Линайная алгебра и геометрия. ИДЗ №4(вариант 21)

Выполнил студент Наседкин Дмитрий Сергеевич (группа 242)

№1

Нам даны 3 матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & -3 \\ -5 & -5 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & -4 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \\ -1 & -8 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Нужно проверить, что какие из них задают один и тот же линейный оператор, но в разных базисах, то есть проверить сопряжены ли матрицы. (то есть $A = D^{-1}BD$, где D - невырожденная матрица). По утв. 131 это эквивалентно тому, что:

1. Их характеристические многочлены равны между собой: $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$.
2. Для любого корня λ характеристического многочлена и любого числа k не превосходящего кратности λ выполнено $rk(A - \lambda E)^k = rk(B - \lambda E)^k$

При этом заметим, что достаточно проверить все $k \leq \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$, где n_i - кратность корня. (Это следует из того, что по сути мы проверяем, что у них одинаковые жордановы клетки для одного собственного значения, но если что это было и на семе и на лекции).

Найдем их хар. многочлены:

Для матрицы A:

$$\det(A - xE) = \det \begin{pmatrix} 4-x & 3 & 1 & -3 \\ -5 & -5-x & -1 & 2 \\ -5 & -2 & -4-x & 2 \\ 9 & 4 & 1 & -7-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4-x & 3 & 1 & -3 \\ -5 & -5-x & -1 & 2 \\ 0 & 3+x & -3-x & 0 \\ 5+x & 1 & 0 & -4-x \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -1-x & -2-x & 0 & -1 \\ -5 & -5-x & -1 & 2 \\ 0 & 3+x & -3-x & 0 \\ 5+x & 1 & 0 & -4-x \end{pmatrix}$$

Найдем определитель через формулу разложения по третьей строке:

$$det(A - xE) = -(3+x)\det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 5+x & 0 & -4-x \end{pmatrix} + (-3-x)\det \begin{pmatrix} -1-x & -2-x & -1 \\ -5 & -5-x & 2 \\ 5+x & 1 & -4-x \end{pmatrix} =$$

$$= (x+3)(x^2+6x+9) + (x+3)(x^3+8x^2+21x+18) = (x+3)^3 + (x+3)^3(x+2) = (x+3)^4.$$

Я верю, что у матрицы B, C такой же хар. многочлен(иначе это не интересная задача), да и видим, что у них следы совпадают, а значит сумма корней в хар. многочлене одинаковая, поэтому давайте лишь проверим наше предположение, для этого можно сделать следующее:

- Проверим, что $\lambda = -3 \in \text{spec } B, \text{spec } C$
- Проверим, что $\chi_A(B) = 0$ и $\chi_A(C) = 0$.

Для B:

$$B + 3E = \begin{pmatrix} -4+3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1+3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -4+3 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & -5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B + 3E \text{ вырождена} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -3 \in \text{spec } B$$

$$\chi_A(B) = (B+3)^4 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_B(\lambda) = (\lambda+3)^4$$

Для C:

$$C + 3E = \begin{pmatrix} -4+3 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 3+3 & 3 & -2 \\ -1 & -8 & -7+3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & -8 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C + 3E \text{ вырождена} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -3 \in \text{spec } C$$

$$\chi_A(C) = (C+3)^4 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & -8 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_C(\lambda) = (\lambda+3)^4$$

То есть первый пункт из утверждения для всех матриц верный, проверим теперь второй(то есть будем сверять ранги):

Вообще, уже видно, что C и B точно не задают один линейный оператор, так как $rk(C+3E)^2 = 0 \neq rk(B+3E)^2$.

$$rk(A+3E) = rk \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -3 \\ -5 & -2 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & -1 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

$$rk(A+3E)^2 = rk \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -3 \\ -5 & -2 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & -1 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}^2 = rk \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

Отсюда видно, что A и C точно не задают один линейный оператор, а вот $rk(B+3E) = 2, rk(B+3E)^2 = 1$, а значит по утв. A, B действительно задают один лин. оператор.

№2

Видим блок нулей, а значит будет удобнее работать с нашей матрицей 6×6 как с блоками(назовем исходную матрицу M).

