

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «**Национальный исследовательский университет ИТМО**»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №4
«**Аппроксимация функции методом наименьших квадратов**»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: 1

Преподаватель:
Рыбаков.С.Д.

Выполнил:
Алферов Г.А.
Группа: Р3207

Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

1. Вычислительная реализация задачи

Линейная аппроксимация:

$$y = \frac{12x}{x^4 + 1}$$

$$n = 11$$

$$x \in [0; 2]$$

$$h = 0.2$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x _i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y _i	0	2.396	4.680	6.373	6.810	6.000	4.685	3.469	2.541	1.878	1.411

$$\varphi(x) = ax + b$$

Вычисляем суммы: $sx = 11$, $sxx = 15.4$, $sy = 40.248$ $sxy = 38.376$

$$\begin{cases} n * a + sx * b = sy \\ sx * a + sxx * b = sxy \end{cases} \begin{cases} 11 * a + 11 * b = 40.248 \\ 11 * a + 15.4 * b = 38.376 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4.084 \\ a = -0.425 \end{cases}$$

$$\varphi(x) = -0.425 * x + 4.084$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x _i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y _i	0	2.396	4.680	6.373	6.810	6.000	4.685	3.469	2.541	1.878	1.411
φ(x _i)	4,084	3,999	3,914	3,829	3,744	3,659	3,574	3,489	3,404	3,319	3,234
(φ (x _i)- y _i) ²	16,67 9	2,569	0,587	6,477	9,403	5,480	1,234	0,0004	0,743	2,074	3,320

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}} = 2.101$$

Квадратичная аппроксимация:

$$y = \frac{12x}{x^4 + 1}$$

$$n = 11$$

$$x \in [0; 2]$$

$$h = 0.2$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x _i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y _i	0	2.396	4.680	6.373	6.810	6.000	4.685	3.469	2.541	1.878	1.411

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2$$

Вычисляем суммы:

$$sx = 11, sxx = 15.4, sxxx = 24.2, sxxxx = 40.532, sy = 40.248, sxy = 38.376, sxxxy = 45.286$$

$$\begin{cases} n * a + sx * b + sxx * c = sy \\ sx * a + sxx * b + sxxx * c = sxy \\ sxx * a + sxxx * b + sxxxx * c = sxxxy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 * a + 11 * b + 15.4 * c = 40.248 \\ 11 * a + 15.4 * b + 24.2 * c = 38.376 \\ 15.4 * a + 24.2 * b + 40.532 * c = 45.286 \end{cases}$$

По методу Крамера:

$$\Delta = 66.405$$

$$\Delta_1 = 58.730, \Delta_2 = 680.053, \Delta_3 = -354.152$$

$$\begin{cases} a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{58.730}{66.405} \approx 0.884 \\ b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{680.053}{66.405} \approx 10.241 \\ c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-354.152}{66.405} \approx -5.333 \end{cases}$$

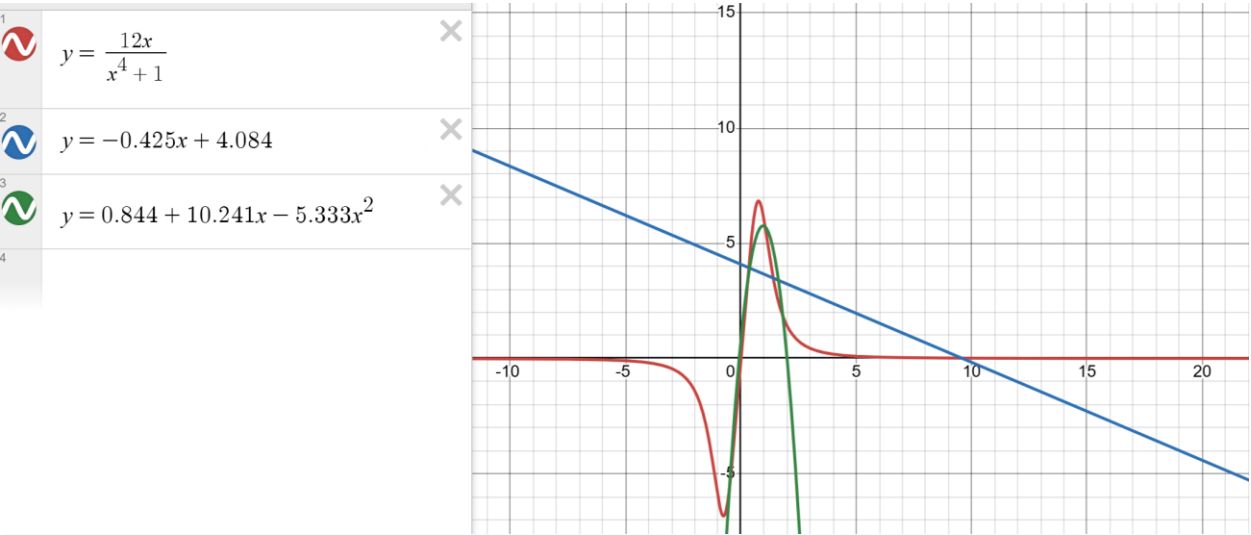
$$\varphi(x) = 0.884 + 10.241x - 5.333x^2$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x _i	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1.0	-1.2	-1.4	-1.6	-1.8	-2.0
y _i	0	2.396	4.680	6.373	6.810	6.000	4.685	3.469	2.541	1.878	1.411
φ(x _i)	0,884	2,719	4,127	5,109	5,663	5,792	5,494	4,769	3,617	2,039	0,034

