

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «**Национальный исследовательский университет ИТМО**»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №3
«**Численное интегрирование**»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: 1

Преподаватель:
Рыбаков С.Д.

Выполнил:
Алферов Глеб Александрович
Группа: Р3207

Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

1. Вычислительная реализация задачи

1. Вычислить интеграл точно:

$$\int_0^2 (-x^3 - x^2 - 2x + 1) dx$$

$$F(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x; F(0) = 0; F(2) = -8. (6)$$

$$I_{\text{ТОЧН}} = F(x) = F(2) - F(0) \approx -8. (6)$$

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона–Котеса при $n = 6$:

$$h = \frac{b - a}{6} = \frac{2 - 0}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_6^0 f(a) + c_6^1 f(a+h) + c_6^2 f(a+2h) + c_6^3 f(a+3h) + c_6^4 f(a+4h) + c_6^5 f(a+5h) + c_6^6 f(b)$$

$$I_{cotes} \approx \left(\frac{82}{840} f(0) + \frac{432}{840} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{54}{840} f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{544}{840} f(1) + \frac{54}{840} f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{432}{840} f\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{82}{840} f(2) \right) = \frac{-26}{3} = -8. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Input interpretation} \\ \frac{41 \times 2}{840} f(0) + \frac{216 \times 2}{840} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{27 \times 2}{840} f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{272 \times 2}{840} f(1) + \\ \frac{27 \times 2}{840} f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{216 \times 2}{840} f\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{41 \times 2}{840} f(2) \text{ where } f(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 1 \\ \text{Result} \\ \frac{1}{840} (41 \times 2) (1 - 2 \cdot 0 - 0^2 - 0^3) + \\ \frac{1}{840} (216 \times 2) \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) + \frac{1}{840} (27 \times 2) \left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right) + \\ \frac{1}{840} (272 \times 2) (1 - 2 \cdot 1 - 1^2 - 1^3) + \frac{1}{840} (27 \times 2) \left(1 - 2 \cdot \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^3\right) + \\ \frac{1}{840} (216 \times 2) \left(1 - 2 \cdot \frac{5}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^3\right) + \frac{1}{840} (41 \times 2) (1 - 2 \cdot 2 - 2^2 - 2^3) = -\frac{26}{3} \\ -\frac{26}{3} \\ \text{Decimal approximation} \end{aligned}$$

3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{10} = \frac{1}{5}$$

- **Метод средних прямоугольников:**

$$\begin{aligned} I_{\text{ср.пря}} &= h \sum_{i=1}^n y_{i-\frac{1}{2}} = h \cdot \left(f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f\left(a + \frac{5h}{2}\right) + f\left(a + \frac{7h}{2}\right) + \right. \\ & f\left(a + \frac{9h}{2}\right) + f\left(a + \frac{11h}{2}\right) + f\left(a + \frac{13h}{2}\right) + f\left(a + \frac{15h}{2}\right) + f\left(a + \frac{17h}{2}\right) + f\left(a + \frac{19h}{2}\right) \Big) = \\ &= 0.2(f(0+0.1) + f(0+0.3) + f(0+0.5) + f(0+0.7) + f(0+0.9) + f(0+1.1) \\ & \quad + f(0+1.3) + f(0+1.5) + f(0+1.7) + f(0+1.9)) = -8.64 \end{aligned}$$

Input interpretation
0.2 (f(0.1) + f(0.3) + f(0.5) + f(0.7) + f(0.9) + f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)) where f(x) = -x ³ - x ² - 2x + 1
Result
-8.64
0.2 ((1 - 2·0.1 - 0.1 ² - 0.1 ³) + (1 - 2·0.3 - 0.3 ² - 0.3 ³) + (1 - 2·0.5 - 0.5 ² - 0.5 ³) + (1 - 2·0.7 - 0.7 ² - 0.7 ³) + (1 - 2·0.9 - 0.9 ² - 0.9 ³) + (1 - 2·1.1 - 1.1 ² - 1.1 ³) + (1 - 2·1.3 - 1.3 ² - 1.3 ³) + (1 - 2·1.5 - 1.5 ² - 1.5 ³) + (1 - 2·1.7 - 1.7 ² - 1.7 ³) + (1 - 2·1.9 - 1.9 ² - 1.9 ³)) = -8.64

- **Метод трапеций:**

$$\begin{aligned} I_{\text{трапеция}} &= h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \\ I_{\text{трапеция}} &= 0.2 \left(\frac{f(0) + f(2)}{2} + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8) + f(1) + f(1.2) \right. \\ & \quad \left. + f(1.4) + f(1.6) + f(1.8) \right) = -8.72 \end{aligned}$$

Input interpretation
0.2 (1/2 (f(0) + f(2)) + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8) + f(1) + f(1.2) + f(1.4) + f(1.6) + f(1.8)) where f(x) = -x ³ - x ² - 2x + 1
Result
-8.72
0.2 (1/2 ((1 - 2·0 - 0 ² - 0 ³) + (1 - 2·2 - 2 ² - 2 ³)) + (1 - 2·0.2 - 0.2 ² - 0.2 ³) + (1 - 2·0.4 - 0.4 ² - 0.4 ³) + (1 - 2·0.6 - 0.6 ² - 0.6 ³) + (1 - 2·0.8 - 0.8 ² - 0.8 ³) + (1 - 2·1 - 1 ² - 1 ³) + (1 - 2·1.2 - 1.2 ² - 1.2 ³) + (1 - 2·1.4 - 1.4 ² - 1.4 ³) + (1 - 2·1.6 - 1.6 ² - 1.6 ³) + (1 - 2·1.8 - 1.8 ² - 1.8 ³)) = -8.72

