Fourier

zwq

2022.10.12

为了更好地理解，学习顺序是 Fourier Series → Fourier Transform → DFT → FFT，这也是它们被提出的时间先后顺序. 本文还介绍了2维离散傅里叶变换(DFT2)，并给出了DFT2具有的性质及其证明。

其中Fourier Transform涉及到的数学知识，在本文不是重点.其余的3个知识点，在本文有较为详细的介绍.

1 傅里叶级数

法国数学家Joseph Fourier（1768-1830）在1807年发现任何周期为T的周期函数都可以分解成无穷的正余弦函数之和. 由于计算机的普及和数字信号处理的需要，快速傅里叶变换在1965年被提出.

基础预备知识 复数、欧拉公式、正弦/余弦函数的正交性:

我们只考虑系数为正整数$\forall m,n\geq 1$的情况，(负数的话使用诱导公式转换),

$$\begin{gathered}
\int_0^{2\pi}\cos mx\ \ \cos nx\ dx=\int_0^{2\pi}\sin mx\ \ \sin nx\ dx=\pi,\ m=n\\
\int_0^{2\pi}\cos mx\ \ \cos nx\ dx=\int_0^{2\pi}\sin mx\ \ \sin nx\ dx=0,\ m\neq n\\
\int_0^{2\pi}\sin mx\ \ \cos nx\ dx=0,\ \forall m,n\geq 1\\
\int_0^{2\pi}\sin mxdx=\int_0^{2\pi}\cos nxdx=0,\forall m,n\geq 1
\end{gathered}$$

因此, $1,sinx,cosx,sin2x,cos2x,...,sinnx,cosnx,...$ 是一组正交基，并且频率有规律的变化

Fourier Series 3种表示形式：

1.1 三角函数形式

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t) \tag{1}$$

$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ 为基频，离散形式下的频率ω为ω_0的整数倍 ,其中

$$\begin{cases}
a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0 tdt,\\
b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\omega_0 tdt
\end{cases} \tag{2}$$

$\int_{-T/2}^{T/2}$ 表示在一个周期内的积分，简记为 $\int_T$.

注: 同济版高等数学的记法为

$$\begin{gathered}
f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\\
a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt,n=0,1,2,...\\
b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt,n=1,2,...
\end{gathered}$$

本pdf和实验代码可在`https://github.com/wqzh/math/fft`下载

1.2 复数形式 由Euler公式 $e^{jx} = cosx + jsinx$, j 为虚数单位, $j^2 = -1$ 可得

$$\begin{cases} cosx = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \\ sinx = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \dfrac{je^{-jx} - je^{jx}}{2} \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} cosn\omega_0 t = \dfrac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \\ sinn\omega_0 t = \dfrac{je^{-jn\omega_0 t} - je^{jn\omega_0 t}}{2} \end{cases}$$

将上式代入公式1，可得

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t}) \tag{3}$$

令$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$, 其中$c_n$ 和c_{-n}互为共轭复数.可得复数形式的傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{4}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{5}$$

这个结论很重要. 看了很多博客,发现有2种解释(不是严格证明).具体证明细节读者去参考数学教材吧.

第一种解释

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \quad equation.\,2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \int_T f(t) (\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \tag{6}$$

这种解释看样子很正确

另一种解释 由$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ 在等式2端同时乘以$e^{-jk\omega_0 t}$,并积分，可得

$$\int_T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j(n-k)\omega_0 t} dt$$

根据三角函数正交推论，当$n \neq k$,等式右端结果为0; 当$n = k$时，等式右端结果非零(没看懂)

$$\int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = c_n T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

1.3 简谐波形式 除了上面2种形式，还可以使用三角函数配角公式，写成只含sin或者cos的形式

例如: $asinx + bcosx = \sqrt{a^2 + b^2} sin[x + arctan(\frac{b}{a})] (a \neq 0)$

由公式1, $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$, 写成cos之和(这种形式为一般形式的简谐波Simple Harmonic Wave)

$$f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \tag{7}$$

其中 $A_0=\frac{a_0}{2}, A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}, cos\varphi_n=\frac{a_n}{A_n}, sin\varphi_n=\frac{-b_n}{A_n}, \varphi_n=arctan\frac{-b_n}{a_n}$

类似地，写成sin之和

$$f(t)=A_0+\sum_{i=1}^{+\infty}\sin(n\omega_0 t+\theta_n) \tag{8}$$

其中 $A_0=\frac{a_0}{2}, A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}, cos\theta_n=\frac{b_n}{A_n}, sin\theta_n=\frac{a_n}{A_n}, \theta_n=arctan\frac{a_n}{b_n}$, θ_n和φ_n相差 $\frac{\pi}{2}$

小结

以上三种形式的傅里叶级数都很常见

其中$|c_n|=\frac{A_n}{2}=\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{2}$,称为振幅、幅值. c_n定义见公式 3

复数c_n的幅角(argument of a complex number)(就是指角度),记为 $arg\ c_n$,也称为相位, 当然θ_n,φ_n也是相位.

