



Praktikumsbericht

Modellbildung und Simulation

1. Praktikumsaufgabe: Blockorientierte Simulation eines nichtlinearen Systems mit Unstetigkeiten

Gruppe 10:

Konstantin Kuhl

Nils Leimbach

Sebastian Schwabe

Konstantin Wrede

Eingereicht am: 14. Mai 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe: VPG mit LDF-Schätzung	3
1.1 Analytische Lösung des PT1-Glieds	3
1.2 Besonderheiten bei der Implementierung	3
1.3 Verifikation der Simulationsergebnisse	3
2 Aufgabe: Automatische Schrittweitensteuerung	5
2.1 Minimale und maximale Schrittweite	5
2.2 Verifikation der Schrittweitensteuerung	6
3 Aufgabe: Pseudorate-Modulator	8
3.1 Verifikation der Simulationsergebnisse	8
3.2 Einfluss der Schrittweitensteuerung	12

1 Aufgabe: VPG mit LDF-Schätzung

1.1 Analytische Lösung des PT1-Glieds

Aus der gegebenen Übertragungsfunktion des PT1-Gliedes erfolgt durch Transformation in den Zeitbereich für $y(0) = x(0) = 0$:

$$\begin{aligned}y(t) &= 5 \cdot \mathbf{1}(t - 1\text{s}) - 10 \cdot \dot{y}(t) \\ \Rightarrow y(t) &= 5 \cdot (1 - e^{(1\text{s}-t)/10\text{s}}) \cdot \mathbf{1}(t - 1\text{s}) .\end{aligned}$$

1.2 Besonderheiten bei der Implementierung

Zur Berechnung der k -Faktoren für das VPG/RK3-Verfahren ist es notwendig den Funktionswert von $u(t)$ an der Stelle $t_i + h/2$ und $t_i + h$ zu nutzen. Dafür wird eine kontinuierliche Funktion $uStep(t)$ definiert. Um an der Sprungstelle einen korrekten Vergleich der Float-Zahlen des Sprungzeitpunkts und der aktuellen Simulationszeit zu erhalten, wird die Konstante $epsilon_float$ vom Sprungzeitpunkt $t_s = 1\text{s}$ abgezogen. Diese ist deutlich kleiner als die Schrittweite, so dass es zu keiner Verfälschung des Simulationsablaufs kommt.

1.3 Verifikation der Simulationsergebnisse

Aus der Darstellung der analytisch berechneten Lösung kann die Korrektheit als PT1-Glied mit der Zeitkonstante $T_m = 10\text{s}$ bestätigt werden. Bei $t = t_s + T_m = 11\text{s}$ nimmt die Funktion $y(t)$ den Wert $y(11\text{s}) = 0.632 \cdot y_A = 3.16$ an. Demnach ist die analytisch berechnete Lösung geeignet zur Verifikation des simulierten Systems.

Die Simulation folgt dem analytischen Verlauf relativ genau mit einer maximalen Abweichung des GDFs von $g(t = 11\text{s}) = 3.09 \cdot 10^{-5}$ und konvergiert auch gegen die analytische Lösung. Der LDF steigt sprunghaft auf sein Maximum $d(t = 1\text{s}) = 0.00833$ an der Sprungstelle und sinkt sofort darauf wieder auf einen um Größenordnungen kleineren Wert ab. Somit beginnt sich der GDF nach dem Eingangssprung aufzubauen.