- **Метод Симпсона:**

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + 4 \sum_{i=1}^{n-1} y_{\text{нечёт}} + 2 \sum_{i=2}^{n-2} y_{\text{чёт}} + y_n \right)$$

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{0.2}{3} (f(0) + 4 * (f(0.2) + f(0.6) + f(1) + f(1.4) + f(1.8)) + 2 * (f(0.4) + f(0.8) + f(1.2) + f(1.6)) + f(2)) = -3.33333... = -8. (6)$$

[illegible]

4. Сравнить результаты с точным значением интеграла:

Точное значение интеграла на интервале $-8. (6)$

1. Метод Ньютона-Котеса при $n = 6$: $I_{\text{точн}} = I_{\text{котес}} = -8. (6)$, значения совпадают.

$$R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{котес}}| = |-8. (6) - (-8. (6))| = 0$$
2. Метод средних прямоугольников при $n = 10$: $I_{\text{ср.прям}} = -8.64$

$$R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{ср.прям}}| = |-8. (6) - (-8.64)| = 0.04(6)$$
3. Метода трапеций при $n = 10$: $I_{\text{трапеция}} = -8.72$

$$R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{трапеция}}| = |-8. (6) - (-8.72)| = 0.12(6)$$
4. Метода Симпсона при $n = 10$: $I_{\text{точн}} = I_{\text{Симпсона}} = -8. (6)$, значения совпадают.

$$R = |I_{\text{точн}} - I_{\text{котес}}| = |-8. (6) - (-8. (6))| = 0$$

5. Относительная погрешность вычислений для каждого метода.

1. Ньютона–Котеса: $R = 0$ погрешности нет.
2. Средних прямоугольников: $\Delta = \frac{|-8.(6)-(-8.64)|}{|-8.(6)|} \approx 0.5\%$
3. Трапеции: $\Delta = \frac{|-8.(6)-(-8.72)|}{|-8.(6)|} \approx 1.4\%$
4. Симпсон: $R = 0$ погрешности нет.

2. Программная реализация задачи

Метод прямоугольников:

```
import tasks_enum

def calc_mid(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    result = 0
    func = tasks_enum.Functions.get_func_lambda(f)
    for i in range(n):
        result += func((a + (i + 0.5) * h))

    return result * h

def calc_left(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    result = 0
    func = tasks_enum.Functions.get_func_lambda(f)
    for i in range(n):
        result += func((a + i * h))

    return result * h

def calc_right(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    result = 0
    func = tasks_enum.Functions.get_func_lambda(f)
    for i in range(1, n+1):
        result += func((a + i * h))

    return result * h
```

Выберите функцию из списка:

1. $-x^3 - x^2 - 2x + 1$
2. $5x^2 + 3x$
3. $\cos(x) + x$
4. $\sin(x)$

Введите one, two, three или four для выбора: one

Выберите метод решения:

1. Левые прям.
2. Средние прям.
3. Правые прям.
4. Трапеции
5. Симпсона

2

Начальное значение разбиения интервала: 4

Введите точность системы >0 и <1 : 0.01

Введите интервал через пробел: 0 2

Значение: -8.6640625

Число разбиения интервала: 32

Метод трапеций:

```
import tasks_enum

def calc_trapez(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    func = tasks_enum.Functions.get_func_lambda(f)
    result = 0.5 * (func(a) + func(b))
    for i in range(1, n):
        result += func(a + i * h)

    return result * h
```

Выберите функцию из списка:

1. $-x^3 - x^2 - 2x + 1$
2. $5x^2 + 3x$
3. $\cos(x) + x$
4. $\sin(x)$

Введите one, two, three или four для выбора: two

Выберите метод решения:

1. Левые прям.
2. Средние прям.
3. Правые прям.
4. Трапеции
5. Симпсона

4

Начальное значение разбиения интервала: 4

Введите точность системы >0 и <1 : 0.01

Введите интервал через пробел: 1 2

Значение: 16.169921875

Число разбиения интервала: 16

Метод Симпсона:

```
import tasks_enum

def calc_simpson(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    func = tasks_enum.Functions.get_func_lambda(f)
    result = func(a) + func(b)
    for i in range(1, n):
        if i % 2 == 1:
            result += 4 * func((a + i * h))
        else:
            result += 2 * func((a + i * h))

    return result * h / 3
```

Выберите функцию из списка:

1. $-x^3 - x^2 - 2x + 1$
2. $5x^2 + 3x$
3. $\cos(x) + x$
4. $\sin(x)$

Введите one, two, three или four для выбора: three

Выберите метод решения:

1. Левые прям.
2. Средние прям.
3. Правые прям.
4. Трапеции
5. Симпсона

5

Начальное значение разбиения интервала: 4

Введите точность системы >0 и <1 : 0.01

Введите интервал через пробел: 1 3

Значение: 3.299633710831437

Число разбиения интервала: 8

<https://github.com/wrakelft/CompMathITMO/tree/main/lab3>

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы мной были реализованы численные методы интегрирования с использованием Python. В ходе вычислительной реализации задачи были рассчитаны интегралы различными методами и проведено сравнение результатов с точными значениями интегралов.