Distribution-hard

zwq

2022.10.22

本文介绍比较复杂但是在应用中非常重要的5个分布: Γ分布, Beta分布, χ^2分布, t分布, F分布。本文收集了其概率密度函数(probability density function, pdf)的证明(在大多数的工科教科书中并没有).

此外，没有依赖现有的概率密度函数计算库，仅根据每个分布pdf的数学定义,分别绘制了这些分布的概率密度曲线.

预备知识

Γ函数和Beta函数

由Euler总结的2个著名的反常积分：

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \\ \mathrm{Beta}(\alpha,\beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \end{aligned} \tag{1}$$

这两个反常积分有很多变体(换元积分法). 例如Beta函数可以方便地计算三角函数的积分(类似于Wallis公式)

$$B(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\theta \cdot \sin^n\theta d\theta$$

此外，还有一些基本结论:

$$\begin{gathered} \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ \Gamma(n+1) = n!,\ \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\tfrac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)},\ n \in \mathbb{N}^+ \\ \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \\ \mathrm{Beta}(\alpha,\beta) = \mathrm{Beta}(\beta,\alpha) = \tfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ \mathrm{Beta}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \pi,\ \mathrm{Beta}(1,1) = \tfrac{1}{2} \end{gathered}$$

1 Γ分布

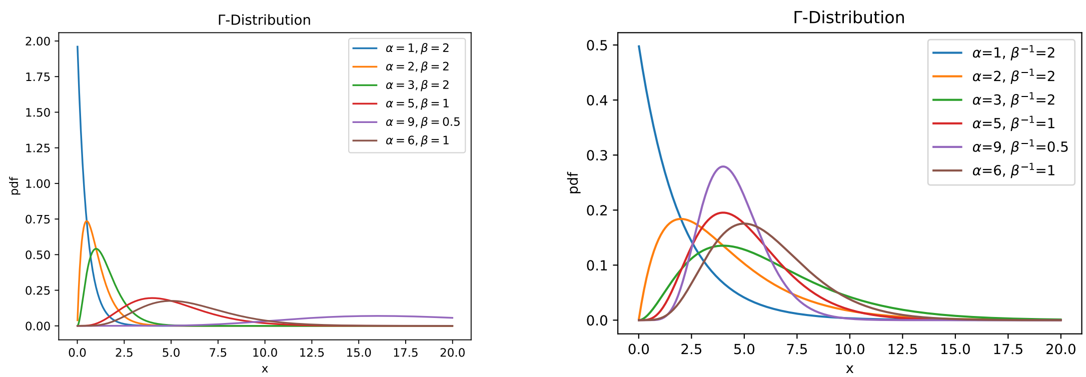
$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\ &\overset{t=\beta x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

本pdf和实验代码可在https://github.com/wqzh/dist下载

那么就得到了Γ分布的概率密度函数:

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\beta x},\ x>0\\ 0,\quad \text{otherwise}\end{cases}$$

其中两个参数$\alpha,\beta>0$, α为形状参数,β为尺度(逆尺度)参数.
当$\alpha<1$, $f(x;\alpha,\beta)$为递减函数;
当$\alpha=1$, $f(x;\alpha,\beta)$为递减函数;
当$\alpha>1$, $f(x;\alpha,\beta)$为单峰函数;



(a) (b)

Gamma 分布

在绘制Gamma分布的pdf曲线时，有一个非常有意思现象: 如果按照$f(x;\alpha,\beta)$绘图，得到的结果不好看Fig. 1a, 但是如果用$\lambda=\beta^{-1}$代替Gamma分布的β时，可得到$f(x;\alpha,\beta^{-1})$的曲线更美观,也更常用. Fig. 1b. 这可能是β被称为为尺度(逆尺度)参数的原因.

