

Proof Writing

NABIL NABAWI WIBISONO

1 Cara Menyelesaikan Soal

Menurut Polya, ada 4 tahap dalam menyelesaikan sebuah soal. Ini bukan cara yang wajib diikuti ya teman-teman. Namun secara garis besar seringkali kerangkanya seperti ini:

1 Memahami Soal

Apa yang diketahui? Apa yang dicari? Apa yang harus dibuktikan?

Baca soalnya baik-baik dan pahami.

2 Memikirkan Strategi (Ide)

Pernah lihat soal yang serupa? yang berhubungan? Apa yang bisa didapat dari informasi pada soal? Apa yang ekuivalen dengan soal?

Temukan koneksi dari informasi yang diberikan dengan yang ingin dibuktikan. Jika sudah dapat intuisi soal ini mengarah ke mana, bagus. Kalau belum, coba mengotak-atik soalnya sampai dapat ide.

3 Eksekusi Strategi

Mulailah cari rentetan sebab akibat.

Pastikan setiap implikasi itu mutlak benar.

$$\text{Jika } A \implies B \implies C \implies D \implies \dots \implies \text{Terbukti.}$$

Kalau tidak kelihatan hasilnya, atau punya *feeling* sepertinya gagal, kembali ke step 2 dan coba cari ide lain.

4 Review Kembali

Apakah benar memenuhi soal? Apakah tidak ada yang salah dalam pengerjaan kalian?

Cek kembali jawaban kalian sebelum menulis rapi di kertas jawaban.

Step yang paling susah adalah di nomor 2, diikuti dengan nomor 3. Ketika selesai memahami sebuah soal, terkadang kita sama sekali tidak kepikiran ide apapun.

2 Cara Menulis Bukti Matematika

Sudah temukan jawabannya? bagus! tapi kalian belum selesai. Pada soal uraian, kalian perlu menjelaskan jawaban kalian ke korektor melalui kertas. Ide yang bagus akan terlihat jelek kalau kalian tidak bisa menuliskannya dengan baik.

Di sini akan kita bahas beberapa tips untuk meng-*improve* penulisan bukti. Satu hal yang pasti adalah: **menulis bukti itu seperti *storytelling*.**

1 Rencanakan Alur Cerita Sebelum Menulis

Langkah pertama dalam penulisan solusi yang jelas adalah membuat rencana. Baca kembali solusi yang telah kalian dapat di kertas coretan, seringkali kalian akan dapat menemukan **ide penting** untuk soal tersebut.

Buat kerangka dari solusi kalian, termasuk urutan penulisan dari bagian-bagian penting di solusi kalian. Kerangka ini akan membantu kalian memastikan tidak ada yang tertinggal.

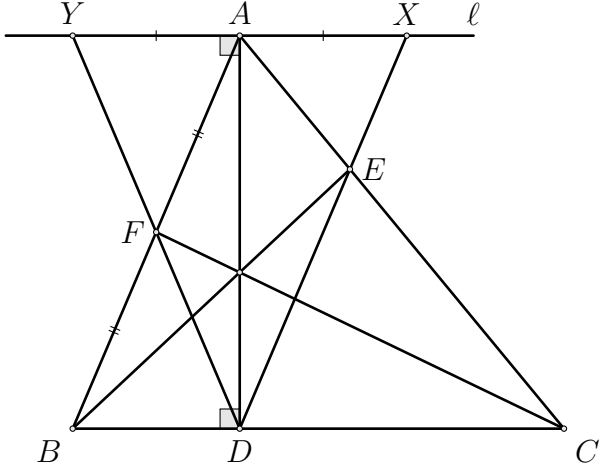
Terkadang dengan perencanaan, kita jadi lebih mengerti akan apa kunci atau hal penting dari solusi kita. Seringkali hal penting inilah yang dijadikan patokan penilaian oleh korektor (ada yang namanya *marking scheme*). Saya sarankan hal-hal penting dari suatu soal harus kalian *display*, agar lebih mencolok.

