

# The Computational Beauty of Nature: Síntesis

David R. Vivas, 1425952<sup>1</sup>  
Departamento de Física  
Universidad del Valle  
Cali-Colombia

## AUTOSIMILARIDAD Y GEOMETRÍA FRACTAL

### Fractales

La naturaleza exhibe formas y patrones que son imposibles de clasificar o describir mediante formas geométricas simples (como esferas o cubos). Benoit Mandelbrot acuñó el término fractal para diferenciar figuras geométricas puras de aquellas que son imposibles de clasificar a partir de estas. Los fractales suelen exhibir las siguientes propiedades:

**Autosimilaridad:** Los fractales suelen ser autosimilares en múltiples escalas, implicando esto que una pequeña porción de un fractal a menudo será similar o semejante al objeto completo.

**Dimensión fraccional:** Los fractales tienen una dimensión fraccional, a diferencia de la dimensión entera de los objetos geométricos simples. Por ejemplo, un fractal de dimensión 1.5 es algo más que una línea pero algo menos que un plano. Dada su autosimilaridad, los fractales suelen presentar algún tipo de recursión en su estructura, ya sea de manera explícita o sutilmente, con patrones a distintas escalas espaciales.

### La curva de Koch

Esta entidad matemática es un ejemplo de curva sin tangente, dado que tiene una esquina en cada uno de sus puntos. Esto implica que la longitud de una curva de Koch es infinita, pero confinada en una región espacial finita. La sucesión de Thue-Morse es una secuencia binaria que empieza en cero y en cada iteración  $n$  añade el complemento binario de la iteración anterior  $n-1$ . Esta sucesión converge a la curva de Koch en  $n$  a infinito, y tomando un  $n$  lo suficientemente grande es útil para visualizar la curva de Koch.

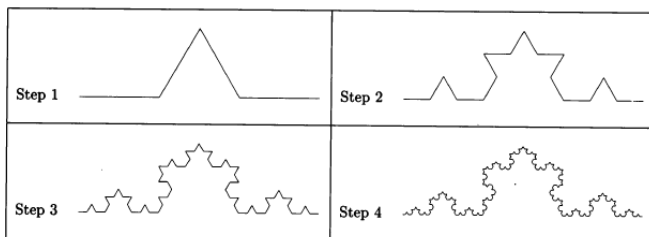


Figura 1. Construcción de la curva de Koch.

### La curva de Peano

Esta curva es un ejemplo de una línea infinita en un área finita. La curva de Peano empieza con un segmento de línea y se expande iterativamente con una regla simple. En cada paso de la construcción se reemplazan los segmentos de línea del paso anterior con una curva consistente de nueve segmentos, con un ángulo de 90 grados entre cada uno de estos; esto implica que cada iteración incrementa su longitud en tres respecto al paso anterior. Así, iterando hacia infinito la longitud de esta curva escala a infinito.

### Dimensiones fractales

En 1961 Lewis Richardson descubrió que la longitud de una línea de costa varía radicalmente en función de la unidad de medida utilizado, similar a lo que ocurriría si tratáramos de medir la longitud de una curva de Koch. Mandelbrot descubrió que algunas monstruosidades matemáticas como las tres ya descritas se comportaban y clasificaban de manera similar a las líneas de costa. Al medir un objeto se tiene siempre la igualdad

$$N = \left(\frac{1}{a}\right)^D$$

Donde  $N$  es el número de veces que la unidad de medida  $a$  cabe en el objeto medido y  $D$  es la dimensión de este. Así, equivalentemente:

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{a}\right)}$$

Expresión que nos permite computar la dimensión de un objeto en términos de la unidad de medida utilizada.

### Fractales aleatorios en la naturaleza y movimiento browniano

Muchos fenómenos naturales exhiben aspectos estocásticos o aleatorios. A día de hoy se sabe que aleatoriedad y autosimilitud no son conceptos mutuamente excluyentes. El movimiento browniano es el tiempo de movimiento manifestado por partículas de líquidos y demás fluidos. El ruido de Brown se define como aquellos fenómenos que se cree son formados por procesos de marcha aleatoria. Fenómenos estocásticos como la caminata

aleatoria o complejos como la dinámica de precios exhiben autosimilitud al momento de observar su comportamiento en distintas escalas. Otro fenómeno que exhibe autosimilitud es el proceso de difusión agregada limitada, donde partículas que se desplazan por movimiento browniano se acoplan a una estructura fija al acercarse a esta en un determinado umbral y quedar “atrapadas”. Este fenómeno se manifiesta en el crecimiento de cristales, arrecifes de coral, etc. Las estructuras creadas mediante este proceso siempre exhiben dimensión fraccional, dado que este proceso ocurre en distintas escalas espaciales.

## SISTEMAS L Y CRECIMIENTO FRACTAL

La necesidad de acumular grandes cantidades de tejido en un volumen pequeño es una propiedad presente en la gran mayoría de organismos de la naturaleza; como por ejemplo la distribución del sistema circulatorio en el cuerpo humano. Muchos de estos sistemas exhiben propiedades fractales, y esto implica que su proceso de crecimiento es altamente complejo. Actualmente se sa-

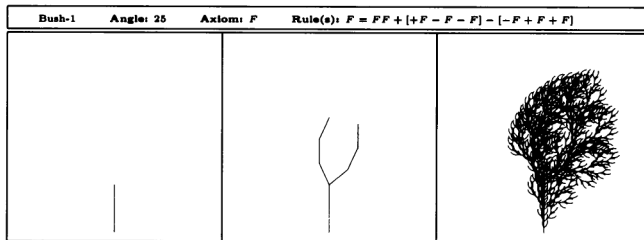


Figura 2. Ejemplo de crecimiento de un sistema L.

be que las instrucciones de crecimiento de estos sistemas están almacenadas eficientemente en el ADN. En 1968 la bióloga Aristid Lindenmayer inventó un formalismo que provee una descripción matemática del crecimiento de plantas, conocido como sistemas L. Los sistemas L también pueden ser usados eficientemente para describir el crecimiento de algunos monstruos matemáticos como los descritos en el capítulo anterior.

### Sistemas de producción

Los sistemas-L se generan a partir de una semilla llamada axioma y nuevas células acopladas al axioma mediante una serie de reglas llamadas reglas de producción. Estas reglas actúan a partir de un símbolo inicial (el axioma), convirtiéndolo iterativamente en una cadena de símbolos a cada uno de los cuales se le asigna una regla de representación específica. Esta cadena de símbolos crece de manera enorme en cada paso, y bajo el contexto de un dispositivo que pueda interpretarla gráficamente da lugar a patrones coincidentes con tejidos presentes en la naturaleza.

