Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№3**
«Численное интегрирование»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **1**

Преподаватель:
Рыбаков С.Д.

Выполнил:
Алферов Глеб Александрович
Группа: P3207

Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

1. Вычислительная реализация задачи

1. Вычислить интеграл точно:

$$\int_0^2 (-x^3 - x^2 - 2x + 1)\,dx$$

$$\mathrm{F(x)} = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + \mathrm{x};\ F(0) = 0;\ F(2) = -8.(6)$$

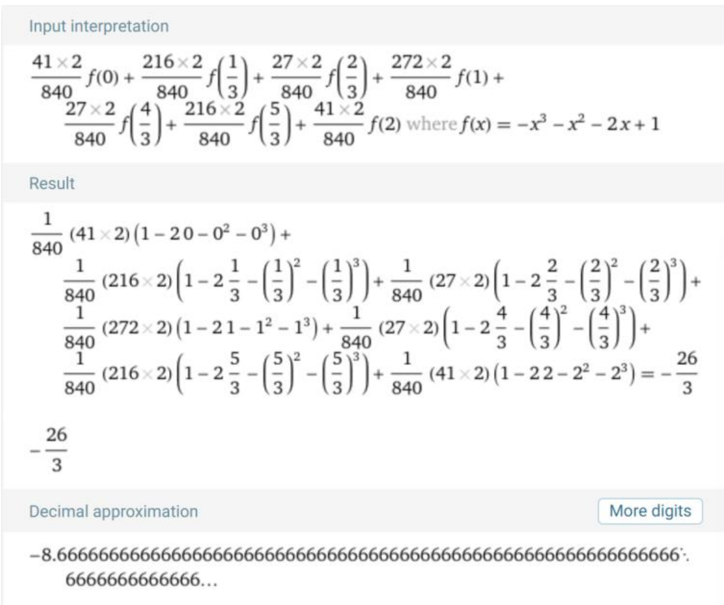
$$I_{\text{точн}} = F(x) = F(2) - F(0) \approx\ -8.(6)$$

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона–Котеса при $n = 6$:

$$h = \frac{b-a}{6} = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx\ \approx\ c_6^0 f(a) + c_6^1 f(a+h) + c_6^2 f(a+2h) + c_6^3 f(a+3h) + c_6^4 f(a+4h) + c_6^5 f(a+5h) + c_6^6 f(b)$$

$$I_{cotes}\ \approx \left(\frac{82}{840} f(0) + \frac{432}{840} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{54}{840} f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{544}{840} f(1) + \frac{54}{840} f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{432}{840} f\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{82}{840} f(2)\right) = \frac{-26}{3} = -8.(6)$$



3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{10} = \frac{1}{5}$$

- **Метод средних прямоугольников**:

$$I_{\text{ср.прям}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} = h\cdot\left(f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+f\left(a+\frac{5h}{2}\right)+f\left(a+\frac{7h}{2}\right)+\right.$$
$$\left.f\left(a+\frac{9h}{2}\right)+f\left(a+\frac{11h}{2}\right)+f\left(a+\frac{13h}{2}\right)+f\left(a+\frac{15h}{2}\right)+f\left(a+\frac{17h}{2}\right)+f\left(a+\frac{19h}{2}\right)\right)=$$
$$= 0.2\big(f(0+0.1)+f(0+0.3)+f(0+0.5)+f(0+0.7)+f(0+0.9)+f(0+1.1)$$
$$+f(0+1.3)+f(0+1.5)+f(0+1.7)+f(0+1.9)\big) = -8.64$$

Input interpretation

$0.2\,(f(0.1)+f(0.3)+f(0.5)+f(0.7)+f(0.9)+f(1.1)+f(1.3)+f(1.5)+f(1.7)+f(1.9))$ where $f(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 1$