一般来说，傅里叶级数在周期函数进行展开，傅里叶变换一般在非周期函数上进行(周期视为无穷大的连续函数).

2 傅里叶相关的定理

定理 2.1 ***Fourier*积分定理** *(1)在$(-\infty,+\infty)$任一有限区间满足Dirichlet条件, (2)绝对可积,即 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$,*
则在$f(t)$的连续点处有, $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$;
在间断点处, 上式左端为$\frac{T}{2}\left[f(t-0)+f(t+0)\right]$

傅里叶变换及其逆变换为

$$\begin{aligned} F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{F}\left[f(t)\right] \\ f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{F}^{-1}\left[F(\omega)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

温馨提示: 注意到上面两式的积分号前的系数,一个是1, 另一个是$\frac{1}{2\pi}$. 在有些教材中, 会把$\frac{1}{2\pi}$平均分给两式(雨露均沾),如下式:(但要求两个系数的乘积不变).

$$\begin{aligned} F(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{F}\left[f(t)\right] \\ f(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{F}^{-1}\left[F(\omega)\right] \end{aligned}$$

在这里特别注明是因为二维DFT时, 系数$\frac{1}{MN}$也有同样的操作. 可以分为$\frac{1}{\sqrt{MN}}\cdot\frac{1}{\sqrt{MN}}$ 或者 $\frac{1}{M}\cdot\frac{1}{N}$.

待补充

3 小结

由前2节的内容，我们可得到以下的结论：

对于周期为T的周期函数, 基频$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$.

非周期函数，可视为$T\to\infty$，对于基频ω_0, 有$\omega_0\to 0$，只要n取得足够多$0,1,2,...$,那么$n\omega_0$就可视为连续的变量，之后会记为ω.

此外，还有如下的结论

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{10}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{11}$$

将$n\omega_0$带入公式 10, $F(n\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

由公式 11,可知$c_n=\frac{1}{T}F(n\omega_0)$. 根据三角函数的周期和角频率$\omega$的关系可得,$\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi}$. 此外,还有 $d\omega=(n+1)\omega_0-n\omega_0=\omega_0$

由复数形式的傅里叶级数, 有

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}\omega_0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega
\end{aligned} \tag{12}
$$

可看出傅里叶逆变换和原函数$f(t)$的复数形式的傅里叶级数是等价的.

注：这样说有循环论证的嫌疑(用结论来证明结论).既然数学家证明过了，我们就可以心安理得地这么认为了.

4 DFT 和 FFT(一维)

快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)和离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT). 快速傅里叶反变换(Inverse Fast Fourier Transform, iFFT)

Notation 注: $x_k, x(k), x[k]$ 都表示索引x的第k的元素. 读者请注意语境.

假设通过采样源信号x得到了N个离散的样本点$x(n), n=0,1,...,N-1$. 这n个离散信号通过DFT就可以得到n个复数，这些复数就包含了原信号的频率和相位信息,记为$X(n), n=0,1,...,N-1$.

回顾傅里叶变换及其逆变换的公式如下

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

但是这考虑的是连续的变量，而计算机只能处理离散的数据.

因此按照特定的采样频率f_s(需满足采样定理要求)就可以得到离散的数据，然后对这些离散的数据进行傅里叶变换，这就是离散傅里叶变换(DFT). 然而DFT速度太慢,时间复杂度为$\mathcal{O}(n^2)$，可以被优化. 因此在1965年，J.W.Cooley和 T.W.Tukey 提出快速傅里叶，时间复杂度为$\mathcal{O}(nlogn)$. Cooley-Tukey FFT.

1 DFT

Notation 注: $x_k, x(k), x[k]$ 都表示索引x的第k的元素. 在很多文章里都有用到，读者请注意语境.

由连续型傅里叶变换公式，把积分换为求和，DFT公式如下:

$$X_k=\sum_{n=0}^{N-1}x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k=0,1,...,N-1$$

注意: 为了得到变换后X结果中的每一个元素，例如第k个输出, i.e. X_k, 会涉及到原始数据x的每一个元素x_n, 并且对应的复数因子$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ 中包含了固定的k和所有的n.

当然，由连续型傅里叶逆变换可知,DFT的逆变换就是:(不是本节的重点)

$$x_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X_n e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, k=0,1,...,N-1$$

思考: 系数$\frac{1}{N}$怎么来的?

