Алгоритмы и структуры данных. Домашнее задание №2

Выполнил студент Наседкин Дмитрий Сергеевич (группа 242)

Письменная часть

№ 1

На лекции было, что время работы извлечения минимума в k-ичной куче составляет $O(k * \log_k n)$ - время работы операции `sift_down(int v)`, где n - кол-во вершин в куче.

Точно также, время операции добавления элемента в k-ичной куче равно $O(\log_k n)$ - время работы операции `sift_up(int v)`, где n - кол-во элементов в куче.

Пусть $k = n^{b-a}$ (вероятнее всего, вам максимально не хочется видеть пол страницы формул для вывода k, поэтому будем считать, что это нам приснилось), тогда посчитаем общее время работы структуры:

- Операция добавления 1 элемента работает за $O(\log_{n^{b-a}} n^b) = O(\frac{b}{b-a} * log_n n) = O(\frac{b}{b-a})$
- Операция добавления n^b элементов работает за $O(n^b * \frac{b}{b-a}) = O(n^b)$, так как $\frac{b}{b-a}$ - это константа
- Операция извлечения минимума работает за $O(n^{b-a} * log_{n^{b-a}} n^b) = O(n^{b-a} * \frac{b}{b-a})$
- Операция извлечения минимума n^a раз работает за $O(n^a * n^{b-a} * \frac{b}{b-a}) = O(n^b * \frac{b}{b-a}) = O(n^b)$, так как $\frac{b}{b-a}$ - это константа

Заметим, что k может оказаться нецелым числом, тогда округлим k наверх, при этом время работы останется тем же(не считая константы).

Также отметим, что случая, когда $b - a \leq 0$ не бывает, так как $0 < a < b$ задано в условии.

№ 2

Подготовка и предподсчет

Давайте разделим отрезок [0, 1] на n равных частей([0, 1/n), [1/n, 2/n) и т.д. до [n - 1/n, n), отдельно закостылим точку 1 создав для нее отдельный отрезок, при этом формально частей будет n + 1), отметим, что при этом для любой точки на этом отрезке можно определить ту часть, в которую она попадает(разделим на $\frac{1}{n}$, после чего округлим вниз, так получим индекс нужной части).

Теперь для каждой части создадим вектора точек, которые попали в эту часть отрезка [0, 1]. Также для каждой части посчитаем первую справа, слева непустую часть(там где вектор непуст), очевидно, что это делается за 2 прохода, то есть O(n).

На лекции с помощью амортизированной оценки получили, что суммарно "пушбаки"работают за O(n), итого сделали предпосчет за гарантированное O(n).

Ответы на запросы

Не умаляя общности, заранее скажем, что пусть равных отрезков все таки n(так как очевидно, что на случайных входных данных вероятность выпадения точки 1 равна 0), но даже если она есть, это не меняет логики рассуждения(я надеюсь никому не хочется копаться в таком).

Для начала докажем, что матожидание кол-ва точек в каждой части равно O(1).

Для этого введем следующую индикаторную величину для части:

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{если k-ная точка попала в текущий полуинтервал} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда матожидание значения кол-ва точек в полуинтервале i равно:

$$E(\xi_i) = \sum_{k=1}^{n} E(I_k) = \sum_{k=1}^{n} p_{\text{точка попадет в i-ный полуинтервал}},$$

Так как $p_{\text{точка попадет в i-ный полуинтервал}} = \frac{1}{n}$ тогда получим:

$$E(\xi_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Тогда не важно, случайны ли запросы или нет получим, что кол-во точек в каждой из частей $O(1)$, тогда ответ на запрос очевиден, определим в какой полуинтервал попала точка, тогда возьмем минимум из ответов для 3 полуинтервалов, того, что первый непустой слева, для текущего, а также для первого непустого правого. Для поиска ответа для полуинтервала воспользуемся формулой из условия $|x - ai| \to min$

Так как в каждом из них ожидаемо $O(1)$ точек получим, что и ответ на запрос ожидаемо за $O(1)$.