(φ (xi)- yi)^2	0,781	0,104	0,306	1,601	1,315	0,043	0,654	1,687	1,156	0,026	1,898
----------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\varphi (xi)- yi)^2}{n}} =0.933$$

0.933 < 2.101, у квадратичной аппроксимации среднеквадратичное отклонение меньше, поэтому это приближение лучше.



2. Программная реализация задачи

Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

Введите кол-во точек от 8 до 12: 11

Вводите по две пары чисел на каждой строке (X_i Y_i)

0 0

0,2 2,4

0,4 4,68

0,6 6,37

0,8 6,8

1 6

1,2 4,6807

1,4 3,46

1,6 2,54

1,8 1,87

2 1,4

Выберите куда вывести результат работы программы, f - в файл, s - на экран: s

=====

МОДЕЛЬ: ЛИНЕЙНАЯ

=====

Таблица значений:

x	y	$\varphi(x)$ (Линейная)	ε
0.0000	0.0000	4.0855	4.0855
0.2000	2.4000	3.9993	1.5993
0.4000	4.6800	3.9131	-0.7669
0.6000	6.3700	3.8270	-2.5430
0.8000	6.8000	3.7408	-3.0592
1.0000	6.0000	3.6546	-2.3454
1.2000	4.6807	3.5684	-1.1123
1.4000	3.4600	3.4823	0.0223
1.6000	2.5400	3.3961	0.8561
1.8000	1.8700	3.3099	1.4399
2.0000	1.4000	3.2237	1.8237

Коэффициенты:

a = -0.430877, b = 4.085486

Мера отклонения (S): 48.533626

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 2.100511

Коэффициент детерминации (R^2): 0.016553

Коэффициент корреляции Пирсона: -0.128657

Интерпретация R^2 :

Недостаточное соответствие модели данным ($R^2 < 0.5$)

=====

МОДЕЛЬ: ПОЛИНОМ 2-СТ

Таблица значений:

x	y	φ(x) (Полином 2-ст)	ε
0.0000	0.0000	0.8878	0.8878
0.2000	2.4000	2.7202	0.3202
0.4000	4.6800	4.1263	-0.5537
0.6000	6.3700	5.1060	-1.2640
0.8000	6.8000	5.6594	-1.1406
1.0000	6.0000	5.7864	-0.2136
1.2000	4.6807	5.4870	0.8063
1.4000	3.4600	4.7613	1.3013
1.6000	2.5400	3.6093	1.0693
1.8000	1.8700	2.0308	0.1608
2.0000	1.4000	0.0261	-1.3739

Коэффициенты:

a = -5.329438, b = 10.227998, c = 0.887824

Мера отклонения (S): 9.542117

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 0.931378

Коэффициент детерминации (R^2): 0.806646

Интерпретация R^2 :

Удовлетворительное соответствие модели данным ($0.75 \leq R^2 < 0.95$)