其中，$e^{-j\frac{2\pi}{N}}$被称为**旋转因子(twiddle factor)**, 记为w或者W,W_N. 读者根据语境理解即可. 旋转因子有3个重要的特性，后面会用到

首先回顾一下欧拉恒等式(欧拉公式) $e^{j\pi}+1=0$ 可知

$$e^{j\pi}=e^{-j\pi}=-1$$
$$e^{2j\pi}=e^{-2j\pi}=1$$

单位根(root of unity) 是关于旋转因子W_N, 即$e^{-j\frac{2\pi}{N}}$的另一个角度的解释。$e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 和 $e^{j\frac{2\pi}{N}}$互为共轭复数. 并且有$e^{-j\frac{2\pi}{N}}=cos(\frac{2\pi}{N})-jsin(\frac{2\pi}{N})$.

把单位圆(模为1)的弧, N均等分. 则这N个点的复数形式(坐标)依次是$e^{-j\frac{2\pi}{N}n}, n=0,1,...,N-1$(当然也可以记为$e^{j\frac{2\pi}{N}n}$). 由于模长为1, 因此$e^{-j\frac{2\pi}{N}m}$乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$不会改变模长, 只会改变幅角.

当不是单位圆时只需要修改模长即可，如$2e^{-j\frac{2\pi}{N}n}, n=0,1,...,N-1$表示半径为2圆弧$N$等分点的坐标.

(这里也可以看出复数表示的好处，只用1个复数，就可以表示2个信息).这里特别提出是因为后面的思考和总结小节，会用到。

已知$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, $W_N^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$,还有几个简单的小结论

$$W_N^N=e^{-j\frac{2\pi}{N}N}=e^{-2j\pi}=1$$
$$W_N^{N/2}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}}=e^{-j\pi}=-1$$

OK，开始介绍这3个性质.

它们对应的物理意义(本质)，读者自行查找资料理解

周期性 采样的周期相关...

$$W_N^{a+N}=e^{-j\frac{2\pi}{N}(a+N)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}a}\cdot e^{-j2\pi}=W_N^a$$

对称性 得到的频谱图也是对称的...

$$W_N^{a+N/2}=e^{-j\frac{2\pi}{N}(a+\frac{N}{2})}=e^{-j\frac{2\pi}{N}a}\cdot e^{-j\pi}=-W_N^a$$

缩放性 采样频率变化之后...

$$W_N^a=e^{-j\frac{2\pi}{N}a}=e^{-j\frac{2\pi}{N/m}\cdot a/m}=W_{N/m}^{a/m}$$

2 FTM

傅里叶变换矩阵(Fourier Transform Matrix, FTM) 记FTM矩阵为F,

在很多AI的论文中, 看到使用DFT时都会提到FTM, 通过引用上世纪 信号处理 著作中的相关结论，引出一系列的稀奇古怪的定理. 比如$\frac{1}{N}(F\otimes F)$, 会和矩阵F的范数联系起来.等等. 其中$\otimes$表示矩阵的Kronecker乘法.

F一般是方阵$\mathbb{C}^{N\times N}$, 当然有些时候会见到不是方阵的情况.

F是一个对称矩阵(Hermite 矩阵).

$$
\begin{aligned}
F &= \begin{bmatrix}
e^{j2\pi 0\frac{0}{N}} & e^{j2\pi 1\frac{0}{N}} & e^{j2\pi 2\frac{0}{N}} & \cdots & e^{j2\pi(N-1)\frac{0}{N}} \\
e^{j2\pi 0\frac{1}{N}} & e^{j2\pi 1\frac{1}{N}} & e^{j2\pi 2\frac{1}{N}} & \cdots & e^{j2\pi(N-1)\frac{1}{N}} \\
e^{j2\pi 0\frac{2}{N}} & e^{j2\pi 1\frac{2}{N}} & e^{j2\pi 2\frac{2}{N}} & \cdots & e^{j2\pi(N-1)\frac{2}{N}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
e^{j2\pi 0\frac{N-1}{N}} & e^{j2\pi 1\frac{N-1}{N}} & e^{j2\pi 2\frac{N-1}{N}} & \cdots & e^{j2\pi(N-1)\frac{N-1}{N}}
\end{bmatrix}_{N\times N} \\
&= \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & w^{1\cdot 1} & w^{2\cdot 1} & \cdots & w^{N-1} \\
1 & w^{1\cdot 2} & w^{2\cdot 2} & \cdots & w^{2\cdot(N-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & w^{1\cdot(N-1)} & w^{2\cdot(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)\cdot(N-1)}
\end{bmatrix}_{N\times N}
\end{aligned} \tag{13}
$$

DFT的计算方法: 结果列向量X 可由以下的矩阵乘法得到, 列向量x是原始采样得到的离散信号

$$X = F\cdot x$$

计算复杂度为$\mathcal{O}(n^2)$.

顺便一提，公式 13第二个矩阵是不是很像范德蒙矩阵 Vandermonde.

思维发散：范德蒙行列式最初是为了研究多项式函数族$1, x, x^2, ..., x^n$的线性相关性而提出来的. 范德蒙行列式不等于0, 即多项式函数族线性无关. 之前一提到三角函数族互相正交(线性无关)...