№ 3

Найдем max и min среди точек на прямой за проход($O(n)$), получается, что все числа принадлежат отрезку $[mn, mx]$, где mn, mx - минимум и максимум соответственно. Пусть также $mx - mn = L$.

Считаем, что $L \neq 0$, так как если $L = 0$, ответ очевидно равен 0 и можем завершиться.

Разделим отрезок $[mn, mx]$ на n + 1 часть следующим образом(везде округления вниз):

- За первую часть отвечает полуинтервал $[mn, mn + \frac{L}{n})$
- За вторую $[mn + \frac{L}{n}, mn + \frac{2L}{n})$,
- $\ldots$,
- За n-ую часть $[mn + \frac{L*(n-1)}{n}, mx)$,
- За $n + 1$ часть - точка mx

То есть точка x $\in [mn, mx]$ попадет в часть с номером $\frac{(x-mn)*n}{L}$.

Замечание: Некоторые части могут получиться длины 0, однако нам это и не важно.

Для каждой части создадим вектор отвечающий за него, и проходом для каждой точки сделаем "пушбак"в соответсвующий для данной точки вектор(как определили выше). Также для каждой непустой части посчитаем max, min, обозначим их max_i, min_i и найдем первый справа непустой вектор. Так как суммарно точек n, то проход по всем векторам и подсчет мин/макс для каждого будет работать суммарно за линию, а подсчет первого не пустого справа тоже делается за линию(идем с обратной стороны поддерживая текущий непустой).

Заметим, что в первую и последнюю часть попадет хотя бы по одной точке(так как это будут минимум и максимум соответственно).

Также заметим, что ответ точно не лежит внутри блока, так как если существует хотя бы один "пустой"блок получим, что разность каких-то соседних точно будет больше чем длина блока, а внутри блока такого мы не добьемся, а если пустых блоков не существует, то получим что в каждом блоке ровно 1 число, а значит ответ все равно не лежит внутри блока.

Тогда ответ считается так:

- Пройдемся по каждому блоку(кроме последнего) и выберем среди ответов для каждого минимальный
- Для текущего блока ответ - разность минимального элемента в первом блоке справа и максимального в текущем.

При этом очевидно, что все нужное мы уже посчитали, а значит будет работать за линию, то есть итоговое время работы составит $O(n)$.

Последний блок не берем, так как в нем или 1 элемент и следущего за ним числа просто нет, или в нем несколько, но тогда разность $= 0$, а мы точно найдем ответ лучше.

Устная и письменная часть

№ 4

Сделаем предподсчет за $O(n)$, после чего мы можем хранить в Atomic heap $\log(n)$ элементов, и для этой кучи все операции работают за $O(1)$.

Алгоритм:

- Разбить массив длины n на блоки длины $\log(n)$, все элементы из блока положить в atomic heap, блоков получится $\dfrac{n}{\log(n)}$.
- Из каждого блока найдем за $O(1)$ минимальный элемент, образуем новый массив.
- Назовем наш изначальный массив слоем 0, а полученный и массив, и кучи(из $\frac{n}{\log(n)}$ элементов) слоем 1. Очевидно, что вся данная процедура работает за O(кол-во элементов на слое)(в случае первого слоя получим n).
- Повторим данную процедуру для 1 слоя, получив 2, далее повторим для 2, получив 3 слой, и т.д. (разбить массив на блоки длины $\log(n)$) до тех пор, пока на последнем слое не получится 1 элемент.

Получим некое дерево. Время построения дерева будет O(сумма размеров слоев).

Сортировать будем следующим образом, найдем минимум, поставим его на место 1 в массиве для ответа, найдем следующий минимум, поставим на место 2 и так далее(как в сортировке выбором).

Как получить минимальный элемент на i-ном шаге?

