

Technische Universität Dresden
Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie
Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack



Regelungstechnisches Praktikum

Einführung

Grundbegriffe — Hilfsmittel — Kontrollfragen — Gerätetechnik

Fassung Wintersemester 2019/20

Inhaltsverzeichnis

I. System- und regelungstheoretische Grundlagen	6
1. Elementare Grundbegriffe	6
1.1. Das Grundanliegen der Regelungstechnik	6
1.2. Signal und Übertragungsglied	7
1.2.1. Begriffsbestimmungen	7
1.3. Lineare Übertragungsglieder	9
1.3.1. Definition linearer zeitinvarianter Übertragungsglieder	9
1.3.2. Gewichts- und Übergangsfunktion	9
1.3.3. Beschreibung durch gewöhnliche Differentialgleichungen	10
1.4. Laplace-Transformation	11
1.4.1. Motivation und Definition	11
1.4.2. Übertragungsfunktion	14
1.4.3. Anfangs- und Endwertsatz	15
1.4.4. Frequenzgang	16
2. Die Sprungantwort	16
2.1. Sprungantwort eines einzelnen Übertragungsglieds	16
2.2. Sprungantwort von Systemen erster Ordnung („PT ₁ -Glieder“)	19
2.3. Sprungantwort von Systemen zweiter Ordnung und höher, schwingungsfähig	20
2.4. Sprungantwort von Systemen zweiter Ordnung und höher, nicht schwingungsfähig	21
2.5. Sprungantwort eines geschlossenen Regelkreises	22
3. Bode-Diagramm	24
3.1. Grundlagen des Bodediagramms	24
3.2. Stabilitätsaussagen im Bodediagramm	25
4. Übertragungseigenschaften linearer zeitinvarianter Übertragungsglieder	27
4.1. Das PT ₁ -Glieder	28
4.2. Das PT ₂ -Glieder	30
4.3. Das PT _n -Glieder	33
4.4. Das I-Glieder	34
4.5. Das IT ₁ -Glieder	36
4.6. Das D-Glieder	37
4.7. Das DT ₁ -Glieder	38
4.8. Der Allpass erster Ordnung	38
4.9. Das Totzeitglied	39

5. Der Regelkreis	40
5.1. Aufbau des Regelkreises	40
5.2. Wichtige Übertragungsfunktionen	41
6. PID-Regler	42
6.1. Grundlegendes	43
6.2. Idealer PID-Regler	43
6.3. Realer PID-Regler	45
6.3.1. Realisierung mit PT_1 -Glieder (Vorfilter)	45
6.3.2. Realisierung mit DT_1 -Glieder	46
6.4. Das Windup-Problem	46
7. Einstellverfahren für PID-Regler	49
7.1. Wahl der Regelstruktur	49
7.2. Übersicht zu Einstellverfahren	52
7.3. Handeinstellung eines PID-Reglers	53
7.4. Einstellverfahren im Zeitbereich	57
7.4.1. Ziegler und Nichols	57
7.4.2. Chien, Hrones und Reswick	58
7.4.3. Verfahren nach Reinisch	59
7.4.4. Integralkriterien	61
7.5. Einstellverfahren im Frequenzbereich	63
7.5.1. Betragsoptimum (nur P-Strecken)	65
7.5.2. Symmetrisches Optimum für P-Strecken	67
7.5.3. Symmetrisches Optimum für I-Strecken	68
7.5.4. Zusammenfassung	69
8. Orts- und Wurzelortskurven (ab 6. Semester/ Praktika im Sommersemester)	70
8.1. Die Ortskurve	70
8.2. Stabilitätskriterien auf Basis der Ortskurven- und Nyquist-Bildkurven	71
8.3. Die Wurzelortskurve	71
9. Kontrollfragen	75
 II. Gerätetechnische Ausstattung	 79
10. Der elektronische Modellregelkreis MRK 931	79
10.1. Einführung	79
10.2. Übertragungsglieder	80
10.2.1. Baugruppe Spannungsquelle, Schalter, Summierglied	80

10.2.2. Lineare dynamische Übertragungsglieder	81
10.2.3. Baugruppe Universelles Dreipunktglied	84
10.3. Einsatz quasi-analoger Baugruppen	84
10.4. Baugruppe Steuerung	85
Anhang	88
A. Bezeichnungen nach alter und neuer DIN	88

Einleitung

Dieses Dokument dient als Grundlage für alle Versuche des Regelungstechnischen Praktikums für die folgenden Studiengänge:

- Diplom-Studiengang Elektrotechnik, Studienrichtung AMR (5. + 6. Fachsemester),
- Diplom-Studiengang Mechatronik (6. Fachsemester),
- Diplom-Studiengang Regenerative Energiesysteme (6. Fachsemester).

Im ersten Teil werden wichtige und bereits bekannte Grundlagen zusammengefasst, deren Kenntnis für die erfolgreiche Durchführung der Versuche erforderlich sind. Darüber hinaus werden eine Reihe von Hilfsmitteln vorgestellt, welche in den Versuchen des Praktikums Anwendung finden, beispielsweise die verschiedenen Einstellregeln oder Bemessungsformeln für PID-Regler. Für eine vertiefte Behandlung der Materie und die entsprechenden Herleitungen sei auf die Mitschriften beziehungsweise Skripte der Vorlesungen *Automatisierungstechnik* (4. Semester), *Regelungstechnik 1* (5. Semester) und *Regelungstechnik 2* (6. Semester), sowie auf das Literaturverzeichnis im Anhang verwiesen.

Die Kontrollfragen in Abschnitt 9 auf Seite 75 sollen die Vorbereitung auf die Eingangstests erleichtern, welche vor jedem Praktikumsversuch durchgeführt werden. Diese Fragen können genutzt werden, um den derzeitigen Kenntnisstand zu überprüfen und gegebenenfalls durch Nachschlagen in diesem Dokument zu erweitern und zu festigen. Es wird eindringlich empfohlen, alle Kontrollfragen zu bearbeiten.

Der zweite Teil widmet sich ab Seite 79 der Vorstellung der im Praktikum verwendeten Gerätetechnik.

Teil I.

System- und regelungstheoretische Grundlagen

1. Elementare Grundbegriffe

1.1. Das Grundanliegen der Regelungstechnik

HINWEIS Der Inhalt dieses Unterabschnittes muss für alle Praktika beherrscht werden.

Eine der wesentlichen Aufgaben der Regelungstechnik besteht darin, technische Prozesse gezielt so zu beeinflussen, dass diese ein bestimmtes, vom Anwender vorgegebenes Verhalten aufweisen. Typischerweise wird man für bestimmte Größen eines technischen Prozesses, beispielsweise die Temperatur einer Heizung oder die Drehzahl eines Motors, einen festen Wert oder aber einen zeitlichen Verlauf vorgeben. Diese Größen bezeichnet man als *Regelgrößen*, die Vorgaben als *Sollgrößen* oder *Führungsgrößen*. Es muss dann dafür gesorgt werden, dass die auf den Prozess einwirkenden und durch den Anwender direkt beeinflussbaren Größen (die sog. *Stellgrößen*) so nachgeführt werden, dass der Verlauf der Regelgrößen (i.d.R. asymptotisch) dem Verlauf der Sollgrößen entspricht und zwar auch dann, wenn Störungen auf den Prozess ein- und dem Wunschverhalten entgegenwirken. Hierfür kommen Steuerungen und Regelungen zum Einsatz, vergl. Abbildung 1.

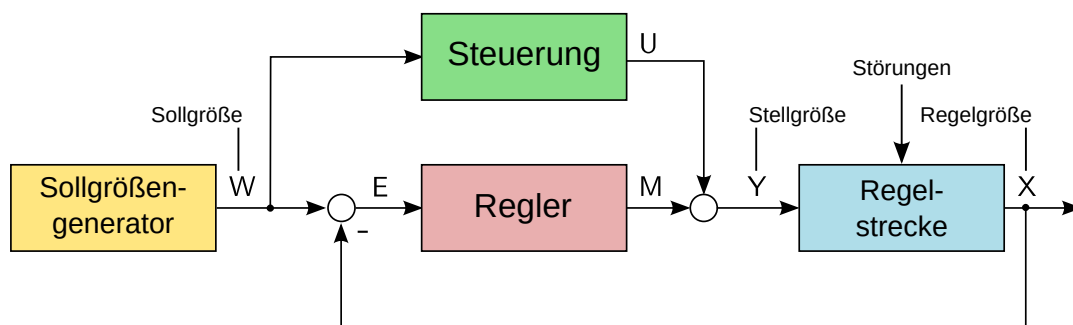


Abbildung 1: Grundelemente eines Regelkreises.

Steuerung Unter einer Steuerung versteht man eine Einrichtung, die aus dem Verlauf der Sollgrößen den erforderlichen Verlauf der Stellgrößen a priori berechnet. Die Berechnung kann auf Basis eines mathematischen Modells des Prozesses oder empirisch aus Versuchsdaten erfolgen.

Regelung Unter einer Regelung versteht man eine Einrichtung, in die die Regelgrößen (durch Messung oder Zustandsrekonstruktion mittels eines sog. Beobachters) zurückgeführt und in geeigneter Art und Weise ausgewertet werden (z.B. durch Vergleich mit den Sollgrößen). Auf Basis dieses Vergleiches erfolgt eine Korrektur der Stellgrößen, die darauf abzielt, den Verlauf der Regelgrößen dem Verlauf der Sollgrößen anzugleichen. Regler können von vorgegebener Struktur mit einzustellenden Parametern sein (z.B. PID-Regler, vergl. Abschnitt 6) oder aber auf einem mathematischen Modell beruhen (sog. modellbasierte Regler).

Regelstrecke Unter der Regelstrecke versteht man den gezielt zu beeinflussenden Prozess.

WICHTIG In den Entwurf der Steuerung kann alles a priori bekannte Wissen über den Prozess und den Verfahrensverlauf eingehen. Das sollte man, sofern möglich, großzügig nutzen, um den Regler zu entlasten. Der Regler sollte im Idealfall nur für das Ausregeln von Störungen und die Kompensation von Ungenauigkeiten im Steuerungsentwurf genutzt werden und nicht für Überführungsvorgänge zwischen verschiedenen Prozesszuständen, für die schon im voraus bekannt ist, wie der Stellgrößenverlauf ungefähr auszusehen hat.

