Линайная алгебра и геометрия. ИДЗ №3(вариант 21)

Выполнил студент Наседкин Дмитрий Сергеевич (группа 242)

№1

Нам даны 2 вектора $v_1 = (-1, -1, 2, 1, 3, -2), v_2 = (-4, -2, -2, 1, 3, 2)$ и матрица СЛУ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & -7 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверим, что v_1, v_2 действительно являются решениями системы:
v_1:

$$\begin{aligned} -3 - 3 + 4 - 3 + 15 - 10 = 0, \text{ верно} \\ -2 - 2 + 6 - 7 + 15 - 10 = 0, \text{ верно} \\ 1 + 1 + 4 - 7 + 3 - 2 = 0, \text{ верно} \end{aligned}$$

v_2:

$$\begin{aligned} -12 - 6 - 4 - 3 + 15 + 10 = 0, \text{ верно} \\ -8 - 4 - 6 - 7 + 15 + 10 = 0, \text{ верно} \\ 4 + 2 - 4 - 7 + 3 + 2 = 0, \text{ верно} \end{aligned}$$

Также очевидно, что они ЛНЗ.

Идея: воспользуемся алгоритмом поиска ФСР, однако подставлять будем не 1 в свободные переменные, а значения на позициях из свободных в v_1, v_2.

УСВ матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & -7 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Позиции свободных переменных это $2, 4, 5, 6$, то есть будет 4 базисных вектора(причем первые 2 нам уже задали):

1. $u_1 = (*, -1, *, 1, 3, -2) = (-1, -1, 2, 1, 3, -2) = v_1$.
2. $u_2 = (*, -2, *, 1, 3, 2) = (-4, -2, -2, 1, 3, 2) = v_2$.

Нужно выбрать такие u_3, u_4, чтобы если взять их значения только на позициях свободных переменных, то они образовывали базис всех решений $Ax = 0$, для этого дополним систему из свободных переменных до базиса F_4 стандартными векторами(перед этим приведем к ступенчатому виду):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Таким образом, добавив стандарнтные вектора e_3, e_4 получим базис F_4, тогда

$$u_3 = (*, 0, *, 0, 1, 0) = (-1, 0, -1, 0, 1, 0),$$

$$u_4 = (*, 0, *, 0, 0, 1) = (-1, 0, -1, 0, 0, 1).$$

Итого $\langle v_1, v_2, u_3, u_4\rangle$ образуют все решения уравнения $Ax = 0$.

№2

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 & 1 \\ -6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Для начала нужно найти базис $Im\ \varphi, ker\ \varphi$:

- Для поиска базиса $Im\ \varphi$ найдем базис среди столбцов A:

$$\text{УСВ } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда первый(v_1) и второй(v_2) столбец образуют базис ядра, то есть $Im\ \varphi = \langle(-6, -6, 3, -6), (5, 5, -6, 5)\rangle$.

- Для поиска базиса $ker\ \varphi$ просто найдем ФСР системы $Ax = 0$.

Возьмем тот же УСВ A, в нем позиции свободных переменных: 3, 4, тогда:

$$u_1 = (*, *, 3, 0) = (4, 3, 3, 0)$$
$$u_2 = (*, *, 0, 1) = (1, 1, 0, 1)$$

То есть $ker\ \varphi = \langle(4, 3, 3, 0), (1, 1, 0, 1)\rangle$.
Теперь найдем базис $Im\ \varphi + ker\ \varphi$, для этого нужно найти базис $\langle v_1, v_2, u_1, u_2\rangle$:

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 1 \\ -6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -6 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Позиции главных переменных - 1, 2, 3, тогда v_1, v_2, u_1 образуют базис.

То есть $Im\ \varphi + ker\ \varphi = \langle(-6, -6, 3, -6), (5, 5, -6, 5), (4, 3, 3, 0)\rangle$.
Найдем $Im\ \varphi \cap ker\ \varphi$, для этого воспользуемся (очевидным!) алгоритмом(с гитхаба Димы):

1. Найдем ФСР системы $Dx = 0$, где $D = (v_1|v_2|u_1|u_2)$:

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 1 \\ -6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -6 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \text{ФСР}$$

2.

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3. Дальше нужно найти базис среди столбцов R, но это очевидно и есть единственный столбец из R.

Таким образом $Im\ \varphi \cap ker\ \varphi = \langle (7,7,0,7) \rangle$.