Возьмем корень дерева(куча на самом нижнем слое), из нее достанем минимальный элемент за $O(1)$, посмотрим, где лежал этот элемент на предыдущем слое(для этого храним ссылки на кучу, где лежал элемент на предыдущем слое вместе с самими элементами), таким образом передем на слой выше. В конце концов, переходя по ссылкам дойдем до листка(изначального массива), это и будет наш минимальный элемент на текущем шаге. Теперь начнем откатываться:

- Откатимся в предка, удалим минимум из кучи(это и есть наш элемент) за $O(1)$, сделаем вставку в кучу(минимум из сына из которого мы пришли), если конечно элементы в сыне еще остались.

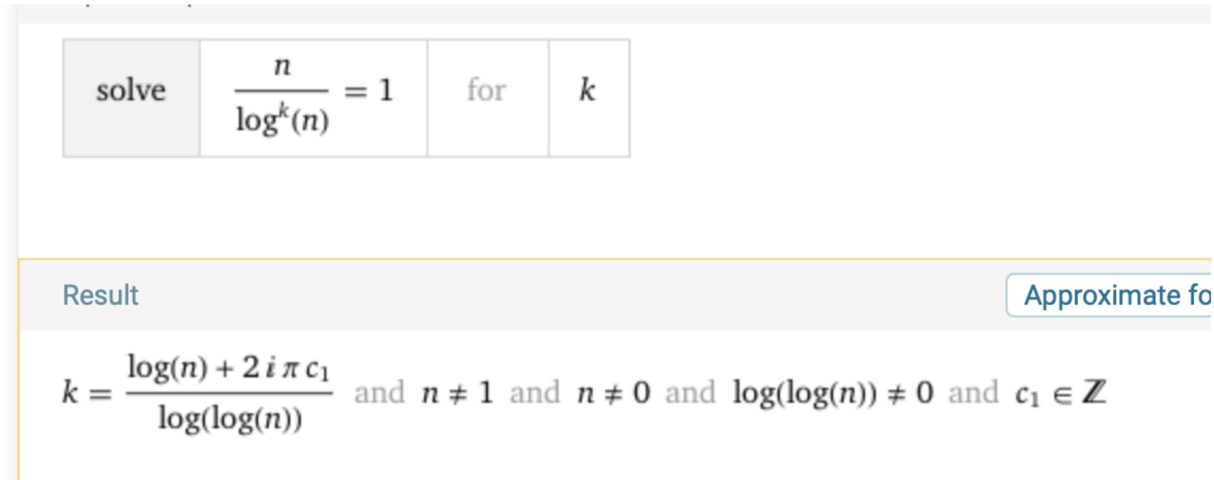
Таким образом $i-$ шаг выполняется за O(высота дерева), тогда n шагов за $O(n*$высота дерева$)$.

Осталось посчитать сумму размеров слоев и высоту дерева, давайте посчитаем для начала высоту:

- На каждом шаге мы делимся на $\log(n)$ блоков, тогда нужно решить уравнение:

$$\frac{n}{log^k(n)} = 1$$

P.S. Я не умею решать такие уравнения, но знаю, что вульфрам может(все таки не матан, а курс алгоритмов)



То есть высота дерева равна $O(\frac{\log(n)}{\log\log(n)})$, то есть n шагов выполнится за $O(\frac{n\log(n)}{\log\log(n)})$. Сумма размеров слоев же считается следующим образом:

- На первом слое n элементов
- На втором слое $\frac{n}{\log(n)}$
- ...
- На $\frac{\log(n)}{\log\log(n)}$ слое 1 элемент.