## EL CONJUNTO DE MANDELBROT Y LOS CONJUNTOS DE JULIA

### El conjunto de Mandelbrot

Considérese la sucesión  $x_{t+1} = f(x_t, c)$  donde  $f$  es la función compleja  $f(x_t, c) = x_t^2 + c$  con  $x_0 = 0$ . Cuando  $c = 0$  todos los valores de  $x_t$  serán cero y estarán acotados; sin embargo, para otros valores de  $c$  la sucesión se comportará de manera radicalmente distinta, incluso para valores de  $c$  muy cercanos entre sí. Benoit Mandelbrot fue el primero en estudiar la función  $x_t^2 + c$  mediante la utilización de un computador, desarrollando un algoritmo que para cada punto  $c$  de una región del plano complejo computa la sucesión ya descrita un número específico de veces.

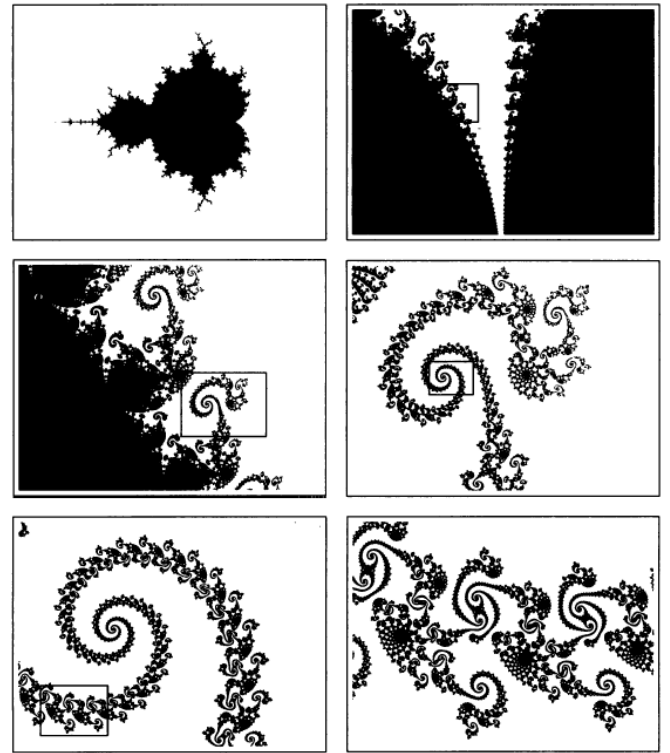


Figura 3. Propiedades fractales del conjunto M.

Si en la última iteración la norma del elemento de sucesión es menor a dos, se considera el punto perteneciente a un conjunto específico llamado el conjunto M. Al graficar cada uno de estos puntos en la región estudiada se obtiene una estructura fractal que exhibe patrones recursivos en distintas regiones y acercamientos.

### Los conjuntos de Julia

Modifíquese el algoritmo expuesto por Mandelbrot de tal forma que  $c$  sea constante y se determine en su lugar la norma de  $x_t$  en la iteración final, tal que si esta

es menor a dos se clasifique  $x_t$  en un nuevo conjunto llamado el conjunto de Julia. Se tiene así una familia de conjuntos (para distintos valores de  $c$ ) que exhiben geometría fractal al graficarse.

Estos conjuntos fueron estudiados por Gaston Julia antes de la invención del computador, demostrando que para valores de  $c$  tal que la sucesión definida converja, el conjunto de Julia es conexo, mientras que para valores de  $c$  tal que la sucesión diverja el conjunto es disconexo y disperso como motas de polvo.

### Otros misterios del conjunto M

En 1991 David Boll descubrió que para  $c = -3/4$  el número de iteraciones requeridas para que el valor de la sucesión diverja en una vecindad de radio  $\epsilon$  converge a  $\pi$  a medida que  $\epsilon$  converge a cero.

$\epsilon$	Iterations
0.1	33
0.01	315
0.001	3143
0.0001	31417
0.00001	314160
0.000001	3141593
0.0000001	31415928

Figura 4.

### DINÁMICA PRODUCTOR-CONSUMIDOR

El ejemplo canónico para representar interacciones productor-consumidor es un ecosistema consistente de múltiples especies. Una de las técnicas utilizadas para la descripción de este tipo de sistemas se fundamenta en el modelado de cada especie como una función de otras especies, sin hacer distinción entre individuos; otro método utilizado para la descripción de este tipo de sistemas se fundamenta en la simulación de cada individuo de las especies involucradas en el entorno, de tal forma que el comportamiento de cada sistema se obtenga a partir del comportamiento de cada individuo. Estas técnicas contrastan mutuamente, pero ambas tienen la propiedad de exhibir comportamiento aleatorio y con características similares.

### Sistemas presa-depredador

El tipo más simple de sistema presa-depredador consiste en dos especies, donde una es la presa y la otra el depredador. Durante la primera parte del siglo XX Vito

Volterra y Alfred Lotka descubrieron independientemente la naturaleza cíclica de la dinámica cíclica de dos especies. Así, el modelo más simple consiste en dos ecuaciones diferenciales, una para cada especie, las cuales son:

$$\frac{dF}{dt} = F(a - bS)$$

$$\frac{dS}{dt} = S(cF - d)$$

Donde  $F$  representa la presa y  $S$  el depredador. los parámetros positivos  $a, b, c, d$  representan las tasas de interacción y crecimiento de cada una de las especies.  $a$  sería la tasa de producción de la presa y  $d$  la del depredador, la cual es negativa debido a que la población de estos decrece en ausencia de alimento; por otro lado  $b$  y  $c$  son los parámetros de interacción de cada especie respecto a la otra. La interacción presa-depredador es positiva para el depredador, dado que para estos alimentarse es el medio de sostenimiento en este modelo; de manera opuesta el término de interacción es negativo para la presa, debido a que su número de individuos disminuye a medida que es consumida por el depredador. Este modelo Lotka-Volterra es el más simple, y posee puntos fijos bien definidos.

### Sistemas Lotka-Volterra generalizados

Los sistemas presa-depredador tridimensionales (tres especies) exhiben propiedades caóticas continuas. Un tipo de modelo presa-depredador generalizado a  $n$  especies es el modelo de Arneodo-Coullet-Tresser, y se escribe como:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \sum_{j=1}^n A_{ij}(1 - x_j)$$

Donde  $x_i$  representa la  $i$ -ésima especie y el elemento de matriz  $A_{ij}$  representa el efecto que la especie  $j$  tiene sobre la especie  $i$ . Este sistema presenta dinámica caótica para los parámetros:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.1 \\ -0.5 & -0.1 & 0.1 \\ \alpha & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Figura 5.

### Ecología basada en individuos

En contraste a los modelos continuos ya descritos, existen técnicas de modelado basadas en individuos llamadas *autómatas celulares*, que consisten fundamentalmente en

una malla discreta que puede estar vacía o contener un solo individuo en su interior, así como un conjunto de reglas que describen la dinámica de estas mallas.

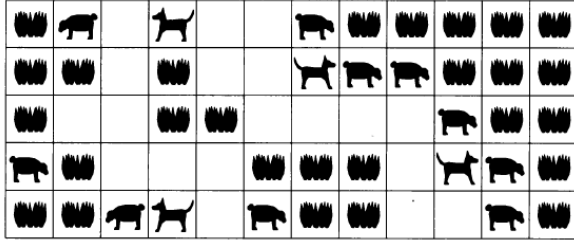


Figura 6. malla de autómatas celulares.

