

Fourier

zwq

2022.10.12

为了更好地理解, 学习顺序是 Fourier Series \rightarrow Fourier Transform \rightarrow DFT \rightarrow FFT, 这也是它们被提出的时间先后顺序. 本文还介绍了2维离散傅里叶变换(DFT2), 并给出了DFT2具有的性质及其证明。

其中Fourier Transform涉及到的数学知识, 在本文不是重点.其余的3个知识点, 在本文有较为详细的介绍.

1 傅里叶级数

法国数学家Joseph Fourier (1768-1830) 在1807年发现任何周期为 T 的周期函数都可以分解成无穷的正余弦函数之和. 由于计算机的普及和数字信号处理的需要, 快速傅里叶变换在1965年被提出.

基础预备知识 复数、欧拉公式、正弦/余弦函数的正交性:

我们只考虑系数为正整数 $\forall m, n \geq 1$ 的情况, (负数的话使用诱导公式转换),

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi, \quad m = n \\ \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \quad m \neq n \\ \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= 0, \quad \forall m, n \geq 1 \\ \int_0^{2\pi} \sin mxdx &= \int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0, \quad \forall m, n \geq 1\end{aligned}$$

因此, $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ 是一组正交基, 并且频率有规律的变化

Fourier Series 3种表示形式:

1.1 三角函数形式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1)$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 为基频, 离散形式下的频率 ω 为 ω_0 的整数倍, 其中

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt, \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \end{cases} \quad (2)$$

$\int_{-T/2}^{T/2}$ 表示在一个周期内的积分, 简记为 \int_T .

注: 同济版高等数学的记法为

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

1.2 复数形式 由Euler公式 $e^{jx} = \cos x + j \sin x$, j 为虚数单位, $j^2 = -1$ 可得

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \\ \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \frac{je^{-jx} - je^{jx}}{2} \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} \cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \\ \sin n\omega_0 t = \frac{je^{-jn\omega_0 t} - je^{jn\omega_0 t}}{2} \end{cases}$$

将上式代入公式1, 可得

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} \right) \quad (3)$$

令 $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$, 其中 c_n 和 c_{-n} 互为共轭复数. 可得复数形式的傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (4)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5)$$

这个结论很重要. 看了很多博客, 发现有2种解释(不是严格证明). 具体证明细节读者去参考数学教材吧.

第一种解释

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \quad \text{equation. 2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \int_T f(t) (\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (6)$$

这种解释看样子很正确

另一种解释 由 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ 在等式2端同时乘以 $e^{-jk\omega_0 t}$, 并积分, 可得

$$\int_T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j(n-k)\omega_0 t} dt$$

根据三角函数正交推论, 当 $n \neq k$, 等式右端结果为0; 当 $n = k$ 时, 等式右端结果非零(没看懂)

$$\int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = c_n T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

1.3 简谐波形式 除了上面2种形式, 还可以使用三角函数配角公式, 写成只含sin或者cos的形式

例如: $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin[x + \arctan(\frac{b}{a})] (a \neq 0)$

由公式1, $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$, 写成cos之和(这种形式为一般形式的简谐波 Simple Harmonic Wave)

$$f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (7)$$

其中 $A_0 = \frac{a_0}{2}, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n}, \sin\varphi_n = \frac{-b_n}{A_n}, \varphi_n = \arctan \frac{-b_n}{a_n}$

类似地, 写成sin之和

$$f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \sin(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (8)$$

其中 $A_0 = \frac{a_0}{2}, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \cos\theta_n = \frac{b_n}{A_n}, \sin\theta_n = \frac{a_n}{A_n}, \theta_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}, \theta_n$ 和 φ_n 相差 $\frac{\pi}{2}$

小结

以上三种形式的傅里叶级数都很常见

其中 $|c_n| = \frac{A_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$, 称为振幅、幅值. c_n 定义见公式 3

复数 c_n 的幅角(argument of a complex number)(就是指角度), 记为 $\arg c_n$, 也称为相位, 当然 θ_n, φ_n 也是相位.

一般来说, 傅里叶级数在周期函数进行展开, 傅里叶变换一般在非周期函数上进行(周期视为无穷大的连续函数).

2 傅里叶相关的定理

定理 2.1 Fourier积分定理 (1)在 $(-\infty, +\infty)$ 任一有限区间满足Dirichlet条件, (2)绝对可积, 即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$,

则在 $f(t)$ 的连续点处有, $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$;

在间断点处, 上式左端为 $\frac{T}{2} [f(t-0) + f(t+0)]$

傅里叶变换及其逆变换为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \iff \mathcal{F}[f(t)] \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \iff \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \end{aligned} \quad (9)$$

温馨提示: 注意到上面两式的积分号前的系数, 一个是1, 另一个是 $\frac{1}{2\pi}$. 在有些教材中, 会把 $\frac{1}{2\pi}$ 平均分给两式(雨露均沾), 如下式:(但要求两个系数的乘积不变).