МОДЕЛЬ: ПОЛИНОМ 3-СТ

Таблица значений:

x	y	φ(x) (Полином 3-ст)	ε
0.0000	0.0000	-0.4329	-0.4329
0.2000	2.4000	2.9844	0.5844
0.4000	4.6800	5.0948	0.4148
0.6000	6.3700	6.1186	-0.2514
0.8000	6.8000	6.2757	-0.5243
1.0000	6.0000	5.7864	-0.2136
1.2000	4.6807	4.8707	0.1900
1.4000	3.4600	3.7488	0.2888
1.6000	2.5400	2.6407	0.1007
1.8000	1.8700	1.7667	-0.1033
2.0000	1.4000	1.3468	-0.0532

Коэффициенты:

a = 4.585766, b = -19.086737, c = 20.720231, d = -0.432877

Мера отклонения (S): 1.227857

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 0.334101

Коэффициент детерминации (R^2): 0.975120

Интерпретация R^2 :

Высокое соответствие модели данным ($R^2 \geq 0.95$)

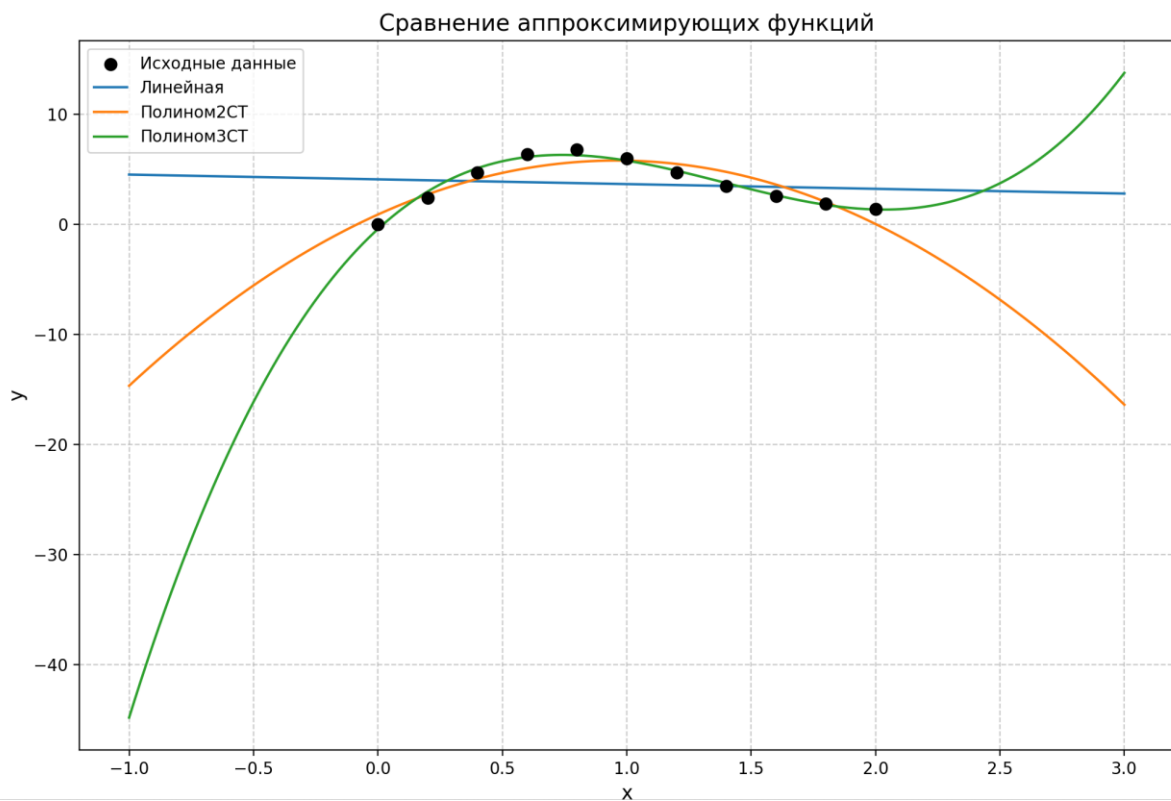
=====

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

=====

Наилучшая модель: ПОЛИНОМ 3-СТ

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 0.334101



Введите кол-во точек от 8 до 12: 8

Вводите по две пары чисел на каждой строке ($X_i Y_i$)