Seringkali untuk membuktikan bahwa pernyataan soal itu benar, kita butuh membuktikan suatu pernyataan lain yang krusial. Pernyataan ini ada baiknya dijadikan sebuah **klaim**, yang kalian tulis di awal, dan dibuktikan. Setelah klaim terbukti, baru kita masuk ke *main storynya*, membuktikan soal.

Contoh 2.1 (OSK SMA 2023 Nomor 19)

Diberikan segitiga ABC . Misal titik D, E, F berturut-turut terletak pada sisi BC, CA, AB sehingga AD, BE, CF berpotongan di satu titik. Diketahui bahwa $\angle EDF = 56^\circ$. Jika $\angle ADB = 90^\circ$ dan $AF = FB$, maka nilai dari $\angle ABC = \dots^\circ$.

Solusi yang terstruktur:



Tarik garis ℓ melalui titik A dan sejajar BC . Misalkan $DE \cap \ell = X$ dan $DF \cap \ell = Y$. Terlebih dahulu akan kita buktikan dua klaim berikut.

Klaim 1

$DE \parallel AB$.

Bukti. Titik F adalah titik tengah AB , sehingga $AF = FB$. Karena AD, BE, CF konkuren, maka dari Teorema Ceva diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} &= 1 \\ \frac{CE}{EA} &= \frac{CD}{DB}. \end{aligned}$$

Akibatnya, $\triangle CDE \sim \triangle CBA$, sehingga $\angle CDE = \angle CBA \implies DE \parallel AB$. Terbukti. ■

Klaim 2

$\angle ADF = \angle ADE$.

Bukti. Karena $AX \parallel DC$ dan $AY \parallel BD$, maka $\triangle AXE \sim \triangle CDE$ dan $\triangle AYF \sim \triangle BDF$. Sehingga kita punya

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AY}{BD} \quad \text{dan} \quad \frac{CE}{EA} = \frac{CD}{AX}.$$

Karena AD, BE, CF konkuren, maka dari Teorema Ceva diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} &= 1 \\ \frac{AY}{BD} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CD}{AX} &= 1 \\ \frac{AY}{AX} &= 1 \\ AY &= AX. \end{aligned}$$

Perhatikan juga bahwa karena $\ell \parallel BC$, maka $\angle DAX = 90^\circ$. Akibatnya, $\triangle AXD \cong \triangle AYD$, sehingga $\angle ADF = \angle ADE$. Terbukti. ■

Dari klaim 2, didapat bahwa

$$\angle ADE = \frac{1}{2} \angle EDF = \frac{1}{2} \cdot 56^\circ = 28^\circ.$$

Dari klaim 1, kita juga punya $\angle ABC = \angle EDC$. Akibatnya,

$$\angle ABC = \angle EDC = 90^\circ - \angle ADE = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ.$$

2 Beri Nama Karaktermu

Beri nama semua variabel atau hal yang berperan penting dalam cerita. Di geometri, jangan lupa definisikan titik-titik potong yang akan digunakan. Jangan hanya tulis di gambarnya saja, contohnya: misalkan $E = AB \cap CD$.

Contoh 2.2

Buktikan bahwa dari 6 orang, terdapat 3 orang yang saling kenal atau 3 orang yang saling tidak kenal. Asumsikan hubungan antar orang hanyalah saling kenal atau saling tidak kenal.

Yang kurang bagus:

Ambil satu orang dari enam orang tersebut. Tinjau hubungannya dengan kelima orang lainnya. Karena hanya ada dua jenis hubungan, maka dari PHP didapat bahwa ada tiga orang dari kelima orang tersebut yang memiliki hubungan yang sama dengan orang yang kita ambil pertama tadi.

Sekarang tinjau tiga orang tersebut. Kalau ada dua orang di antara ketiganya yang jenis hubungannya sama dengan hubungan mereka dengan orang yang kita ambil pertama tadi, maka kita punya tiga orang yang jenis hubungannya sama. Jika tidak ada, maka ketiganya memiliki hubungan yang sama, yang tidak sama dengan hubungan mereka dengan orang yang kita ambil pertama tadi.

Terbukti.