Тогда сумма слоев считается по формуле:

$$\sum_{k=1}^{\frac{\log(n)}{\log\log(n)}} \frac{n}{\log^k(n)}$$

P.S. Я не умею находить такие суммы, но знаю, что вульфрам может(все таки не матан, а курс алгоритмов)

Input interpretation

$$\sum_{k=0}^{\frac{\log(n)}{\log(\log(n))}} \frac{n}{\log^k(n)}$$

$$\sum_{k=0}^{\frac{\log(n)}{\log(\log(n))}} \frac{n}{\log^k(n)} = \frac{n\log(n) - 1}{\log(n) - 1}$$

То есть сумма слоев равна $O(\frac{n\log(n)}{\log(n)})$.
Так и получим нужное время работы:

- $O(\frac{n\log(n)}{\log(n)}) + O(\frac{n\log(n)}{\log\log(n)}) = O(\frac{n\log(n)}{\log\log(n)})$

№ 5

Пусть дан массив из n элементов данного типа, тогда запустим следующую процедуру:

- Добавим в волшебную структуру все элементы, после чего сделаем запрос медианы, таким образом получим $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ по возрастанию элемент, потратив n операций.
- Разделим массив на 2 части, те что больше медианы, меньшее ее, и сама медиана(можно положить в одну из частей)
- Те, что больше медианы положим в новую волшебную структуру, после чего достанем $\lceil\frac{3n}{4}\rceil$ элемент по возрастанию.
- Добавив в эту же структуру 1-2 элемента меньших или равных медиане получим $\lceil\frac{3n}{4}\rceil - 1$ элемент по возрастанию
- Повторим процедуру до тех пор, пока не получим $\lceil\frac{n}{2}\rceil + 1$ элемент, суммарно при этом мы добавили не больше чем $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ элементов в структуру. Такии образом получили все элементы в отсортированном порядке от $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ до $\lceil\frac{3n}{4}\rceil$

Точно также сделаем для элементов от $\lceil\frac{n}{4}\rceil$ до $\lceil\frac{n}{2}\rceil$(для этого понадобиться создать еще одну волшебную структуру), при этом добавив также не больше чем $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ суммарно в структуру.

Потратим еще n действий, чтобы разделить массив на 3 части: все элементы меньшие чем $\lceil\frac{n}{4}\rceil$-ый, все элементы с $\lceil\frac{n}{4}\rceil$ до $\lceil\frac{3n}{4}\rceil$, все элементы большие чем $\lceil\frac{3n}{4}\rceil$-ый. 2 часть отсортирована(половина элементов). После чего запустимся от 1 и 3 части рекурсивно. Если $n = 1$, то массив отсортирован. Корректность алгоритма при этом очевидна.

Время работы алгоритма

Заметим, что каждый раз мы делим массив на 3 части, при этом запускаясь от 1 и 3, выполняя при этом $\leq 16n$(немного с запасом) операций, тогда время работы алгоритма равно: $T(n) = 2 * T(\frac{n}{4}) + 16n$

Докажем, что $T(n) \leq 100 * n$ по индукции:

- База очевидна $T(1) = 1 \leq 100$
- Переход: пусть $T(m) \leq 100 * m \ \ \forall m < n$, докажем, что $T(n) \leq 100 * n$:

$$T(n) = 2 * T(\frac{n}{4}) + 16n$$

$$T(n) \leq 200\lceil\frac{n}{4}\rceil + 16n \leq 50n + 200 + 16n$$

$$T(n) \leq 66n + 200 \leq 100n,$$

последний переход верен, для любых $n \geq 6$.

Таким образом доказали, что алгоритм работает за $O(n)$ по определению.

№ 8

а)

Давайте запустим сортировку пузырьком на "склееном"массиве, то есть единственное различие, что если индекс $i \geq n$(0-индексация), то это будет $b[i-n]$-ный элемент, иначе же $a[i]$-ный.

Так как мы используем сортировку пузырьком("бубле сорт"), то не нужно доказывать корректность, время работы, количество дополнительной памяти и ее стабильность, они будут равны $O(n^2)$, $O(1)$, и стабильна соответственно.