Result

-8.64

$$0.2\,\big((1-2\,0.1-0.1^2-0.1^3)+(1-2\,0.3-0.3^2-0.3^3)+(1-2\,0.5-0.5^2-0.5^3)+(1-2\,0.7-0.7^2-0.7^3)+(1-2\,0.9-0.9^2-0.9^3)+(1-2\,1.1-1.1^2-1.1^3)+(1-2\,1.3-1.3^2-1.3^3)+(1-2\,1.5-1.5^2-1.5^3)+(1-2\,1.7-1.7^2-1.7^3)+(1-2\,1.9-1.9^2-1.9^3)\big) = -8.64$$

- **Метод трапеций**:

$$I_{\text{трапеция}} = h\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$
$$I_{\text{трапеция}} = 0.2\left(\frac{f(0)+f(2)}{2}+f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)+f(1)+f(1.2)\right.$$
$$\left.+f(1.4)+f(1.6)+f(1.8)\right) = -8.72$$

Input interpretation

$0.2\left(\frac{1}{2}(f(0)+f(2))+f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)+f(1)+f(1.2)+f(1.4)+f(1.6)+f(1.8)\right)$ where $f(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 1$

Result

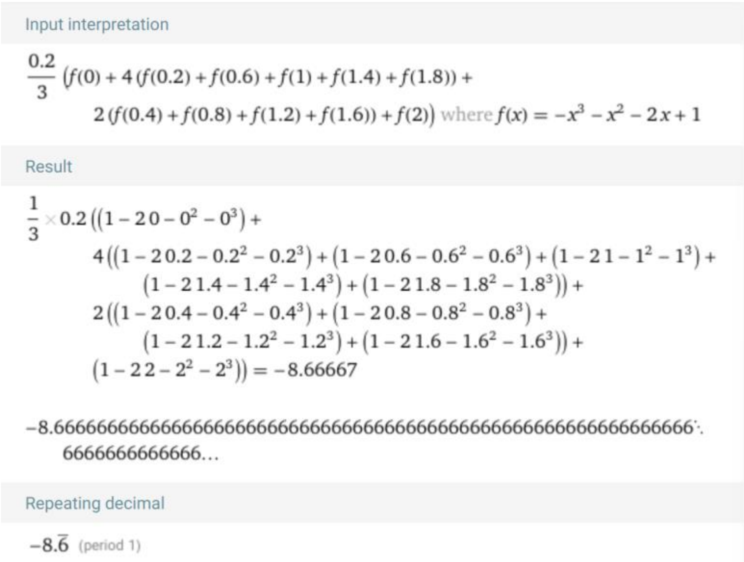
-8.72

$$0.2\left(\frac{1}{2}\big((1-2\,0-0^2-0^3)+(1-2\,2-2^2-2^3)\big)+(1-2\,0.2-0.2^2-0.2^3)+(1-2\,0.4-0.4^2-0.4^3)+(1-2\,0.6-0.6^2-0.6^3)+(1-2\,0.8-0.8^2-0.8^3)+(1-2\,1-1^2-1^3)+(1-2\,1.2-1.2^2-1.2^3)+(1-2\,1.4-1.4^2-1.4^3)+(1-2\,1.6-1.6^2-1.6^3)+(1-2\,1.8-1.8^2-1.8^3)\right) = -8.72$$

- **Метод Симпсона**:

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + \ 4 \sum_{i=1}^{n-1} y_{\text{нечёт}} + 2 \sum_{i=2}^{n-2} y_{\text{чёт}} + y_n \right)$$

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{0.2}{3} \big(f(0) + 4 * \big(f(0.2) + f(0.6) + f(1) + f(1.4) + f(1.8) \big) + 2 * (f(0.4) + f(0.8) + f(1.2) + \ f(1.6)) + f(2) \big) = -3.33333 \ldots = -8.(6)$$



4. Сравнить результаты с точным значением интеграла:

Точное значение интеграла на интервале $-8.(6)$

1. Метод Ньютона–Котеса при $n = 6$: $I_{\text{точн}} = I_{cotes} = -8.(6)$, значения совпадают.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = |-8.(6) - (-8.(6))| = 0$
2. Метод средних прямоугольников при $n = 10$: $I_{\text{ср.прям}} = -8.64$
   $R = \left| I_{\text{точн}} - I_{\text{ср.прям}} \right| = |-8.(6) - (-8.64)| = 0.04(6)$
3. Метода трапеций при $n = 10$: $I_{\text{трапеция}} = -8.72$
   $R = \left| I_{\text{точн}} - I_{\text{трапеция}} \right| = |-8.(6) - (-8.72)| = 0.12(6)$
4. Метода Симпсона при $n = 10$: $I_{\text{точн}} = I_{\text{Симпсона}} = -8.(6)$, значения совпадают.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = |-8.(6) - (-8.(6))| = 0$

5. Относительная погрешность вычислений для каждого метода.