Yang bagus:

Misalkan 6 orang tersebut adalah A, B, C, D, E, F . Kita definisikan XY sebagai hubungan antara orang X dengan orang Y , P sebagai himpunan hubungan orang yang saling kenal, dan Q sebagai himpunan hubungan orang yang tidak saling kenal.

Pertama, tinjau hubungan A dengan kelima orang lainnya. Karena ada lima hubungan AB, AC, AD, AE, AF , dari PHP pasti ada tiga hubungan yang masuk di himpunan yang sama. WLOG $AB, AC, AD \in P$.

Sekarang tinjau hubungan BC, CD, DB . Jika ada satu saja, misalkan BC , yang merupakan anggota P , maka A, B, C adalah tiga orang yang saling kenal. Jika tidak ada di antara BC, CD, DB yang merupakan anggota P , maka ketiganya merupakan anggota Q , sehingga BCD saling tidak kenal.

Terbukti.

Bahkan solusi di atas bisa lebih bagus lagi kalau ditambahkan gambar penjelas.

3 Tarik Pembaca Solusi

Awalan dari cerita yang bagus biasanya nge-*spill* sedikit-sedikit apa yang akan terjadi. Inilah yang disebut dengan *hook*. Dalam soal olimpiade, kebanyakan soal akan menyuruh kalian untuk “cari semua yang memenuhi suatu kondisi”, seperti sistem persamaan, fungsi, persamaan Diophantine, dsb. Untuk soal seperti ini, disarankan untuk menulis dengan struktur sebagai berikut:

- Mulai dengan menulis “**Kita klaim bahwa jawabannya adalah ...**”.
- Kemudian lanjutkan dengan “**Dapat dicek bahwa ... memenuhi soal**”. Sebagai contoh, terdapat suatu sistem persamaan dengan solusi $(x, y) = (-7, 0), (2, 5)$, maka kalian harus masukkan kembali dan cek apakah memang benar memenuhi. Walaupun seringkali trivial, namun harus tetap ditulis karena ini juga bagian dari soal.
- Terakhir, “**Sekarang akan dibuktikan bahwa hanya itu solusinya**”. Lanjutkan dengan solusi kalian.

Ada juga soal yang menyuruh kalian untuk “cari nilai maksimum/minimum dari suatu ekspresi”. Untuk soal seperti ini, disarankan untuk menulis dengan struktur sebagai berikut:

- Mulai dengan “**Kita klaim bahwa nilai maksimum/minimumnya adalah ...**”.
- Lalu lanjutkan dengan “**Nilai ini dapat dicapai ketika ...**”. Berikan nilai variabelnya sehingga nilai ekstrim tersebut tercapai.
- Terakhir, “**Sekarang akan dibuktikan bahwa nilai itu adalah batas bawah/batas atasnya**”. Lanjutkan dengan AM-GM, dsb.

Untuk soal pembuktian, mungkin bisa “**Akan dibuktikan ... benar dengan ...**”, dan sebagainya.

Hal ini dikarenakan soal “tentukan semua” dan “mencari nilai maksimal/minimal” selalu merupakan masalah dua arah, atau jika dan hanya jika. Untuk soal pembuktian “jika dan hanya jika” juga sama. Kalian harus buktikan dua arah: “Jika kiri \implies kanan” dan “Jika kanan \implies kiri”.

Contoh 2.3 (OSN SMA 2022 Nomor 1)

Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga

$$f(f(f(x)) + f(y)) = f(y) - f(x)$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Contoh *Hook*:

Fungsi f yang memenuhi hanyalah $f(x) = 0$. Dapat dicek bahwa fungsi $f(x) = 0$ memenuhi persamaan soal. Sekarang akan dibuktikan bahwa hanya ini satu-satunya solusi.