2 Beta分布

n-Bernouli试验，每一次事件发生的概率为p且互相独立, 那么这个试验X服从n重伯努利分布: $X\sim B(n,p)$

$$Pr(x=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

又因为在实验之前，没有任何先验知识,我们不知道p的值是什么。因此假设p服从均匀分布$p\sim U(0,1)$, 那么可得p的概率密度函数$p(x)\equiv 1$. 那么X的概率累计函数为: 当$x\leq 0(x\geq 1)$时， $F_X(x)=0(1)$. 当$0<x<1$时,有

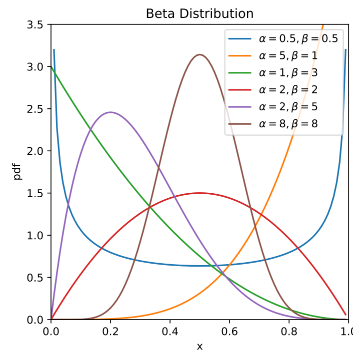
$$F_X(x)=Pr(p\leq x|k,n)=\frac{Pr(k,n,p\leq x)}{Pr(k,n)}$$

$$\begin{aligned}Pr(k,n)&=\int_0^1 Pr(k,n,p=x)p(x)dx\\&=\int_0^1\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}dx\\&=C,\ \text{is a constant.}\end{aligned}\tag{3}$$

因此

$$F_X(x)=\frac{\int_0^x\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}dt}{Pr(k,n)}$$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= F'_X(x) \\
&= \left(\frac{\int_0^x \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} dt}{Pr(k,n)}\right)' \\
&= \frac{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}{Pr(k,n)} \\
&= \frac{x^k (1-x)^{n-k}}{\int_0^1 u^k (1-u)^{n-k} du}
\end{aligned} \tag{4}
$$



Beta 分布

令$k=\alpha-1, n-k=\beta-1$,那么就得到Beta分布的概率密度函数

$$
f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}
$$

因为$\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)=\mathrm{Beta}(\beta,\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, 因此可以替换为

$$
f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

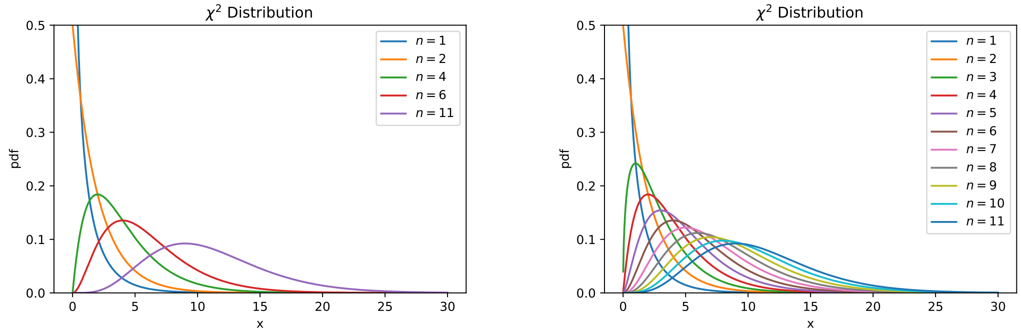
3 χ^2分布

假设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布于标准正态分布$N(0,1)$.
那么随机变量$X=\sum_{i=0}^n X_i^2$满足$X \sim \chi^2(n)$.其概率密度函数为:

$$
f(x;n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

证明:

$$
Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2
$$



(a) (b)

χ^2分布

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= Pr(Y \leq y) = Pr(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \leq y) \\
&= \int \cdots \int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leq y} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_0^{\sqrt{y}} \int_{\theta_1=\psi_1}^{\varphi_1} \cdots \int_{\theta_{n-1}=\psi_{n-1}}^{\varphi_{n-1}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \\
&= C_n \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1} dr
\end{aligned} \tag{6}$$

求导得概率密度函数:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= (F_Y(y))' \\
&= \frac{\partial (C_n \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1} dr)}{\partial y} \\
&= C_n e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n-1}{2}} (\sqrt{y})' \\
&= \frac{C_n}{2} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}
\end{aligned} \tag{7}$$

又因为概率密度积分为1,可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} f_Y(y) dy \\
&= \frac{C_n}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} dy \\
&\overset{x=\frac{y}{2}}{=} \frac{C_n}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} (2x)^{\frac{n}{2}-1} 2dx \\
&= C_n 2^{\frac{n}{2}-1} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1} dx \\
&= \frac{C_n}{2} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) = 1
\end{aligned} \tag{8}$$

即$\frac{C_n}{2} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}$
代入上式可得χ^2分布的pdf:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}, \ y > 0$$

引理 1 二维连续型随机变量商的分布 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$p(x,y)$. 那么$Z = \frac{X}{Y}$的概率密度$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(zy,y)|y|dy$.