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \iff \mathcal{F}[f(t)] \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \iff \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \end{aligned}$$

在这里特别注明是因为二维DFT时, 系数 $\frac{1}{MN}$ 也有同样的操作. 可以分为 $\frac{1}{\sqrt{MN}} \cdot \frac{1}{\sqrt{MN}}$ 或者 $\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{N}$.

待补充

3 小结

由前2节的内容, 我们可得到以下的结论:

对于周期为 T 的周期函数, 基频 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

非周期函数, 可视为 $T \rightarrow \infty$, 对于基频 ω_0 , 有 $\omega_0 \rightarrow 0$, 只要 n 取得足够多 $0, 1, 2, \dots$, 那么 $n\omega_0$ 就可视为连续的变量, 之后会记为 ω .

此外, 还有如下的结论

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (10)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (11)$$

将 $n\omega_0$ 带入公式 10, $F(n\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$

由公式 11, 可知 $c_n = \frac{1}{T}F(n\omega_0)$. 根据三角函数的周期和角频率 ω 的关系可得, $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$. 此外, 还有 $d\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0$

由复数形式的傅里叶级数, 有

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \omega_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (12)$$

可看出傅里叶逆变换和原函数 $f(t)$ 的复数形式的傅里叶级数是等价的.

注: 这样说有循环论证的嫌疑(用结论来证明结论). 既然数学家证明过了, 我们就可以心安理得地这么认为了.

4 DFT 和 FFT(一维)

快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)和离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT). 快速傅里叶反变换(Inverse Fast Fourier Transform, iFFT)

Notation 注: $x_k, x(k), x[k]$ 都表示索引 x 的第 k 的元素. 读者请注意语境.

假设通过采样源信号 x 得到了 N 个离散的样本点 $x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$. 这 n 个离散信号通过DFT就可以得到 n 个复数, 这些复数就包含了原信号的频率和相位信息, 记为 $X(n), n = 0, 1, \dots, N-1$.

回顾傅里叶变换及其逆变换的公式如下

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

但是这考虑的是连续的变量, 而计算机只能处理离散的数据.

因此按照特定的采样频率 f_s (需满足采样定理要求)就可以得到离散的数据, 然后对这些离散的数据进行傅里叶变换, 这就是离散傅里叶变换(DFT). 然而DFT速度太慢, 时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^2)$, 可以被优化. 因此在1965年, J.W.Cooley和 T.W.Tukey 提出快速傅里叶, 时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \log n)$. Cooley-Tukey FFT.

1 DFT

Notation 注: $x_k, x(k), x[k]$ 都表示索引 x 的第 k 的元素. 在很多文章里都有用到, 读者请注意语境.

由连续型傅里叶变换公式, 把积分换为求和, DFT公式如下:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

注意: 为了得到变换后 X 结果中的每一个元素, 例如第 k 个输出, i.e. X_k , 会涉及到原始数据 x 的每一个元素 x_n , 并且对应的复数因子 $e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$ 中包含了固定的 k 和所有的 n .

当然, 由连续型傅里叶逆变换可知, DFT的逆变换就是:(不是本节的重点)

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

思考: 系数 $\frac{1}{N}$ 怎么来的?

其中, $e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 被称为**旋转因子(twiddle factor)**, 记为 w 或者 W, W_N . 读者根据语境理解即可. 旋转因子有3个重要的特性, 后面会用到

首先回顾一下欧拉恒等式(欧拉公式) $e^{j\pi} + 1 = 0$ 可知

$$\begin{aligned}e^{j\pi} &= e^{-j\pi} = -1 \\e^{2j\pi} &= e^{-2j\pi} = 1\end{aligned}$$

单位根(root of unity) 是关于旋转因子 W_N , 即 $e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 的另一个角度的解释. $e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 和 $e^{j\frac{2\pi}{N}}$ 互为共轭复数. 并且有 $e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos(\frac{2\pi}{N}) - j\sin(\frac{2\pi}{N})$.

把单位圆(模为1)的弧, N 均等分. 则这 N 个点的复数形式(坐标)依次是 $e^{-j\frac{2\pi}{N}n}, n = 0, 1, \dots, N-1$ (当然也可以记为 $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$). 由于模长为1, 因此 $e^{-j\frac{2\pi}{N}m}$ 乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$ 不会改变模长, 只会改变幅角.