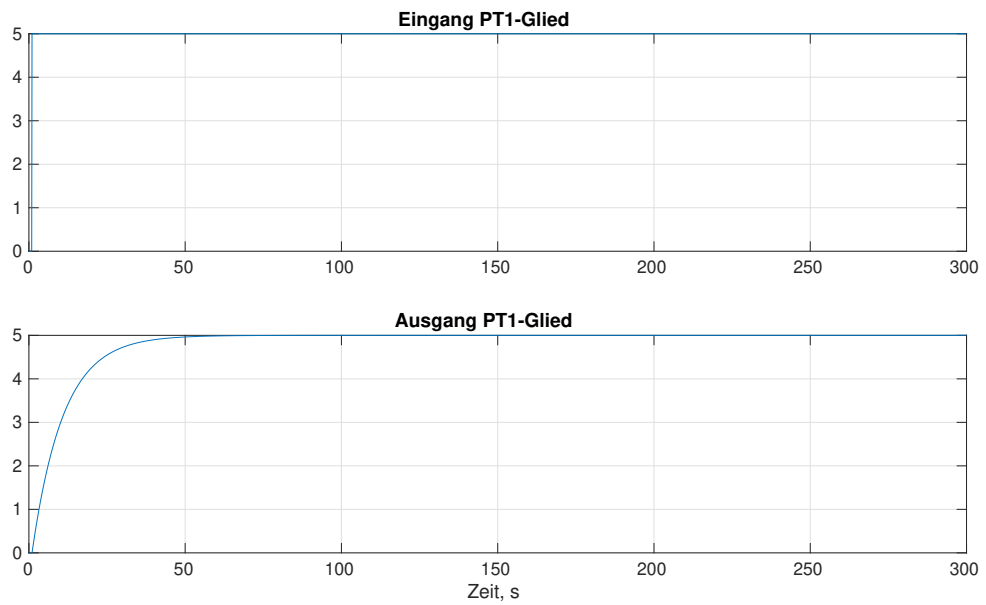


Abbildung 1.1: Eingabe und nach VPG-Integration berechnete Ausgabe des Systems

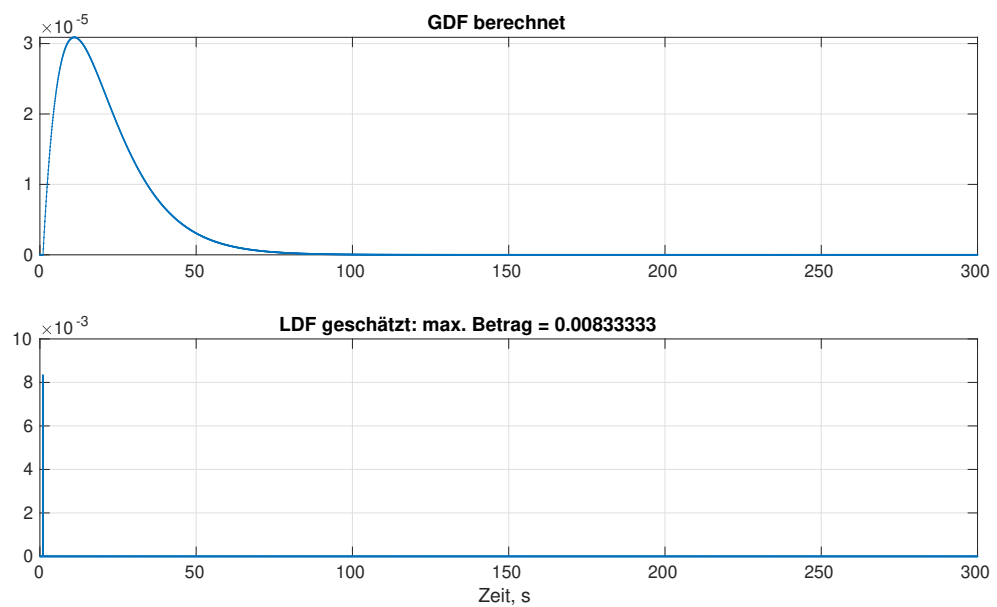


Abbildung 1.2: Globaler Diskretisierungsfehler und lokaler Diskretisierungsfehler

2 Aufgabe: Automatische Schrittweitensteuerung

2.1 Minimale und maximale Schrittweite

Die minimal notwendige Schrittweite h_{min} folgt aus der Betrachtung des LDFs an der Sprungstelle t_s , dort nimmt dieser nämlich sein Maximum an. Zur Berechnung der für den LDF notwendigen k -Faktoren müssen dabei zwei Fälle betrachtet werden:

$$\begin{aligned} t_i + \frac{h}{2} < t_s : k_2 = 0 \Rightarrow k_3 &= \frac{\Delta U}{T_m} \\ t_i + \frac{h}{2} \geq t_s : k_2 &= \frac{\Delta U}{T_m} \Rightarrow k_3 = \frac{\Delta U(1 - \frac{2h}{T_m})}{T_m} \approx \frac{\Delta U}{T_m}, \text{ da } \frac{2h}{T_m} \ll 1 \\ \Rightarrow \hat{d} &= \frac{h}{6}(k_1 - 2k_2 + k_3) = -\frac{h}{6} \frac{\Delta U}{T_m}. \end{aligned}$$

Damit ein maximaler LDF ε_{LDF} betragsmäßig nicht überschritten wird, muss gelten:

$$h \leq \frac{6 \cdot \varepsilon_{LDF} \cdot T_m}{\Delta U} = h_{min}.$$

Die maximal mögliche Schrittweite h_{max} folgt aus einer Stabilitätsbetrachtung. Aus der Übertragungsfunktion des PT1-Gliedes ergibt sich für den homogenen Anteil mit dem Exponentialansatz $\dot{x}(t) = \lambda x(t)$ im Zeitbereich:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{X(s)}{U(s)} \bullet \circ x(t) + T_m \dot{x}(t) = u(t) \\ u = 0 \Rightarrow 1 + T_m \lambda &= 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{T_m} = -0.1 \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Für das VPG-Verfahren (RK2-Verfahren) ergibt sich ein Stabilitätsgebiet auf der reellen Achse ($\lambda \in \mathbf{R}$) mit $\mu \in [-2, 0]$. Also gilt für die maximale Schrittweite nach $\mu = h \cdot \lambda$:

$$h_{max} = \frac{\mu_{max}}{\lambda} = \left\| \frac{\mu_{max}}{\lambda} \right\| = 20 \text{s}.$$

Da auf dem Rand des Stabilitätsgebiets keine Stabilität gewährleistet ist, wird beim Erreichen oder Überschreiten von h_{max} die Schrittweite auf $h = 0.99 \cdot h_{max}$ gesetzt.

2.2 Verifikation der Schrittweitensteuerung

Die Simulation mit Schrittweitensteuerung gibt bei $\varepsilon_{LDF} = 5 \cdot 10^{-6}$, $h_0 = 0.1\text{s}$ den tatsächlichen Funktionsverlauf ebenfalls präzise wieder mit einer maximalen Abweichung des GDFs $g = -8.29 \cdot 10^{-4}$ an der Stelle $t = 1.18\text{s}$. Das LDF springt zum Zeitpunkt des Eingangssprungs auf $d = -4.36 \cdot 10^{-6}$ und kurz darauf auf seinen betragsmäßig größten Wert von $d = 4.91 \cdot 10^{-6}$. Die Schranke des maximalen LDFs ε_{LDF} wird stets eingehalten. Durch die Dynamik des PT1-Gliedes ergibt sich ein exponentiell abklingender Verlauf des GDFs und LDFs mit Sprüngen durch die Unstetigkeiten bei der Schrittweitemumschaltung.

Der Schrittweite verläuft mit ihrem initialen Wert von $h = 0.1\text{s}$ bis kurz vor der Sprungstelle, wo sie auf ein Minimum von $h = 5.24 \cdot 10^{-5}\text{s}$ abfällt, da hier wie in der ersten Aufgabe beobachtet der maximale LDF auftritt. Weil die Schrittweite h_{new} auf Unterschreiten von h_{min} geprüft wird, könnte h sogar bis auf $h = 0.75 \cdot h_{min}$ absinken. Dies bedeutet eine etwas längere Simulationszeit, ist allerdings für die Korrektheit der Simulation unproblematisch (h_{min} ist nur die minimal notwendige Schrittweite, um ε_{LDF} einzuhalten). Daraufhin steigt die Schrittweite in Sprüngen, sobald die Beschränkung durch ε_{LDF} dies zulässt.