1.2. Signal und Übertragungsglied

1.2.1. Begriffsbestimmungen

Um Regler und Steuerungen entwerfen und parametrieren zu können, ist es erforderlich, das Verhalten der Regelstrecke, des Reglers und der Steuerung geeignet zu modellieren. Eine Strukturierung des zu untersuchenden Systems ist dabei unerlässlich. Zu diesem Zweck hat sich das Abstraktionsmittel *Übertragungsglied* bewährt. Unter einem Übertragungsglied versteht man eine Anordnung, die aus einem Eingangssignal ein Ausgangssignal erzeugt. Unter einem *Signal* versteht man den *zeitlichen Verlauf* einer Größe. Eine *Größe* (z.B. Temperatur, Drehzahl, Füllstand, etc.) wird in der Regel durch eine *Variable* repräsentiert. Beispielsweise kann vereinbart werden, die Variable T als Repräsentanz der Größe Temperatur zu verwenden. Alternativ könnte man auch ϑ oder ein anderes Symbol als Variable für die Temperatur verwenden. Allgemein kann eine Größe auch vektorwertig sein, z.B. die Position x des Massenmittelpunktes eines Körpers im dreidimensionalen Raum. Allgemein gilt also: $x \in \mathbb{R}^n$.

Der zeitliche Verlauf einer Größe x , also deren *Signal*, lässt sich durch eine Funktion f_x mit $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschreiben. Diese Funktion bildet vom *Definitionsbereich* \mathbb{R} auf den *Wertebereich* \mathbb{R}^n ab. Das bedeutet, dass die Funktion f_x jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ einen Wert $f_x(t) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Man schreibt für diese Abbildung auch $t \mapsto f_x(t)$.

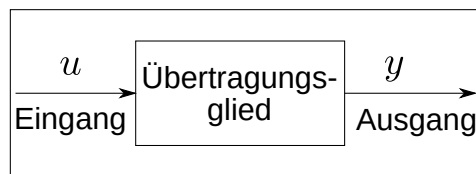


Abbildung 2: Einfaches Übertragungsglied.

Mit diesen Begrifflichkeiten lässt sich nun genauer definieren, was unter einem *Übertragungsglied* zu verstehen ist, nämlich eine Anordnung, die aus einem Eingangssignal $t \mapsto f_u(t)$ ein Ausgangssignal $t \mapsto f_y(t)$ erzeugt:

$$t \mapsto f_y(t) = \varphi(t \mapsto f_u(t)) \quad \text{bzw.} \quad f_y = \varphi(f_u) \quad (1)$$

mit dem Operator φ . Ein *Operator* ist eine Abbildung von einem Funktionenraum in einen anderen Funktionenraum¹. Im Falle eines Übertragungsgliedes wird also die Funktion f_u auf die Funktion f_y abgebildet².

WICHTIG Es ist sehr umständlich, den Verlauf einer Größe x , also deren Signal, durch Konstrukte wie $t \mapsto f_x(t)$ darzustellen und somit erst eine Funktion f_x definieren zu müssen. Häufig schreibt man daher für die Funktion einfach $x = f_x(t)$, obwohl diese Notation streng genommen nur den Wert der Funktion an der Stelle t bezeichnet³. In den Ingenieurdisziplinen hat sich weiterhin die abkürzende Schreibweise $x(t)$ anstelle von $x = f_x(t)$ eingebürgert, obwohl x eigentlich nur eine Variable und keine Funktion ist. Diese Konvention soll auch in diesem Praktikum verwendet werden. **Man sagt auch x sei die *abhängige Variable* und t die *unabhängige Variable* und symbolisiert dies durch $x(t)$. Implizit geht man dann davon aus, dass es einen funktionalen Zusammenhang zwischen t und x gibt.**

Beispiele:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau \quad \text{Operator } \varphi: \text{Ausführung bestimmte Integration}$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} u(t) \quad \text{Operator } \varphi: \text{Ausführung Differentiation}$$

¹Im Gegensatz dazu ist eine Funktion eine Abbildung von einer Zahlenmenge in eine andere Zahlenmenge, beispielsweise bildet die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $x \mapsto e^x$ die Menge der reellen Zahlen auf die Menge der positiven reellen Zahlen ab.

²In der Regelungstechnik sind f_u und f_y häufig Elemente des Raums der p -fach stetig differenzierbaren Funktionen mit geeignetem p .

³Um diese Uneindeutigkeit zu umgehen findet sich in der Literatur auch die Schreibweise $x = f_x(\cdot)$.

1.3. Lineare Übertragungsglieder

HINWEIS Der Inhalt dieses Unterabschnittes muss für alle Praktika beherrscht werden.

1.3.1. Definition linearer zeitinvarianter Übertragungsglieder

Man bezeichnet ein Übertragungsglied als *linear*, wenn für zwei beliebige Eingangssignale $u(t)$, $u^*(t)$ und beliebige reelle Konstanten c , c^* gilt:

$$\varphi(u(t) + u^*(t)) = \varphi(u(t)) + \varphi(u^*(t)) \quad (2a)$$

$$\varphi(cu^*(t)) = c\varphi(u^*(t)) \quad (2b)$$

Dabei handelt es sich um das *Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip*.

Ein Übertragungsglied ist *zeitinvariant*, wenn es das *Verschiebungsprinzip* erfüllt:

$$y(t) = \varphi(u(t)) \quad \Rightarrow \quad y(t - \tau) = \varphi(u(t - \tau)). \quad (3)$$

Ein zeitinvariantes Übertragungsglied ist nicht notwendigerweise linear.

Aufgaben:

- Zeigen Sie, dass aus (2a) und (2b) folgende Beziehung folgt:

$$\varphi(cu(t) + c^*u^*(t)) = c\varphi(u(t)) + c^*\varphi(u^*(t)).$$

- Zeigen Sie, dass ein Übertragungsglied, dessen Verhalten durch den Operator

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad u \mapsto 2u + 1$$

definiert ist, nichtlinear (!) ist.

- Prüfen Sie, ob folgende Übertragungsglieder zeitinvariant sind: a) $u \mapsto \sin^2(u)$, b) $u \mapsto t \sin(u)$.

1.3.2. Gewichts- und Übergangsfunktion

Das Übertragungsverhalten linearer Übertragungsglieder lässt sich eindeutig durch die sogenannte *Gewichtsfunktion* charakterisieren. Ist diese bekannt, so lässt sich der Verlauf der Ausgangsgröße aus dem Verlauf der Eingangsgröße berechnen.

Gewichtsfunktion. Die Gewichtsfunktion $g(t)$ beschreibt die Reaktion eines Systems auf einen DIRAC-Impuls und wird daher häufig auch *Impulsantwort* genannt. Die Faltung der

Gewichtsfunktion $g(t)$ mit einem gegebenen Eingangssignal $u(t)$ ergibt das Ausgangssignal $y(t)$:

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Etwas anschaulicher ist die Übergangsfunktion des Übertragungsgliedes, auch *Sprungantwort* des Übertragungsgliedes als Reaktion auf einen Einheitssprung genannt.

Übergangsfunktion. Reaktion des Systems auf einen Einheitssprung der Eingangsgröße. Die Übergangsfunktion $h(t)$ lässt sich aus der Gewichtsfunktion $g(t)$ wie folgt berechnen:

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau. \quad (5)$$

1.3.3. Beschreibung durch gewöhnliche Differentialgleichungen

Die Bestimmung des Ausgangssignals aus einem gegebenen Eingangssignal mit Hilfe von Gl. (4) setzt die Kenntnis der Gewichtsfunktion voraus. Diese ist jedoch nur in wenigen Fällen explizit bekannt und die Ausdrücke werden schnell unhandlich.

Eine alternative Formulierung des dynamischen Verhaltens von Übertragungsgliedern findet sich u.a. in der Beschreibung durch gewöhnliche Differentialgleichungen. Diese ergeben sich meistens auch ganz natürlich bei der theoretischen Modellbildung für ein zu untersuchendes System⁴. Bei dieser Beschreibungsform sind die Ausgangsgröße y und die Eingangsgröße u allgemein wie folgt verknüpft:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, \ddot{y}, \dot{y}, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \dots, \ddot{u}, \dot{u}, u) = 0 \quad (6)$$

mit $n, m \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{R}^{n+m+2} \rightarrow \mathbb{R}$ und den Anfangsbedingungen $y(0) =: y_{00}$, $\dot{y}(0) =: y_{01}$, \dots , $y^{(n-1)}(0) =: y_{0n-1}$. Den Parameter n bezeichnet man dabei als *Ordnung* der Differentialgleichung.

Im Falle von linearen Übertragungsgliedern vereinfacht sich Gl. (6) zu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (7)$$

mit $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$.

⁴Andere Beschreibungsformen finden sich bspw. bei Deskriptor-Systemen (Algebro-Differentialgleichungen) oder Systemen mit örtlich verteilten Parametern (partielle Differentialgleichungen).

Mit Hilfe der Substitution $x_1 := y, x_2 := \dot{y}, \dots, x_n := y^{(n-1)}$ lässt sich das System (7) *immer* in ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung überführen:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n \\
 \dot{x}_n &= \frac{1}{a_n} \left(-a_{n-1}y^{(n-1)} - \dots - a_2\ddot{y} - a_1\dot{y} - a_0y \right. \\
 &\quad \left. + b_mu^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0u \right)
 \end{aligned} \tag{8}$$

mit den Anfangsbedingungen $x_1(0) = x_{01}, x_2(0) = x_{02}, \dots, x_n(0) = x_{0n}$.

HINWEIS Die Aufgabe der Regelungstechnik besteht nicht darin, dieses Dgl.-System zu lösen, sondern dessen Lösung gezielt zu beeinflussen, ohne dabei mit der expliziten Lösung zu arbeiten.