当不是单位圆时只需要修改模长即可, 如 $2e^{-j\frac{2\pi}{N}n}, n = 0, 1, \dots, N-1$ 表示半径为2圆弧 N 等分点的坐标.

(这里也可以看出复数表示的好处, 只用1个复数, 就可以表示2个信息).这里特别提出是因为后面的思考和总结小节, 会用到.

已知 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$, 还有几个简单的小结论

$$\begin{aligned}W_N^N &= e^{-j\frac{2\pi}{N}N} = e^{-2j\pi} = 1 \\W_N^{N/2} &= e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1\end{aligned}$$

OK, 开始介绍这3个性质.

它们对应的物理意义(本质), 读者自行查找资料理解

周期性 采样的周期相关...

$$W_N^{a+N} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(a+N)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}a} \cdot e^{-j2\pi} = W_N^a$$

对称性 得到的频谱图也是对称的...

$$W_N^{a+N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(a+\frac{N}{2})} = e^{-j\frac{2\pi}{N}a} \cdot e^{-j\pi} = -W_N^a$$

缩放性 采样频率变化之后...

$$W_N^a = e^{-j\frac{2\pi}{N}a} = e^{-j\frac{2\pi}{N/m} \cdot a/m} = W_{N/m}^{a/m}$$

2 FTM

傅里叶变换矩阵(Fourier Transform Matrix, FTM) 记FTM矩阵为 F ,

在很多AI的论文中, 看到使用DFT时都会提到FTM, 通过引用上世纪 信号处理 著作中的相关结论, 引出一系列的稀奇古怪的定理. 比如 $\frac{1}{N}(F \otimes F)$, 会和矩阵 F 的范数联系起来.等等. 其中 \otimes 表示矩阵的Kronecker乘法.

F 是复数方阵 $\mathbb{C}^{N \times N}$, 如果取傅里叶变换矩阵 $F = \frac{1}{\sqrt{N}}[W_N^{ij}], i, j = 0, 1, \dots, N-1$, 那么 F 就是一个酉矩阵unitary matrix. 即:共轭转置矩阵等于其逆矩阵 $F^* = F^{-1}$.

(之前看见过 F 不是方阵的情况,不过找不到是在哪里的看到的了,不知道是不是记错了.)

F是一个对称矩阵(Hermite 矩阵).

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{bmatrix} e^{-j2\pi 0 \frac{0}{N}} & e^{-j2\pi 1 \frac{0}{N}} & e^{-j2\pi 2 \frac{0}{N}} & \dots & e^{-j2\pi (N-1) \frac{0}{N}} \\ e^{-j2\pi 0 \frac{1}{N}} & e^{-j2\pi 1 \frac{1}{N}} & e^{-j2\pi 2 \frac{1}{N}} & \dots & e^{-j2\pi (N-1) \frac{1}{N}} \\ e^{-j2\pi 0 \frac{2}{N}} & e^{-j2\pi 1 \frac{2}{N}} & e^{-j2\pi 2 \frac{2}{N}} & \dots & e^{-j2\pi (N-1) \frac{2}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j2\pi 0 \frac{N-1}{N}} & e^{-j2\pi 1 \frac{N-1}{N}} & e^{-j2\pi 2 \frac{N-1}{N}} & \dots & e^{-j2\pi (N-1) \frac{N-1}{N}} \end{bmatrix}_{N \times N} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{1 \cdot 1} & w^{2 \cdot 1} & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^{1 \cdot 2} & w^{2 \cdot 2} & \dots & w^{2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{1 \cdot (N-1)} & w^{2 \cdot (N-1)} & \dots & w^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix}_{N \times N}
 \end{aligned} \tag{13}$$

DFT的计算方法: 结果列向量 X 可由以下的矩阵乘法得到, 列向量 x 是原始采样得到的离散信号

$$X = F \cdot x$$

计算复杂度为 $O(n^2)$.

顺便一提, 公式 13第二个矩阵是不是很像范德蒙矩阵 Vandermonde.

思维发散: 范德蒙行列式最初是为了研究多项式函数族 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 的线性相关性而提出来的. 范德蒙行列式不等于0, 即多项式函数族线性无关. 之前一提到三角函数族互相正交(线性无关)...