Ein Vergleich der Simulationsdauer mit und ohne Schrittweitensteuerung ergibt für dieses Beispiel eine nur etwa halb so lange Laufzeit mit Schrittweitensteuerung.

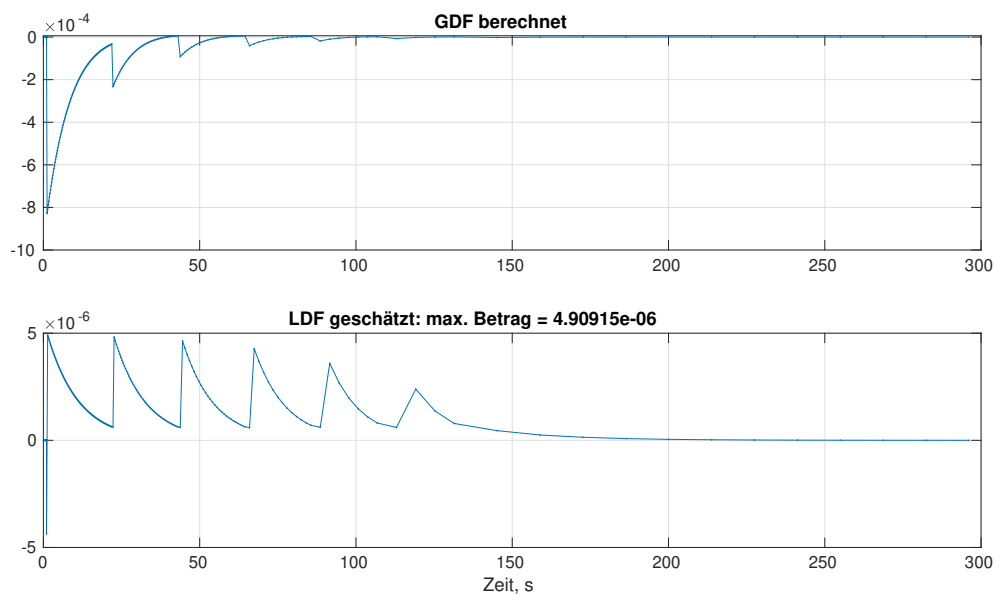


Abbildung 2.1: Diskretisierungsfehler bei $\varepsilon_{LDF} = 5 \cdot 10^{-6}$, $h_0 = 0.1\text{s}$

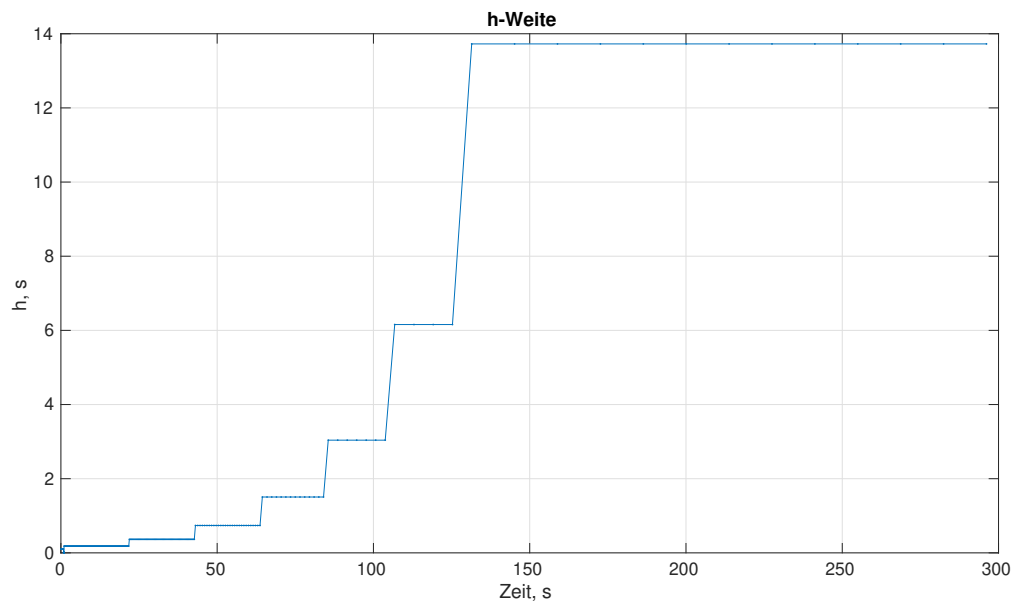


Abbildung 2.2: Gesteuerten Schrittweite bei $\varepsilon_{LDF} = 5 \cdot 10^{-6}$, $h_0 = 0.1s$