№3

По лемме о стабилизации знаем, что $Im\ \varphi^4 = Im\ \varphi^5 = \dots = Im\ \varphi^{2019}$, так как $\dim R^4 = 4$. То есть чтобы достаточно вычислить φ^4 и после этого найти базис $Im\ \varphi^4$.

Точно также, что $\ker \psi^4 = \ker \psi^5 = \dots = \ker \psi^{2020}$, то есть достаточно вычислить ψ^4 и после этого найти базис $ker\ \psi^4$.

Для дальнейшего удобства, отметим, что $(A^T)^4 = (A^4)^T$.

$$\varphi^4 = \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 7 \\ -4 & -2 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^2 \right)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 & 8 \\ -8 & -4 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 32 & 16 & 0 & 16 \\ -32 & -16 & 16 & -32 \\ 0 & 0 & 32 & -32 \\ 0 & 0 & 16 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\psi^4 = \begin{pmatrix} 32 & 16 & 0 & 16 \\ -32 & -16 & 16 & -32 \\ 0 & 0 & 32 & -32 \\ 0 & 0 & 16 & -16 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 32 & -32 & 0 & 0 \\ 16 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 32 & 16 \\ 16 & -32 & -32 & -16 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти базис $Im\ \varphi^4$ нужно найти базис среди столбцов матрицы A^4.

Приведем матрицу оператора φ^4 к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 32 & 16 & 0 & 16 \\ -32 & -16 & 16 & -32 \\ 0 & 0 & 32 & -32 \\ 0 & 0 & 16 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 32 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1, 3 - позиции главных переменных, тогда $v_1 = (1,-1,0,0), v_3 = (0,1,2,1)$ - базис $Im\ \varphi^4$. То есть $dim\ Im\ \varphi^4 = 2$.

Чтобы найти базис $ker\ \psi^4$ нужно найти ФСР системы $\psi^4 x = 0$.

Приведем матрицу оператора ψ^4 к УСВ:

$$\psi^4 = \begin{pmatrix} 32 & -32 & 0 & 0 \\ 16 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 32 & 16 \\ 16 & -32 & -32 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда ФСР равно:

$$u_1 = (*,*,1,0) = (-2,-2,1,0)$$
$$u_2 = (*,*,0,1) = (-1,-1,0,1)$$

Отметим, что $\dim \ker \psi^4 = 2$.

Так как $\dim R^4 = \dim\ Im\ \varphi^{2019} + \dim \ker \psi^{2020} = 2 + 2 = 4$, то $R^4 = Im\ \varphi^{2019} \oplus \ker \psi^{2020}$.

Разложим v в сумму векторов $u \in Im\ \varphi^{2019}$ и $w \in \ker \psi^{2020}$. Для этого решим систему $Dx = v$, где $D = (v_1|v_3|u_1|u_2)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Таким образом $v = (2v_1 + 3v_3) + (u_1 + 3u_2) = (2,1,6,3) + (-5,-5,1,3)$, где $(2,1,6,3) \in Im\ \varphi^{2019}$ и $(-5,-5,1,3) \in \ker \psi^{2020}$.

№4

Для начала найдем характеристический многочлен оператора φ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Для дальнейшего удобства приведем ее к УСВ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вместо того чтобы заниматься ужасными вещами и искать хар. многочлен у матрицы 4 на 4, поступим проще:

- Представим, что оператор имеет всего 2 собственных значения λ_1, λ_2
- Мы знаем, что $tr(A) = 2$ - сумма собственных значений матрицы A, пусть m_1, m_2 кратности λ_1, λ_2 в $\chi_\varphi(\lambda)$ соответственно, то есть $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 2$. Также знаем, что $m_1 + m_2 = 4$
- Из УСВ: $\det(A) = 0$, то есть $\lambda_2 = 0$. Тогда, если бы мы знали m_2, то смогли восстановить m_1, а значит и получить λ_1.
- С лекций знаем, что кратность собственного значения - k, на котором происходит стабилизация, то есть $\ker\varphi^{k-1} \subset \ker\varphi^k = \ker\varphi^{k+1} = \dots$

Рассмотрим φ^2:

$$\varphi^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 16 & -11 \\ 2 & -7 & 10 & -7 \\ 4 & -14 & 20 & -14 \\ 4 & -14 & 20 & -14 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $\dim\ker\varphi^2 = 2$, то есть кратность хотя бы 2.
Рассмотрим φ^3:

$$\varphi^3 = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 16 & -11 \\ 2 & -7 & 10 & -7 \\ 4 & -14 & 20 & -14 \\ 4 & -14 & 20 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -17 & 22 & -15 \\ 3 & -12 & 16 & -11 \\ 6 & -24 & 32 & -22 \\ 6 & -24 & 32 & -22 \end{pmatrix}$$

Таким образом $\dim\ker\varphi^3 = 2 = \dim\ker\varphi^2$, то есть $m_2 = 2$.