总之FTM应用比较广.读者想较深刻地理解，请参考专业的书籍.(我的理解也不是很深)

3 FFT

快速傅里叶变换

由DFT,可知

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, 1, ..., N-1$$

这里我们假设N 是一个偶数, 则$N/2$可整除. 原始离散信号为$x(n), n = 0, 1, ..., N-1$

这里先定义几个记号,将原始离散信号序列划分成奇序列和偶序列

$$\begin{cases} x_{even}(m) = x(2m), m = 0, 1, ...N/2-1 \\ x_{odd}(m) = x(2m+1), m = 0, 1, ...N/2-1 \end{cases}$$

以下会用到旋转因子的几个性质

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0,1,...,N-1 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_N^{k\cdot 2m} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)W_N^{k\cdot(2m+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_N^{k\cdot 2m} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)W_N^{k\cdot 2m} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_{N/2}^{k\cdot m} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)W_{N/2}^{k\cdot m} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{even}(m)W_{N/2}^{k\cdot m} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{odd}(m)W_{N/2}^{k\cdot m} \\
&= X_{even}(k) + W_N^k X_{odd}(k), \quad k=0,1,...,N/2-1
\end{aligned}
\tag{14}
$$

即，要求x的DFT结果X, 等价于分别求奇序列和偶序列$x_{even}(m), x_{odd}(m)$ DFT之后的结果$X_{even}(k), X_{odd}(k)$再组合.

同时2个子序列$x_{even}(m), x_{odd}(m)$ 分别又可以继续划分成各自的奇偶子序列... 直到只含一个元素，不能再分，再回溯回去(二分法). 因此时间复杂度为$\mathcal{O}(nlogn)$ 这就是FFT的核心思想

划分奇(子)序列示例 这里我们只考虑even 序列的递归计算，不考虑odd序列

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad n=0,1,...,N-1 \\
&= X_{even^1}(k) + W_N^k X_{odd^1}(k), \quad k=0,1,...,N/2-1
\end{aligned}
$$

其中X_{even^1} 子序列是在程序递归返回$X_{even^2_even}$和$X_{even^2_odd}$之后才计算得到的：

$$
\begin{aligned}
X_{even^1}(k) &= X_{even^2\_even}(k) + W_{N/2}^k X_{even^2\_odd}(k), \quad k=0,1,...,N/4-1 \\
X_{even^2}(k) &= X_{even^3\_even}(k) + W_{N/4}^k X_{even^3\_odd}(k), \quad k=0,1,...,N/8-1
\end{aligned}
$$

直到最后一个序列的奇/偶子序列都不可再分,然后递归返回...

5 DFT2 (二维)

以上的章节讲的都是一维傅里叶变换(FT, DFT, FFT)。当然，1维DFT变换有一些性质：原信号平移、旋转会导致频谱图和相位图产生特定的变化，这些可根据数学公式予以证明和解释。因为在2维DFT有相应的性质，因此一维的情况就没有提。2维DFT的这些性质(11条)会给出证明。

一维DFT处理的是一维的数字信号，然而作为离散的数字信息：2维数字图像，在某些场合同样需要处理, 比如:提取图像的轮廓、细节等。

1. DFT2

对于一张$M\times N$大小的图像，考虑灰度图(只有一个通道), 像素是实数(0-255)。有如下的2维傅里叶变换及其逆变换公式:

FT2(连续型)

$$\begin{aligned}F(u,v) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\ f(x,y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv\end{aligned} \tag{15}$$

DFT2(离散型)

$$\begin{aligned}F(u,v) &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{F}\left[f(x,y)\right] \\ f(x,y) &= \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{F}^{-1}\left[F(u,v)\right]\end{aligned} \tag{16}$$

有$x,u = 0,1,...,M-1; y,v = 0,1,...,N-1.$ (x,y,u,v都是整数)

注:用$\Leftrightarrow$表示傅里叶变换($\mathscr{F}$也是), 即$f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)$,等价于 $F(u,v) = \mathscr{F}[f(x,y)]$. 当然,也等价于$f(x,y) = \mathscr{F}^{-1}[F(u,v)]$.

更一般地说, $f \Leftrightarrow F$ 即表示 $F = \mathscr{F}[f]$.

2. 11条性质

重要的性质: 线性、可分离、空间位移、频率位移、中心化、卷积定理.