Misalkan $P(x, y)$ adalah pernyataan pada soal, yakni

$$P(x, y) : f(f(f(x)) + f(y)) = f(y) - f(x).$$

Dari $P(0, 0)$ didapat

$$f(f(f(0)) + f(0)) = 0.$$

Misalkan $a = f(f(0)) + f(0)$, maka $f(a) = 0$. Dari $P(a, a)$ didapat

$$\begin{aligned} f(f(f(a)) + f(a)) &= 0 \\ \implies f(f(0)) &= 0. \end{aligned}$$

Kemudian, $P(0, y)$ mengakibatkan

$$\begin{aligned} f(f(f(0)) + f(y)) &= f(y) - f(0) \\ \implies f(f(y)) &= f(y) - f(0). \end{aligned}$$

Maka persamaan awal bisa kita ubah menjadi

$$f(f(x) + f(y) - f(0)) = f(y) - f(x).$$

Substitusikan $(x, y) \rightarrow (y, x)$ diperoleh

$$f(f(y) + f(x) - f(0)) = f(x) - f(y).$$

Dari sini didapat $f(y) - f(x) = f(x) - f(y) \implies f(x) = f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Akibatnya, $f(x) = c$ untuk suatu $c \in \mathbb{R}$. Masukka ke persamaan awal didapat $c = 0$, sehingga $f(x) = 0$.

4 Menulis ke Depan, Walau Berpikir dari Belakang

Menulis bukti seperti resep makanan. *List* dulu alat dan bahannya lalu jelaskan cara menggunakan bahan-bahan tersebut untuk menghasilkan makanan yang diinginkan.

Jangan mulai dari membedah makanan yang diinginkan, kemudian mencari tahu makanan tersebut berasal dari mana. Ini hanya bagus untuk membantu kita menemukan solusi, bukan menulis solusi.

Contoh 2.4

Misalkan α dan β adalah sudut pada interval $(0, \frac{\pi}{2})$. Buktikan bahwa

$$\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}.$$

Tidak benar:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \\ \implies \frac{\sin(\alpha + \beta)}{1 + \cos(\alpha + \beta)} &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \\ \implies \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \\ \implies \sin \alpha(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + \sin \beta(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) &= \sin \alpha + \sin \beta \\ \implies \sin \alpha + \sin \beta &= \sin \alpha + \sin \beta, \end{aligned}$$

di mana dari baris ke-1 ke baris ke-2 kita menggunakan formula tan setengah sudut. Terbukti bahwa persamaan benar.

Solusi di atas tidak benar, karena hal yang ditunjukkan adalah “Jika soal benar \implies benar”. Hal ini tidak berarti apa-apa, karena yang ingin ditunjukkan sudah dianggap benar terlebih dahulu.

Yang ingin kita tunjukkan adalah “Jika benar \implies soal benar”.

Yang benar:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin \alpha + \sin \beta \\ \implies \sin \alpha(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + \sin \beta(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) &= \sin \alpha + \sin \beta \\ \implies \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \\ \implies \frac{\sin(\alpha + \beta)}{1 + \cos(\alpha + \beta)} &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \\ \implies \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}, \end{aligned}$$

di mana dari baris ke-4 ke baris ke-5 kita menggunakan formula tan setengah sudut. Terbukti bahwa persamaan benar.

Namun biasanya boleh juga sih kita tulis mundur, tapi harus dipastikan bahwa setiap step berlaku 2 arah (jika dan hanya jika), dan harus ditulis tanda jika dan hanya jikanya.

Contohnya, di sini kita bisa ganti tanda \implies menjadi \iff saja untuk membenarkannya:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \\ \iff \frac{\sin(\alpha + \beta)}{1 + \cos(\alpha + \beta)} &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \\ \iff \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \\ \iff \sin \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + \sin \beta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) &= \sin \alpha + \sin \beta \\ \iff \sin \alpha + \sin \beta &= \sin \alpha + \sin \beta. \end{aligned}$$

di mana dari baris ke-1 ke baris ke-2 kita menggunakan formula tan setengah sudut.
Terbukti bahwa persamaan benar.

5 Pembaca Solusi bukan Pembaca Pikiran

Tulis solusi kalian *step-by-step*, dengan satu *step* nya itu tidak terlalu kecil atau terlalu besar. Pastikan setiap *step* yang kamu lakukan dapat dilihat jelas dari mana asalnya. Jangan terlalu melompat. Jika menggunakan Teorema, tulis Teorema apa yang digunakan.