1. Ньютона–Котеса: $R = 0$ погрешности нет.
2. Средних прямоугольников: $\Delta = \frac{|-8.(6) - (-8.64)|}{|-8.(6)|} \approx 0.5\%$
3. Трапеции: $\Delta = \frac{|-8.(6) - (-8.72)|}{|-8.(6)|} \approx 1.4\%$
4. Симпсон: $R = 0$ погрешности нет.

2. Программная реализация задачи

Метод прямоугольников:

```
import tasks_enum


def calc_mid(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    result = 0
    func = tasks_enum.Functions.get_func_lambda(f)
    for i in range(n):
        result += func((a + (i + 0.5) * h))

    return result * h


def calc_left(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    result = 0
    func = tasks_enum.Functions.get_func_lambda(f)
    for i in range(n):
        result += func((a + i * h))

    return result * h


def calc_right(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    result = 0
    func = tasks_enum.Functions.get_func_lambda(f)
    for i in range(1, n+1):
        result += func((a + i * h))

    return result * h
```

Выберите функцию из списка:
 1. -x^3 - x^2 - 2x + 1
2. 5x^2 + 3x
3. cos(x) + x
4. sin(x)
Введите one, two, three или four для выбора: one
Выберите метод решения:
 1. Левые прям.
 2. Средние прям.
 3. Правые прям.
 4. Трапеции
 5. Симпсона
2
Начальное значение разбиения интервала: 4
Введите точность системы >0 и <1: 0.01
Введите интервал через пробел: 0 2

Значение: -8.6640625
Число разбиения интервала: 32

Метод трапеций:

```
import tasks_enum


def calc_trapez(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    func = tasks_enum.Functions.get_func_lambda(f)
    result = 0.5 * (func(a) + func(b))
    for i in range(1, n):
        result += func(a + i * h)

    return result * h
```

Выберите функцию из списка:
1. -x^3 - x^2 - 2x + 1
2. 5x^2 + 3x
3. cos(x) + x
4. sin(x)
Введите one, two, three или four для выбора: two
Выберите метод решения:
1. Левые прям.
2. Средние прям.
3. Правые прям.
4. Трапеции
5. Симпсона
4
Начальное значение разбиения интервала: 4
Введите точность системы >0 и <1: 0.01
Введите интервал через пробел: 1 2

Значение: 16.169921875
Число разбиения интервала: 16

Метод Симпсона:

```
import tasks_enum


def calc_simpson(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    func = tasks_enum.Functions.get_func_lambda(f)
    result = func(a) + func(b)
    for i in range(1, n):
        if i % 2 == 1:
            result += 4 * func((a + i * h))
        else:
            result += 2 * func((a + i * h))

    return result * h / 3
```

Выберите функцию из списка:
1. -x^3 - x^2 - 2x + 1
2. 5x^2 + 3x
3. cos(x) + x
4. sin(x)
Введите one, two, three или four для выбора: three
Выберите метод решения:

1. Левые прям.
2. Средние прям.
3. Правые прям.
4. Трапеции
5. Симпсона

5
Начальное значение разбиения интервала: 4
Введите точность системы >0 и <1: 0.01
Введите интервал через пробел: 1 3

Значение: 3.299633710831437
Число разбиения интервала: 8

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы мной были реализованы численные методы интегрирования с использованием Python. В ходе вычислительной реализации задачи были рассчитаны интегралы различными методами и проведено сравнение результатов с точными значениями интегралов.