性质1:线性性质

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}\left[af_1(x,y)+bf_2(x,y)\right] \\ =&\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[af_1(x,y)+bf_2(x,y)\right]e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \\ =&a\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f_1(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} + b\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f_2(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \\ =&aF_1(u,v)+bF_2(u,v)\end{aligned} \tag{17}$$

性质2:比例性质

性质3:可分离性

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}\left[f(x,y)\right] \\ =&\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \\ =&\sum_{x=0}^{M-1}[\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi\frac{vy}{N}}]\cdot e^{-j2\pi\frac{ux}{M}} \\ =&\sum_{x=0}^{M-1} F(x,v)\cdot e^{-j2\pi\frac{ux}{M}} = F(u,v) \\ =&\sum_{y=0}^{N-1} F(u,y)\cdot e^{-j2\pi\frac{vy}{N}} = F(u,v)\end{aligned} \tag{18}$$

这个性质说明对于2维图像的DFT2,可以用2个1维的DFT实现.

表 1: DFT2性质(卷积定理的$*$表示卷积运算, 如果$*$在上标处则表示共轭,例如:相关定理; $\circ$表示相关运算)

编号	性质		数学表达式
1	线性性质		$af_1(x,y)+bf_2(x,y) \Leftrightarrow aF_1(u,v)+bF_2(u,v)$
2	比例性质		$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{ab}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$
3	可分离性		$F(u,v)=F_x\{F_y[f(x,y)]\}=F_y\{F_x[f(x,y)]\}$ $f(x,y)=F_x^{-1}\{F_y^{-1}[F(u,v)]\}=F_y^{-1}\{F_x^{-1}[F(u,v)]\}$
4	空间位移		$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}$
5	平移性质	频率位移	$f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$
		图像中心化	$u_0=\frac{M}{2},v_0=\frac{N}{2},f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})$
6	周期性		$F(u,v)=F(u+aM,v)=F(u,v+bN)=F(u+aM,v+bN)$ $f(x,y)=f(x+aM,y)=f(x,y+bN)=f(x+aM,y+bN)$
7	共轭对称		$F(u,v)=F^*(-u,-v),\lvert F(u,v)\rvert=\lvert F^*(-u,-v)\rvert$
8	旋转不变性		$f(r,\theta+\theta_0)=F(\rho,\varphi+\theta_0)$
9	平均值		$\overline{f(x,y)}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)=\frac{1}{MN}F(0,0)$
10	卷积定理		$f(x,y)*g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$ $f(x,y)g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*G(u,v)$
11	相关定理		互相关:$f(x,y)\circ g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G^*(u,v)$ $f(x,y)\circ g^*(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$ 自相关:$f(x,y)\circ f(x,y) \Leftrightarrow \lvert F(u,v)\rvert^2$ $\lvert f(x,y)\rvert^2 \Leftrightarrow F(u,v)\circ F(u,v)$

性质4:空间位移

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[f(x-x_0,y-y_0)\right]\\
=&\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x-x_0,y-y_0)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\\
=&\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x-x_0,y-y_0)e^{-j2\pi(\frac{u(x-x_0+x_0)}{M}+\frac{v(y-y_0+y_0)}{N})}\\
=&e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}\cdot\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x-x_0,y-y_0)e^{-j2\pi(\frac{u(x-x_0)}{M}+\frac{v(y-y_0)}{N})}\\
=&e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}\cdot\sum_{x=-x_0}^{M-1-x_0}\sum_{y=-y_0}^{N-1-y_0}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\\
=&e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}\cdot\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\\
=&e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}F(u,v)
\end{aligned}\tag{19}$$

性质5：平移性质

频率位移

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}\right]\\
=&\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}[f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}]\cdot e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\\
=&\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{(u-u_0)x}{M}+\frac{(v-v_0)y}{N})}\\
=&F(u-u_0,v-v_0)
\end{aligned}\tag{20}$$

图像中心化 取$u_0=\frac{M}{2},v_0=\frac{N}{2}$, 带入上式，可得，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}\right]\\
=&\mathscr{F}\left[f(x,y)e^{j2\pi(\frac{x}{M}\frac{M}{2}+\frac{y}{N}\frac{N}{2})}\right]=F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})\\
=&\mathscr{F}\left[f(x,y)e^{j2\pi(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})}\right]\\
=&\mathscr{F}\left[f(x,y)e^{j\pi(x+y)}\right]\\
=&\mathscr{F}\left[f(x,y)\cdot(-1)^{(x+y)}\right]
\end{aligned}\tag{21}$$

性质6:周期性 带入aM后，分子分母约掉M，根据$e^{-j2\pi}=1$, 易证. bN同理.