总之FTM应用比较广.读者想较深刻地理解, 请参考专业的书籍.(我的理解也不是很深)

3 FFT

快速傅里叶变换

由DFT,可知

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

这里我们假设 N 是一个偶数, 则 $N/2$ 可整除. 原始离散信号为 $x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$

这里先定义几个记号,将原始离散信号序列划分成奇序列和偶序列

$$\begin{cases} x_{even}(m) = x(2m), m = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ x_{odd}(m) = x(2m + 1), m = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \end{cases}$$

以下会用到旋转因子的几个性质

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_N^{k \cdot 2m} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_N^{k \cdot (2m+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_N^{k \cdot 2m} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_N^{k \cdot 2m} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_{N/2}^{k \cdot m} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_{N/2}^{k \cdot m} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{\text{even}}(m) W_{N/2}^{k \cdot m} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{\text{odd}}(m) W_{N/2}^{k \cdot m} \\
&= X_{\text{even}}(k) + W_N^k X_{\text{odd}}(k), \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1
\end{aligned} \tag{14}$$

即, 要求 x 的DFT结果 X , 等价于分别求奇序列和偶序列 $x_{\text{even}}(m), x_{\text{odd}}(m)$ DFT之后的结果 $X_{\text{even}}(k), X_{\text{odd}}(k)$ 再组合.

同时2个子序列 $x_{\text{even}}(m), x_{\text{odd}}(m)$ 分别又可以继续划分成各自的奇偶子序列... 直到只含一个元素, 不能再分, 再回溯回去(二分法). 因此时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \log n)$ 这就是FFT的核心思想

划分奇(子)序列示例 这里我们只考虑even 序列的递归计算, 不考虑odd序列

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\
&= X_{\text{even}^1}(k) + W_N^k X_{\text{odd}^1}(k), \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1
\end{aligned}$$

其中 X_{even^1} 子序列是在程序递归返回 $X_{\text{even}^2_even}$ 和 $X_{\text{even}^2_odd}$ 之后才计算得到的:

$$\begin{aligned}
X_{\text{even}^1}(k) &= X_{\text{even}^2_even}(k) + W_{N/2}^k X_{\text{even}^2_odd}(k), \quad k = 0, 1, \dots, N/4-1 \\
X_{\text{even}^2}(k) &= X_{\text{even}^3_even}(k) + W_{N/4}^k X_{\text{even}^3_odd}(k), \quad k = 0, 1, \dots, N/8-1
\end{aligned}$$

直到最后一个序列的奇/偶子序列都不可再分, 然后递归返回...

5 DFT2 (二维)

以上的章节讲的都是二维傅里叶变换(FT, DFT, FFT)。当然, 1维DFT变换有一些性质: 原信号平移、旋转会导致频谱图和相位图产生特定的变化, 这些可根据数学公式予以证明和解释。因为在2维DFT有相应的性质, 因此一维的情况就没有提。2维DFT的这些性质(11条)会给出证明。

一维DFT处理的是一维的数字信号, 然而作为离散的数字信息: 2维数字图像, 在某些场合同样需要处理, 比如: 提取图像的轮廓、细节等。

1. DFT2

对于一张 $M \times N$ 大小的图像, 考虑灰度图(只有一个通道), 像素是实数(0-255)。有如下的2维傅里叶变换及其逆变换公式:

FT2(连续型)

$$\begin{aligned}
F(u, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\
f(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv
\end{aligned} \tag{15}$$

DFT2(离散型)

$$\begin{aligned}
F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \iff \mathcal{F}[f(x, y)] \\
f(x, y) &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \iff \mathcal{F}^{-1}[F(u, v)]
\end{aligned} \tag{16}$$

有 $x, u = 0, 1, \dots, M-1; y, v = 0, 1, \dots, N-1$. (x, y, u, v 都是整数)

注: 用 \Leftrightarrow 表示傅里叶变换(\mathcal{F} 也是), 即 $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$, 等价于 $F(u, v) = \mathcal{F}[f(x, y)]$. 当然, 也等价于 $f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(u, v)]$.

更一般地说, $f \Leftrightarrow F$ 即表示 $F = \mathcal{F}[f]$.

2. 11条性质

重要的性质: 线性、可分离、空间位移、频率位移、中心化、卷积定理.

性质1: 线性性质

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [af_1(x, y) + bf_2(x, y)] e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\
&= a \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_1(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} + b \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_2(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\
&= aF_1(u, v) + bF_2(u, v)
\end{aligned} \tag{17}$$

性质2: 比例性质

性质3: 可分离性

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}[f(x, y)] \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \frac{vy}{N}} \right] \cdot e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) \cdot e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} = F(u, v) \\
&= \sum_{y=0}^{N-1} F(u, y) \cdot e^{-j2\pi \frac{vy}{N}} = F(u, v)
\end{aligned} \tag{18}$$

这个性质说明对于2维图像的DFT2, 可以用2个1维的DFT实现.