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 8 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для начала найдем $\chi_M(\lambda) = det(M-\lambda E) = det\begin{pmatrix} A-\lambda E & 0 \\ B & C-\lambda E \end{pmatrix} = det(A-\lambda E)det(C-\lambda E)$. Последнее равенство верно как раз из-за угла нулей (док-во легко делается или обычным рассуждением из явной формулы, либо можно юзануть утв. 25 с лекций).

Раскроем определитель по формуле разложения по столбцу(для A по первому, для C по третьему):

$$det(A-\lambda E) = det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)((2-\lambda)(5-\lambda)+2) = (4-\lambda)(10-7\lambda+\lambda^2+2) =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+12) = -(\lambda-4)^2(\lambda-3)$$

$$det(C-\lambda E) = det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 6-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)((2-\lambda)(6-\lambda)+4) = (3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+16) = (3-\lambda)(\lambda-4)^2$$

Таким образом, $\chi_M(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-4)^4$.

То есть мы знаем, что в ЖНФ суммарный размер всех клеток с $\lambda = 3$ равен 2, а суммарный размер клеток с $\mu = 4$ равен 4. Давайте вычислим число клеток с λ и μ, для этого нужно вычислить $\dim\ker(M-\lambda E)$ и $\dim\ker(M-\mu E)$ соответственно.

$$M-3E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim\ker(M-\lambda E) = 1 \Rightarrow \text{В ЖНФ одна клетка со значением 3 размера 2.}$$

$$M-4E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim\ker(M-\mu E) = 2 \Rightarrow \text{В ЖНФ клетки со значением 4 это либо 1-3, либо 2-2.}$$

Посчитаем кол-во клеток размера 1 со значением 4 по формуле: (утв. 130)

$2\dim\ker(M-\mu E)^1-\dim\ker(M-\mu E)^2-\dim\ker(M-\mu E)^0=2*2-\dim\ker(M-\mu E)^2=$
$=4-\dim\ker(M-\mu E)^2=4-4=0\Rightarrow$ В ЖНФ клетки со значением 4 это 2 клетки размера 2.

Расчеты $\dim\ker(M-\mu E)^2$:

$$(M-\mu E)^2=\begin{pmatrix}A-\mu E & 0\\ B & C-\mu E\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}(A-\mu E)^2 & 0\\ B(A-\mu E)+(C-\mu E)B & (C-\mu E)^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&2&-1&0&0&0\\0&2&-1&0&0&0\\0&2&-1&0&0&0\\0&4&-2&0&0&0\\0&2&-1&0&0&0\\-4&8&0&-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\dim\ker(M-\mu E)^2=4$$

Таким образом ЖНФ:

$$J=\begin{pmatrix}3&1&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0\\0&0&4&1&0&0\\0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&4&1\\0&0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

Теперь найдем жорданов базис:
Для λ чтобы найти f_1 давайте найдем какое-нибудь решение системы $(M-\lambda E)f_1=0$:

$$M-\lambda E=\begin{pmatrix}1&-3&2&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0\\0&-2&2&0&0&0\\-2&2&1&-1&1&0\\-4&8&1&-4&3&0\\2&-4&2&-1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-3&2&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-2&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\ \text{ФСР системы }=(0,0,0,0,0,1)^T\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1=(0,0,0,0,0,1)^T$$

Тогда чтобы найти f_2 нужно решить систему $(M-\lambda E)f_2=f_1$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}1&-3&2&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0&0\\0&-2&2&0&0&0&0\\-2&2&1&-1&1&0&0\\-4&8&1&-4&3&0&0\\2&-4&2&-1&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&-3&2&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0&0\\0&0&1&-1&1&0&0\\0&0&0&1&-2&0&0\\0&0&0&0&-1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&0&0&0&-1\\0&-1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0&0&-2\\0&0&0&0&-1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2=(-1,-1,-1,-2,-1,0)^T$$

Теперь будем действовать аналогично для μ и таким образом найдем f_3,f_4,f_5,f_6:

$$M-\mu E=\begin{pmatrix}0&-3&2&0&0&0\\0&-2&1&0&0&0\\0&-2&1&0&0&0\\-2&2&1&-2&1&0\\-4&8&1&-4&2&0\\2&-4&2&-1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&2&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&2&-3&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&2&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&-3&2&-1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}6&0&0&0&1&-2\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&3&-2&1\end{pmatrix}$$