0 0

0 0

0 0

0 0

0 0

0 0

0 0

0 0

Все значения x или y равны нулю

Файл должен содержать от 8 до 12 пар точек, по две на каждой строке через пробел

Введите имя файла: test.txt

Выберите куда вывести результат работы программы, f - в файл, s - на экран: s

МОДЕЛЬ: ЛИНЕЙНАЯ

Таблица значений:

x	y	$\varphi(x)$ (Линейная)	ε
1.1000	2.7300	3.0261	0.2961
2.3000	5.1200	5.0744	-0.0456
3.7000	7.7400	7.4641	-0.2759
4.5000	8.9100	8.8296	-0.0804
5.4000	10.5900	10.3659	-0.2241
6.8000	12.7500	12.7556	0.0056
7.5000	13.4300	13.9504	0.5204
8.0000	15.0000	14.8039	-0.1961

Коэффициенты:

$a = 1.706920$, $b = 1.148507$

Мера отклонения (S): 0.531890

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 0.257849

Коэффициент детерминации (R^2): 0.995775

Коэффициент корреляции Пирсона: 0.997885

Интерпретация R^2 :

Высокое соответствие модели данным ($R^2 \geq 0.95$)

МОДЕЛЬ: ПОЛИНОМ 2-СТ

Таблица значений:

x	y	$\varphi(x)$ (Полином 2-ст)	ε
1.1000	2.7300	2.8014	0.0714
2.3000	5.1200	5.0701	-0.0499
3.7000	7.7400	7.6040	-0.1360
4.5000	8.9100	8.9975	0.0875
5.4000	10.5900	10.5177	-0.0723
6.8000	12.7500	12.7826	0.0326
7.5000	13.4300	13.8695	0.4395
8.0000	15.0000	14.6273	-0.3727

Коэффициенты:

$a = -0.030995$, $b = 1.995959$, $c = 0.643309$

Мера отклонения (S): 0.372114

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 0.215672

Коэффициент детерминации (R^2): 0.997044

Интерпретация R^2 :

Высокое соответствие модели данным ($R^2 \geq 0.95$)

=====

МОДЕЛЬ: ПОЛИНОМ 3-СТ

=====

Таблица значений:

x	y	φ(x) (Полином 3-ст)	ε
1.1000	2.7300	2.6920	-0.0380
2.3000	5.1200	5.1998	0.0798
3.7000	7.7400	7.7001	-0.0399
4.5000	8.9100	9.0023	0.0923
5.4000	10.5900	10.4198	-0.1702
6.8000	12.7500	12.6571	-0.0929
7.5000	13.4300	13.8486	0.4186
8.0000	15.0000	14.7502	-0.2498

Коэффициенты:

a = 0.013215, b = -0.210695, c = 2.686842, d = -0.026133

Мера отклонения (S): 0.293190

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 0.191439

Коэффициент детерминации (R^2): 0.997671

Интерпретация R^2 :

Высокое соответствие модели данным ($R^2 \geq 0.95$)

=====

МОДЕЛЬ: ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ

=====

Таблица значений:

x	y	φ(x) (Экспоненциальная)	ε
1.1000	2.7300	3.6268	0.8968
2.3000	5.1200	4.7347	-0.3853
3.7000	7.7400	6.4618	-1.2782
4.5000	8.9100	7.7185	-1.1915
5.4000	10.5900	9.4267	-1.1633
6.8000	12.7500	12.8653	0.1153
7.5000	13.4300	15.0297	1.5997
8.0000	15.0000	16.7953	1.7953

Коэффициенты:

a = 2.840569, b = 0.222137

Мера отклонения (S): 11.155061

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 1.180840

Коэффициент детерминации (R^2): 0.911410

Интерпретация R^2 :

Удовлетворительное соответствие модели данным ($0.75 \leq R^2 < 0.95$)

=====

МОДЕЛЬ: ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ

=====

Таблица значений:

x	y	φ(x) (Логарифмическая)	ε
1.1000	2.7300	1.4422	-1.2878
2.3000	5.1200	5.9146	0.7946
3.7000	7.7400	8.7973	1.0573
4.5000	8.9100	9.9842	1.0742
5.4000	10.5900	11.0897	0.4997
6.8000	12.7500	12.4875	-0.2625
7.5000	13.4300	13.0816	-0.3484
8.0000	15.0000	13.4729	-1.5271