1.4. Laplace-Transformation

HINWEIS Der Inhalt dieses Unterabschnittes muss für alle Praktika beherrscht werden.

1.4.1. Motivation und Definition

Betrachtet man Systeme, die aus mehreren Übertragungsgliedern zusammengesetzt sind (vergl. Abbildung 3), und möchte den Zusammenhang zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangssignal des Gesamtsystems beschreiben, so ist der erforderliche Umformungsaufwand typischerweise hoch. Das hängt vor allem damit zusammen, dass nicht nur die inneren Ein- und Ausgangsgrößen, sondern auch deren Ableitungen eliminiert werden müssen, in Abbildung 3 also die Größen y_1 und u_2 und deren Ableitungen.

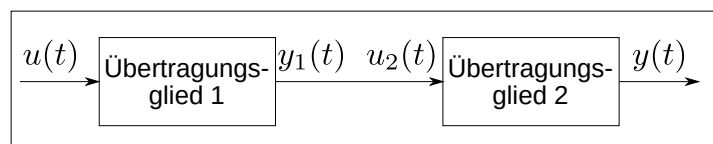


Abbildung 3: Reihenschaltung zweier Übertragungsglieder.

Beispiel:

Gegeben seien zwei Übertragungsglieder mit folgender Beschreibung:

$$\ddot{y}_1 + a_1 \dot{y}_1 + a_0 y_1 = b_0 u_1 \quad (9a)$$

$$\dot{y}_2 + c_0 y_2 = d_0 \dot{u}_2 \quad (9b)$$

Gesucht ist der Zusammenhang zwischen u_1 und y_2 der Reihenschaltung beider Übertragungsglieder. Hierzu müssen y_1 und u_2 eliminiert werden, wobei gilt: $u_2 = y_1$. Man differenziert also Gl. (9a) einmal und Gl. (9b) zweimal:

$$y_1^{(3)} + a_1 \ddot{y}_1 + a_0 \dot{y}_1 = b_0 \dot{u}_1 \quad (*) \quad \ddot{y}_2 + c_0 \dot{y}_2 = d_0 \ddot{u}_2 \quad y_2^{(3)} + c_0 \ddot{y}_2 = d_0 u_2^{(3)}$$

und setzt die Ausdrücke für \dot{u}_2 , \ddot{u}_2 und $u_2^{(3)}$ in die entsprechenden y_1 -Ausdrücke in (*) ein. Es ergibt sich (nach Zusammenfassen):

$$\frac{1}{d_0} y_2^{(3)} + \left(\frac{c_0}{d_0} + \frac{a_1}{d_0} \right) \ddot{y}_2 + \left(\frac{a_1 c_0}{d_0} + \frac{a_0}{d_0} \right) \dot{y}_2 + \frac{a_0 c_0}{d_0} y_2 = b_0 \dot{u}_1.$$

Um das Ziel zu erreichen, waren drei Ableitungsoperationen, drei Substitutionen und eine Zusammenfassung durchzuführen.

Für Untersuchungen, die auf dem Eingangs-Ausgangsverhalten des Gesamtsystems basieren, ist das direkte Arbeiten mit gewöhnlichen Differentialgleichungen also weniger geeignet. Wünschenswert ist eine Transformation, die dazu führt, dass aufwändige Umformungen vermieden werden⁵.

An dieser Stelle kommt die *Laplace-Transformation* ins Spiel. Dabei handelt es sich um eine spezielle Abbildung vom Raum der reellwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in den Raum der komplexwertigen Funktionen $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die wie folgt definiert ist:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (10)$$

Die Variable s ist dabei komplexwertig und es gilt $s = \sigma + j\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$. Abkürzend schreibt man für die Transformation auch $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Arbeitet man mit den reellwertigen Funktionen $f(t)$, so sagt man, man befinde sich im *Zeitbereich*, wohingegen man vom *Bildbereich* spricht, wenn man mit den aus der Transformation (10) entstandenen komplexwertigen Funktionen $F(s)$ operiert.

Es wird im Nachfolgenden schnell klar werden, warum eine so kompliziert anmutende und zunächst wenig anschauliche Transformation für das Arbeiten mit Übertragungsgliedern von

⁵Solche Transformationen zur Vereinfachung von Rechnungen sind beliebt. Eine weithin bekannte und sehr einfache Transformation ist das Ersetzen der Multiplikation von Zahlen durch die Addition ihrer Logarithmen: $z = x \cdot y \Leftrightarrow \log(z) = \log(x) + \log(y)$. Diese Transformation kommt (kam...) beim Rechnen mit Rechenschiebern und Logarithmentafeln zum Einsatz.

großem Vorteil ist. Dazu wird zunächst eine besonders praktische Eigenschaft der Laplace-Transformation betrachtet, nämlich die „Auswirkung“ auf die Zeitableitung \dot{f} einer Funktion f . Für die Laplace-Transformierte der Zeitableitung von f gilt:

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt}(t) e^{-st} dt.$$

Partielle Integration liefert

$$F^*(s) = [e^{-st} f(t)]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} f(t) (-se^{-st}) dt = -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Wegen (10) ergibt sich daraus

$$F^*(s) = -f(0) + sF(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Um Schwierigkeiten durch etwaige Unstetigkeiten in $t = 0$ aus dem Wege zu gehen, verwendet man anstelle von $f(0)$ den rechtsseitigen Grenzwert $f(+0)$, d.h., man erhält endgültig

$$F^*(s) = \mathcal{L}(\dot{f}(t)) = -f(+0) + sF(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(+0). \quad (11)$$

Diese Gleichung lässt sich für höhere Ableitungen von f verallgemeinern:

$$\mathcal{L}\{f^{(i)}(t)\} = s^i \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{i-1} f(+0) - s^{i-2} \dot{f}(+0) - \dots - f^{(i-1)}(+0). \quad (12)$$

Betrachtet man nun erneut die (lineare) Differentialgleichung (7) und wendet die Regel (12) unter der Annahme an, dass sämtliche Anfangswerte Null sind, so erhält man:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_2 s^2 U(s) + b_1 s U(s) + b_0 U(s). \quad (13)$$

Formal ist also die i te Ableitung der Funktion $y(t)$ durch $s^i Y(s)$ zu ersetzen und die j te Ableitung der Funktion $u(t)$ durch $s^j U(s)$. Man kann dann zusammenfassen:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0) U(s). \quad (14)$$

Wendet man dieses Verfahren nun auf die Reihenschaltung der beiden Systeme aus dem Beispiel auf Seite 12 an, so erkennt man, dass im Bildbereich nur noch eine einzige Substitution,

nämlich $Y_1(s) = U_2(s)$ durchzuführen ist. Dies führt zum Konzept der Übertragungsfunktion, das im nachfolgenden Abschnitt erläutert wird.

Aufgabe:

Wiederholen Sie die Umformung des Beispiels auf Seite 12 im Bildbereich!

WICHTIG Die getätigten Ausführungen setzen voraus, dass alle Anfangswerte in Gl. (7) Null sind. Wenn dies nicht der Fall ist, sind die entsprechenden Anfangswert-Terme in Gl. (12) mit zu berücksichtigen!

Weitere für regelungstechnische Belange wichtige Rechenregeln finden sich in Tabelle 1.

	Zeitbereich	Bildbereich	Bedeutung
1	$f(t)$	$F(s)$	Transformation gemäß Gl. (10)
2	$f^{(i)}(t)$	$s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^{i-1-j} f^{(j)}(+0)$	Ableitung im Zeitbereich
3	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$	Integration im Zeitbereich
4	$f(t - \tau),$ $\tau > 0, f(t) = 0 \text{ f. } t < 0$	$F(s)e^{-s\tau}$	Verschiebung nach rechts
5	$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$	$F(s) \cdot G(s)$	Faltung im Zeitbereich

Tabelle 1: Die allerwichtigsten Rechenregeln der Laplace-Transformation.

Eine tiefergehende Diskussion der Laplace Transformation findet sich in [2]. Rechenregeln und Korrespondenztabelle finden sich in allen gängigen Werken der Regelungstheorie, bspw. in [1], [7] oder der *Formelsammlung Systemtheorie*.

1.4.2. Übertragungsfunktion

Die in Gl. (14) vorliegende Darstellung der Dgl. (7) lässt sich zu folgender gebrochen rationalen Funktion in s umformen:

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (15)$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als *Übertragungsfunktion* des durch die Dgl. (7) beschriebenen linearen Übertragungsgliedes. Offensichtlich gilt:

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

WICHTIG Wegen Regel 5 in Tabelle 1 folgt daraus: Die Übertragungsfunktion $G(s)$ ist die Laplace-Transformierte der Gewichtsfunktion $g(t)$ (siehe Gl. (4)). Da die Übergangsfunktion $h(t)$ (siehe Gl. (5)) gerade das Integral über der Gewichtsfunktion ist, gilt für die Laplace-Transformierte der Übergangsfunktion wegen Regel 3 in Tabelle 1:

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s).$$

WICHTIG Die Nullstellen des Zählers von $G(s)$ werden als *Nullstellen* bezeichnet, die Nullstellen des Nenners von $G(s)$ als *Polstellen* oder *Pole*. Den Nenner der Übertragungsfunktion bezeichnet man auch als *Charakteristisches Polynom*. Die Polstellen sind entscheidend für das Stabilitätsverhalten des durch $G(s)$ repräsentierten Systems: Ist der Realteil mindestens einer Polstelle größer oder gleich Null, so ist das System instabil. Ist der Nennergrad der Übertragungsfunktion größer als der Zählergrad, so bezeichnet man die Übertragungsfunktion als *streng proper*. Sind Nenner- und Zählergrad identisch, so ist die Übertragungsfunktion nur *proper*. Übertragungsfunktionen, die nicht proper sind, haben differenzierenden Charakter.

WICHTIG Erneut sei an dieser Stelle daran erinnert, dass die Formulierung der Übertragungsfunktion entsprechend Gl. (15) davon ausgeht, dass für $t = 0$ alle Anfangswerte gleich Null sind. Ist dies nicht der Fall, sind entsprechende Anpassungen vorzunehmen!