Тогда ФСР:

$$\mathrm{f}_3=(*,*,*,*,6,0)^T=(-1,0,0,4,6,0)^T$$
$$\mathrm{f}_5=(*,*,*,*,0,6)^T=(1,0,0,-1,0,3)^T$$

Решим $(M-\mu E)f_4=f_3$ и $(M-\mu E)f_6=f_5$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cc}0&-3&2&0&0&0&-1&1\\0&-2&1&0&0&0&0&0\\0&-2&1&0&0&0&0&0\\-2&2&1&-2&1&0&4&-1\\-4&8&1&-4&2&0&6&0\\2&-4&2&-1&1&-1&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccccc|cc}-2&2&1&-2&1&0&4&-1\\0&-2&1&0&0&0&0&0\\0&-3&2&0&0&0&-1&1\\0&4&-1&0&0&0&-2&2\\0&-2&3&-3&2&-1&4&2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|cc}-2&2&1&-2&1&0&4&-1\\0&-2&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&-2&2\\0&0&1&0&0&0&-2&2\\0&0&2&-3&2&-1&4&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccccc|cc}-2&2&1&-2&1&0&4&-1\\0&-2&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&-2&2\\0&0&0&-3&2&-1&8&-2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|cc}1&0&0&0&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{11}{6}\\0&1&0&0&0&0&-1&1\\0&0&1&0&0&0&-2&2\\0&0&0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{8}{3}&\frac{2}{3}\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{c}f_4=(\dfrac{-4}{3},-1,-2,\dfrac{-8}{3},0,0)^T\\ f_6=(\dfrac{11}{6},1,2,\dfrac{2}{3},0,0)^T\end{array}$$

Таким образом матрица перехода имеет вид:

$$S=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-\frac{4}{3}&1&\frac{11}{6}\\0&-1&0&-1&0&1\\0&-1&0&-2&0&2\\0&-2&4&-\frac{8}{3}&-1&\frac{2}{3}\\0&-1&6&0&0&0\\1&0&0&0&3&0\end{pmatrix}$$

№3

Переход в стандартный базис:

Найдем матрицы перехода:

$$G=(g_1\mid g_2\mid g_3)=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-1&-3&-2\\-1&-4&-4\end{pmatrix},\quad H=(f_1\mid f_2\mid f_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&3&-4\\-1&2&-4\end{pmatrix}.$$

Найдем обратные к ним матрицы:

$$G^{-1}=\frac{\hat{G}}{\det(G)}=\frac{1}{-4+4-1}\begin{pmatrix}4&-4&1\\-2&3&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&4&-1\\2&-3&1\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$H^{-1}=\frac{\hat{H}}{\det(H)}=-\begin{pmatrix}-4&-2&1\\-4&-3&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&-1\\4&3&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

Найдем матрицы операторов в стандартном базисе:

$$A_e\ =\ G\,A\,G^{-1},\qquad B_e\ =\ H\,B\,H^{-1},$$

$$A_e=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-1&-3&-2\\-1&-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&7&0\\-2&-1&5\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&4&-1\\2&-3&1\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-7&-7\\-2&-8&-9\\-4&-11&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&4&-1\\2&-3&1\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&-2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$$

$$B_e=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&3&-4\\-1&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&-6\\3&-5&6\\1&-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&-1\\4&3&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-6\\-1&-1&6\\-1&3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&-1\\4&3&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&-3\\2&1&1\end{pmatrix}$$

Матрица композиции $\varphi\circ\psi$ в стандартном базисе:

Если матрицы операторов для одного базиса, то композиция будет соответствовать:

$$[\varphi\circ\psi]_e=A_eB_e=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&-2&3\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&-3\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&8\\12&0&12\\4&0&4\end{pmatrix}$$

Далее алгоритм следующий:

- Найдем для каждого из операторов ее образ и ядро
- Выполним пункт б
- Выполним пункт в

Замечание:

Делать все это именно для операторов в одном базисе(В нашем случае в стандартном).

$\ker\varphi$ **и** $\ker\psi$:

Нужно найти ФСР системы $A_ex=0$ и $B_ex=0$, ФСР и будет базисом ядра:

$$A_e=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&-2&3\\2&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Тогда $\ker\varphi=\langle(-1,\ 1,\ 1)\rangle$:

$$B_e=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&-3\\2&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Тогда $\ker\psi = \langle(-1,\ 1,\ 1)\rangle$:

$Im\ \varphi$ **и** $Im\ \psi$:

Столбцы A_e порождают $Im\ \varphi$, а B_e — $Im\ \psi$.