Por ejemplo: para un ecosistema consistente en plantas, herbívoros y carnívoros un posible conjunto de reglas puede incluir el hecho de que las plantas crezcan en espacios vacíos y no se puedan desplazar, que los herbívoros devoren plantas mientras se desplazan por el espacio y que los carnívoros devoren a su vez herbívoros mientras se desplazan.

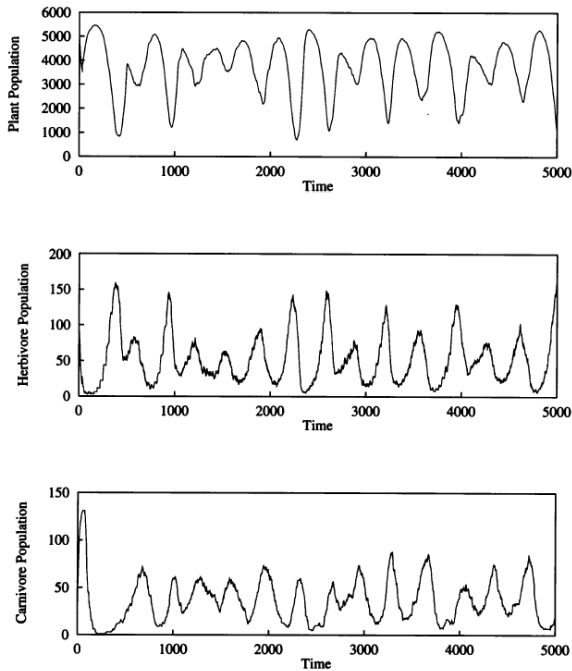


Figura 7. población vs tiempo para un sistema de autómatas celulares de tres especies distintas, se observa la similitud con el comportamiento de sistemas lotka-volterra.

Este tipo de simulaciones, al ser más complejas, requieren cantidades enormes de memoria en comparación a un modelo continuo como Lotka-Volterra, y para grandes cantidades de celdas la capacidad de almacenamiento necesaria para manejar el sistema alcanza valores dramáticos.

Sin embargo, al estudiar la dinámica poblacional

de este tipo de simulaciones para tamaños de malla grandes, se obtienen comportamientos cíclicos similares a los de un modelo Lotka-Volterra, lo que indica la convergencia de este tipo de sistemas discretos a sistemas diferenciales continuos a medida que el número de individuos presentes aumenta.

## CONTROLANDO EL CAOS

El objetivo de este capítulo es mostrar cómo sistemas de dinámica caótica pueden ser controlados más fácilmente que sistemas no caóticos de complejidad comparable. El control de sistemas caóticos tiene un desarrollo largo y complejo por detrás, pero se resume en tres conceptos principales:

- Pequeñas perturbaciones periódicas que permiten reorientar el comportamiento del sistema caótico de manera significativa a lo largo del tiempo.
- Típicamente se preferiría convertir un sistema caótico en un punto fijo o un ciclo límite, y dado que todo atractor caótico tiene un número infinito de ciclos asociados a él, el comportamiento deseado puede ya estar ahí incluido.
- Partiendo de la ergodicidad de sistemas caóticos, se tiene la certeza de que eventualmente el sistema va a alcanzar con cercanía arbitraria el estado deseado.

## Control OGY

Sea  $x_{t+1} = f(x_t, p_t)$  el sistema caótico, donde  $p_t$  es el parámetro escalar de control. Se tiene que  $f(x_t, p_t)$  debe tener al menos un punto fijo en su atractor caótico, el cual se denotará por  $x_F$ . El objetivo será obtener un modelo simplificado de la dinámica del sistema en las cercanías del punto fijo. Computando la expansión en Taylor a primer orden del modelo se obtiene:

$$x_{t+1} \approx f(x_F, 0) + A(x_t - x_F) + bp_t$$

$$x_{t+1} \approx x_F + A(x_t - x_F) + bp_t$$

Y operando se obtiene:

$$x_{t+1} - x_F \approx (A + bk^T)(x_t - x_F)$$

donde se usó  $p_t = k^T(x_t - x_F)$ . Sean ahora  $C = A + bk^T$  y  $d_t = x_t - x_F$ . Se puede escribir entonces

$$d_{t+1} = Cd_t$$

Así, el problema se reduce a minimizar  $d_{t+1}$ . Sean  $\lambda_i$  los autovalores de  $C$ . Si este autovalor es mayor a uno,  $d_{t+1}$  será creciente; y si es menor a uno será decreciente y eventualmente colapsará a cero. El secreto de la técnica

de control OGY radica en que la matriz jacobiana ( $A$ ) de todo sistema caótico debe tener un autovalor mayor a uno y uno menor a 1.

Esta propiedad puede ser explotada matemáticamente, y tras desarrollar las expresiones obtenidas en términos de la base propia de ( $A$ ) y su base contravariante, es posible obtener:

$$\mathbf{k} = \frac{\lambda_u \mathbf{g}_u}{\mathbf{g}_u^T \mathbf{b}}$$

El cual es un valor de  $\mathbf{k}$  que minimiza  $d_{t+1}$ . Así, con este valor de  $\mathbf{k}$  se puede forzar el estado del sistema a reposar en su punto fijo.

### Controlando el mapa de Hénon

El mapa de Henón toma los valores particulares:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x_t, y_t) &= \begin{bmatrix} a - x_t^2 + by_t \\ x_t \end{bmatrix} \\ x_F &= \frac{1}{2} \left( b - 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a} \right) = 0.838486 \dots \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -2x_t & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_u &= (\lambda_u^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \lambda_u \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_s = (\lambda_s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \lambda_s \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}_u &= \begin{bmatrix} (e_{u1} - e_{s1}e_{u2}/e_{s2})^{-1} \\ -g_{u1}e_{s1}/e_{s2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Figura 8. parámetros del mapa de Henón

Donde  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_s$  son los vectores de la base propia de la transformación y  $\lambda_u = -x_F - \sqrt{x_F^2 + B}$ ,  $\lambda_s = x_F - \sqrt{x_F^2 + B}$ .  $\mathbf{g}_u$  es el vector de base contravariante del sistema. Así, a partir de estos valores es posible encontrar el  $k$  estable para el sistema, tal que este se estabilice alrededor del punto de equilibrio.

### AUTÓMATAS CELULARES

Mientras el caos es el estudio de cómo cosas simples pueden producir comportamientos complejos, la complejidad es el estudio de cómo colecciones complejas de unidades simples pueden producir una amplia variedad de comportamientos. La clave de este tipo de sistemas es que si limitamos el tipo de interacciones que pueden ocurrir entre sus agentes (simplificándolos respecto a su entorno), comportamientos altamente complejos pueden seguir ocurriendo.

Se examinará un tipo de máquina computacional

conocida como autómatas celulares, el cual es un sistema dinámico discreto en el espacio y el tiempo.