表 1: DFT2性质(卷积定理的*表示卷积运算, 如果*在上标处则表示共轭,例如:相关定理; ◦表示相关运算)

编号	性质	数学表达式
1	线性性质	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
2	比例性质	$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{ab}F(\frac{u}{a}, \frac{v}{b})$
3	可分离性	$F(u, v) = F_x\{F_y[f(x, y)]\} = F_y\{F_x[f(x, y)]\}$ $f(x, y) = F_x^{-1}\{F_y^{-1}[F(u, v)]\} = F_y^{-1}\{F_x^{-1}[F(u, v)]\}$
4	空间位移	$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})}$
5	平移性质 频率位移 图像中心化	$f(x, y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N})} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $u_0 = \frac{M}{2}, v_0 = \frac{N}{2}, f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2})$
6	周期性	$F(u, v) = F(u + aM, v) = F(u, v + bN) = F(u + aM, v + bN)$ $f(x, y) = f(x + aM, y) = f(x, y + bN) = f(x + aM, y + bN)$
7	共轭对称	$F(u, v) = F^*(-u, -v), F(u, v) = F^*(-u, -v) $
8	旋转不变性	$f(r, \theta + \theta_0) = F(\rho, \varphi + \theta_0)$
9	平均值	$\overline{f(x, y)} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN}F(0, 0)$
10	卷积定理	$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$ $f(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v)$ 互相关: $f(x, y) \circ g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G^*(u, v)$
11	相关定理	$f(x, y) \circ g^*(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$ 自相关: $f(x, y) \circ f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) ^2$ $ f(x, y) ^2 \Leftrightarrow F(u, v) \circ F(u, v)$

性质4:空间位移

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}[f(x-x_0, y-y_0)] \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x-x_0, y-y_0) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x-x_0, y-y_0) e^{-j2\pi(\frac{u(x-x_0+x_0)}{M} + \frac{v(y-y_0+y_0)}{N})} \\
&= e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x-x_0, y-y_0) e^{-j2\pi(\frac{u(x-x_0)}{M} + \frac{v(y-y_0)}{N})} \\
&= e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})} \cdot \sum_{x=-x_0}^{M-1-x_0} \sum_{y=-y_0}^{N-1-y_0} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\
&= e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\
&= e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})} F(u, v)
\end{aligned} \tag{19}$$

性质5: 平移性质

频率位移

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}\left[f(x, y) e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N})}\right] \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N})}] \cdot e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{(u-u_0)x}{M} + \frac{(v-v_0)y}{N})} \\
&= F(u-u_0, v-v_0)
\end{aligned} \tag{20}$$

图像中心化 取 $u_0 = \frac{M}{2}, v_0 = \frac{N}{2}$, 带入上式, 可得,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}\left[f(x, y) e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N})}\right] \\
&= \mathcal{F}\left[f(x, y) e^{j2\pi(\frac{x}{M} \frac{M}{2} + \frac{y}{N} \frac{N}{2})}\right] = F(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}) \\
&= \mathcal{F}\left[f(x, y) e^{j2\pi(\frac{x}{2} + \frac{y}{2})}\right] \\
&= \mathcal{F}\left[f(x, y) e^{j\pi(x+y)}\right] \\
&= \mathcal{F}\left[f(x, y) \cdot (-1)^{(x+y)}\right]
\end{aligned} \tag{21}$$

性质6:周期性 带入 aM 后, 分子分母约掉 M , 根据 $e^{-j2\pi} = 1$, 易证. bN 同理.

性质7:共轭对称

$$\begin{aligned}
F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\
&= \left\{ \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{(-u)x}{M} + \frac{(-v)y}{N})} \right\}^* \\
&= F^*(-u, -v)
\end{aligned} \tag{22}$$

由于 $F(u, v)$ 和 $F(-u, -v)$ 互为共轭复数, 那么有 $|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$

性质8:旋转不变性 由DFT2 $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$

使用如下的极坐标变换,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad \begin{cases} u = \rho\cos\varphi \\ v = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

则 $ux + vy = \rho r(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) = \rho r\cos(\varphi - \theta)$ 那么, 连续型FT2的极坐标形式的形式为:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-j2\pi\rho r\cos(\varphi-\theta)} r dr d\theta = F(\rho, \varphi) \end{aligned} \quad (23)$$

