w [10].

Orteza jest urządzeniem ortopedycznym przymocowanym zewnętrznie do kończyny lub ciała w celu zapewnienia podparcia i stabilności, zapobiegania pogorszeniu się złamania lub zastąpienia utraconych możliwości motorycznych. Dane te otrzymano w wyniku eksperymentu przeprowadzanego przez dr Amarantiniego Davida oraz dr Martina Luca (Laboratoire Sport et Performance Motrice, EA 597, UFRAPS, Uniwersytet Grenoble, Francja). Celem badań było prześledzenie, jak mięśnie sprawują się w warunkach zewnętrznych perturbacji. W eksperymencie brało udział siedmiu młodych mężczyzn, którzy zostali wyposażeni w sprężynowe ortozy o regulowanej sztywności i testowali je w czterech warunkach: bez ortozy, z ortezą bez sprężyny oraz z dwoma różnymi ortezami wspomagającymi sprężyną. Test polegał na maszerowaniu w miejscu i dla każdej konfiguracji testu przeprowadzony był 10 razy po 20 sekund, z których pomiary prowadzono od 5 do 15 sekundy. W tym czasie urządzenia pomiarowe zebrały dane opisujące moment siły względem kolana pacjenta z 256 równoodległych punktów czasowych, przeskalowanych do odcinka $[0, 1]$ (patrz [10, 8]).

Na potrzeby zobrazowania działania opisywanych testów statystycznych wykorzystane zostaną dane na temat warunków bez ortozy oraz z ortezą ze sprężyną nr 1. Dla każdego z uczestników eksperymentu oblicza się funkcje średnie z 10 pomiarów danych przeprowadzonych w ramach odpowiednich warunków doświadczenia. Wykresy tychże funkcji przedstawia Rysunek 4.1.

Przy takim założeniu eksperymentu, otrzymane dane stanowią zależne dane funkcjonalne. Porównanie średnich funkcji w obu grupach to problem dwóch prób zależnych. Do powyższych danych można zatem zastosować omawiane testy statystyczne. Wyniki tychże przedstawia Tabela 4.1.



Rysunek 4.1: Wykresy funkcji średnich z 10 pomiarów przeprowadzonych w ramach eksperymentu w warunkach bez ortezy ($t \in [0, 1]$) oraz z ortezą ze sprężyną nr 1 ($t \in [1, 2]$)

Tabela 4.1: Zestawienie p -wartości testów statystycznych zastosowanych do danych dotyczących ortezy

C_n	p -wartości			
	A	B	P	BT
207849.2	0.005	0.002	0	0.0017177

Każdy z przedstawionych testów statystycznych osiąga p -wartości poniżej poziomu istotności 5%, wobec czego wnioskuje się, że średni moment siły dla wszystkich pacjentów jest istotnie różny dla różnych rodzajów ortezy.

Na podstawie Rysunku 4.1 można jednak zauważyć, że funkcje średnie mogą być równe w ostatniej fazie eksperymentu, tj. dla $t \in [0, 8; 1] \cup [1, 8; 2]$. Dla tak zmodyfikowanych danych (patrz Rysunek 4.2) przeprowadzono ponownie wszystkie cztery testy, a otrzymane wyniki zebrano w Tabeli 4.2.