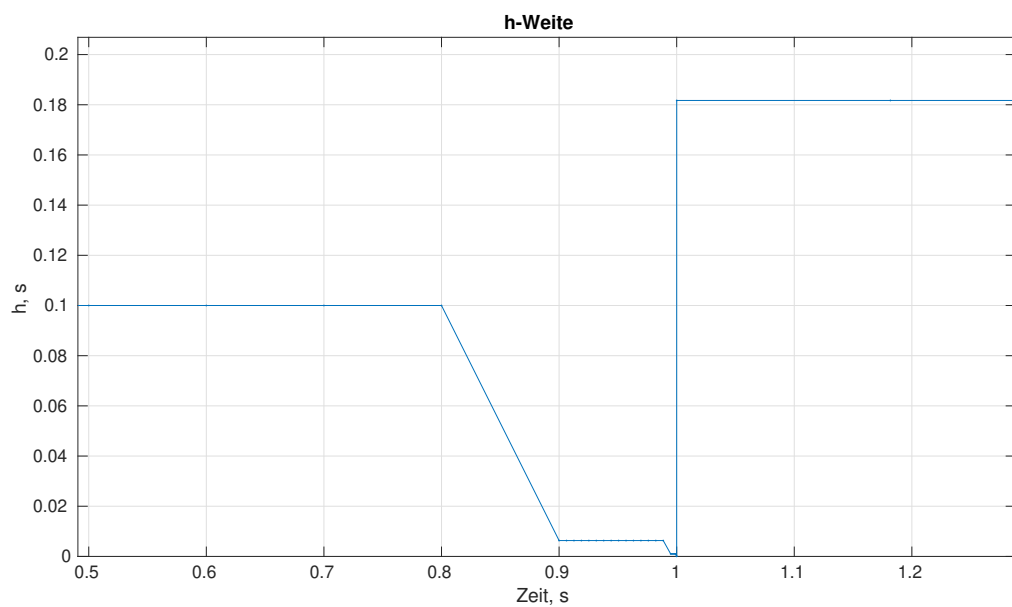


Abbildung 2.3: Schrittweite um den Sprungzeitpunkt bei $\varepsilon_{LDF} = 5 \cdot 10^{-6}$, $h_0 = 0.1s$

3 Aufgabe: Pseudorate-Modulator

3.1 Verifikation der Simulationsergebnisse

In der folgenden Simulation eines geschlossenen Regelkreises mit PT1- und Hystereseglied wurden Sprünge zum Zeitpunkt $t_s = 2\text{s}$ eingegeben. Bei Verwendung der LDF-Beschränkung aus der vorherigen Aufgabe ergaben sich bei diesem System stark von der gegebenen analytischen Berechnungsformel abweichende Ergebnisse. Erst bei deutlich kleineren Werten wie etwa $\varepsilon_{LDF} = 5 \cdot 10^{-10}$ wurden diese erreicht.

Am Ausgang des Hystereseblocks stellten sich in der Simulation für alle drei Eingangssprünge u_{21} , u_{22} und u_{23} periodische Impulse ein. In der folgenden Tabelle sind deren Impulsbreite τ_e und Impulsperiode τ_p den mit der gegebenen Formel analytisch berechneten gegenübergestellt.

	analytisches τ_e	simuliertes $\hat{\tau}_e$	analytisches τ_p	simuliertes $\hat{\tau}_p$
$u_{21} = 0.17$	0.2210 s	0.2267 s	2.3341 s	2.3966 s
$u_{22} = -0.25$	0.2424 s	0.2224 s	1.3865 s	1.3957 s
$u_{23} = 0.49$	0.3419 s	0.3263 s	0.8239 s	0.8243 s

Tabelle 3.1: Gegenüberstellung der analytisch berechneten und simulierten Impulse

Es ist zu erkennen, dass es in der Simulation bezüglich der Impulsbreite und -periode zu Abweichungen von bis zu 8% kommt. Es folgen bei diesem System trotz Einhaltung eines relativ geringen maximalen LDFs aufgrund der Dynamik des Hysteres-Blocks relativ starke Ungenauigkeiten.

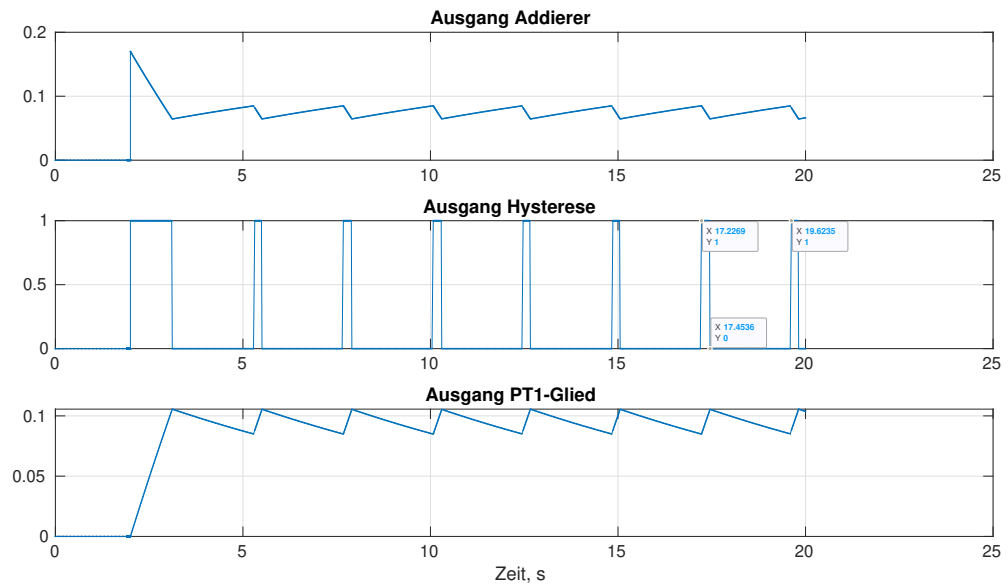


Abbildung 3.1: Blockausgänge mit Schrittweitensteuerung bei $u_{21} = 0.17$, $h_0 = 0.1s$