由上式可得:

$$\begin{aligned} F(\rho, \varphi + \theta_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-j2\pi\rho r\cos[\varphi-(\theta-\theta_0)]} r dr d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\theta_0}^{2\pi-\theta_0} f(r, \theta + \theta_0) e^{-j2\pi\rho r\cos(\varphi-\theta)} r dr d\theta \\ &\stackrel{f(r, \theta) = f(r, \theta + 2\pi)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta + \theta_0) e^{-j2\pi\rho r\cos(\varphi-\theta)} r dr d\theta \end{aligned} \quad (24)$$

上式表明 $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\rho, \varphi + \theta_0)$

性质9:平均值 由二维离散傅里叶变换

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

取 $u = v = 0$, 可得

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{0x}{M} + \frac{0y}{N})} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^0 \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \end{aligned} \quad (25)$$

由此可见,对于DFT2后结果的每一个元素 $F(u, v)$ 都和所有的原始数据 $f(x, y)$ 有关. 例如: $F(0, 0)$ 是所有 $f(x, y)$ 之和.

卷积和相关简介

卷积

连续形式

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \\ f(x, y) * g(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)g(x-u, y-v)dudv \end{aligned}$$

离散形式

$$\begin{aligned}
 f(x) * g(x) &= \sum_{m=0}^{M-1} f(m)g(x-m) \\
 f(x, y) * g(x, y) &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)g(x-m, y-n) \\
 &= \sum_{m=-a}^a \sum_{n=-b}^b f(m, n)g(x-m, y-n)
 \end{aligned}$$

相关

2元变量的离散形式的相关运算:

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \sum_{m=-a}^a \sum_{n=-b}^b f(m, n)g(x+m, y+n)$$

可观察到,卷积和相关形式上很相似。只是一个 $g(x-m, y-n)$, 另一个是 $g(x+m, y+n)$ 。

卷积和相关概念定义上很相似。但是卷积比相关常见(个人感觉)

性质10:卷积定理

卷积定理的结论: 时域上的卷积等于频域上相乘, 时域上的相乘等于频域上卷积。

证明卷积定理和相关定理时, Tab. 1的性质4、5被频繁用到。

即 $f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})}$ 和 $f(x, y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N})} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$ 。

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{F}[f(x, y) * g(x, y)] \\
 &= \mathcal{F}\left[\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)g(x-m, y-n)\right] \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)\mathcal{F}[g(x-m, y-n)] \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)e^{-j2\pi(\frac{mx}{M} + \frac{ny}{N})} \cdot G(u, v) \\
 &= F(u, v) \cdot G(u, v)
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{F}[f(x, y) \cdot g(x, y)] \\
 &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{MN} \sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} F(u', v')e^{j2\pi(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N})} \cdot g(x, y)\right] \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} F(u', v')\mathcal{F}\left[e^{j2\pi(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N})} \cdot g(x, y)\right] \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} F(u', v')G(u-u', v-v') \\
 &= \frac{1}{MN} F(u, v) * G(u, v)
 \end{aligned} \tag{27}$$

性质11:相关定理

使用到性质7-共轭不变性。

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}[f(x, y) \circ g(x, y)] \\
&= \mathcal{F}\left[\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)g(x+m, y+n)\right] \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot \mathcal{F}[g(x+m, y+n)] \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{j2\pi(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N})} G(u, v) \\
&= \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{-j2\pi(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N})} \right\}^* G(u, v) \\
&= F^*(u, v)G(u, v)
\end{aligned} \tag{28}$$

3. 矩阵乘法形式

类似于1维DFT的矩阵乘法形式 $X = F \cdot x$, 其中 F 是傅里叶变换(复数)矩阵.

2维DFT也具备矩阵乘法形式 $F = PFQ$, P, Q 是2个傅里叶变换矩阵,

f 是原始图像 $f \in \mathbb{R}^{M \times N}$, F 是傅里叶变换后的结果 $F \in \mathbb{C}^{M \times N}$.

4. 小结

对于傅里叶变换后的结果 $F \in \mathbb{C}^{M \times N}$, 我们一般是取每个复数的模(abs), 由于取模后的数值还是很大, 在绘图时远远超过可接受的像素值0-255, 因此一般会取对数(log)。当然, 在 $\log(\text{abs})$ 后还可以进行归一化处理, 使其结果是0-1.0或0-255. 即绘制的频谱图 p 是 $M \times N$ 大小的图, 对于图中的每个像素坐标 (u, v) , $p(u, v)$ 的数值为 $\log(\text{abs}(F(u, v)))$.