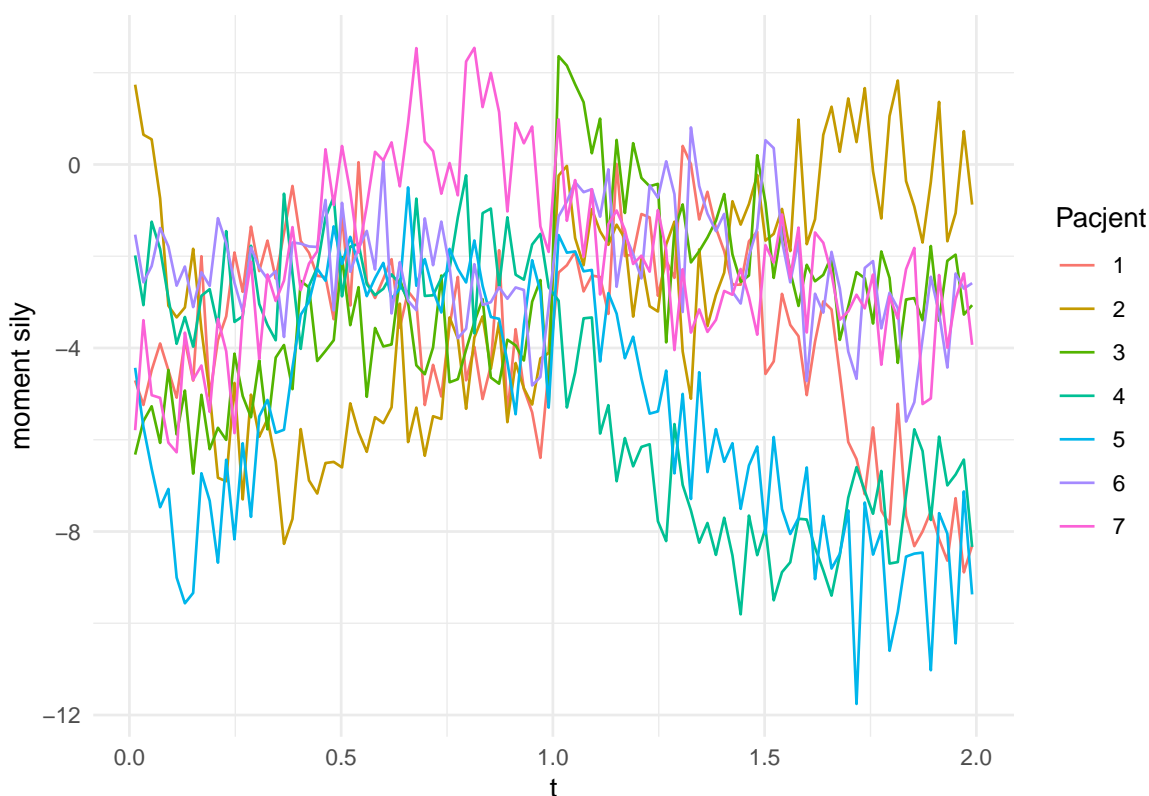
Rysunek 4.2: Wykresy funkcji średnich w ostatniej fazie eksperymentu. Przedziały czasowe zostały przeskalowane do odcinka $[0, 2]$

Tabela 4.2: Zestawienie p -wartości testów statystycznych zastosowanych do skróconych danych dotyczących ortezy

\mathcal{C}_n	p -wartości			
	A	B	P	BT
871.0233	0.222	0.236	0.239	0.2511676

Wyniki testów dla zmodyfikowanych danych nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy o równości funkcji – wobec tego można twierdzić, że w ostatniej fazie eksperymentu moment siły jest równy dla wszystkich pacjentów niezależnie od rodzaju używanej ortezy.

Podsumowanie

Tematem pracy jest przedstawienie różnych technik weryfikacji hipotezy o równości dwóch prób zależnych dla danych funkcjonalnych. Problem ten, jak i wiele innych zagadnień związanych z analizą danych funkcjonalnych, został poruszony w licznych pracach naukowych oraz monografiach. Prace [5] oraz [8], będące głównym źródłem przedstawionych tu informacji, opisują narzędzia służące do weryfikacji wspomnianej hipotezy, w szczególności statystykę testową pozwalającą na kwantyfikację różnic pomiędzy dwoma próbami. Statystyka ta, zainspirowana badaniem różnic pomiędzy grupami na styl metod analizy wariancji ANOVA, jest całką kwadratu różnicy pomiędzy funkcjami średnimi poszczególnych procesów.