El formalismo de los autómatas celulares fue inventado por John Von Neumann en la década de 1940 como un marco de trabajo para estudiar procesos de reproducción. Von Neumann estaba interesado en la esencia de la reproducción y no en ningún proceso particular de reproducción. Así, Von Neumann abstraía todos los detalles particulares dejando solamente el marco de trabajo matemático más simple que permitiese a la información reproducirse.

### Autómata celular unidimensional

Considérese un arreglo lineal que se extiende hacia izquierda y derecha. El arreglo consiste de células que sólo pueden estar en un número finito de estados  $k$ . En cada paso de tiempo, el siguiente estado de una célula es computado como una función de sus vecinos locales en el espacio. Denótese el radio del vecindario relevante una celda por  $r$ , y el estado de la celda  $i$  en el instante  $t$  como  $c_i(t)$ . El índice indica la posición de la celda en el arreglo. En el caso particular de los arreglos unidimensionales, su historia completa se puede caracterizar en arreglo bidimensional; donde el eje horizontal represente el desplazamiento espacial y el desplazamiento vertical la evolución temporal.

Como ejemplo concreto considérese este sistema con dos posibles estados 0 y 1, el sistema se puede caracterizar completamente con la siguiente tabla de interacciones:

$c_{i-1}(t)$	$c_i(t)$	$c_{i+1}(t)$	$c_i(t+1)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Figura 9. reglas del autómata unidimensional.

Dependiendo de las condiciones iniciales de nuestro arreglo lineal y la regla de interacción entre sus celdas se obtendrán distintas evoluciones para cada caso particular. Sin embargo, la implementación del arreglo depende lineal de sus condiciones de frontera, ya que se puede considerar un arreglo finito de longitud  $l$  o un arreglo recurrente con condiciones de frontera periódicas  $l+1=1$ , entre otras opciones.

## El juego de la vida de Conway

En los 1960 tardíos, John Conway fue motivado por el trabajo de Von Neumann, impulsándolo a refinar la descripción del autómata celular a la más simple que pudiese soportar computación universal. El autómata celular de Conway sólo tenía dos estados, cero y uno, y tenía un conjunto de reglas para determinar cuál debería ser el siguiente estado del sistema. Conway llamó a su creación "El juego de la vida" debido al estado binario de las células (vivo o muerto) y sus reglas inspiradas en la vida. Al ser un autómata bidimensional, puede ser simulado como fichas en un tablero, lo cuál ayudó a Conway y a sus estudiantes a encontrar muchos patrones que impulsaron la creencia de que la vida podría generar computación universal. En 1970, Martin Garder describió el trabajo de Conway en una columna de Scientific American, el cuál inspiró a muchas personas alrededor del mundo a experimentar con las reglas de Conway, que eventualmente llevaron a las piezas faltantes de cómo el juego de la vida puede dar lugar a computación universal, convirtiendo el juego de la vida en un esfuerzo colaborativo global. Tal como en el autómata celular unidimensional, el juego de la vida tiene su conjunto de reglas, las cuales actúan a los ocho primeros vecinos de cada celda y son:

- Si una celda viva tiene menos de dos vecinos vivos, entonces muere. (soledad)
- si una celda viva tiene más de tres vecinos vivos, entonces muere (sobrepoblación)
- si una celda vacía tiene tres vecinos vivos, entonces nace (reproducción)
- para todos los casos restantes, la celda se mantiene estática.

Este conjunto de reglas contiene las propiedades más básicas de cómo las criaturas reales interactúan entre sí con ligaduras básicas debido a la densidad poblacional y las condiciones de reproducción.

¿Y cómo se relaciona entonces el juego de la vida con la computación universal? considérense a continuación distintas clases de objetos encontrados en el juego. La primera clase serán objetos estáticos (constantes) que mientras estén aislados se mantiene constantes en el tiempo. Algunos ejemplos son:

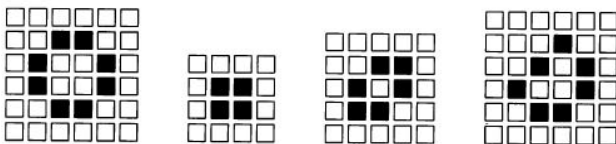


Figura 10. constantes en el juego de la vida.

Así, este tipo de objetos permiten un tipo básico de memoria. Otro requisito es la habilidad de contar de alguna manera, la cual se necesita para sincronizar eventos

paralelas en el tiempo y coordinar operaciones iterativas. La siguiente figura ejemplifica algunas estructuras periódicas en el juego de Conway:

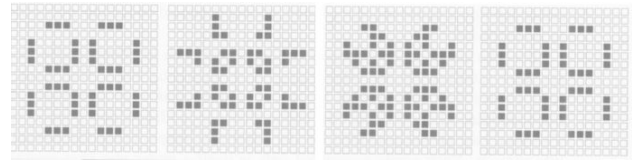


Figura 11. estructuras periódicas en el juego de la vida.

El requerimiento funcional final es la habilidad de transportar información, la siguiente imagen muestra dos tipos de objetos móviles en el juego Conway:

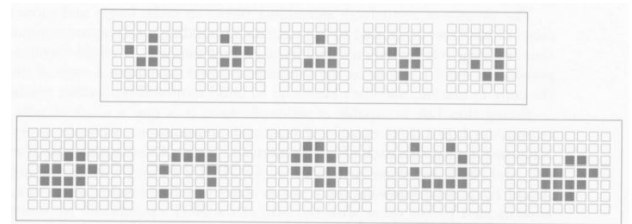


Figura 12. estructuras móviles en el juego de la vida

Los objetos móviles pueden ser usados para construir otros objetos al hacerlos colisionar en maneras precisas.

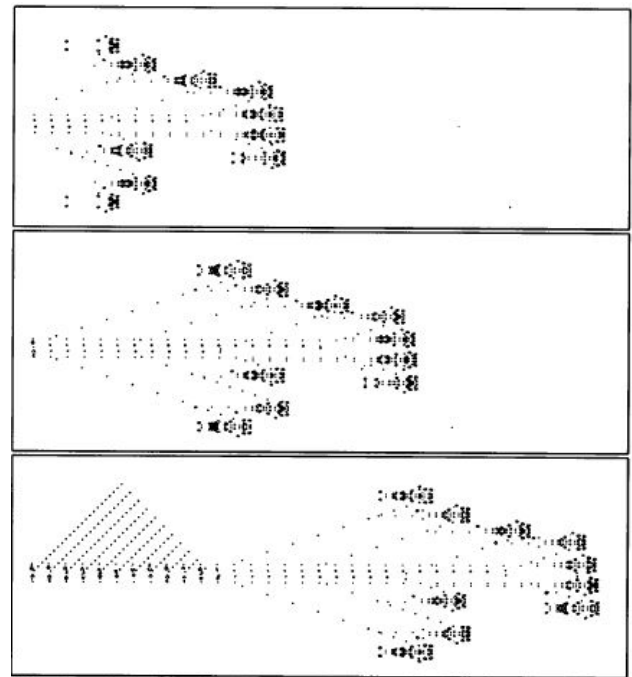


Figura 13. estructuras criadoras en el juego de la vida.