1.4.3. Anfangs- und Endwertsatz

Häufig interessiert der stationäre Anfangs- oder Endwert in einem geregelten System.

Ist man an dem Anfangswert x_0 einer Zeitfunktion interessiert, so kann dieser mittels des Anfangswertsatzes der Laplace-Transformation bestimmt werden. Hat man die Bildfunktion $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ der zu untersuchenden Zeitfunktion, so gilt:

$$x_0 = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s). \quad (16)$$

Interessiert die bleibende Regelabweichung, also der Wert e_∞ der Regelabweichung, welcher sich für große t einstellt, so kann der Endwertsatz der LAPLACE-Transformation angewandt werden. Für die Bildfunktion $E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}$ der zu untersuchenden Zeitfunktion gilt:

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s). \quad (17)$$

WICHTIG Anfangs- und Endwertsatz dürfen nur angewendet werden, wenn die entsprechenden Grenzwerte auch tatsächlich existieren! Insbesondere eignet sich der Endwertsatz nicht dazu, die Instabilität eines Systems nachzuweisen.

1.4.4. Frequenzgang

Der Frequenzgang eines linearen zeitinvarianten Übertragungsgliedes mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ ist die Übertragungsfunktion dieses Gliedes ausgewertet auf der imaginären Achse der komplexen Zahlenebene. Das heißt, man setzt in $s = \sigma + j\omega$ den Realteil $\sigma = 0$. Wenn man mit dem Frequenzgang eines linearen zeitinvarianten Übertragungsgliedes arbeitet, schreibt man dementsprechend $G(j\omega)$. Der Frequenzgang charakterisiert die Sinusantwort dieses Übertragungsgliedes, also die Reaktion des Systems auf eine sinusförmige Erregung.

Interessanterweise reicht es für regelungstechnische Betrachtungen aus, mit dem Frequenzgang zu arbeiten, die Übertragungsfunktion also nur auf der imaginären Achse auszuwerten. Mehr dazu findet sich in [5, Kapitel 5] und [6, Kapitel 5].

2. Die Sprungantwort

Der Verlauf der Ausgangsgröße eines Systems als Reaktion auf ein sprungförmiges Eingangssignal wird *Sprungantwort* genannt. Aus der Sprungantwort können auch ohne Kenntnis des Systemaufbaus wichtige Eigenschaften des Übertragungsverhaltens des Systems ermittelt werden. Daher ist die Sprungantwort eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Analyse und Synthese von Regelungssystemen. Für die Wahl der korrekten Kenngrößen einer Sprungantwort ist wichtig, ob diese an einem Übertragungsglied (System) alleine (Abschnitte 2.1 bis 2.4) oder aber am geschlossenen Regelkreis (Abschnitt 2.5) aufgenommen wurde.

2.1. Sprungantwort eines einzelnen Übertragungsglieds

Abbildung 4 zeigt eine typische Sprungantwort eines stabilen Systems mit den genormten Bezeichnungen und Abkürzungen. Dabei sind zunächst zwei unterschiedliche Formen zu unterscheiden:

1. Es kommt zu einem Überschwingen der Ausgangsgröße, dannach pendelt sich der stationäre Endwert langsam ein. Es handelt sich um ein sogenanntes *schwingungsfähiges* System. In Abbildung 4 ist dieser Fall mit der durchgezogenen Linie dargestellt.

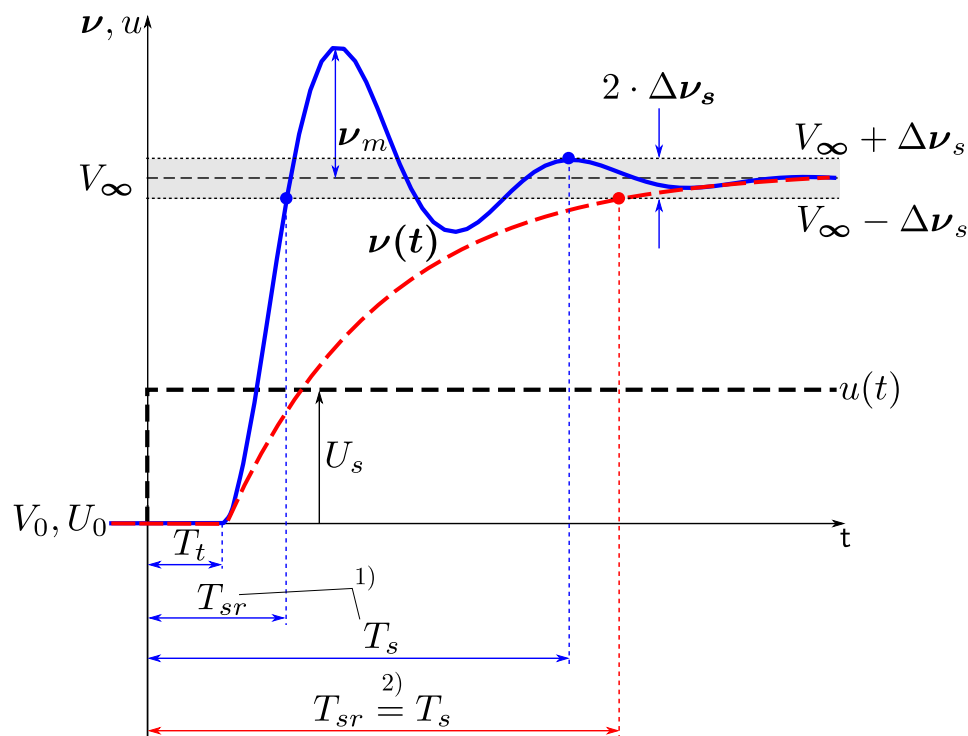
2. Die Ausgangsgröße nähert sich asymptotisch dem stationären Endwert an, ohne diesen jemals zu überschreiten (bzw. zu unterschreiten bei Reaktionen in negative Richtung). Es handelt sich um ein *nicht schwingungsfähiges* System. In Abbildung 4 ist dieser Fall mit der gestrichelten Linie dargestellt.

HINWEIS Systeme erster Ordnung sind nie schwingungsfähig. Systeme zweiter Ordnung und mehr sind schwingungsfähig, wenn mindestens ein Polpaar der Übertragungsfunktion konjugiert komplex ist, ansonsten sind sie nicht schwingungsfähig.

Desweiteren ist nach der Art des Anstieges der Sprungantwort zum Zeitpunkt des Eingangssprunges zu unterscheiden:

1. Bei einem System erster Ordnung ist der Anstieg zu Beginn ungleich 0, vergl. Abbildung 5.
2. Bei Systemen zweiter Ordnung und höher ist der Anstieg zu Beginn gleich Null. Sie beginnen also deutlich „langsamer“ mit dem Anstieg, vergl. Abbildung 6.

Die Erläuterung und Ermittlung wichtiger Kenngrößen für diese Fälle wird in den nachfolgenden Abschnitten kurz erläutert.

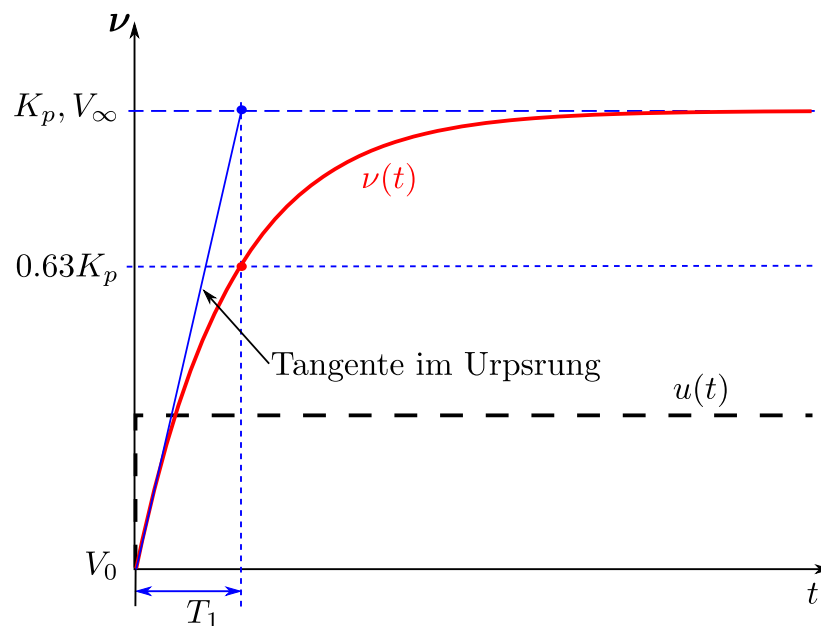


1) bei periodischem Verhalten / for periodic behavior

2) bei aperiodischem Verhalten / for aperiodic behavior

Symbol	Deutsche Bezeichnung	Englische Bezeichnung
u	Eingangsgröße	<i>input variable</i>
ν	Ausgangsgröße	<i>output variable</i>
U_0	Anfangswert der Eingangsgröße	<i>initial value of the input variable</i>
U_S	Sprunghöhe der Eingangsgröße	<i>step height of the input variable</i>
V_0, V_∞	Werte der Ausgangsgröße im Beharrungszustand vor und nach dem Sprung	<i>steady state values of the output variable before and after application of the step</i>
ν_m	Überschwingweite (größte vorübergehende Abweichung vom Wert im Beharrungszustand)	<i>overshoot (maximum transient deviation from the steady-state value)</i>
$2 \cdot \Delta\nu_s$	Toleranzbereich	<i>specified tolerance limit</i>
T_t	Totzeit	<i>dead-time</i>
T_{sr}	Anschlagzeit	<i>step response time</i>
T_s	Einschwingzeit	<i>settling time</i>

Abbildung 4: Typische Sprungantwort eines linearen Übertragungsgliedes mit P-Verhalten auf einen Sprung der Höhe U_S und zugehörige Symbole und Bezeichnungen nach DIN IEC 60050-351. Die gestrichelte Linie zeigt die Reaktion eines nicht schwingungsfähigen Übertragungsgliedes, die durchgezogene Linie die eines schwingungsfähigen Übertragungsgliedes an. **Achtung!** Für die Sprungantwort eines *geregelter Systems* (geschlossener Regelkreis) siehe Abbildung 7.