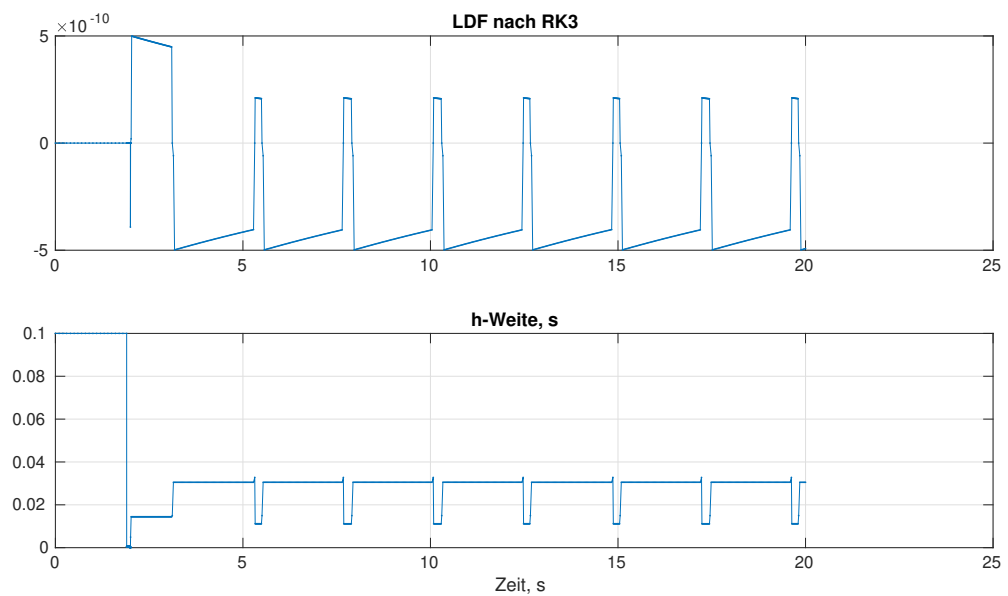


Abbildung 3.2: Diskretisierungsfehler mit Schrittweitensteuerung bei $u_{21} = 0.17$, $h_0 = 0.1s$

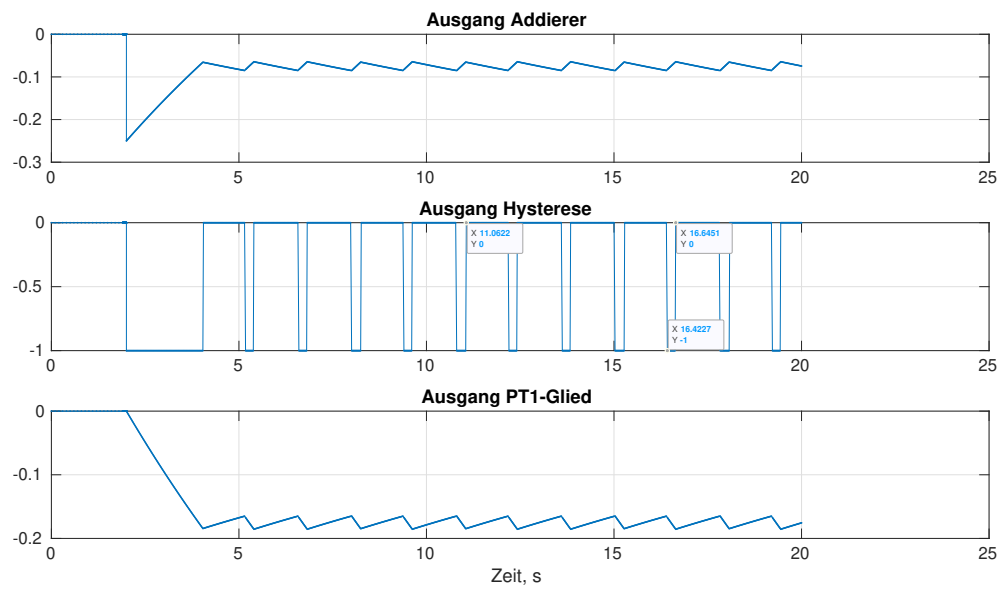


Abbildung 3.3: Blockausgänge mit Schrittweitensteuerung bei $u_{22} = -0.25$, $h_0 = 0.1s$

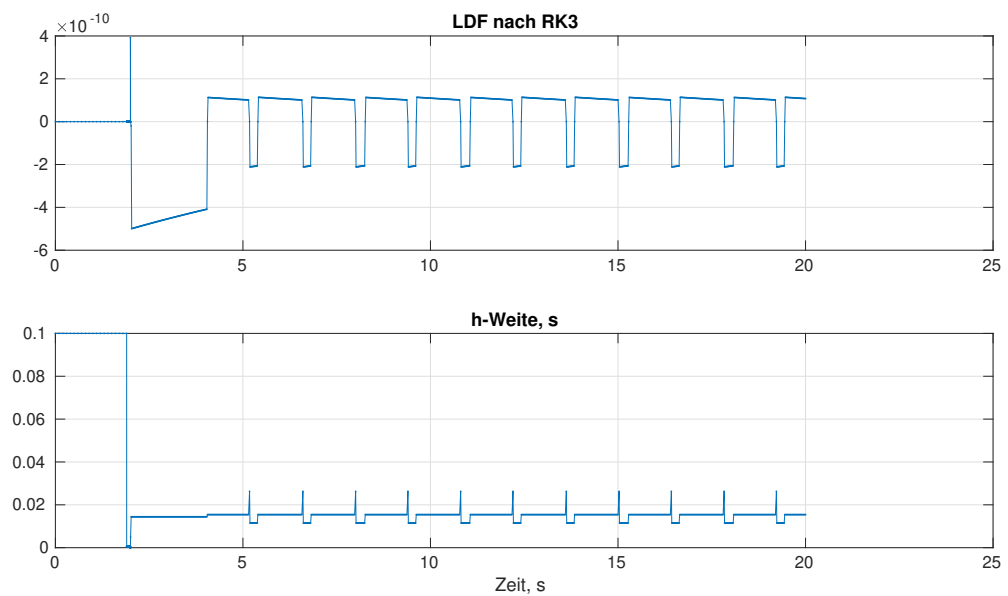


Abbildung 3.4: Diskretisierungsfehler mit Schrittweitensteuerung bei $u_{22} = -0.25$, $h_0 = 0.1s$

