

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

по дисциплине

‘ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА’

Вариант №1

Выполнил:

Студент группы Р3207

Алферов Г. А.

Преподаватель:



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург, 2025

Цель работы

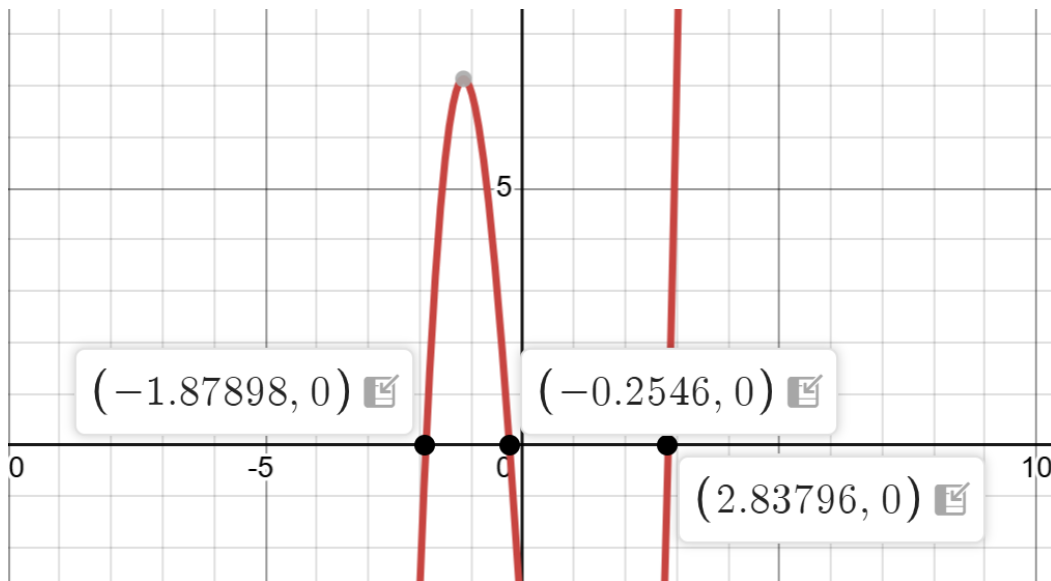
Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и реализовать три из них средствами программирования. Понять их сходства и различия.

Ход работы

Часть 1.

$$2.74x^3 - 1.93x^2 - 15.28x - 3.72$$

Графическое отделение корней:



Интервалы изоляции корней:

Приближенные значения корней:

$$X \approx -1.9, X \approx -0.3, X \approx 2.9$$

Интервалы на оси X:

$$(-\infty, -1.9), (-1.9, -0.3), (-0.3, 2.9), (2.9, +\infty)$$

Вычисление знака функции на интервалах:

1 интервал: $x = -2$ $f(-2) = -2.8$ Знак: -

2 интервал: $x = -1$ $f(-1) = 6.89$ Знак: +

3 интервал: $x = 0$ $f(0) = -3.72$ Знак: -

4 интервал: $x = 3$ $f(3) = 7.05$ Знак: +

$$(-2, -1), (-1, 0), (2, 3)$$

Уточнение корней:

$$X1 \approx -1.88$$

$$X2 \approx -0.25$$

$$X3 \approx 2.84$$

Правый корень – метод половинного деления

| № шага | a | b | x | f(a) | f(b) | f(x) | a-b |
|--------|-------|-------|-------|---------|-------|---------|-------|
| 1 | 2.000 | 3.000 | 2.500 | -20.079 | 7.050 | -11.170 | 1.000 |
| 2 | 2.500 | 3.000 | 2.750 | -11.170 | 7.050 | -3.352 | 0.500 |
| 3 | 2.750 | 3.000 | 2.875 | -3.352 | 7.050 | 1.509 | 0.250 |
| 4 | 2.750 | 2.875 | 2.812 | -3.352 | 1.509 | -1.004 | 0.125 |
| 6 | 2.812 | 2.875 | 2.843 | -1.023 | 1.509 | 0.222 | 0.063 |
| 7 | 2.812 | 2.843 | 2.827 | -1.023 | 0.202 | -0.416 | 0.031 |
| 8 | 2.827 | 2.843 | 2.835 | -0.436 | 0.202 | -0.118 | 0.016 |
| 9 | 2.835 | 2.843 | 2.839 | -0.118 | 0.202 | 0.041 | 0.008 |

Рабочая формула метода:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Центральный корень – Метод простой итерации

| № итерации | X_k | X_{k+1} | $f(X_{k+1})$ | $ X_{k+1} - X_k $ |
|------------|--------|---------------|--------------|-------------------|
| 1 | -1.000 | -0.549 | 3.634 | 0.451 |
| 2 | -0.549 | -0.311 | 0.765 | 0.238 |
| 3 | -0.311 | -0.261 | 0.089 | 0.050 |
| 4 | -0.261 | -0.255 | 0.009 | 0.005 |

Проверка сходимости:

Отрезок $[-1, 0]$

$$f'(x) = 8.22x^2 - 3.86x - 15.28$$

$$f'(a) = -3.2 < 0, f'(b) = -15.28 < 0$$

$$\max(|f'(a)|, |f'(b)|) = 15.28$$

$$\lambda = 1/15.28$$

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x) = x + \frac{2.74x^3 - 1.93x^2 - 15.28x - 3.72}{15.28}$$

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x) = 1 + \frac{8.22x^2 - 3.86x - 15.28}{15.28}$$

$$|\varphi'(a)| = 0.790$$

$$|\varphi'(b)| = 0$$

$0 \leq q < 1$ Итерационная последовательность сходится

Рабочая формула:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

Левый корень – метод секущих

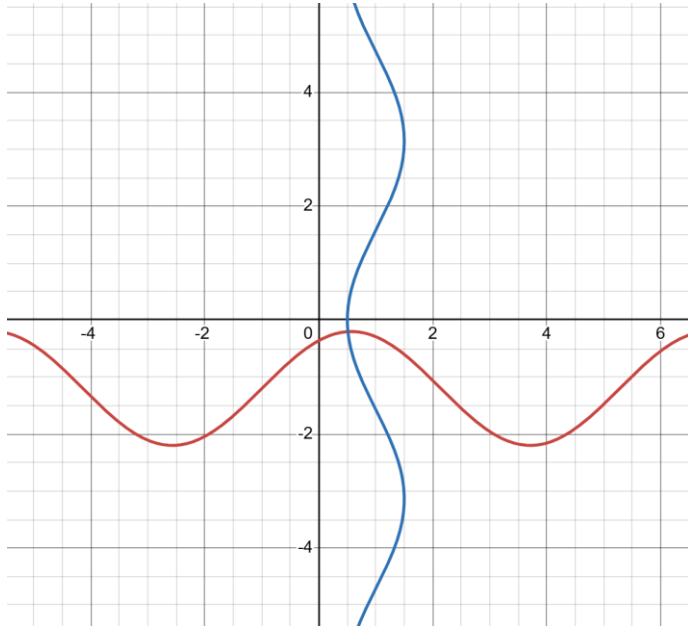
| № итерации | X_{k-1} | X_k | X_{k+1} | $f(X_{k+1})$ | $ X_{k+1} - X_k $ |
|------------|-----------|--------|---------------|--------------|-------------------|
| 1 | -2.000 | -1.000 | -1.711 | 3.049 | 0.711 |
| 2 | -1.000 | -1.711 | -2.275 | -11.227 | 0.564 |
| 3 | -1.711 | -2.275 | -1.831 | 0.956 | 0.443 |
| 4 | -2.275 | -1.831 | -1.866 | 0.264 | 0.035 |
| 5 | -1.831 | -1.866 | -1.879 | -0.011 | 0.013 |
| 6 | -1.866 | -1.879 | -1.878 | 0.000004 | 0.00002 |

Рабочая формула:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots$$

Часть 2.

$$\begin{cases} \sin(x + 1) - y = 1.2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}, \text{ Метод простой итерации}$$



$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y) \\ y = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \cos y / 2 \\ y = \sin(x + 1) - 1.2 \end{cases}$$

Проверка сходимости:

Условие: $|\partial \varphi_1 / \partial x| + |\partial \varphi_1 / \partial y| < 1$ и $|\partial \varphi_2 / \partial x| + |\partial \varphi_2 / \partial y| < 1$

$$0 + |\sin(y)/2| < 1 \text{ и } |\cos(x + 1)| + 0 < 1$$

Это условие выполняется.

Итерации:

Начальное приближение $x_0 = 0, y_0 = 0$

Формула: $x_{k+1} = 1 - \cos(y_k) / 2, y_{k+1} = \sin(x_k + 1) - 1.2$

1.

$$X_1 = 1 - \cos(0)/2 = 0.500$$

$$Y_1 = \sin(1) - 1.2 = -0.358$$

Проверка точности: $X |0.500-0| = 0.500 > 0.01$ и $Y |-0.358-0| > 0.01$

2.

$$X_2 = 1 - \cos(-0.358)/2 = 0.532$$

$$Y_2 = \sin(1.5) - 1.2 = -0.202$$

Проверка точности: $X |0.532-0.500| = 0.032 > 0.01$ и $Y |-0.202+0.358| = 0.156 > 0.01$

3.

$$X_3 = 1 - \cos(-0.202)/2 = 0.510$$

$$Y_3 = \sin(1.532) - 1.2 = -0.200$$

Проверка точности: $X |0.510-0.532| = 0.022 > 0.01$ и $Y |-0.200+0.202| = 0.002 < 0.01$

4.

$$X_3 = 1 - \cos(-0.200)/2 = 0.509$$

$$Y_3 = \sin(1.510) - 1.2 = -0.200$$

Проверка точности: $X |0.509-0.510| = 0.001 < 0.01$ и $Y |-0.200+0.200| = 0 < 0.01$

Решение системы с точностью до 0.01:

$$X \approx 0.509, Y \approx -0.200$$