证明:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= Pr(Z \le z) = Pr(\frac{X}{Y} \le z) \\
&= \int_{-\infty}^{0} dy \int_{yz}^{+\infty} p(x,y)dx + \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{yz} p(x,y)dx \\
&\overset{x=uy}{=} \int_{-\infty}^{0} dy \int_{z}^{+\infty} p(uy,y)ydu + \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z} p(uy,y)ydu \\
&= \int_{z}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{0} p(uy,y)ydy + \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} p(uy,y)ydy
\end{aligned} \tag{9}
$$

求导得:

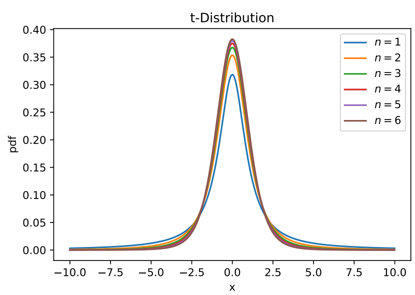
$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= (F_Z(z))' \\
&= -\int_{-\infty}^{0} p(zy,y)ydy + \int_{0}^{+\infty} p(zy,y)ydy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} p(zy,y)|y|dy
\end{aligned} \tag{10}
$$

证毕.

4 t分布

$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 那么随机变量$Z = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为n的t分布, 即:$Z \sim t(n)$

$$
f(t;n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \ -\infty < t < \infty \tag{11}
$$



t分布

因为$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$. 记随机变量$W = \sqrt{\frac{Y}{n}}$, 显然w恒大于零. 当$w < 0$时, $f_W(w) = 0$. 当$w > 0$时,因为Y服从卡方分布,由卡方分布的pdf有:

$$
\begin{aligned}
F_W(w) &= Pr(W \le w) = Pr(Y \le nw^2) \\
&= \int_{0}^{nw^2} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx
\end{aligned} \tag{12}
$$

求导得$W=\sqrt{\frac{Y}{n}}$的pdf:(在第5节-F分布中,还会求得$W=\frac{Y}{n}$的pdf)

$$\begin{aligned} f_W(w;n) &= (F_W(w))' \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}(nw^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nw^2}{2}}2nw \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}2^{1-\frac{n}{2}}n^{\frac{n}{2}}w^{n-1}e^{-\frac{nw^2}{2}} \end{aligned} \tag{13}$$

$Z=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$,可记为 $T=\frac{X}{W}$. 已知X的pdf(标准正态分布)和W的pdf, 又因为X和W相互独立，那么$(X,W)\sim p(x,w)=p(x)\cdot f_W(w)$. 那么由引理 1可求出两个随机变量商的分布:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(tw,w)|w|dw = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(tw)p_W(w)|w|dw \\ &= \int_0^{+\infty} p_X(tw)p_W(w)wdw \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2w^2}{2}}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}2^{1-\frac{n}{2}}n^{\frac{n}{2}}w^{n-1}e^{-\frac{nw^2}{2}}\right)wdw \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}2^{\frac{1-n}{2}}n^{\frac{n}{2}}\right)\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(n+t^2)}{2}w^2}w^n dw \\ &\overset{w=\sqrt{\frac{2z}{n+t^2}}}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}2^{\frac{1-n}{2}}n^{\frac{n}{2}}\right)\int_0^{+\infty}e^{-z}\frac{1}{n+t^2}\left(\frac{2}{n+t^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}z^{\frac{n-1}{2}}dz \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}2^{\frac{1-n}{2}}n^{\frac{n}{2}}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n+t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-z}z^{\frac{n-1}{2}}dz \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}2^{\frac{1-n}{2}}n^{\frac{n}{2}}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n+t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2}) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}n^{\frac{n}{2}}(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}})\left(\frac{1}{n+t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \end{aligned} \tag{14}$$

5 F分布

$X\sim\chi^2(n_1),\ Y\sim\chi^2(n_2)$, 那么随机变量$Z=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$服从自由度为$n_1,n_2$的F分布, 即:$Z\sim F(n_1,n_2)$