性质7:共轭对称

$$\begin{aligned}
F(u,v)=&\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\\
=&\left\{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{(-u)x}{M}+\frac{(-v)y}{N})}\right\}^*\\
=&F^*(-u,-v)
\end{aligned}\tag{22}$$

由于F(u,v)和F(-u,-v) 互为共轭复数, 那么有$|F(u,v)|=|F(-u,-v)|$

性质8:旋转不变性 由DFT2 $f(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)$

使用如下的极坐标变换,

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \rho cos\varphi \\ v = \rho sin\varphi \end{cases}$$

则$ux + vy = \rho r(cos\varphi cos\theta + sin\varphi sin\theta) = \rho rcos(\varphi - \theta)$ 那么，连续型FT2的极坐标形式的形式为:

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi} f(r,\theta)e^{-j2\pi\rho rcos(\varphi-\theta)}rdrd\theta = F(\rho,\varphi) \end{aligned} \tag{23}$$

由上式可得:

$$\begin{aligned} F(\rho,\varphi+\theta_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi} f(r,\theta)e^{-j2\pi\rho rcos[\varphi-(\theta-\theta_0)]}rdrd\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\theta_0}^{2\pi-\theta_0} f(r,\theta+\theta_0)e^{-j2\pi\rho rcos(\varphi-\theta)}rdrd\theta \\ &\overset{f(r,\theta)=f(r,\theta+2\pi)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi} f(r,\theta+\theta_0)e^{-j2\pi\rho rcos(\varphi-\theta)}rdrd\theta \end{aligned} \tag{24}$$

上式表明 $f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\rho,\varphi+\theta_0)$

性质9:平均值 由二维离散傅里叶变换

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

取$u = v = 0$,可得

$$\begin{aligned} F(0,0) &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{0x}{M}+\frac{0y}{N})} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{0} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \end{aligned} \tag{25}$$

由此可见,对于DFT2后结果的每一个元素F(u,v)都和所有的原始数据f(x,y)有关. 例如: F(0,0)是所有f(x,y)之和.

卷积和相关简介

卷积

连续形式

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

$$f(x,y) * g(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)g(x-u,y-v)dudv$$

离散形式

$$
\begin{aligned}
f(x) * g(x) &= \sum_{m=0}^{M-1} f(m)g(x-m) \\
f(x,y) * g(x,y) &= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)g(x-m,y-n) \\
&= \sum_{m=-a}^{a}\sum_{n=-b}^{b} f(m,n)g(x-m,y-n)
\end{aligned}
$$

相关

2元变量的离散形式的相关运算:

$$
f(x,y) \circ g(x,y) = \sum_{m=-a}^{a}\sum_{n=-b}^{b} f(m,n)g(x+m,y+n)
$$

可观察到,卷积和相关形式上很相似。只是一个是$g(x-m,y-n)$, 另一个是$g(x+m,y+n)$.

卷积和相关概念定义上很相似。但是卷积比相关常见(个人感觉)

性质10:卷积定理

卷积定理的结论: 时域上的卷积等于频域上相乘, 时域上的相乘等于频域上卷积.

证明卷积定理和相关定理时，Tab. 1的性质4、5被频繁用到。

即$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}$和$f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$.

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[f(x,y) * g(x,y)\right] \\
=&\mathscr{F}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)g(x-m,y-n)\right] \\
=&\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\mathscr{F}[g(x-m,y-n)] \\
=&\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)e^{-j2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})}\cdot G(u,v) \\
=&F(u,v)\cdot G(u,v)
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[f(x,y) \cdot g(x,y)\right] \\
=&\mathscr{F}\left[\frac{1}{MN}\sum_{u'=0}^{M-1}\sum_{v'=0}^{N-1} F(u',v')e^{j2\pi(\frac{u'x}{M}+\frac{v'y}{N})}\cdot g(x,y)\right] \\
=&\frac{1}{MN}\sum_{u'=0}^{M-1}\sum_{v'=0}^{N-1} F(u',v')\mathscr{F}\left[e^{j2\pi(\frac{u'x}{M}+\frac{v'y}{N})}\cdot g(x,y)\right] \\
=&\frac{1}{MN}\sum_{u'=0}^{M-1}\sum_{v'=0}^{N-1} F(u',v')G(u-u',v-v') \\
=&\frac{1}{MN}F(u,v) * G(u,v)
\end{aligned} \tag{27}
$$

性质11:相关定理

使用到性质7-共轭不变性.

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}\left[f(x,y)\circ g(x,y)\right]\\
=&\mathscr{F}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)g(x+m,y+n)\right]\\
=&\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)\cdot\mathscr{F}[g(x+m,y+n)]\\
=&\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)\cdot e^{j2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})}G(u,v)\\
=&\left\{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)\cdot e^{-j2\pi(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N})}\right\}^{*}G(u,v)\\
=&F^{*}(u,v)G(u,v)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

3. 矩阵乘法形式

类似于1维DFT的矩阵乘法形式 $X=F\cdot x$, 其中F是傅里叶变换(复数)矩阵.

2维DFT也具备矩阵乘法形式 $F=PfQ$, P,Q是2个傅里叶变换矩阵,

f是原始图像$f\in\mathbb{R}^{M\times N}$, F是傅里叶变换后的结果$F\in\mathbb{C}^{M\times N}$.