Symbol	Deutsche Bezeichnung	Englische Bezeichnung
T_1	Verzögerungszeit	<i>time constant</i>

Abbildung 5: Ermittlung der Zeitkonstante aus der Sprungantwort eines Systems erster Ordnung (nach DIN IEC 60050-351).

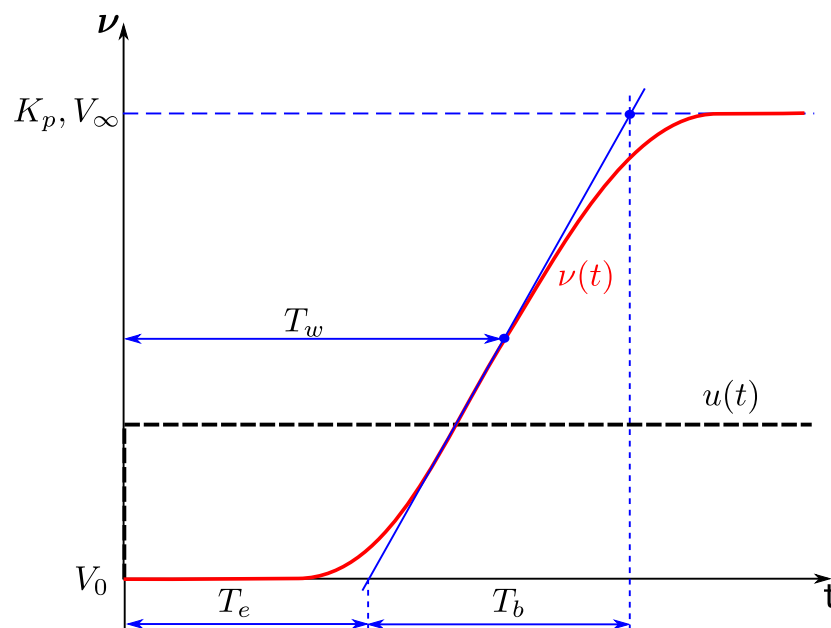
2.2. Sprungantwort von Systemen erster Ordnung („PT₁-Glieder“)

Zeigt die Sprungantwort sogenanntes PT₁-Verhalten (siehe Abbildung 5), so ist neben der stationären Verstärkung V_∞ die Verzögerungszeit T_1 von Interesse. Sie lässt sich auf drei unterschiedlichen Wegen bestimmen:

- Eine Tangente wird an beliebiger Stelle der Sprungantwort angelegt. Der Berührungspunkt dieser Tangente und der Schnittpunkt mit der durch den stationären Endwert gehenden Parallelen zur Zeitachse werden auf die Zeitachse projiziert. Die Differenz zwischen den sich so ergebenden Zeitpunkten ist die Zeitkonstante. Am besten legt man die Tangente zum Beginn der Sprungantwort an.
- Die Zeit, nach der die Sprungantwort 63.2 % des stationären Endwertes erreicht hat, ist die Zeitkonstante T_1 . Die Zahl 63.2 % entspricht dem $1 - e^{-1}$ fachen des stationären Endwertes.

- Die Zeitkonstante ergibt sich aus der Fläche, die durch den Graphen der auf den stationären Endwert normierten Sprungantwort, der Geraden, die parallel zur t -Achse durch den stationären Endwert läuft und die y -Achse begrenzt wird:

$$T_1 = \int_0^{\infty} (1 - h(\tau)/h(\infty)) d\tau.$$



Symbol	Deutsche Bezeichnung	Englische Bezeichnung
T_e	Verzugszeit	<i>equivalent dead time</i>
T_b	Ausgleichszeit	<i>equivalent time constant; balancing time</i>
P	Wendepunkt	<i>inflection point</i>
T_w	Wendezeit	<i>inflection time</i>

Abbildung 6: Ermittlung von Ausgleichzeit und Verzugszeit aus der Sprungantwort eines Systems zweiter Ordnung und höher (nach DIN IEC 60050-351).

2.3. Sprungantwort von Systemen zweiter Ordnung und höher, schwingungsfähig

Zeigt die Sprungantwort abklingend-schwingendes Verhalten mit einem stationären Endwert, so gilt für die Pole der Übertragungsfunktion des Übertragungsgliedes folgendes: Es gibt

mindestens zwei Pole, alle haben einen negativen Realteil und mindestens ein Polpaar ist konjugiert komplex. Folgende Kenngrößen sind in diesem Fall von Interesse (vergl. auch Abbildung 4, durchgezogene Linie):

- **Wendezeit:** Die Zeit T_w , bei der die Ableitung der Sprungantwort ein Maximum hat.
- **Anschwingzeitzeit:** Die Zeit T_{sr} , bei der die Sprungantwort zum ersten Male den Wert $V_\infty - \Delta v_s$ erreicht.
- **Überschwingweite:** Der Wert v_m , um den die Sprungantwort maximal über dem stationären Endwert hinausgeht. Sie wird normiert auf die Differenz zwischen stationären Anfangs- und Endwert angegeben.
- **Einschwingzeit(Ausregelzeit):** Die Zeit T_s , bei der die Sprungantwort bis auf den Wert Δv_s an den stationären Endwert herangekommen ist und von da an im Bereich $V_\infty \pm \Delta v_s$ verweilt (üblich ist $\Delta v_s = 2\%$ oder $\Delta v_s = 5\%$).

Die Sprungantwort dieser Übertragungsglieder beginnt stets mit dem Anstieg Null und hat im weiteren Verlauf (mindestens) einen Wendepunkt.

2.4. Sprungantwort von Systemen zweiter Ordnung und höher, nicht schwingungsfähig

Für den Fall eines Übertragungsgliedes, dessen Übertragungsfunktion nur negativ reelle Pole hat kommt es zu keinem Überspringen. Der Wendepunkt im Anstieg bleibt jedoch erhalten. Es sind daher nur folgende Kenngrößen von Interesse (vergl. auch Abbildungen 4 und 6):

- **Wendezeit:** Die Zeit T_w , bei der die Ableitung der Sprungantwort ein Maximum hat.
- **Verzugszeit:** Die Zeit T_e vom Beginn der Sprungantwort bis zum Schnittpunkt der an den Wendepunkt angelegten Tangente mit der Zeitachse.
- **Ausgleichszeit:** Durch die Schnittpunkte der Wendetangente mit der Zeitachse und der Geraden, die parallel zur Zeitachse durch den stationären Endwert läuft ergibt sich eine Strecke. Deren Projektion auf die Zeitachse ergibt die Ausgleichszeit T_b .

Die Sprungantwort dieser Übertragungsglieder beginnt stets mit dem Anstieg Null und hat im weiteren Verlauf (mindestens) einen Wendepunkt.

WICHTIG Solche nicht schwingungsfähigen Strecken lassen sich stets durch Hintereinanderschaltung mehrerer Strecken erster Ordnung realisieren!

2.5. Sprungantwort eines geschlossenen Regelkreises

Für den Fall eines geregelten Systems zeigen die Abbildungen 7 und 8 die typische Führungs- und Störsprungantwort mit den genormten Bezeichnungen und Abkürzungen, welche in Tabelle 2 aufgeführt sind.

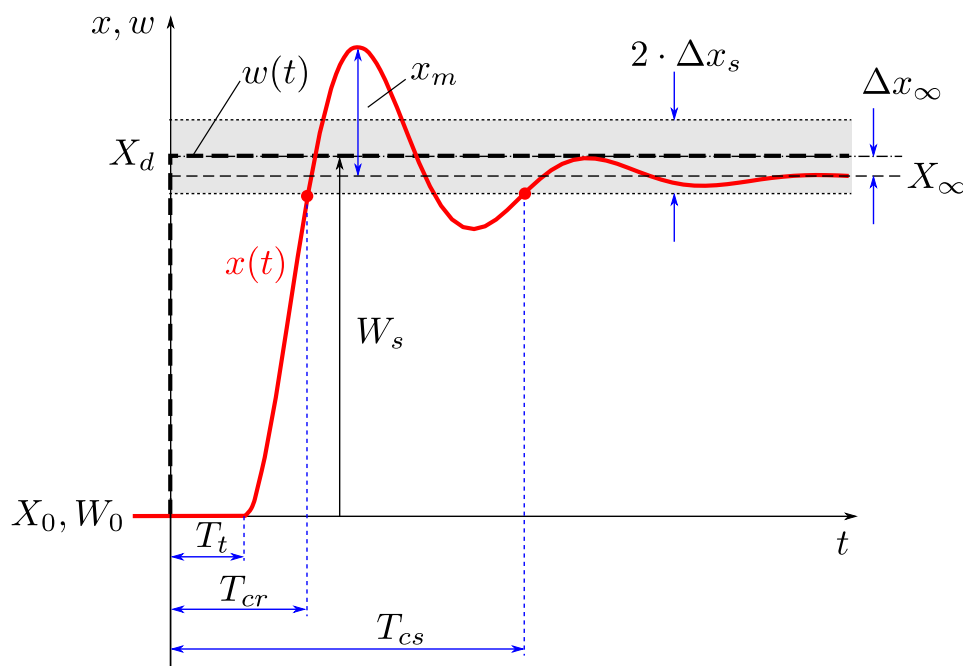


Abbildung 7: Typische Sprungantwort eines geschlossenen Regelkreises als Reaktion auf einen Sprung der Führungsgröße w und zugehörige Symbole nach DIN IEC 60050-351. Für die Bezeichnungen siehe Tabelle 2. Achtung! Für die Sprungantwort eines Übertragungsgliedes alleine siehe Abbildung 4.