Es posible construir de esta forma estructuras llamadas "criadores", las cuales se contruyen de gliders (un tipo de estructura móvil simple) colisionados de manera específica, y que a su vez emiten gliders en intervalos regulares,

presentando una forma de autoreplicación. Este proceso de autoreplicación puede ser extendido a la construcción de dispositivos en el juego de la vida que se copien a sí mismos. El hecho de que el juego de la vida presente autoreplicación hace que sea fácil ver el por qué también puede dar lugar a computación universal. En conjunto, los tipos de estructuras definidos aquí se pueden utilizar para construir las compuertas lógicas de un computador universal.

### **Autómatas celulares naturales**

El aspecto más interesante de los autómatas celulares y sistemas complejos en general es el hecho de que describen fenómenos que pueden ocurrir en radicalmente distintas escalas de espacio y tiempo. Esto es un contraste fuerte con la física moderna, dado que las dos ramas más importantes de esta, mecánica cuántica y relatividad, dan cuenta de fenómenos en escalas extremadamente opuestas, absurdamente pequeñas e inimaginablemente enormes. La complejidad en la forma de sistemas complejos es universal y un fenómeno encontrado en lo muy pequeño, lo muy grande, y cualquier intermedio.

### **Mecánica estadística**

Antes de la llegada de la computación a la física, los científicos trabajan con descripciones puramente estadísticas de sistemas estocásticos de bajo nivel. Pero, a día de hoy los computadores potentes son omnipresentes en la ciencia, y es posible para los físicos el programar las leyes de la física en un modelo computacional, a modo de simular millones de interacciones que ocurren incluso en el nivel más elemental de átomos y moléculas. Por ejemplo, una máquina de red gaseosa es un modelo de cómo el gas o plasma interactúa con el espacio local. La belleza de este modelo es que esta máquina sólo utiliza interacciones locales, en las cuales cada molécula sólo reacciona en función de sus primeros vecinos, y nada más. Con este tipo de simulaciones, un científico puede controlar la "temperatura" del sistema para observar como cambia el comportamiento colectivo de las partículas. Similarmente, otros modelos estadísticos como modelos de ferromagnetismo o aleación pueden ser simulados de manera similar.

### **Regulación genética**

Un solo gen puede inhibir o apoyar la activación de otro gen. En esta manera, un gen puede activar otro, que puede activar otro y así sucesivamente. A través de este proceso de regulación, las células con el mismo ADN se pueden especializar en muchas tareas distintas vía especialización.

Stuart Kauffman, pionero en el uso de redes booleanas aleatorias como modelos de procesos biológicos, simuló una gran red de células con funciones binarias aleatorias. Una red booleana aleatoria es el equivalente exacto de tener un autómata celular con una tabla de reglas no homogénea que permite a las células tener distintos conjuntos de reglas para cada celda. Aunque este sistema parece en principio caótico, al someterlo a ligaduras en la conectividad de la red, Kauffman encontró que las redes usualmente se estabilizarían a comportamientos periódicos de bajo nivel. Kauffman llamó a este fenómeno "orden gratuito". La verdadera belleza del trabajo de Kauffman fue el haber sido capaz de correlacionar en distintos niveles este tipo de sistemas con fenómenos biológicos, siendo capaz de predecir con precisión el número de tipos distintos de células en una especie, dado el número de genes que la especie posee, y considerando solamente el comportamiento de una red booleana.

### **Organismos multicelulares**

El primer organismo multicelular fue probablemente el resultado de un conjunto de organismos monocelulares aportando recursos y habilidades con el fin de ser más aptos en la tarea de la supervivencia. En algún punto, células acopladas pero genéticamente no-similares fusionaron su ADN y desarrollaron un mecanismo para la especialización celular usando regulación genética. Al hacer esto los organismos pudieron empezar a construir criaturas más complejas con sistemas digestivos, circulatorios, nerviosos, etc.

### **AGENTES AUTÓNOMOS Y AUTO-ORGANIZACIÓN**

Un agente autónomo es una unidad que interactúa con su entorno (que puede o no contener otros agentes), pero actúa independientemente de los otros agentes en la medida de que no toma órdenes de un líder directo o indirecto, o tiene idea alguna de un plan global que debería estar siguiendo. En palabras simples, un agente simplemente se limita a hacer sus cosas. Con esta definición, se explorará cómo múltiples agentes simples pueden actuar e interactuar de tal forma que aparentemente sigan un plan global. Este proceso mediante el cual agentes autónomos crean un orden global se conoce como auto-organización, y está presente en muchos tipos de fenómenos naturales: sopas químicas, regulación genética, super-organismos, colectivos animales, etc.

### **Termitas**

En muchas especies animales, grandes colecciones de criaturas construyen cooperativamente estructuras que parecen tener algún tipo de planeación involucrada.

Mitchel Resnick ha estudiado una amplia variedad de sistemas que consisten enteramente en agentes muy primitivos. Un ejemplo notable de las criaturas de Resnick es una termita teórica que sigue la siguiente regla simple:

- Desplazarse en un camino aleatorio, hasta que la termita se encuentre un trozo de madera.
- Si la termita lleva un trozo de madera, deposita los trozos de madera y continúa su camino aleatorio.
- si la termita no lleva un trozo de mandera, recoge el que encontró y continúa su camino aleatorio.

Este esquema es tan simple que no hay lugar para inteligencia en él, y parece muy poco probable que una o más termitas siguiendo esta regla pudiesen producir algo más que un simple desorden. Sin embargo, al simular este tipo de sistemas se puede observar que a medida que los pasos de tiempo aumentan, las termitas empiezan a agrupar los trozos de madera en clusters pequeños, que con el paso del tiempo empiezan a aumentar en tamaño y definir su forma. Muchos pasos de tiempo después, se observa que los clusters se han convertido en estructuras bien definidas e interconectadas casi por completo.

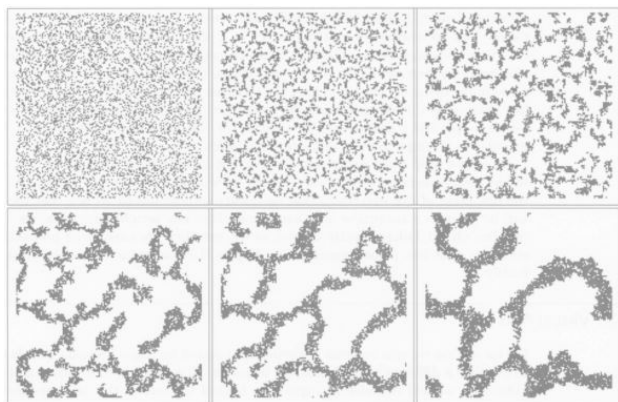


Figura 14. estructuras de termitas.