Rozkład owej statystyki testowej przy założeniu hipotezy zerowej może zostać oszacowany na różne sposoby. Pierwszym z nich jest metoda asymptotyczna, w ramach której p -wartość testu statystycznego oblicza się, korzystając z procesów gaussowskich i obliczając wartości statystyki testowej dla tychże. Metoda asymptotyczna jest metodą niewymagającą względnie dużej mocy obliczeniowej, jednak założenie addytywności wynikającej z modelu danych (patrz równanie (1.1)) często nie jest spełnione, między innymi dla funkcji gęstości. W tym celu opracowane zostały podejścia nieparametryczne, korzystające z metody bootstrapowej oraz permutacyjnej, nie wymagające wspomnianego założenia. W odróżnieniu od metody asymptotycznej, dla tych metod generuje się procesy przy pomocy danych oryginalnych, losując rekordy i budując z nich pomocnicze dane, dla których obliczane są wartości statystyki testowej. Wreszcie metoda oparta o przybliżenie Boxa, zaproponowana w pracy [8], ma na celu dodatkowe przyspieszenie obliczeń przy jednoczesnym zachowaniu własności testu i z tego powodu korzysta z kumulant – wielkości często stosowanych w analizie danych funkcjonalnych. Z ich pomocą przybliża się rozkład badanej statystyki testowej za pomocą rozkładu χ^2 , modyfikowanego przez stałe oparte na parametrach próby. Metoda ta osiąga postawiony cel przyspieszenia obliczeń, będąc najszybszą spośród przedstawionych.

Na poparcie poprawności zastosowania wyżej wymienionych technik przeprowadzone zostały badania symulacyjne w celu oszacowania skończenia próbkowych własności testów, tzn. jego rozmiaru i mocy. W ramach symulacji skonstruowano osiem modeli i do danych wygenerowanych na ich podstawie zastosowano rozpatrywane testy. Dla zapewnienia dokładności oszacowań symulacje wielokrotnie powtarzano, a wyniki zostały uśrednione. Uzyskane w ten sposób rozmiary oraz moce testów okazały się spełniać wymogi teoretyczne, opisane przez odpowiednie przedziały ufności – wobec tego oma-

wiane procedury w poprawny sposób są w stanie opisywać różnice pomiędzy danymi funkcjonalnymi w problemie dwóch prób zależnych.

Omawiane testy statystyczne zostały zastosowane także do rzeczywistych danych, jakimi są dane pochodzące z badań dotyczących momentu siły różnych typów ortez. Po obliczeniu odpowiednich p -wartości, wszystkie metody poprawnie identyfikują różnice pomiędzy całością rozpatrywanych danych oraz tożsamość funkcji średnich procesów w ich skróconej wersji.

Analiza danych funkcjonalnych, będąc stosunkowo nowo powstałą dziedziną statystyki matematycznej, posiada wiele narzędzi do rozwiązywania problemów analogicznych do tych znajdujących w podejściu klasycznym. Niemalujące zainteresowanie dziedziną i tempo współczesnego świata sprawiają, że wiedza na temat danych funkcjonalnych będzie się z pewnością dalej poszerzać i odpowiadać na coraz trudniejsze zagadnienia.

Bibliografia

- [1] Cuevas, A. (2014). A partial overview of the theory of statistics with functional data. *Journal of Statistical Planning and Inference* 147, 1-23.
- [2] Duchesne, P., Francq, C. (2015). Multivariate hypothesis testing using generalized and $\{2\}$ -inverses - with applications. *Statistics* 49, 475-496.
- [3] Ferraty, F., Vieu, P. (2006). *Nonparametric Functional Data Analysis: Theory and Practice*. Springer.
- [4] Horváth, L., Kokoszka, P. (2012). *Inference for Functional Data with Applications*, Springer.
- [5] Martínez-Camblor, P., Corral, N. (2011). Repeated measures analysis for functional data. *Computational Statistics & Data Analysis* 55, 3244-3256.
- [6] Ramsay, J.O., Silverman, B.W. (2005). *Functional Data Analysis*, 2nd edition, Springer, New York.
- [7] R Core Team (2022). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- [8] Smaga, Ł. (2019). Repeated measures analysis for functional data using Box-type approximation-with applications. *REVSTAT* 17, 523-549.
- [9] Wang, J.L., Chiou, J.M., Müller, H.G. (2015). Review of functional data analysis. *Annual Review of Statistics and Its Application* 3, 257-295.
- [10] Zhang, J.T. (2013). *Analysis of Variance for Functional Data*. Chapman and Hall, London.