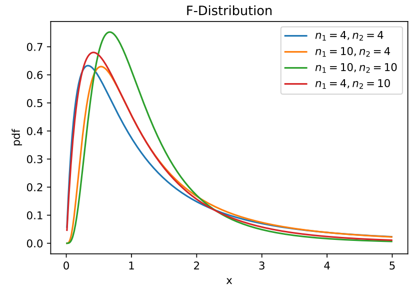
$$f(t;n_1,n_2)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}{n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}}t^{\frac{n_1}{2}-1}(n_1t+n_2)^{-\frac{n_1+n_2}{2}},\ t>0 \\ 0,\quad \text{otherwise}\end{cases} \tag{15}$$

因为$X\sim\chi^2(n_1),\ Y\sim\chi^2(n_2)$, 记新的随机变量$X'=X/n_1,\ Y'=Y/n_2$, 那么有$T=\frac{X/n_1}{Y/n_2}=\frac{X'}{Y'}$,由卡方分布的pdf,可得X,Y的pdf为:

$$f_X(x)=\frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma(\frac{n_1}{2})}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1},\ x>0$$
$$f_Y(y)=\frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma(\frac{n_2}{2})}e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{n_2}{2}-1},\ y>0$$

可得X',Y'的pdf为:

$$f_{X'}(x)=\frac{{n_1}^{\frac{n_1}{2}}}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma(\frac{n_1}{2})}e^{-\frac{n_1x}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1},\ x>0$$



F分布

$$f_{Y'}(y)=\frac{n_2^{\frac{n_2}{2}}}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma(\frac{n_2}{2})}e^{-\frac{n_2 y}{2}}y^{\frac{n_2}{2}-1},\ y>0$$

证明

$X\sim\chi^2(n)$, 则$W=\frac{X}{n}$的pdf为(证明如下):

$$\begin{aligned}F_W(w)&=Pr(W\le w)=Pr(X\le nw)\\&=\int_0^{nw}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx\end{aligned}\tag{16}$$

求导得$W=\frac{X}{n}$的pdf:

$$\begin{aligned}f_W(w;n)&=(F_W(w))'\\&=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}(nw)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nw}{2}}n\\&=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}n^{\frac{n}{2}}w^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nw}{2}}\end{aligned}\tag{17}$$

证毕

记随机变量$T=\frac{X'}{Y'}$, 显然t恒大于零. 当$t\le 0$时, $f_T(t)=0$. 当$t>0$时,有

$$F_T(t)=Pr(T\le t)=Pr(\frac{X'}{Y'}\le t)=Pr(X'\le Y't)$$

由于X,Y相互独立, 因此X', Y'也相互独立,根据引理 1有:

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(ty,y)|y|dy = \int_0^{+\infty} p_{X'}(ty)p_{Y'}(y)ydy \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{{n_1}^{\frac{n_1}{2}}}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma(\frac{n_1}{2})} e^{-\frac{n_1 ty}{2}} (ty)^{\frac{n_1}{2}-1}\right) \left(\frac{{n_2}^{\frac{n_2}{2}}}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma(\frac{n_2}{2})} e^{-\frac{n_2 y}{2}} y^{\frac{n_2}{2}-1}\right) ydy \\
&= \left(\frac{{n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\right) t^{\frac{n_1}{2}-1} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(n_1 t+n_2)y}{2}} y^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} ydy \\
&\overset{y=\frac{2z}{n_1 t+n_2}}{=} \left(\frac{{n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\right) \int_0^{+\infty} e^{-z} \left(\frac{2}{n_1 t+n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}} z^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} t^{\frac{n_1}{2}-1} dz \\
&= \left(\frac{{n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\right) \left(\frac{2}{n_1 t+n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}} t^{\frac{n_1}{2}-1} \int_0^{+\infty} e^{-z} z^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} dz \\
&= \left(\frac{{n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}}}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\right) \left(\frac{2}{n_1 t+n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}} t^{\frac{n_1}{2}-1} \Gamma(\frac{n_1+n_2}{2}) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} {n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}} (\frac{1}{n_1 t+n_2})^{\frac{n_1+n_2}{2}} t^{\frac{n_1}{2}-1} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} {n_1}^{\frac{n_1}{2}}{n_2}^{\frac{n_2}{2}} t^{\frac{n_1}{2}-1} (n_1 t+n_2)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}
\end{aligned}
\tag{18}
$$