Usahakan jangan sampai korektor berpikir, “Kenapa bisa seperti ini?” ketika membaca solusi kalian. Memang tidak ada aturan yang jelas harus seberapa detail kalian menulis solusi, cukup pakai *feeling* saja.

Contoh 2.5 (Titu Andreescu)

Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy).$$

Yang tidak baik:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2(x - y)(1 - xy) &= 4 + 4xy \\[xy - 1 - (x - y)]^2 &= 4 \\(x + 1)(y - 1) &= \pm 2.\end{aligned}$$

Dengan membagi kasus, didapat $(x, y) = (1, 2), (-3, 0), (0, 3), (-2, -1), (1, 0), (-3, 2), (0, -1), (-2, 3)$.

Di sini ada step yang terlalu melompat, sehingga tidak jelas dan pembaca solusi harus berpikir lumayan keras, walaupun memang sudah benar arahnya ke sana. Dalam beberapa kasus korektor dapat ragu dan mengira kita *bluffing*, dan memberi nilai yang kurang.

Yang baik:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2(x - y)(1 - xy) &= 4 + 4xy \\x^2y^2 - 2xy + 1 + x^2 + y^2 - 2xy + 2(x - y)(1 - xy) &= 4 \\(xy - 1)^2 + (x - y)^2 - 2(x - y)(xy - 1) &= 4 \\[xy - 1 - (x - y)]^2 &= 4 \\(x + 1)(y - 1) &= \pm 2.\end{aligned}$$

Dengan membagi kasus, didapat $(x, y) = (1, 2), (-3, 0), (0, 3), (-2, -1), (1, 0), (-3, 2), (0, -1), (-2, 3)$.

6 Gunakan Spasi

Menulis terlalu rapat akan membuat solusi susah dibaca. Beberapa hal yang dapat kalian coba:

- Kosongkan satu baris setelah paragraf. Gunakan 2-4 baris saja per paragraf agar tidak terlihat terlalu rapat. Tapi ini fleksibel ya.
- Ketika kamu membagi kasus, setiap kasus sebaiknya memiliki paragraf tersendiri, atau gunakan bulatan. Buat pembagian kasusnya jelas secara visual di mana awal dan akhir kasusnya.
- Taruh persamaan yang penting atau panjang di baris tersendiri, jangan ditaruh di paragraf yang sama dengan kalimat-kalimat.

Contoh 2.6

Misalkan $P(x)$ adalah polinomial berderajat 98 sehingga $P(n) = \frac{1}{n}$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots, 99$. Tentukan nilai dari $P(100)$.

Yang kurang bagus:

Misalkan $Q(x) = xP(x) - 1$. Karena $\deg P = 98$, maka $\deg Q = 99$. Perhatikan bahwa untuk $n = 1, 2, \dots, 99$, $Q(n) = nP(n) - 1 = n \cdot \frac{1}{n} - 1 = 1 - 1 = 0$. Akibatnya, $1, 2, \dots, 99$ merupakan akar dari $Q(x)$, dan tidak ada akar lain dikarenakan $\deg Q = 99$. Maka $Q(x) = a(x - 1)(x - 2) \cdots (x - 99)$ untuk suatu $a \in \mathbb{R}$. Untuk menentukan nilai a , masukkan $x = 0$ ke (1), didapat $Q(0) = -1$. Masukkan $x = 0$ ke (2) didapat $Q(0) = a(99!) \implies a = \frac{1}{99!}$. Maka $Q(x) = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-99)}{99!}$. Dari persamaan ini dan yang awal, dengan memasukkan $x = 100$, diperoleh $100P(100) - 1 = \frac{(100-1)(100-2)\cdots(100-99)}{99!}$, yang mengakibatkan $100P(100) - 1 = \frac{99!}{99!} = 1$, sehingga $P(100) = \frac{1}{100}$.