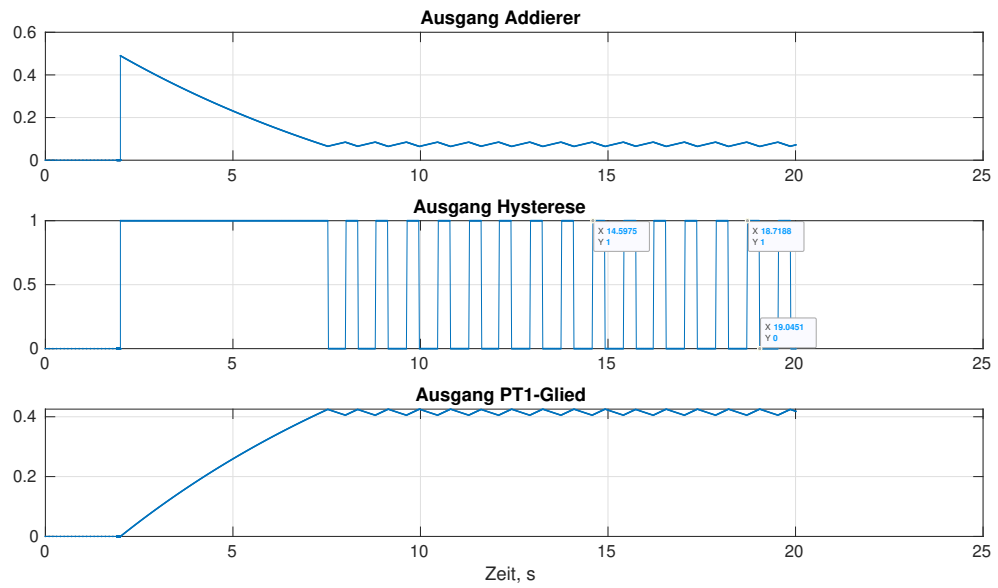


Abbildung 3.5: Blockausgänge mit Schrittweitensteuerung bei $u_{23} = 0.49$, $h_0 = 0.1s$

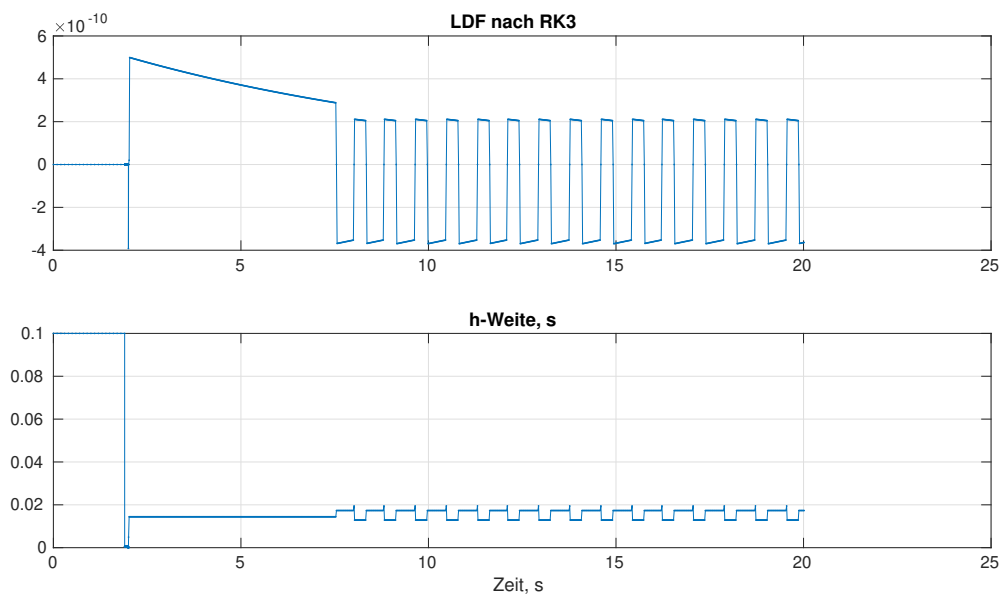


Abbildung 3.6: Diskretisierungsfehler mit Schrittweitensteuerung bei $u_{23} = 0.49$, $h_0 = 0.1s$

3.2 Einfluss der Schrittweitensteuerung

Die Simulation wurde zum Vergleich auch mit einer festen Schrittweite von $h = 0.01\text{s}$ durchgeführt. Die nachfolgende Tabelle stellt die dabei auftretenden relativen Abweichungen von den analytisch berechenbaren Impuls-Werten denen mit Schrittweitensteuerung gegenüber.

	h -Steuerung $ \delta_{\tau_e} $	h -Steuerung $ \delta_{\tau_p} $	$h = 0.01\text{s}$ $ \delta_{\tau_e} $	$h = 0.01\text{s}$ $ \delta_{\tau_p} $
$u_{21} = 0.17$	2.58%	2.68%	0.45%	0.6%
$u_{22} = -0.25$	8.26%	0.66%	1.00%	1.01%
$u_{23} = 0.49$	4.57%	0.04%	2.36%	0.48%

Tabelle 3.2: Gegenüberstellung der Impulse mit und ohne Schrittweitensteuerung

Die Simulation mit einer festen, kleinen Schrittweite ist im Allgemeinen nicht genauer als die mit einer Schrittweitensteuerung. Allerdings benötigt die Simulation mit fester Schrittweite in diesem Beispiel eine Dauer von etwa 500ms und dem gegenüber jene mit Schrittweitensteuerung nur etwa 250ms . Im Verlauf des LDFs ist zu erkennen, dass bei fester Schrittweite durch das Umschalten der Hysterese LDF in der Größenordnung 10^{-4} entstehen, die deutlich größer sind als bei der Schrittweitensteuerung. In der Ruhelage befindet sich das LDF mit fester Schrittweite hier allerdings in der Größenordnung 10^{-11} .