Тогда базис $Im\ \varphi$ равен $(1,\ 1,\ 2), (-1,\ -2,\ 1)$ (первый и второй столбец A_e), а базис $Im\ \psi$ равен $(2,\ -2,\ 2), (-1,\ 1,\ 1)$ (тоже первый и второй столбец, только теперь B_e).

Базис пространства $\ker\varphi + \ker\psi$

Так как $\ker\varphi = \ker\psi = \langle(-1,\ 1,\ 1)\rangle \Rightarrow \ker\varphi + \ker\psi = \langle(-1,\ 1,\ 1)\rangle$.

Базис пространства $Im\ \varphi \cap Im\ \psi$

Воспользуемся алгоритмом из гита Димы(№ 13):

$$v_1 = (1,\ 1,\ 2)^T,\ v_2 = (-1,\ -2,\ 1)^T, \qquad u_1 = (2,\ -2,\ 2)^T,\ u_2 = (-1,\ 1,\ 1)^T$$

Собираем систему

$$\left(v_1\ v_2 \mid u_1\ u_2\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = 0$$

и находим ФСР:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -4 & 2\\ 0 & 0 & -14 & 9\end{pmatrix}$$

$$x = (-12,\ -8,\ 9,\ 14)^T$$

$(\beta_1, \beta_2) = (9,\ 14)$.

Тогда

$$R' \ = \ [\,u_1\ u_2\,]\begin{pmatrix}9\\ 14\end{pmatrix} = 9u_1 + 14u_2 = 9(2,\ -2,\ 2)^T + 14(-1,\ 1,\ 1)^T = (4,\ -4,\ 32)^T.$$

Получили ровно **один** вектор, значит $\dim(Im\ \varphi \cap Im\ \psi) = 1$, а значит он базисный. То есть:

$$Im\ \varphi \cap Im\ \psi = \langle(1,\ -1,\ 8)^T\rangle.$$

№4

Нам дана матрица:

$$A_t = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & t-1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & t & -2 & 0 & 1+t\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Не зря задачи все таки на ЖНФ, поэтому давайте приведем A_t к ЖНФ, тогда получим, что $A_t = PJP^{-1}$, где P - матрица перехода от стандартного базиса к тому, в котором J - ЖНФ.

Давайте ~~зачем-то~~ найдем матрицы все матрицы D, которые коммутируют с J(потому что их легко найти) и диагонализуемые, тогда какая связь вообще с тем, что $[A_t, X] = 0$ (коммутатор), и X - диагональна?

Так как мы нашли D, которые записаны в том же базисе что и J, то теперь нужно перейти к стандартному базису, чтобы вернуться к A_t, то есть $X = PDP^{-1}$. Тогда если мы докажем, что $[A_t, X] = 0$ и X - диагонализуема(и в обратную сторону), то получим, что $\dim L_t = \dim K_t$, где K_t - подпространство матриц порожденное всеми нашими подходящими D.

1) Диагонализуемость $X \iff$ диагонализуемость D

Матрицы сопряжены, значит у них одна структура ЖНФ, а значит из диагонализуемости одной следует диагонализуемость другой.

2) $[A_t, X] = 0 \iff [J, D] = 0$

$$\Longleftarrow: \quad XA_t = (PDP^{-1})A_t = PD\big(P^{-1}A_tP\big)P^{-1} = PDJP^{-1} = PJDP^{-1} = (PJP^{-1})(PDP^{-1}) = A_tX,$$
$$\Longrightarrow: \quad DJ = (P^{-1}XP)J = P^{-1}X\big(PJP^{-1}\big)P = P^{-1}XA_tP = P^{-1}A_tXP = (P^{-1}A_tP)(P^{-1}XP) = JD.$$

Найдем ЖНФ A_t:

$\chi_{A_t}(\lambda) = (\lambda+2)^3(\lambda-3)^2$ (ищется совсем тривиально).