Symbol	Deutsche Bezeichnung	Englische Bezeichnung
w	Führungsgröße	<i>reference variable</i>
z	Störgröße	<i>disturbance variable</i>
x	Regelgröße	<i>controlled variable</i>
X_0, X_∞	Werte der Regelgröße im Beharrungszustand vor und nach dem Sprung	<i>steady state values of the controlled variable before and after application of the step</i>
X_d	Sollwert	<i>desired value</i>
ΔX_∞	Abweichung im Beharrungszustand	<i>steady state deviation</i>
x_m	Überschwingweite	<i>overshoot</i>
$2 \cdot \Delta x_s$	Toleranzbereich	<i>specified tolerance limit</i>
T_t	Totzeit	<i>dead-time</i>
T_{cr}	Anregelzeit (Zeit, bis Regelgröße das erste Mal (nach Verlassen) wieder in das Toleranzband einläuft)	<i>control rise time</i>
T_{cs}	Ausregelzeit (Zeit, bis Regelgröße das erste Mal (nach Verlassen) dauerhaft im Toleranzband verbleibt)	<i>control settling time</i>

Tabelle 2: Abkürzungen und Bezeichnungen einer Sprungantwort im geschlossenen Regelkreis DIN IEC 60050-351.

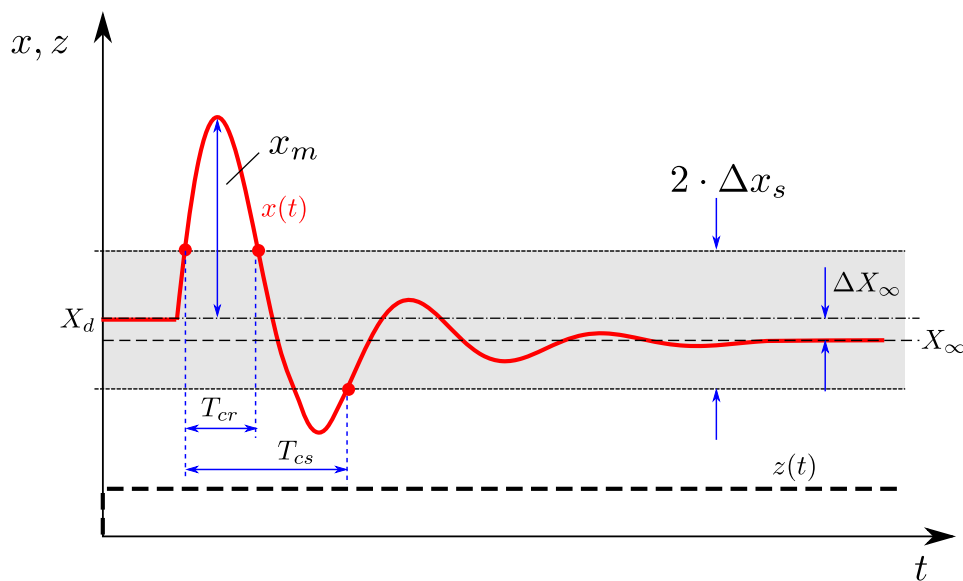


Abbildung 8: Typische Sprungantwort eines *geschlossenen Regelkreises* als Reaktion auf einen Sprung der Störgröße z und zugehörige Symbole nach DIN IEC 60050-351. Für die Bezeichnungen siehe Tabelle 2.

3. Bode-Diagramm

HINWEIS Der Inhalt dieses Abschnittes muss für alle Praktika beherrscht werden.

3.1. Grundlagen des Bodediagramms

Im Bode-Diagramm (auch: Frequenzkennliniendiagramm) werden *Betrag* $|G(j\omega)|$ und *Phase* $\arg(G(j\omega))$ des Frequenzgangs eines Übertragungsgliedes mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω dargestellt. Dabei sind folgende Bezeichnungen üblich:

- $|G(j\omega)|$: Amplitudengang, Amplitudenkennlinie, Amplituden(dichte)spektrum
- $\arg(G(j\omega))$: Phasengang, Phasenkennlinie, Phasen(dichte)spektrum

Da der Amplitudengang betragsmäßig häufig große Wertebereiche über einem großen Frequenzintervall abdeckt, wird er im Bodediagramm grafisch wie folgt dargestellt: Auf der Abszisse wird die Kreisfrequenz ω mit dekadisch logarithmischer Skala aufgetragen. Die Ordinate wird linear geteilt und auf ihr der Amplitudengang $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$ in Dezibel (dB) aufgetragen. Dabei gilt:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg |G(j\omega)| \quad (18)$$

mit dem dekadischen Logarithmus \lg . In der nachfolgenden Tabelle 3 finden sich einige technisch relevante Entsprechungen:

$ G $	$ G _{dB}$		$ G $	$ G _{dB}$
100	40		4	12
10	20		2	6
1	0		1	0
$1/\sqrt{2}$	-3		0.5	-6
0.1	-20		0.25	-12
0.01	-40		0.125	-18
0.001	-60		0.0625	-24

Tabelle 3: Technisch relevanter Werte von $|G|$.

WICHTIG Eine Verdopplung der Amplitude bedeutet stets eine Erhöhung um 6 dB, eine Halbierung der Amplitude entspricht stets einer Reduktion um 6 dB der Amplitudenkennlinie im Bodediagramm.

Die Phasenkennlinie ist die Darstellung der Phase $\varphi = \arg(G(j\omega))$ in Abhängig vom dekadischen Logarithmus der Kreisfrequenz ω . Abbildung 9 zeigt ein typisches Bode-Diagramm, die dazugehörige Größen sind in Tabelle 4 zusammengefasst und werden in Abschnitt 3.2 näher erläutert.

Näherungsweise Konstruktion: Für bestimmte Übertragungsglieder lässt sich das Bodediagramm näherungsweise recht einfach konstruieren. So kann der Verlauf des Amplitudengangs häufig durch Geraden approximiert werden. Ähnliches gilt für den Phasengang. Näheres dazu wird in Abschnitt 4 zu den jeweiligen Übertragungsgliedern diskutiert.

3.2. Stabilitätsaussagen im Bodediagramm

Hierzu zunächst einige Begriffsdefinitionen:

Durchtrittskreisfrequenz ω_c : Diejenige Kreisfrequenz, bei der der Amplitudengang im Bodediagramm die ω -Achse schneidet. Das bedeutet: $|G(j\omega_c)| = 1$.

Phasenschnittkreisfrequenz ω_π : Diejenige Kreisfrequenz, bei der der Phasengang den Wert -180° annimmt.

Es lässt sich nun folgendes Stabilitätskriterium ableiten (vereinfachtes Nyquist-Kriterium):

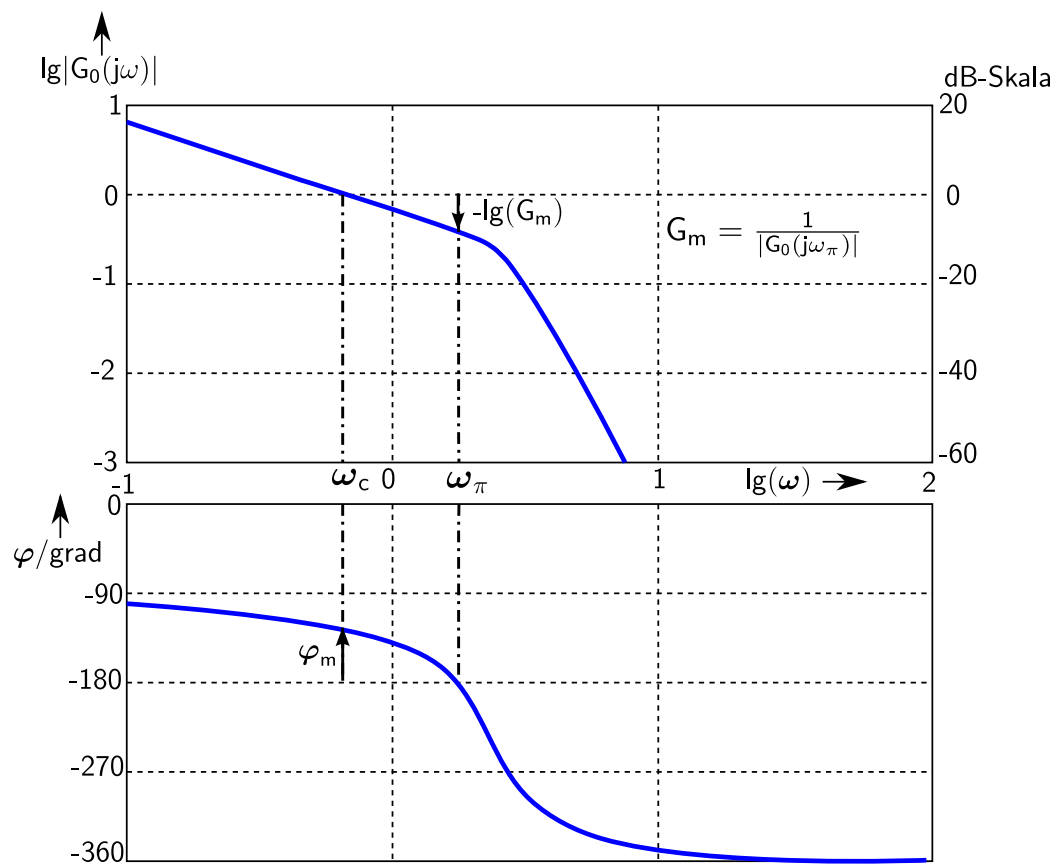


Abbildung 9: Skizze eines typischen Bode-Diagrammes.

G_0	Frequenzgang des aufgeschnittenen Regelkreises	<i>frequency response</i>
$ G_0 $	Amplitudengang des aufgeschnittenen Regelkreises	<i>gain response; amplitude response</i>
φ	Phasengang des aufgeschnittenen Regelkreises	<i>phase response</i>
ω	Kreisfrequenz	<i>angular frequency</i>
ω_c	Durchtrittskreisfrequenz	<i>gain crossover angular frequency</i>
φ_m	Phasenreserve	<i>phase margin</i>
ω_π	Phasenschnittkreisfrequenz	<i>phase crossover angular frequency</i>
G_m	Betragsreserve	<i>gain margin</i>

Tabelle 4: Typische Kenngrößen eines Bode-Diagramms.

