Алгоритмы и структуры данных. Домашнее задание №6

Выполнил студент Наседкин Дмитрий Сергеевич (группа 242)

Письменная часть

№ 1

Перед тем как решать подпункты, давайте расскажем об общих соображениях:

Давайте рассмотрим любую точку, которая покрыта наибольшим кол-вом окружностей, и так как она покрыта хотя бы одной окружностью, то эту точку можно "сдвинуть"в какую-нибудь сторону до тех пор пока она достигнет границы какой-либо окружности(то есть что кол-во покрывающих не будет меняться), рассмотрим все такие точки что лежат на границе какой-то окружности и находтся в той же области что и наша точка(то есть для всех них ответ одинаковый). Дальше возможны 2 варианта:

- Все эти точки лежат на одной окружности, в этом случае и центр этой окружности покрыт таким же кол-вом точек
- Существует хотя бы одна точка среди них, что принадлежит хотя бы 2-ум окружностям, то есть это точка пересечения окружностей, которая покрыта таким же количеством точек.

Итого доказали, что точка покрытая наибольшим кол-вом окружностей это обязательно либо центр какой-то окружности, либо точка пересечения окружностей.

Окружности не пересекаются, либо пересекаются в одной точке, либо в 2-ух точках, либо одна полностью содержится в другой. Как находить точки пересечения опишем ниже, а случай вложенности проверяется тривиально.

Сразу на 2 подпункта скажем, что перед началом можно рассмотреть центры всех окружностей, их n, после чего для каждой явно насчитать количество окружностей, которым она принадлежит, очевидно, для одной точки это делается за $O(n)$(проверить, что расстояние от центра до нужной точки меньше либо равно радиусу окружности, и так для всех окружностей). Итого для всех центров это будет работать за $O(n^2)$, что подходит под оба пункта, поэтому осталось научится обрабатывать случай, когда наша точка - точка пересечения окружностей.

(а) Давайте найдем все точки пересечения окружностей, для этого для каждой окружности найдем все точки пересечения с другими, перебрав все остальные $(n-1)$ окружностей и за $O(1)$ находя точки пересечения. Из соображений выше их будет не больше $2n = O(n)$, тогда суммарно будет $O(n^2)$ точек пересечения. Для каждой такой точки как выше можно за $O(n)$ насчитать сколькими окружностями она покрывается и найти максимум. Итого алгоритм будет работать за $O(n^3)$.

(б) Давайте для каждой окружности делать это процесс отдельно, а именно, найдем для окружности все точки пересечения окружностей с данной, это делается за $O(n)$. Изначальный счетчик равен 1(Так как любая точка на окружности покрыта хотя бы нашей). (Если точка пересечения с окружностью одна, то добавим все равно 2 равные точки, потом станет ясно почему, а если наша окружность вложена в какую-то, то к изначальному счетчику прибавим 1). После чего точки пересечения отсортируем по полярному углу от центра координат(для каждой точки держим ее координаты и какой окружности она принадлежит), это работает за $O(n \log n)$. Теперь наша задача свелась к поиску точки, покрытой наибольшим количеством отрезков + значения изначального счетчика, то есть будем идти по отсортированному списку, поддерживая текущее кол-во отрезков, и если встречаем эту окружность нечетный раз, то $+1$, иначе -1, а также поддерживая текущий максимум среди кол-ва отрезков. Единственное, осталось сказать, так как мы работаем все таки не с отрезками, а с дугами, то для первой точки списка придется за $O(n)$ явно посчитать какие окружности уже "включены"и прибавить к текущему(и учтя что мы уже их встретили). (По той же причине выше мы разделили случаи на чет, нечет).

Итого для одной окружности это работает за $O(n \log n)$, тогда для n окружностей итоговое время работы будет $O(n^2 \log n)$.

P.S. Точку пересечения 2 окружностей легко найти как решение системы:

$$\begin{cases}(x-x_i)^2+(y-y_i)^2=r_i^2\\(x-x_j)^2+(y-y_j)^2=r_j^2\end{cases} \sim \begin{cases}(x-x_i)^2+(y-y_i)^2=r_i^2\\x(2x_j-2x_i)+y(2y_j-2y_i)+(x_i^2-x_j^2+y_i^2-y_j^2+r_j^2-r_i^2)=0\end{cases}$$

То есть нужно найти точку пересечения прямой и окружности, а для этого нужно просто решить квадратное уравнение, то есть все и правда делается за $O(1)$.

№ 2

Введем X_i как индикаторную случайную величину для i-ого испытания:

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{если событие произошло в } i\text{-м испытании,}\\0, & \text{если событие не произошло.}\end{cases}$$

Тогда наша оценка вероятности по Монте-Карло:

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

Найдем мат. ожидание и дисперсию $\hat{p}$:

$$\mathbb{E}(\hat{p})=\mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Pr(X_i)=\frac{n}{n}p=p.$$

$$\mathbb{D}(X_i)=\mathbb{E}(X_i^2)-\mathbb{E}^2(X_i)=\mathbb{E}(X_i)-\mathbb{E}^2(X_i)=p-p^2=p(1-p)$$

Так как любые 2 события независимы, то получим:

$$\mathbb{D}(\hat{p})=\mathbb{D}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}(X_i)=\frac{np(1-p)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}.$$

Нам нужно:

$$Pr(\frac{|\hat{p}-p|}{p}\leq 0.002)\geq 0.99 \Leftrightarrow Pr(|\hat{p}-p|\leq 0.002p)\geq 0.99$$

Используя неравенство Чебышева получим:

$$Pr(|\hat{p}-\mathbb{E}(\hat{\mathbb{p}})|\geq a)\leq\frac{\mathbb{D}(\hat{\mathbb{p}})}{a^2},$$

то есть

$$Pr(|\hat{p}-p|\leq a)\geq 1-\frac{p(1-p)}{na^2}$$

Подставляя $a=0.002p$ получим:

$$1-\frac{p(1-p)}{na^2}\geq 0.99 \implies n\geq\frac{100p(1-p)}{a^2}=\frac{10^8(1-p)}{4p}$$

Видим стандартную гиперболу $\frac{1}{x}$, она монотонно убывает при $x > 0$, тогда максимальное значение достигается при $p = 0.7$(так как $0.7 \leq p \leq 0.8$).

Отсюда $n \geq \frac{10^8 \cdot 0.3}{4 \cdot 0.7} = 10714285,714285714285714$.

Так как n - натуральное, то $n \geq 10714286$. Ну или если удобнее, то $n \sim 10^7$.