- Тогда $m_1 = 2$, $\lambda_1 = \frac{2}{2} = 1$. То есть, **если** собственных значений ровно 2, то $\chi_\varphi(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2$. Для корректности осталось доказать, что $\lambda = 1$ - это собственное значение:

Рассмотрим $(\varphi - E)$:

$$\varphi - E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & 4 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен 3, значит определитель 0, то есть это действительно собственное значение.
ч.т.д
Итого имеем $\chi_\varphi(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$.
Также правильно выбрали $\lambda_1 = 1$ как наибольшее по модулю.
Теперь найдем $V^{\lambda_1}, V^{\lambda_2}$.

- Знаем, что $V^{\lambda_1} = \ker(\varphi - \lambda_1 E)^2$, чтобы найди ядро нужно найти ФСР системы $(\varphi - \lambda_1 E)^2 x = 0$ (должно получится 2 вектора, так как $m_1 = 2$):

$$(\varphi - E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -10 & 9 & -4 \\ 0 & -14 & 12 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда ФСР:

$$v_1 = (1, *, *, 0) = (1, 0, 0, 0)$$
$$v_2 = (0, *, *, 2) = (0, 1, 2, 2)$$

Таким образом: $Im\ \psi = V^{\lambda_1} = \langle v_1, v_2 \rangle$. Обозначим $C = (v_1|v_2)$.

- Знаем, что $V^{\lambda_2} = \ker(\varphi - \lambda_2 E)^2$. Тут зададим подпространство как систему с ЛНЗ строками: $(\varphi - \lambda_2 E)^2 x = 0$ (должно получится 2 линейно независимых вектора, так как $m_2 = 2$):

$$\varphi^2 = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 16 & -11 \\ 2 & -7 & 10 & -7 \\ 4 & -14 & 20 & -14 \\ 4 & -14 & 20 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = D$$

Таким образом: $\ker \psi = V^{\lambda_2} = \{y \in R^4 \mid Dy = 0\}$

Осталось найти матрицу линейного оператора ψ с заданным образом и ядром. Она равна CD(по алгоритмам Димы):

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица оператора $\psi : R^4 \to R^4$ задается матрицей:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

№5

Обозначим за G - матрица перехода от стандартного базиса к базису $g = (g_1|g_2|g_3)$. Т.е. $(g_1|g_2|g_3) = (e_1|e_2|e_3)G$, тогда:

$$G = (g_1|g_2|g_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда получим, что $C = G^{-1}AG$ и отсюда же $A = GCG^{-1}$, то есть если мы сможем восстановить матрицу C, то найдем и A.

Теперь рассмотрим подробнее $\phi(v) = u$:

$$\phi(v) = Av = u$$
$$GCG^{-1}v = u$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3)^T$ - координаты разложения v по базису g, то есть $v = G\alpha$, тогда

$$GCG^{-1}v = GC\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow GC\alpha = u$$

Отсюда получим СЛУ и найдем оставшиеся элементы C, а значит и решим задачу.

- Найдем α, для этого решим систему $G\alpha = v$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Таким образом $\alpha = (1 \mid 2 \mid -2)^T$.

- Рассмотрим теперь уравнение:

$$GC\alpha = u$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -3 & -4 \\ 5 & y & 8 \\ -3 & -6 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ 2y-11 \\ -2z-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x-2y+2z+24 \\ x+2z+17 \\ x+4y-4z-50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

То есть:

$$\begin{cases} -x-2y+2z+24 = -3 \\ x+2z+17 = 4 \\ x+4y-4z-50 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} -x-2y+2z = -27 \\ x+2z = -13 \\ x+4y-4z = 55 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & -27 \\ 1 & 0 & 2 & -13 \\ 1 & 4 & -4 & 55 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & -27 \\ 0 & -2 & 4 & -40 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Таким образом нашли C:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 5 & 8 & 8 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Осталось найти матрицу A, по формуле выше: $A = GCG^{-1}$:

- Найдем G^{-1} решая уравнение $GG^{-1} = E$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Получим, наконец, A:

$$A = GCG^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 5 & 8 & 8 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$