Wenn die Pole der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises alle links der imaginären Achse liegen, wobei maximal zwei Pole in $s = 0$ die Ausnahme machen dürfen, und die Phase im Bereich $\omega < \omega_c$ zwischen $+180^\circ$ und -540° liegt, so ist der geschlossene Regelkreis stabil, wenn bei der Durchtrittsfrequenz ω_c der Phasengang des offenen Regelkreises oberhalb von -180° Grad verläuft.

WICHTIG Diese Version des Nyquist-Kriteriums ist für Übertragungsglieder, die Pole in der rechten Halbebene haben, *nicht anwendbar*. In einem solchen Fall ist auf das verallgemeinerte Nyquist-Kriterium zurückzugreifen, vergl. Abschnitt 8.2.

Es ist sinnvoll, den geschlossenen Regelkreis so auszulegen, dass er nicht direkt an der Stabilitätsgrenze betrieben wird, sondern ein gewisser „Sicherheitsabstand“ zu dieser gewahrt bleibt. Hierzu wurden die beiden folgenden Begriffe eingeführt:

Amplitudenreserve (Amplitudenrand, Betragsreserve) $|G_m|_{\text{dB}}$: Ist der Betrag des Amplitudenganges, der bei einem Phasenwinkel von -180° angenommen wird:

$$|G_m|_{\text{dB}} = 20 \lg\left(\frac{1}{|G(j\omega_\pi)|}\right) \quad \text{für } \arg G(j\omega_\pi) = -180^\circ. \quad (19)$$

Im Bodediagramm sollte die Amplitudenreserve natürlich stets positiv sein.

Phasenreserve (Phasenrand) φ_m : Ist der Abstand der Phase zu dem Winkel -180° für $\omega = \omega_c$, also für die Frequenz, bei der die Amplitudenkennlinie des Bodediagramms die ω -Achse schneidet:

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg G(j\omega) \quad \text{für } |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 0. \quad (20)$$

4. Übertragungseigenschaften ausgewählter linearer zeitinvarianter Übertragungsglieder

HINWEIS Das Aussehen der Frequenzgänge und Sprungantworten der in diesem Abschnitt besprochenen Übertragungsglieder sowie deren Verhalten in Abhängigkeit von der Lage von Polen und Nullstellen sollten Sie für alle Praktika beherrschen!

Linearität und Zeitinvarianz

Übertragungsglieder werden als *linear* bezeichnet, wenn für Sie das Superpositions- und das Verschiebungsprinzip erfüllt sind. Wird das Übertragungsverhalten zwischen einem Eingangssignal $u(t)$ und einem Ausgangssignal $y(t)$ durch den Operator ϕ beschrieben, so gilt für verschiedene Eingangssignale u, u_1, u_2 und reelle Zahlen k_1, k_2 sowie $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} \text{Linearität:} \quad & \phi(k_1 u_1 + k_2 u_2) = k_1 \phi(u_1) + k_2 \phi(u_2) \\ \text{Zeitinvarianz:} \quad & y(t) = \phi(u)(t) \quad \Rightarrow \quad \phi(u)(t - \tau) = y(t - \tau) \end{aligned}$$

Strecken mit und ohne Ausgleich

Erreicht das Ausgangssignal eines Übertragungsgliedes nach Aufschalten einer sprungförmigen Eingangsgröße keinen stationären Endwert, so wird die durch das Übertragungsglied bezeichnete Strecke als *Strecke ohne Ausgleich* oder *Integrale Strecke* beziehungsweise Strecke mit *I-Verhalten* bezeichnet. Wird hingegen ein stationärer Endwert erreicht, so bezeichnet man die Strecke als *Strecke mit Ausgleich* oder *Proportionalstrecke* beziehungsweise Strecke mit *P-Verhalten*.

Nachfolgend werden die Eigenschaften einiger wichtiger Übertragungsglieder diskutiert.

4.1. Das PT₁-Glied

Ein Proportional wirkendes Verzögerungsglied erster Ordnung, zugehörige Differenzialgleichung mit der Zeitkonstanten $T_1 > 0$ und dem Verstärkungsfaktor (statische Verstärkung) $K_p \in \mathbb{R}$:

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K_p u(t), \quad y(0) = y_0. \quad (21)$$

Übergangsfunktion:

$$h(t) = K_p (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}). \quad (22)$$

Die Übertragungsfunktion des PT₁-Gliedes lautet:

$$G(s) = \frac{K_p}{1 + T_1 s}. \quad (23)$$

Für den Amplituden- und Phasengang ergibt sich:

$$|G(j\omega)| = |K_p| \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1}} \quad \arg G(j\omega) = -\arctan(\omega T_1). \quad (24)$$

HINWEIS Die Bezeichnung PT₁-Glied bezieht sich im Allgemeinen auf ein *stabiles* System erster Ordnung, d.h., die Übertragungsfunktion [23](#) hat einen negativen Pol $s_1 = -\frac{1}{T_1}$. Im Falle eines instabilen Systems bleibt der Amplitudengang unverändert, wohingegen der Phasengang an der ω -Achse gespiegelt wird.

Approximation des Bodediagramms

Die Darstellung des Frequenzganges des PT_1 -Gliedes im Bodediagramm lässt sich einfach durch zwei Geraden approximieren:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \lg \left(|K_p| \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1}} \right) \\ &= 20 \lg |K_p| - 20 \lg \sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1} \\ &= 20 \lg |K_p| - 20 \lg \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

mit $\omega_e = \frac{1}{T_1}$. Analog erhält man für den Phasengang

$$\arg G(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_e}.$$

Damit erhält man folgende Abschätzungen:

- Für $\frac{\omega}{\omega_e} \ll 1$ gilt:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \lg |K_p| = |K_p|_{\text{dB}}, \quad \arg G(j\omega) \approx 0$$

- Für $\frac{\omega}{\omega_e} \gg 1$ gilt:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \lg |K_p| - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_e}, \quad \arg G(j\omega) \approx -90^\circ,$$

das bedeutet, der Amplitudengang fällt um 20 dB, wenn man die Frequenz verzehnfacht. Man sagt auch, er fällt linear mit -20 dB pro Dekade.

Knickfrequenz ω_e : Die Frequenz ω_e wird auch *Knickfrequenz* genannt. Beim PT_1 -Glied beträgt die Phasenverschiebung für $\omega = \omega_e$ genau 45 Grad.

Grenzfrequenz ω_g : Die Frequenz, bei der die Amplitude auf das $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -fache⁶ des statischen Wertes abgefallen ist (das heißt um 3 dB):

$$|G(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |G(0)|,$$

also

$$|G(j\omega_g)|_{\text{dB}} \approx |G(0)| - 3\text{dB}.$$

Beim PT_1 -Glied fallen Grenz- und Knickfrequenz zusammen!

Bandbreite: Das Intervall $0 \dots \omega_g$.

Bedeutung der Zeitkonstanten T_1 :

⁶Dieser Wert resultiert aus Energiebetrachtungen der Signale, siehe [3], Abschnitt 6.7.

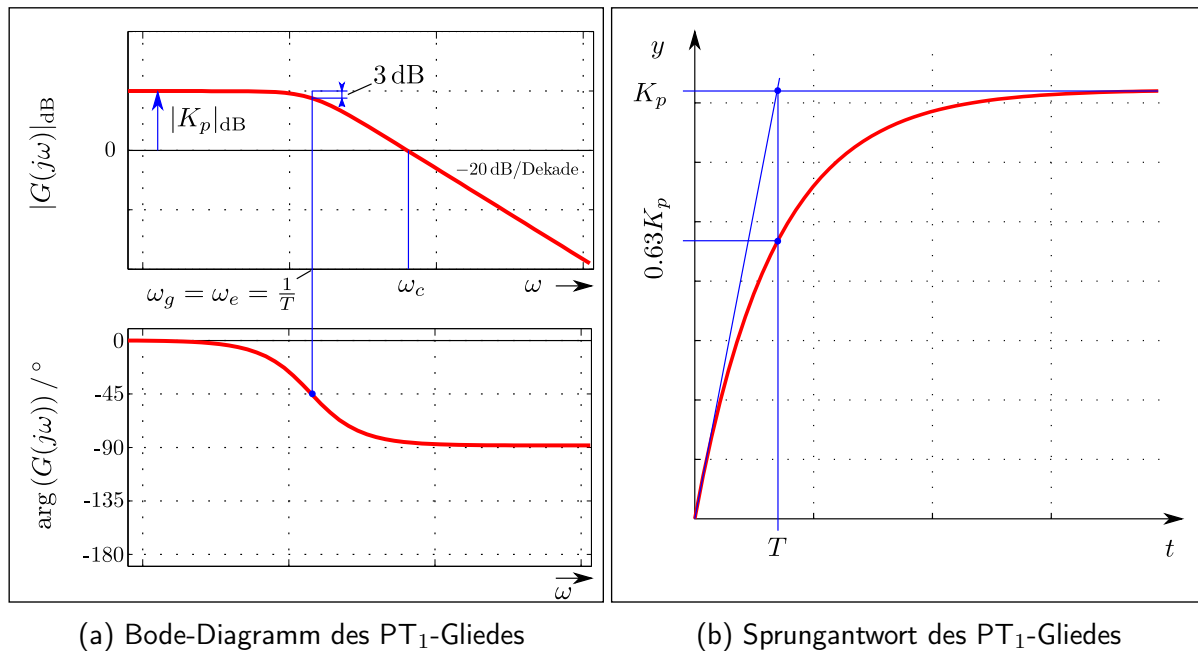


Abbildung 10

- Die Zeit, bei der die Übergangsfunktion auf 63% des stationären Wertes angestiegen ist (siehe Abschnitt 2).
- Der umgekehrte Wert definiert die Knickfrequenz.
- Je kleiner T_1 , desto weiter links liegt der Pol in der linken offenen Halbebene und desto größer ist die Bandbreite des Systems. Je weiter links die Pole in der linken offenen Halbebene liegen, desto schneller ist das Übergangsverhalten.