### Hormigas virtuales

Considérese ahora una hormiga virtual creada por Chris Langton, que es capaz de producir un tipo de comportamiento complejo diferente. Es posible simular múltiples hormigas, pero por propósitos de simplicidad se considerará inicialmente una. Se tiene entonces una malla bi-dimensional donde cada celda puede ser blanca o negra, en cada paso de tiempo la hormiga actúa de acuerdo al siguiente conjunto de normas:

- La hormiga se mueve un paso adelante

- Si la hormiga se topa con un punto blanco, lo pinta de negro y gira 90 grados a la derecha.
- De otra forma, si la hormiga se topa con un punto negro, entonces lo pinta de blanco y gira 90 grados a la izquierda.

Este conjunto de reglas tiene la propiedad de ser reversible en el tiempo, dada su simplicidad. Así, para un instante del sistema se puede determinar completamente su pasado y su futuro. Esto parece implicar que estas hormigas virtuales son simple tanto en una escala espacial global como en una escala temporal. Sin embargo, en general la reversibilidad temporal no implica simplicidad global, dado que una pequeña alteración en el pasado de la hormiga puede alterar radicalmente su presente. De alguna manera este sistema presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.

James Propp descubrió que, a pesar de que tras 10000 pasos del tiempo el sistema se convierte en un desastre caótico, para 250 pasos de tiempo más la hormiga empieza a construir una estructura a la que llamó "autopista".

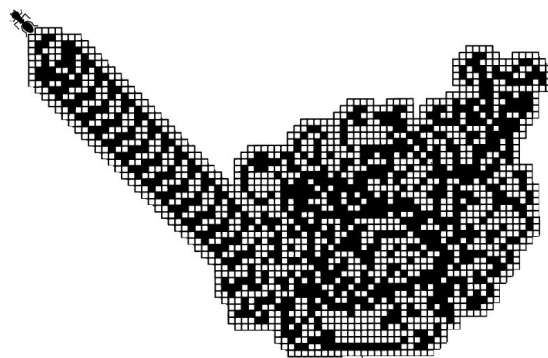


Figura 15. autopista de hormiga virtual.

Y aunque se altere el pasado o presente de la hormiga, eventualmente esta convergerá a construir otra autopista, brindando una especie de "orden gratuito" como el mencionado en el capítulo pasado.

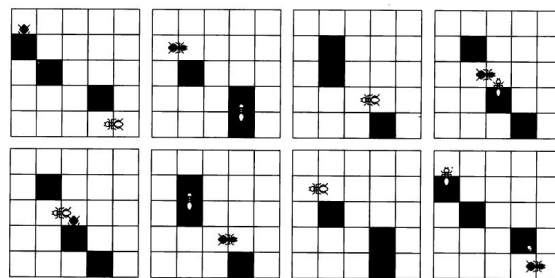


Figura 16. proceso de oscilación de dos hormigas.



Sin embargo, ¿qué ocurre cuando más de una hormiga se encuentra presente en el sistema? dos hormigas pueden colisionar de tal manera que una deshaga el trabajo de la otra. En la siguiente imagen se observa cómo un par de hormigas pueden retornar a su estado inicial, pero con sus posiciones invertidas, oscilando. Dos hormigas también pueden cooperar en la construcción de autopistas altamente elaboradas:

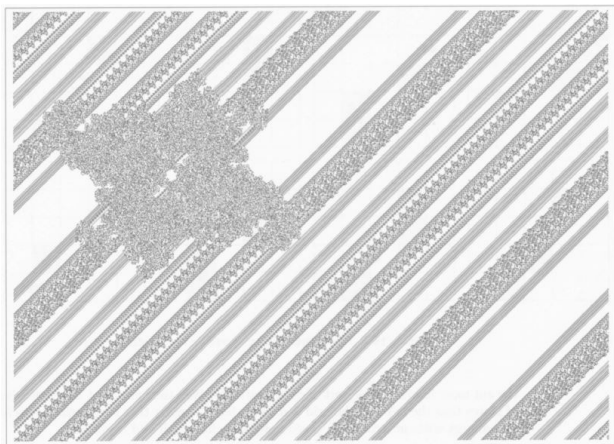


Figura 17. proceso de oscilación de dos hormigas.

Para tres o más hormigas se siguen presentando comportamientos interesantes, e incluso caóticos.

En 1994, Ian Stewart hizo una observación interesante en relación a nuestra falta de conocimiento sobre algunas de estas hormigas virtuales. Para parafrasearlo, para cualquiera de estas hormigas conocemos su teoría del todo, dado que la ley que gobierna su universo es simple y conocida para nosotros; sin embargo, somos incapaces de contestar una simple pregunta: ¿construye la hormiga alguna vez la autopista?. Poniendo todo en perspectiva: si los físicos encuentran una teoría del todo para nuestro universo, y deducen así el estado inicial del universo, ¿podríamos deducir su comportamiento a largo plazo?. Así, la teoría del todo predice todo, pero no explica nada.

## GENÉTICA Y EVOLUCIÓN

El salto mental dado por Charles Darwin desde el concepto de herencia simple que nos enseña la vida diaria hasta la teoría de la evolución y selección natural es una de las hazañas científicas más grandes de la historia. Richard Dawkins comenta al respecto que *Nunca se habían explicado tantos fenómenos naturales con tan pocos hechos.*

En la última mitad de siglo, la fortaleza de la teoría evolutiva se ha reforzado, más allá de su fundamentación empírica, por los avances en computación y matemáticas de las últimas décadas.

## Adaptación biológica

La adaptación se describe en el marco de la teoría evolutiva neo-Darwinista como:

$$adaptacion = variacion + herencia + seleccion$$

Que difiere respecto al darwinismo clásico por incluir el concepto de herencia en la fórmula. La variación se refiere aquí a como los individuos de una población pueden diferir entre ellos. Por otro lado, la herencia puede ser vista como un tipo de persistencia temporal: cuando hijos heredan características de sus padres en trozos discretos de información, éstas pueden ser vistas como si fuesen transferidas iterativamente a través de una línea de tiempo. La selección, por otra parte, hace referencia a la manera como el entorno actúa en la lucha del individuo por sobrevivir.

Se define el concepto de coevolución como la manera como dos especies pueden adaptarse mutuamente entre sí de tal forma que su influencia sea retornable, es decir, que su influencia en la otra especie se retorne eventualmente de la misma u otra forma. Un ejemplo de esto son los leones y las gacelas; donde los leones forzaron a las gacelas a ser cada vez más rápidas y ágiles, obligando así a los leones a convertirse en aún mejores cazadores, repitiéndose este loop constantemente a lo largo de la vida evolutiva de ambas especies.

## Herencia como motivo para evolución simulada

En 1960, John Holland refinó la idea de *algoritmo genético* (GA), pero no fue hasta los 1980 tardíos que la idea alcanzó masa crítica en los círculos académicos. Paralelamente, en los 1950 la genética clásica fue reforzada por el avance en biología molecular, el descubrimiento del ácido nucleico (ADN) y el entendimiento de como las tripletas de ADN codifican aminoácidos que forman proteínas, cimientos de todas las estructuras de un organismo. La parte crucial de todo esto es el hecho de que el lenguaje de la naturaleza es un alfabeto discreto de cuatro proteínas que conforman las cadenas complejas de ADN.