Yang bagus:

Misalkan

$$Q(x) = xP(x) - 1. \quad (1)$$

Karena $\deg P = 98$, maka $\deg Q = 99$. Perhatikan bahwa untuk $n = 1, 2, \dots, 99$,

$$Q(n) = nP(n) - 1 = n \cdot \frac{1}{n} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Akibatnya, $1, 2, \dots, 99$ merupakan akar dari $Q(x)$, dan tidak ada akar lain dikarenakan $\deg Q = 99$. Maka

$$Q(x) = a(x-1)(x-2)\cdots(x-99) \quad (2)$$

untuk suatu $a \in \mathbb{R}$. Untuk menentukan nilai a , masukkan $x = 0$ ke (1), didapat $Q(0) = -1$. Masukkan $x = 0$ ke (2) didapat $Q(0) = a(99!) \implies a = \frac{1}{99!}$. Maka

$$Q(x) = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-99)}{99!}.$$

Kita bisa samakan (1) dengan (3) dan memasukkan $x = 100$, diperoleh

$$\begin{aligned} 100P(100) - 1 &= \frac{(100-1)(100-2)\cdots(100-99)}{99!} \\ \implies 100P(100) - 1 &= \frac{99!}{99!} = 1 \\ \implies P(100) &= \frac{1}{50}. \end{aligned}$$

Kedua solusi di atas memiliki konten matematika yang sama. Tapi solusi kedua lebih baik karena:

- Solusi kedua tidak sungkan untuk meletakkan persamaan di barisan tersendiri. Ini membuat persamaannya lebih mudah untuk dibaca dan bisa diberi label untuk dipanggil di masa depan.
- Dengan beberapa persamaan diletakkan pada barisan tersendiri, ide solusinya dapat dilihat dengan jelas walau hanya dibaca sekilas.

Walaupun solusi kedua dua kali lebih “panjang”, dia dapat dibaca dan dimengerti lebih cepat dari yang pertama.

7 Hal-hal Lain

- Menulis dengan rapi (bedakan dengan bagus ya), tulis dari kiri ke kanan secara horizontal, kalau tidak cukup lanjutkan di baris baru. Jangan dipaksakan.
- Jangan gunakan panah-panah yang tidak penting.
- Cukup beri tanda silang untuk bagian tulisan yang tidak jadi masuk ke solusi. Cukup beri 1-2 garis jika ingin menghapus suatu kalimat. Tidak perlu mencoret-coret penuh sampai benar-benar tidak terlihat.
- Jika ada angle chasing, usahakan gambarnya tetap bersih. Jangan semua angle chasingnya kamu tuliskan pada gambar, cukup yang penting saja.

3 Penilaian Solusi

Nilai kalian untuk setiap soal uraian merupakan bilangan bulat non-negatif yang ≤ 7 . Aturan tak tertulis untuk penilaiannya mungkin terlihat seperti ini:

Nilai	Deskripsi
7*	Soal terselesaikan dengan sempurna
6	Sedikit ketidakteelitian (dan yakin bahwa peserta mampu membenarkannya)
5	Sedikit lagi terselesaikan, namun peserta tidak melihatnya
2	Banyak kemajuan yang mengarah ke jawaban
1*	Ada satu kemajuan penting non-trivial yang mengarah ke jawaban
0*	Sibuk menulis yang tidak perlu, kasus trivial atau spesial

Nilai yang sering diberikan adalah nilai yang diberi tanda bintang. Bagaimana dengan nilai 3 atau 4? nilai tersebut berarti peserta sudah menuliskan lebih banyak kemajuan yang mengarah ke jawaban daripada nilai 2. Untuk lebih jelasnya, biasanya setiap soal memiliki *marking scheme* nya tersendiri.

Ini bukan tentang menulis essay, jadi tulisan banyak tidak menentukan nilai yang tinggi. Sebenarnya solusi kalian dinilai berdasarkan matematikanya saja. Tapi pada kenyataannya, cara penulisan tetap mempengaruhi: semakin sulit solusi kalian untuk dibaca, semakin kecil peluang kalian untuk mendapatkan nilai yang sepantasnya.

4 Sumber

Sumber dari handout ini:

- 1 Catatan Pelatnas 1 dan 2, tahun 2017.
- 2 “How to Solve It”, by Polya.
- 3 “How to Write a Math Solution”, by Richard Rusczyk.
- 4 “Note on Proof”, by Evan Chen.