Коэффициенты:

a = 6.063449, b = 0.864309

Мера отклонения (S): 7.333702

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 0.957451

Коэффициент детерминации (R²): 0.941750

Интерпретация R²:

Удовлетворительное соответствие модели данным ($0.75 \leq R^2 < 0.95$)

=====

МОДЕЛЬ: СТЕПЕННАЯ

=====

Таблица значений:

x	y	φ(x) (Степенная)	ε
1.1000	2.7300	2.7407	0.0107
2.3000	5.1200	5.1097	-0.0103
3.7000	7.7400	7.6345	-0.1055
4.5000	8.9100	9.0069	0.0969
5.4000	10.5900	10.5063	-0.0837
6.8000	12.7500	12.7645	0.0145
7.5000	13.4300	13.8657	0.4357
8.0000	15.0000	14.6425	-0.3575

Коэффициенты:

a = 2.528691, b = 0.844566

Мера отклонения (S): 0.345638

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 0.207858

Коэффициент детерминации (R²): 0.997255

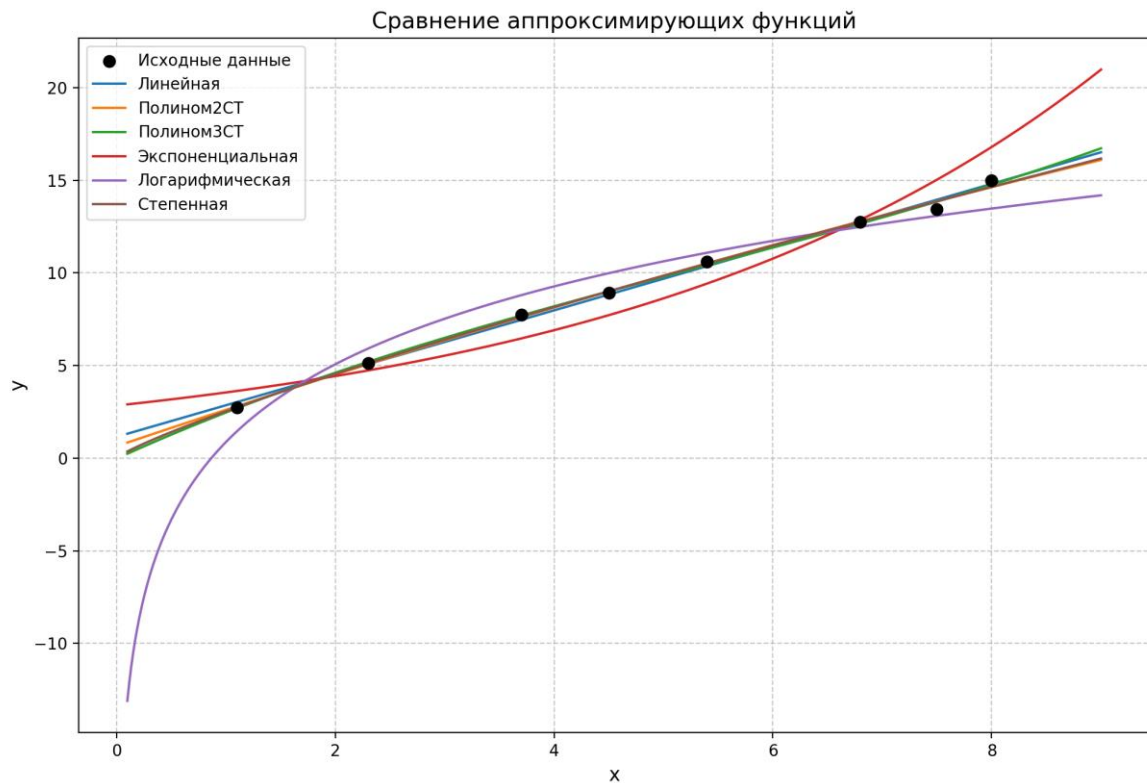
Интерпретация R²:

Высокое соответствие модели данным ($R^2 \geq 0.95$)

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Наилучшая модель: ПОЛИНОМ 3-СТ

Среднеквадратичное отклонение (СКО): 0.191439



<https://github.com/wrakelft/CompMathITMO/tree/main/lab4>

Вывод

В ходе данной работы была выполнена аппроксимация функций с помощью приближений. На основе этих приближений была сделана программа, которая реализует метод наименьших квадратов.