4. 小结

对于傅里叶变换后的结果$F\in\mathbb{C}^{M\times N}$, 我们一般是取每个复数的模(abs), 由于取模后的数值还是很大，在绘图时远远超过可接受的像素值0-255，因此一般会取对数(log)。当然，在log(abs)后还可以进行归一化处理，使其结果是$0-1.0$或$0-255$. 即绘制的频谱图p是$M\times N$大小的图, 对于图中的每个像素素坐标(u,v), p(u,v)的数值为 log(abs(F(u,v))).

此外，由于频谱图存在一些性质: 一般会将频谱图进行中心平移(对角平移),使得低频信息在中心位置($\frac{M}{2},\frac{N}{2}$). 这样能更方便地进行低通滤波等处理(以中心为圆心，使用确定特定频率的低通域)。处理完后，再对角平移回去，然后逆变换iDFT2，得到效果图。

DFT2和iDFT2有对应的快速傅里叶优化版本 fft2, ifft2.

6 思考和总结

以下是我个人的思考以及从其他博客的总结,仅供参考

6.1 DFT结果是复数的含义

一个复数 $c=|c|e^{j\ arg\ c}=a+bj$ 如果只考虑这个复数的幅值(模), 即 $|c|$ 或者 $\sqrt{a^2+b^2}$; 幅角(相位) $arg\ c$ 或者 $arctan(\frac{b}{a})$

一个复数就是2个值组成的一个整体(元组, tuple). 原本要用2个值才能表示的对象(性质)，现在把他们打包成一个整体，这就是复数，只是形式上更简洁了, 此外复数在数学上也有很好的性质(复变函数、复变分析). 然而对于计算机或人而言，存储、记忆或使用它们仍然是2部分(实部+虚部, 或者模+幅角).

DFT的结果是一个复数，只是恰好存在我们想要得到的东西：幅值和相位. 而复数恰好只需要一个数(虽然本质上还是2个实数)就可以包含这两个信息. 当然我们也可以在实数域, 使用2个纯实数来实现DFT. 幅值对应的是信号的强度，而频率f是由采样频率f_s(f-Sample)和采样数N确定的.

我们常见的频谱图就是$f-|c|$图，当然纵坐标的的$|c|$还可以经过归一化处理(好像是除以N). y轴除了是$|c|$外, 还可以是$|c|^2$, 具体看每个人的喜好. 虽然数值(y轴, 信号强度)不一样, 但是峰值的位置(x轴, 频率)都是一样的. 是否归一化处理也是一样的道理.

6.2 频谱图对称的原因(一维信号)

Notation 注: $x_k, x(k)$ 都表示索引x的第k的元素. 读者请注意语境.

根据DFT我们将实数原始信号x 转换成复数形式的信号X. 当然我们只想从X提取模和相位2个信息. 已知$X(k)$的表达式如下

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\ k = 0, 1, ..., N-1$$

$$\begin{aligned} X(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}n(N-k)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \cdot e^{-j2\pi n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = X^*(k),\ k = 0, 1, ..., N-1 \end{aligned} \tag{29}$$

可知$X(k)$ 和$X(N-k), k = 0, 1, ..., N-1$ 互为共轭复数. ($*$表示共轭.)

因为我们关系的频谱图是 $f - |c|$图, 2个共轭复数的模是一样的，所有$f - |c|$图是关于频率f的中间值左右对称. 而频率f是由采样频率f_s和采样数N确定的. 具体样例，看实验 7小节.

待解释

本文并未详细解释DFT 结果的模+幅角和频率+相位的本质关系. (因为本人未深刻理解, 读者可自行思考)

待解释的细节

7 实验

以下介绍傅里叶的应用

好像直接从pdf中复制/粘贴代码有中英文标点问题，不能直接运行. 见以下Github仓库

`https://github.com/wqzh/math/fft/fft1_denoise.py`
`https://github.com/wqzh/math/fft/fft2_lena.py`

1. 信号去噪(一维)

使用np.fft.fft 进行1维信号FFT. 逆变换为ifft

从图2可以看出频率为50和120Hz的峰很明显，这正是生成原始信号x(实数)的频率.其余较小峰值的频率对应的就是噪声对应的信息.而且是左右对称的(原因见 6.2小节).

解释为什么图中频率从$1 - 1000$:

通过以信号强度(可转换成分贝 dB) 80为阈值，80以下的都过滤掉，那么DFT后的信号X(复数)在频率为50,120,820,950四处被保留，其余频率的信号强度被清零.记为$\hat{X}$.