То есть у нас суммарных размер клеток с $\lambda = -2$ равен 3, а с $\lambda = 3$ равен 2. $\dim\ker(A_t - 3E) = 1 \Rightarrow$ для $\lambda = 3$ имеем один жорданов блок размера 2. С $\dim\ker(A_t + 2E)$ чуть сложней:

$$A_t + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ t = 0 \Rightarrow \dim\ker(A_t + 2E) = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ t \neq 0 \Rightarrow \dim\ker(A_t + 2E) = 1 \end{array} \right.$$

Тогда при $t = 0$ получаем, что клетки будут размера 1-2, и при $t \neq 0$ получаем, что будет одна клетка размера 3.

Как выглядят все матрицы D, что коммутируют с ЖНФ? (Это было на одном из семов), это будут блочно-диагональные матрицы такие(блоки размера такого же что и в ЖНФ), что каждый блок коммутирует с жордановой клеткой этого блока. А коммутирование с жордановой клеткой тоже было в ДЗ, это будет матрица вида:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

Чтобы D(конкретный блок) при этом был диагонализуемым, (так как $\chi_D(\lambda) = (\lambda - a_0)^n$), должно быть, что $\dim\ker(D - a_0E) = n \Rightarrow D$ - скалярная матрица.

Тогда при $t = 0$:

$$D = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \dim K_0 = 3 = \dim L_0$$

И при $t \neq 0$:

$$D = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \dim K_t = 2 = \dim L_t$$

То есть наибольшая размерность L_t достигается при $t = 0$.

№ 5

Так как β - симметричная биленейная форма, то по утв. 164 получим, что существует такой базис, что β в этом базисе имеет диагональный вид.

Но нас спрашивают можно ли дополнить v до базиса так, чтобы β в нем была диагональной, то есть выбрать такие e_1, e_2, e_3, e_4, что $\beta(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ и один из них равен v.

Поскольку

$$\beta(v,v) = v^T B\, v = \begin{pmatrix}2 & 4 & -1 & -2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & -7 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

То e_1 можно выбрать равным v. А значит ограничение β на $\langle v \rangle$ ненулевое, а значит $R^4 = \langle v \rangle + \langle v \rangle^{\perp}$, а дальше можно воспользоваться утверждением 164, то есть ответ да, можно.

Давайте найдем ортогональное дополнение к $\langle v \rangle$, то есть $x : v^T B x = 0$, тогда базисом $\langle v \rangle^{\perp}$ будет ФСР этой системы.

$$v^T B = \begin{pmatrix}2 & 4 & -1 & -2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & -7 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

Отсюда ФСР:

$$v_2 = (*, 0, 0, 1)^T = (3, 0, 0, 1)^T$$

$$v_3 = (*, 0, 1, 0)^T = (-3, 0, 1, 0)^T$$

$$v_4 = (*, 1, 0, 0)^T = (1, 1, 0, 0)^T$$

Теперь применив ортогонализацию Грама-Шмидта, получим такой набор $u_2, u_3, u_4 : \langle v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle u_2, u_3, u_4 \rangle$, что новые вектора попарно ортогональны.

$$u_2 = v_2 = (3, 0, 0, 1)^T$$

$$u_3' = v_3 - \frac{\beta(v_3, u_2)}{\beta(u_2, u_2)} u_2 = (-3, 0, 1, 0)^T + \frac{25}{16}(3, 0, 0, 1)^T = (\frac{27}{16}, 0, 1, \frac{25}{16})^T$$

Давайте домножим на 16, тем самым избавимся от дробей, ортогональность с u_2 при этом не потеряется.

$$u_3 = 16u_3' = (27, 0, 16, 25)^T$$

$$u_4' = v_4 - \frac{\beta(v_4, u_2)}{\beta(u_2, u_2)} u_2 - \frac{\beta(v_4, u_3)}{\beta(u_3, u_3)} u_3 = (1, 1, 0, 0)^T - \frac{1}{16}(3, 0, 0, 1)^T - \frac{7}{528}(27, 0, 16, 25)^T = (\frac{5}{11}, 1, -\frac{7}{33}, -\frac{13}{33})^T$$

$$u_4 = 33u_4' = (15, 33, -7, -13)^T$$

Тогда выбрав $e_1 = v, e_2 = u_2, e_3 = u_3, e_4 = u_4$ получим требуемое.

Форма β в этом базисе будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \beta(e_1, e_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(e_2, e_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta(e_3, e_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(e_4, e_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 528 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33 \end{pmatrix}$$