Considerando los GA como un acercamiento a la solución de problemas, se presentan entonces candidatos de soluciones a problemas de manera análoga a distintas mutaciones genéticas.

## Detalles de un algoritmo genético

En la siguiente tabla se muestra a grandes rasgos la estructura de un algoritmo genético simple:

Donde el loop contiene los procesos de selección, reproducción y mutación. Considérese por ejemplo la necesida

- Initialize the population,  $P$
- Repeat for some length of time:
  - Create an empty population,  $P'$
  - Repeat until  $P'$  is full:
    - Select two individuals from  $P$  based on some fitness criterion
    - Optionally mate, and replace with the offspring
    - Optionally mutate the individuals
    - Add the two individuals to  $P'$
- Let  $P$  now be equal to  $P'$

Figura 18. pseudocódigo para un algoritmo genético simple.

de evolucionar un string a una frase específica. El algoritmo genético no conoce esta frase, y por cada iteración que hace, sólo recibe una pieza de información en función del "fitness" (aptitud) del string propuesto. El proceso tiene como objetivo la selección del más apto. Para lidiar con el caso de frases largas, es necesario definir varios tipos de fitness, los cuales serán:

$$f^{\text{raw}} = \frac{\text{Number of Correct Letters}}{\text{Length of Target String}}.$$

$$f^{\text{scale}} = 2^{f^{\text{raw}}}.$$

$$f_i^{\text{norm}} = \frac{f_i^{\text{scale}}}{\sum_{j=1}^n f_j^{\text{scale}}},$$

Figura 19. tipos de fitness.

El primer tipo de fitness,  $f^{\text{raw}}$ , corresponde al porcentaje de letras que concuerdan. El siguiente tipo de fitness,  $f^{\text{scale}}$ , se define de tal forma que crezca exponencialmente a medida que la similitud entre ambos strings aumenta. El fitness final se define como el cociente entre el  $f^{\text{scale}}$  del individuo y el de la población como un todo, a modo de obtener un indicador normalizado. Considérese ahora una ruleta imaginaria en la que cada individuo apuesta con su valor de fitness, tal que cada individuo tenga una posibilidad de ganar o perder pero la posibilidad de victoria aumente con el fitness de cada individuo. Así, todo individuo puede ser descartado, pero a medida que su fitness se acerca a uno, sus posibilidades de serlo serán más bajas. De esta forma se puede modelar el proceso de selección natural.

Con este principio se pueden seleccionar individuos aleatorios para reproducirse en la siguiente generación. El siguiente paso en el GA será reproducir opcionalmente a individuos elegidos. A este paso se le llamará *crossover*, y dará lugar a dos strings nuevas en función de dos strings anteriores. Un ejemplo de crossover puede ser la concatenación de la mitad de un pariente con la otra mitad del otro, de las dos formas posibles a modo de formar dos individuos distintos.

El proceso restante para completar el algoritmo genético es el proceso de mutación; el cual se modelará forzando tras cierta probabilidad un cambio aleatorio en el genoma de cada individuo; implementado con una probabilidad baja para que la mutación sólo sea efectiva a grandes escalas evolutivas.

En conjunto, estos mecanismos componen así un algoritmo genético que eventualmente convergerá a la frase deseada sin conocerla directamente.

## CONJUNTOS DE NÚMEROS E INFINITO

Cuando un humano usa un computador, muy frecuentemente el diseño interno del programa representa un proceso matemático que es bello y creativo por su propio derecho. El hecho de que los buenos programas sean lógicos por necesidad no disminuye su belleza. De hecho, el acto de mezclar colores, componer una pieza musical o moldear una roca están sujetos a sus propias reglas lógicas.

### Propiedades de los números

Hacia el siglo V antes de Cristo, el filósofo griego Zenón propuso la paradoja que lleva su nombre. Supóngase que Aquiles y una tortuga van a competir en una carrera. Asumamos que Aquiles es exactamente el doble de rápido que la tortuga, y que la tortuga tiene una ventaja inicial de 1000 metros. Para cuando Aquiles haya corrido 1000 metros, la tortuga aún le llevará la delantera por 500 metros; y para cuando Aquiles cubra los siguientes 500 metros, la tortuga llevará la delantera por otros 250 metros. Se puede repetir el proceso infinitas veces y la tortuga siempre llevará la delantera, aunque sea por muy poco. Aquiles nunca alcanzará la tortuga. Véase la suma de cada una de estas fracciones de la longitud total como una suma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Cuando la longitud de la pista es igual al doble de la velocidad de Aquiles, éste y la tortuga empatarán al llegar a la meta. Si la pista es mayor al doble, Aquiles ganará la carrera, y si es menor, perderá. Esta paradoja ilustra una de las nociones de infinito de la matemática clásica.

### Contando números

Considérese el conjunto de números naturales. Se sabe que este es infinito, y lo mismo se puede decir de los

números naturales pares. Para estos dos conjuntos se puede construir una correspondencia uno a uno, por lo que son igualmente *infinitos*.

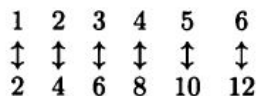


Figura 20. correspondencia entre naturales y naturales pares.

En general, para un conjunto  $f(N)$  la correspondencia uno a uno se puede ilustrar como:

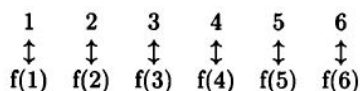


Figura 21. correspondencia entre naturales y un conjunto mapeable por una función.

### Números racionales

Un número racional (o fracción) es un número que puede ser expresado como la razón de dos números naturales, siempre y cuando el denominador sea cero. Un aspecto limitante de los números naturales es el hecho de que entre dos números de este conjunto sólo hay una cantidad finita de números del mismo. Sin embargo, para los números racionales, esto no es así.

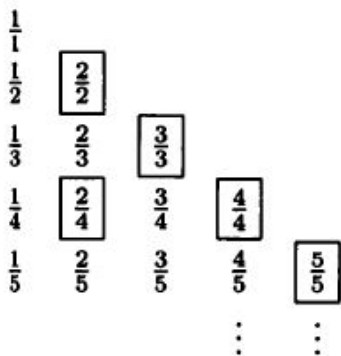


Figura 22. ilustración de la densidad de los números racionales.

Se pueden construir así infinitas fracciones entre números naturales. Sin embargo, dado que los números racionales se definen como una relación entre números naturales, la creación de una relación uno a uno entre ambos conjuntos es posible:

Las series infinitas revelan un aspecto interesante de los números racionales. Específicamente, para todo número racional se pueden construir expansiones racionales que son distintas simbólicamente pero iguales numéricamente.

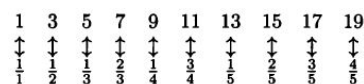


Figura 23. construcción de una relación uno a uno entre naturales y racionales.