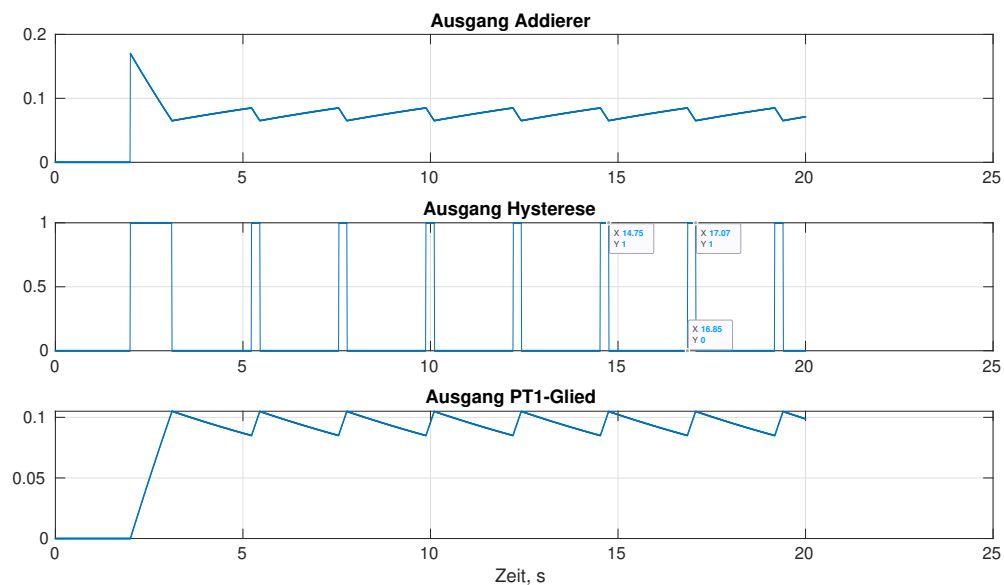


Abbildung 3.7: Blockausgänge mit konstanter Schrittweite bei $u_{21} = 0.17$, $h = 0.01\text{s}$

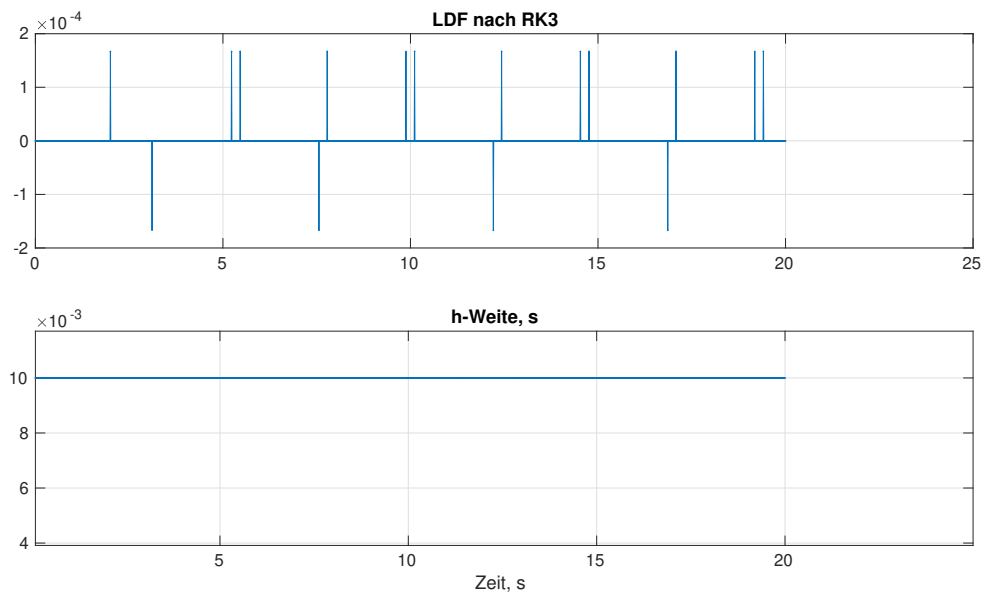


Abbildung 3.8: Diskretisierungsfehler mit konstanter Schrittweite bei $u_{21} = 0.17$, $h = 0.01\text{s}$

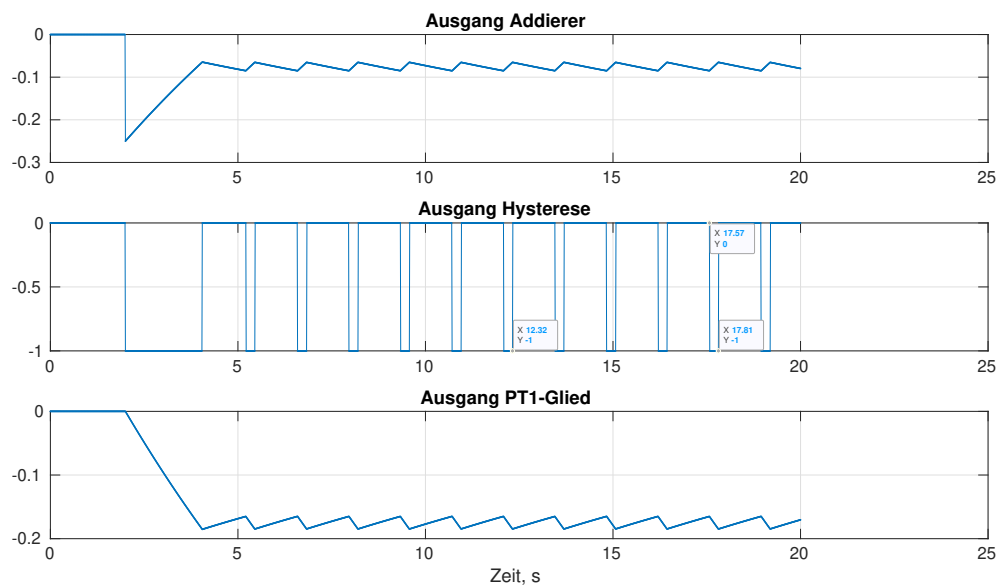


Abbildung 3.9: Blockausgänge mit konstanter Schrittweite bei $u_{22} = -0.25$, $h = 0.01\text{s}$