此外, 由于频谱图存在一些性质: 一般会将频谱图进行中心平移(对角平移), 使得低频信息在中心位置 $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$. 这样能更方便地进行低通滤波等处理(以中心为圆心, 使用确定特定频率的低通域)。处理完后, 再对角平移回去, 然后逆变换iDFT2, 得到效果图。

DFT2和iDFT2有对应的快速傅里叶优化版本 `fft2`, `ifft2`.

6 思考和总结

以下是我个人的思考以及从其他博客的总结,仅供参考

6.1 DFT结果是复数的含义

一个复数 $c = |c|e^{j \arg c} = a + bj$ 如果只考虑这个复数的幅值(模), 即 $|c|$ 或者 $\sqrt{a^2 + b^2}$; 幅角(相位) $\arg c$ 或者 $\arctan(\frac{b}{a})$

一个复数就是2个值组成的一个整体(元组, tuple). 原本要用2个值才能表示的对象(性质), 现在把他们打包成一个整体, 这就是复数, 只是形式上更简洁了, 此外复数在数学上也有很好的性质(复变函数、复变分析). 然而对于计算机或人而言, 存储、记忆或使用它们仍然是2部分(实部+虚部, 或者模+幅角).

DFT的结果是一个复数, 只是恰好存在我们想要得到的东西: 幅值和相位. 而复数恰好只需要一个数(虽然本质上还是2个实数)就可以包含这两个信息. 当然我们也可以在实数域, 使用2个纯实数来实现DFT. 幅值对应的是信号的强度, 而频率 f 是由采样频率 f_s (f-Sample)和采样数 N 确定的.

我们常见的频谱图就是 $f - |c|$ 图, 当然纵坐标的 $|c|$ 还可以经过归一化处理(好像是除以 N). y 轴除了是 $|c|$ 外, 还可以是 $|c|^2$, 具体看每个人的喜好. 虽然数值(y 轴, 信号强度)不一样, 但是峰值的位置(x 轴, 频率)都是一样的. 是否归一化处理也是一样的道理.

6.2 频谱图对称的原因(一维信号)

Notation 注: $x_k, x(k)$ 都表示索引 x 的第 k 的元素. 读者请注意语境.

根据DFT我们将实数原始信号 x 转换成复数形式的信号 X . 当然我们只想从 X 提取模和相位2个信息. 已知 $X(k)$ 的表达式如下

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ X(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}n(N-k)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \cdot e^{-j2\pi n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = X^*(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (29)$$

可知 $X(k)$ 和 $X(N-k), k = 0, 1, \dots, N-1$ 互为共轭复数. (*表示共轭.)

因为我们关系的频谱图是 $f - |c|$ 图, 2个共轭复数的模是一样的, 所有 $f - |c|$ 图是关于频率 f 的中间值左右对称. 而频率 f 是由采样频率 f_s 和采样数 N 确定的. 具体样例, 看实验 7小节.

待解释

本文并未详细解释DFT 结果的模+幅角和频率+相位的本质关系. (因为本人未深刻理解, 读者可自行思考)

待解释的细节

7 实验

以下介绍傅里叶的应用

好像直接从pdf中复制/粘贴代码有中英文标点问题, 不能直接运行. 见以下Github仓库

https://github.com/wqzh/math/fft/fft1_denoise.py

https://github.com/wqzh/math/fft/fft2_lena.py

1. 信号去噪(一维)

使用`np.fft.fft` 进行1维信号FFT. 逆变换为`ifft`

从图2可以看出频率为50和120Hz的峰很明显, 这正是生成原始信号 x (实数)的频率. 其余较小峰值的频率对应的就是噪声对应的信息. 而且是左右对称的(原因见 6.2小节).

解释为什么图中频率从1 - 1000:

通过以信号强度(可转换成分贝 dB) 80为阈值, 80以下的都过滤掉, 那么DFT后的信号 X (复数)在频率为50,120,820,950四处被保留, 其余频率的信号强度被清零. 记为 \hat{X} .