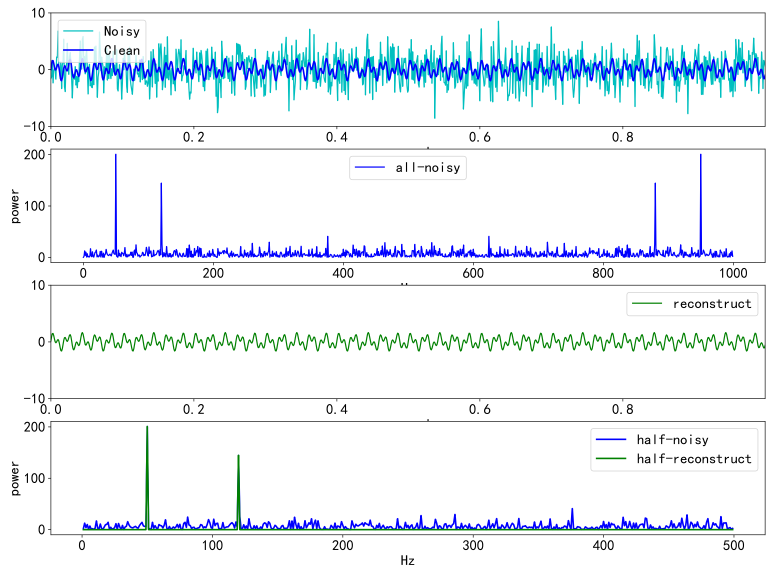
然后使用得到的新信号$\hat{X}(n)$使用ifft就和恢复得到去噪后的信号,即图3. 即使加了噪声后的图像完全没有什么规律(图1)，但是在频率域任然有明显的区别(图2)。

2. 图像处理(二维) 对灰度图像的DFT2处理.

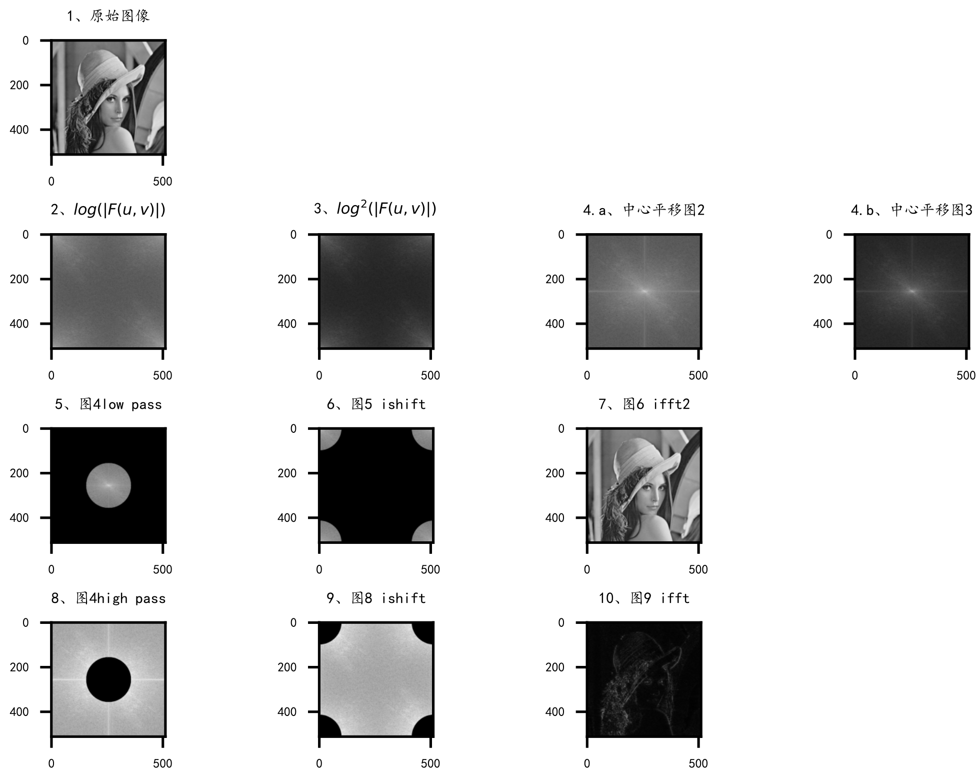
np.fft.fft2() 函数实现傅里叶变换得到的图片频谱信息,幅度谱的最大值（低频分量）在左上角 (0,0) 处

np.fft.fftshift() 函数将低频分量移动到频域图像的中心位置

对应的逆变换分别是:ifft2, ifft2shift



(1):原始信号和带噪声的信号; (2):带噪信号的频谱图，左右对称; (3):去噪后重建的信号; (4):一半的频谱图



(1):原 始 图 像(数 字 图 像 经 典 图 像Lena 512x512); (2):fft2后 取$log(abs(F(u,v)))$绘 图; (3):fft2后取$log^2(abs(F(u,v)))$绘图; (4):中心平移 shift(低频在中间); (5):低通滤波处理图4;(6): ishift 对角平移回去;(7): ifft2结果, 可发现低频是图片的主体;(8):高通滤波处理图4;(9):ishift 对角平移回去;(10):ifft2结果, 可发现高频是图片的细节、轮廓(类似于边缘检测)