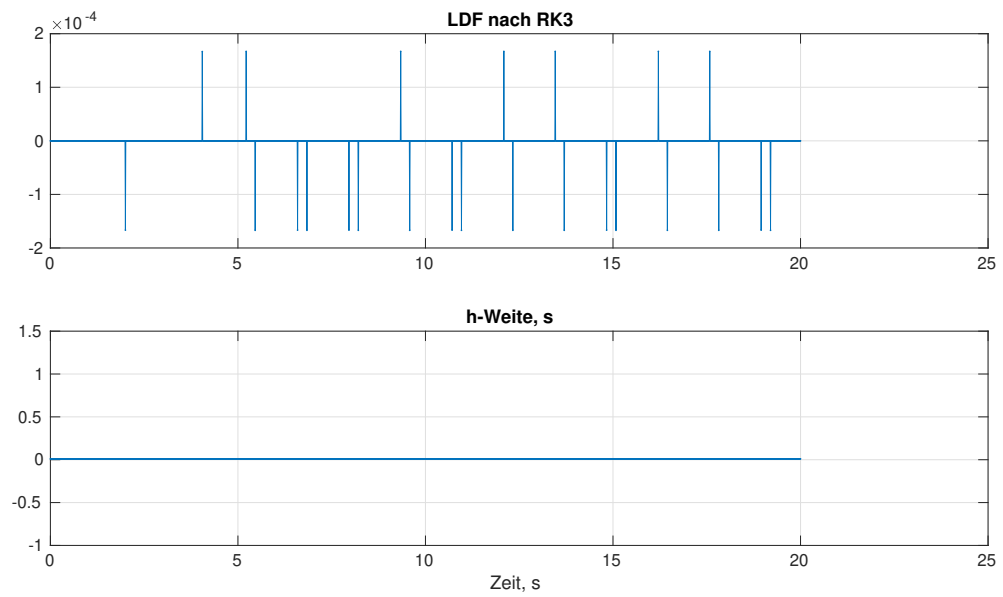


Abbildung 3.10: Diskretisierungsfehler mit konstanter Schrittweite bei $u_{22} = -0.25$, $h = 0.01$ s

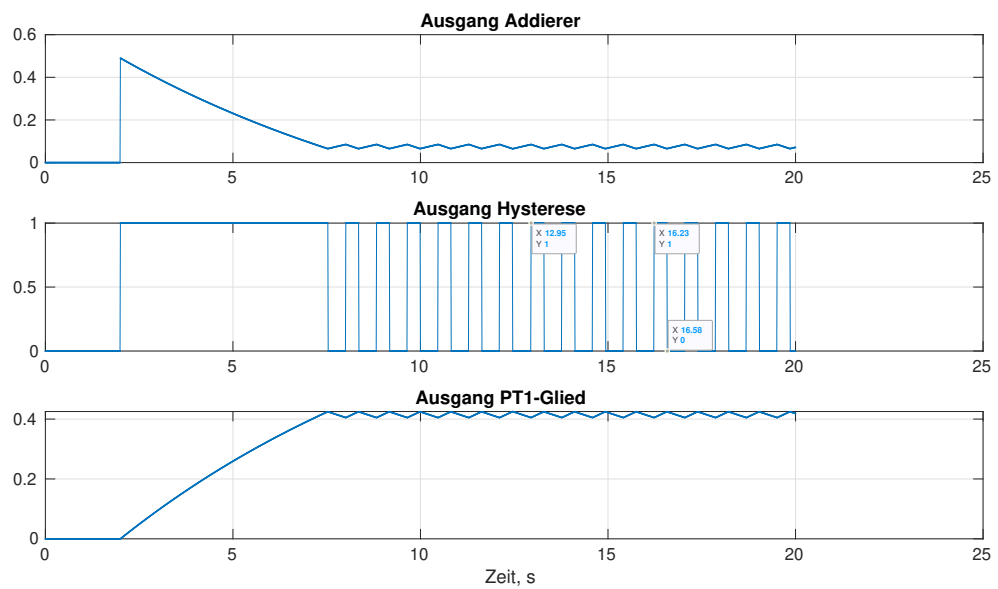


Abbildung 3.11: Blockausgänge mit konstanter Schrittweite bei $u_{23} = 0.49$, $h = 0.01$ s

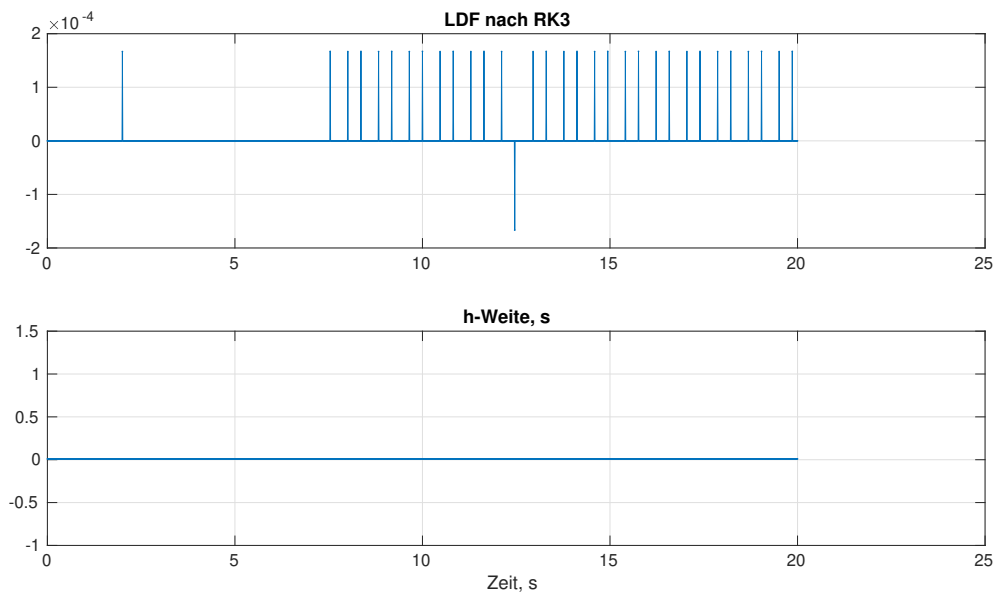


Abbildung 3.12: Diskretisierungsfehler mit konstanter Schrittweite bei $u_{23} = 0.49$, $h = 0.01\text{s}$