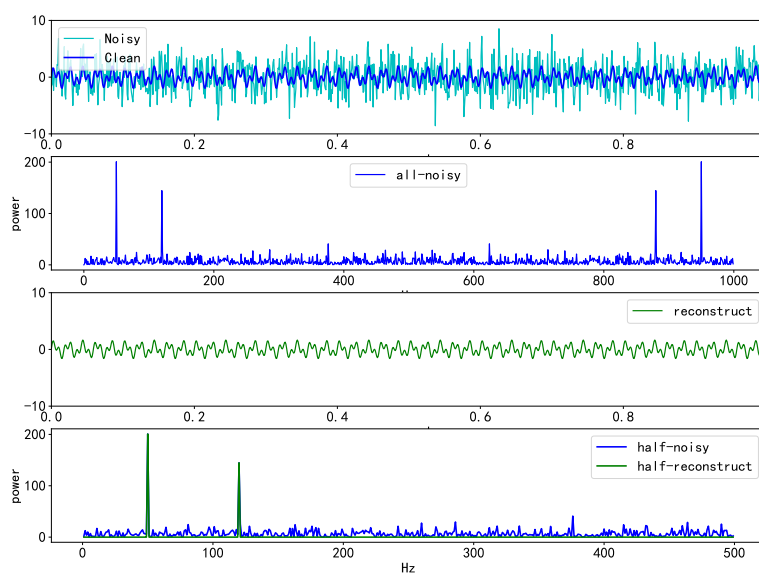
然后使用得到的新信号 $\hat{X}(n)$ 使用`ifft`就和恢复得到去噪后的信号, 即图3. 即使加了噪声后的图像完全没有什么规律(图1), 但是在频率域任然有明显的区别(图2)。

2. 图像处理(二维) 对灰度图像的DFT2处理.

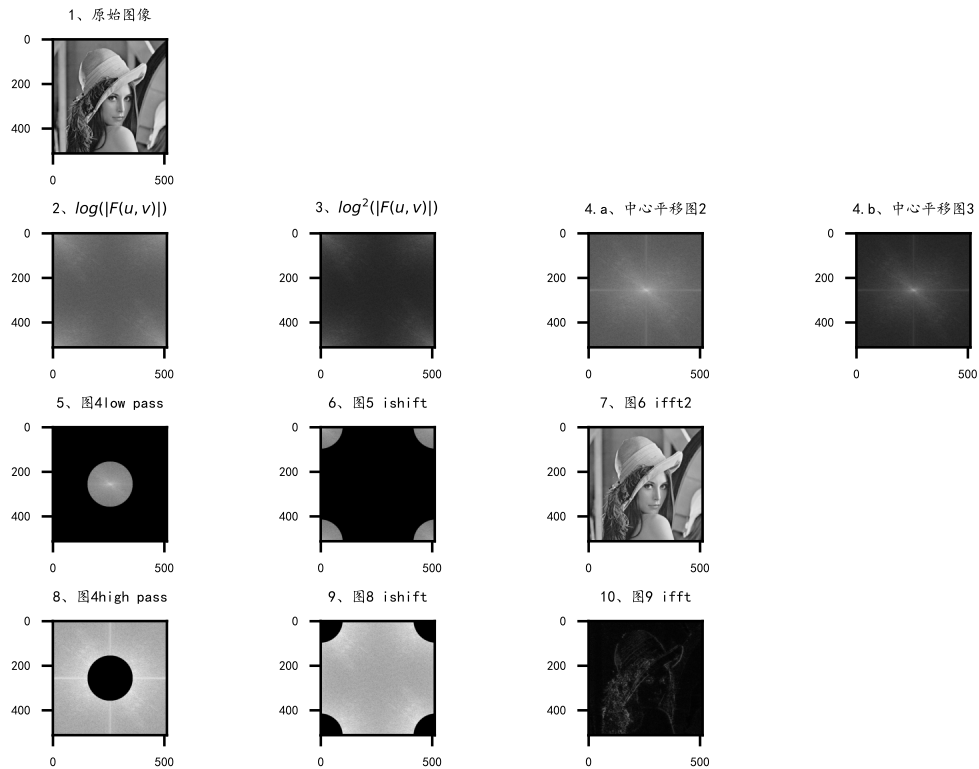
`np.fft.fft2()` 函数实现傅里叶变换得到的图片频谱信息, 幅度谱的最大值(低频分量)在左上角 (0,0) 处

`np.fft.fftshift()` 函数将低频分量移动到频域图像的中心位置

对应的逆变换分别是`ifft2`, `ifft2shift`



(1):原始信号和带噪声的信号; (2):带噪信号的频谱图, 左右对称; (3):去噪后重建的信号; (4):一半的频谱图



(1):原始图像(数字图像经典图像Lena 512x512); (2):fft2后取 $\log(abs(F(u,v)))$ 绘图; (3):fft2后取 $\log^2(abs(F(u,v)))$ 绘图; (4):中心平移 shift(低频在中间); (5):低通滤波处理图4;(6): ishift 对角平移回去;(7): ifft2结果, 可发现低频是图片的主体;(8):高通滤波处理图4;(9):ishift 对角平移回去;(10):ifft2结果, 可发现高频是图片的细节、轮廓(类似于边缘检测)