### Números irracionales

Además de los conjuntos ya descritos, existen números que son imposibles de expresar mediante una fracción o suma de fracciones, como  $\pi$  o  $\sqrt{2}$ . Sin embargo, estos números están presentes en la naturaleza, como por ejemplo en el perímetro de una esfera.

Hasta el momento se ha visto que los naturales, naturales pares y racionales poseen la misma cantidad de elementos iguales. ¿Cuál es el caso de los irracionales? No es posible expresar los números irracionales como una correspondencia uno a uno de las utilizadas en los tres conjuntos anteriores, y Georg Cantor, padre de la teoría de números, fue el primero en probar que el conjunto de los números irracionales es incontablemente infinito, a diferencia de el infinito contable de los racionales.

La relación entre infinito y números irracionales no para aquí, dado que ciertos números irracionales pueden ser contruidos a partir de sumas infinitas de números racionales, es decir, *una conexión entre los números racionales y los números irracionales se da en el infinito*.

Los números reales son el producto de la unión entre los números racionales y los números irracionales, y dan lugar a un conjunto infinitamente denso.

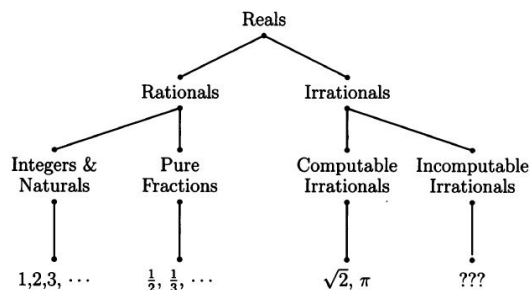


Figura 24. conjuntos de números.

## COMPUTABILIDAD E INCOMPUTABILIDAD

### Máquinas de Turing

Una máquina de Turing es un dispositivo hipotético ideado propuesto por Alan Turing en 1936. La máquina tiene un cabezal de lectura/escritura montado sobre una cinta de longitud infinita. La cinta consiste en un número infinito de celdas discretas en las que la máquina de Turing puede escribir o leer símbolos. En cada punto discreto en el tiempo una máquina de Turing existe en un y sólo un estado. Para la máquina de Turing el programa consiste en una tabla de transición de estados con entradas que contienen:

- Estado actual
- Símbolo bajo el cabezal
- Siguiendo estado que la máquina debería ejecutar
- El nuevo símbolo que debería ser escrito
- La dirección en la que se debería mover la cinta (izquierda, derecha o ninguna)

También hay un estado único conocido como estado inicial y uno o más estados de interrupción. Cuando una máquina de Turing se ejecuta, el input al programa consiste en símbolos ya escritos en la cinta. En cada paso de tiempo, la máquina de Turing lleva a cabo una acción, determinada por el estado actual y el símbolo bajo su cabezal. Esta acción puede involucrar escribir un nuevo símbolo, mover la cabeza o moverse a un nuevo estado interno. La máquina de Turing continúa este proceso hasta que uno de los estados de detención es alcanzado. El output del programa consisten en los símbolos grabados en la cinta.

State	Input	Action/Output	Next State
Start	*	get in cruise lane	cruise
Cruise	cruise lane clear	drive at cruise speed	cruise
Cruise	slow driver ahead	get in pass lane	pass
Pass	cruise lane clear	get in cruise lane	cruise
Pass	slow driver in cruise lane	accelerate	pass
*	desired exit ahead	exit highway	halt

Figura 25. ilustración de un problema de conducción para una máquina de Turing.

### Equivalencia y complejidad temporal

Aunque distintos modelos de computación pueden ser equivalentes en el hecho de que cualquiera de ellos puede computar exactamente lo que los otros pueden

computar, ¿qué podemos decir acerca de la eficiencia relativa de cada modelo? ¿es un tipo de modelo más eficiente que otro, en el sentido de que puede hacer lo mismo que el otro pero más rápidamente? Hay algunas diferencias en velocidad entre los diferentes modelos, pero no por un gran margen.

La teoría de la ciencia de la computación tiene una rama conocida como teoría de complejidad temporal, que lidia con la pregunta de qué tan rápido puede ser computado algo. En cada modelo de computación, el 'computador' debe tomar algunas acciones paso a paso. Por ejemplo, en un paso de tiempo la máquina de Turing lee un símbolo bajo el cabezal, escribe el nuevo símbolo apropiado, y mueve la cinta a izquierda o derecha, haciendo un salto virtual al siguiente estado.

La complejidad teórica de un algoritmo se suele describir mediante la notación de la gran  $O$ , la cual representa la complejidad del algoritmo como una función del input  $n$ . Así, la medida de la complejidad  $f(n) = O(g(n))$  para una computación arbitraria se define como la cantidad de tiempo que el algoritmo toma para ejecutarse. La función  $g(n)$  representa la función matemática que define la complejidad computacional del problema. Por ejemplo, un loop *for* que ejecuta una operación constante  $n$  veces tiene una complejidad lineal  $g(n) = n$ . En este contexto, dos computaciones son equivalentes si su complejidad computacional es representada por la misma función  $g(n)$ .

### Complejidad universal y problemas de decisión

Recuérdese que el input de cualquier programa puede ser reducido a un simple número natural mediante Gödelización. De manera general, todo modelo tradicional de computación puede convertir una representación de un programa en un número de Gödel, así como llevar a cabo el proceso inverso y recuperar el programa original.

Combinando los hechos de que computadores pueden invertir números de Gödel y además emularse a sí mismos significa que para cualquier modelo computacional existe teóricamente un programa muy especial que toma dos números como input y lleva a cabo la siguiente computación: el primer número es interpretado como un número de Gödel para un programa, y el segundo número es interpretado como el número de Gödel para el input que uno quisiera suplir al programa representado por el primer número. Este programa especial puede emular el programa Gödelizado en el input Gödelizado como si el programa real estuviese siendo ejecutado. Este programa se conoce como un computador universal  $U(x, y)$  ejecutado con el número de Gödel  $x$  de un programa con el número de Gödel  $y$  como input.

## Incomputabilidad

Alan Turing fue el primero en demostrar que hay muchos problemas no computables. Como ejemplo supóngase que se tiene un programa y un conjunto de datos en los que se quiere ejecutar el programa. Una pregunta razonable es: ¿encontrará el programa una solución algún día?. Asumamos que el programa que se quiere probar busca la solución a un problema y se detiene sólo cuando la encuentra. Así, el programa podría nunca parar si una solución no existe (o es demasiado tonto para encontrarla). ¿No sería útil si exis-

tiese un programa especial que pudiese decirnos si otro programa no se detendría? Podríamos ahorrar mucho tiempo sabiendo de antemano si el programa que vamos a ejecutar se detendrá algún día, para así decidir su ejecución. Si este programa existiese, los programadores podrían usarlo para saber si un programa tiene bugs que causan la ejecución de loops infinitos.

Asumamos que este programa especial existe. Denotaremos una instancia de este programa mediante la notación  $M(x, y)$  donde  $x$  es el número de Gödel del programa que queremos supervisar y  $y$  es el número de Gödel del input que queremos alimentar al programa  $x$ . El output de este programa será