4.2. Das PT₂-Glieder

Proportional wirkendes, gegebenenfalls schwingungsfähiges Verzögerungsglied zweiter Ordnung mit der Differenzialgleichung

$$T^2 \ddot{y}(t) + 2\vartheta T \dot{y}(t) + y(t) = K_p u(t), \quad \dot{y}(0) = 0, \quad y(0) = 0. \quad (25)$$

Hierin bezeichnen T die Zeitkonstante und ϑ den Dämpfungsfaktor. Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{K_p}{T^2 s^2 + 2\vartheta T s + 1}. \quad (26)$$

Bei diesem Übertragungsglied wird häufig auch mit der *Eigenfrequenz* $\omega_0 = \frac{1}{T}$ gearbeitet. Die charakteristische Gleichung des PT₂-Gliedes ergibt sich dann zu

$$\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2\vartheta}{\omega_0} s + 1 = 0 \quad (27)$$

mit den Polen

$$s_{1,2} = -\omega_0 \vartheta \pm \omega_0 \sqrt{\vartheta^2 - 1}. \quad (28)$$

Verhalten in Abhängigkeit von der Dämpfung

In Abhängigkeit von der Lage der Pole in der komplexen Zahlenebene verhält sich das PT₂-Glied unterschiedlich:

- **Zwei negative reelle Pole** ($\vartheta > 1$, sogenannter Kriechfall)

Einführung zweier Zeitkonstanten $T_1 = \frac{1}{s_1}$, $T_2 = \frac{1}{s_2}$, so dass das Verhalten dem zweier in Reihe geschalteter PT₁-Glieder entspricht:

$$G(s) = \frac{K_p}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}. \quad (29)$$

Für steigende Frequenzen fällt der Amplitudengang nach der ersten Knickfrequenz mit -20 dB/Dekade und nach der zweiten Knickfrequenz mit -40 dB/Dekade. Die Phasenverschiebung beträgt für hohe Frequenzen 180°.

- **negativer Doppelpol** ($\vartheta = 1$, sogenannter aperiodischer Grenzfall)

entspricht einer Reihenschaltung zweier PT₁-Glieder mit identischer Zeitkonstanten T_1 . Die Knickfrequenz ergibt sich zu $\omega_e = \frac{1}{T} = \omega_0$.

Verschiebt man ausgehend von diesem negativen Doppelpol die Pole in entgegengesetzter Richtung auf der reellen Achse, so weist die Doppelpolkonfiguration in jedem Fall die geringste Verzugszeit im Vergleich zu der durch die Verschiebung entstandenen auf.

- **konjugiert komplexes Polpaar mit negativem Realteil** ($0 < \vartheta < 1$, sogenannter Schwingfall)

Die Pole ergeben sich zu

$$s_{1,2} = -\omega_0 \vartheta \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2},$$

so dass die Übergangsfunktion lautet:

$$h(t) = K_p \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} e^{-\vartheta \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2} t + \arccos \vartheta) \right).$$

Dies beschreibt im wesentlichen eine aufgrund der e-Funktion abklingende Sinusschwingung. Für Dämpfungen größer 0.5 kommt es dabei nur noch zum einmaligen Überschwingen über den stationären Endwert.

- **rein imaginäres Polpaar** ($\vartheta = 0$, ungedämpfte Schwingung)

Die Übergangsfunktion lautet für diesen Fall

$$h(t) = K_p(1 - \cos \omega_0 t).$$

Das System schwingt also mit gleichbleibender Amplitude und der Frequenz ω_0 , ist also instabil (zählt strenggenommen nicht mehr als PT₂-Glied).

- **Pole mit positivem Realteil** ($\vartheta < 0$, instabile Fälle)

Das Übertragungsglied ist instabil (zählt strenggenommen nicht mehr als PT₂-Glied). Im Falle konjugiert komplexer Pole mit positivem Realteil stellen sich Schwingungen mit wachsender Amplitude ein, im Falle positiv reeller Pole ist die Übergangsfunktion streng monoton wachsend.

Bodediagramm

Für Dämpfungen $\vartheta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ kommt es in der Nähe der Eigenfrequenz ω_0 zur Resonanz, d.h., zu einem Anstieg des Amplitudenganges. Dieser Anstieg wird als *Resonanzüberhöhung* bezeichnet, die Frequenz ω_r als *Resonanzfrequenz*. Sie ergibt sich zu

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\vartheta^2}. \quad (30)$$

Die Resonanzüberhöhung beträgt

$$|G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\vartheta\sqrt{1 - \vartheta^2}}. \quad (31)$$

WICHTIG Beachten Sie den Unterschied zwischen Eigenfrequenz ω_0 und Resonanzfrequenz ω_r . Nur für den ungedämpften Fall $\vartheta = 0$ fallen beide Frequenzen zusammen!

Approximation des Bodediagramms

Auch für das PT₂-Glied ist eine approximative Konstruktion des Frequenzganges im Bodediagramm durch Geraden möglich, denn es gilt

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg |K_p| - 20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\vartheta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (32)$$

woraus folgt

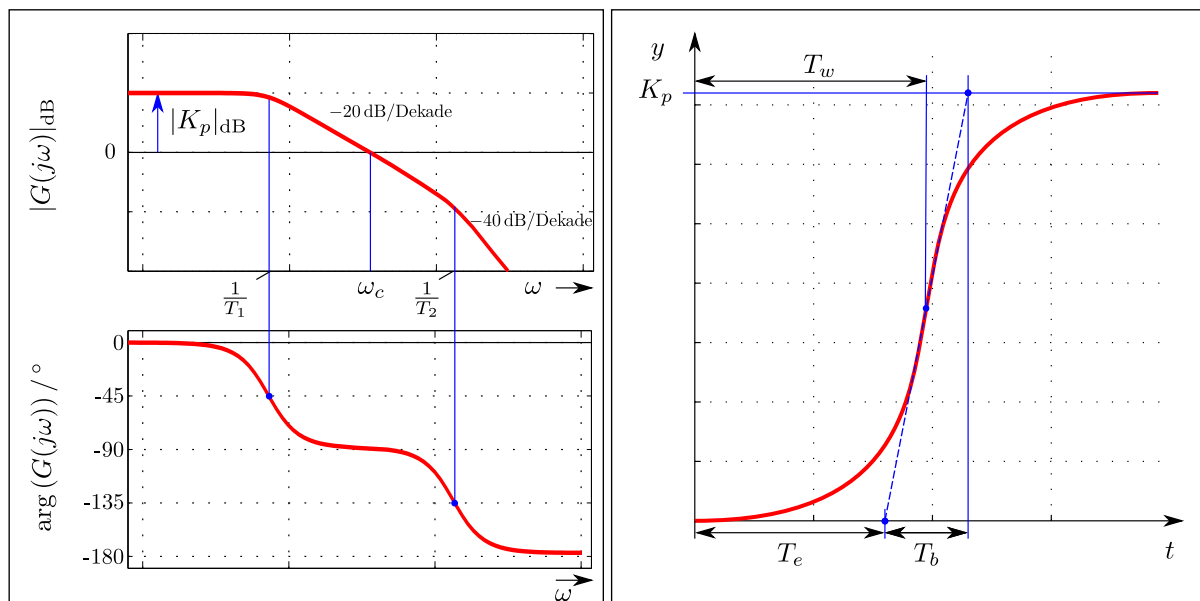
(a) Bode-Diagramm des PT₂-Gliedes (Kriechfall) (b) Sprungantwort des PT₂-Gliedes (Kriechfall)

Abbildung 11

- für $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \lg |K_p|, \quad \arg G(j\omega) \approx 0^\circ$$

- für $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$:

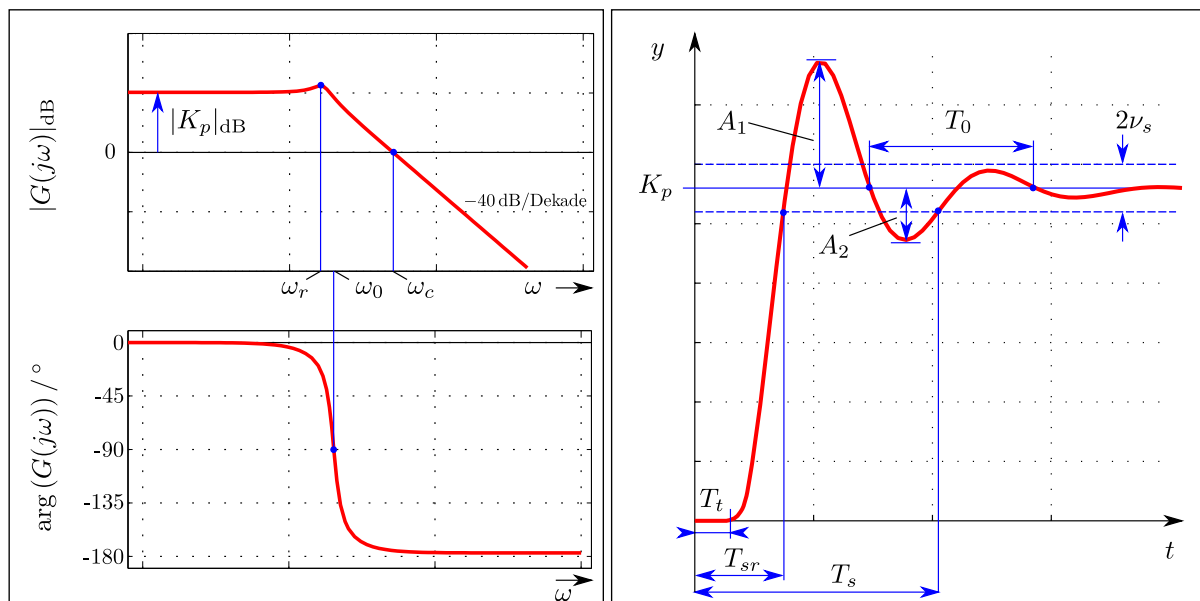
$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \lg |K_p| - 20 \lg \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 20 \lg |K_p| - 40 \lg \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \arg G(j\omega) \approx 180^\circ,$$

das bedeutet, der Amplitudengang fällt mit -40 dB pro Dekade. Der Schnittpunkt beider Näherungsgeraden liegt bei der Kreisfrequenz $\omega = \omega_0 = \frac{1}{T}$.

Die Approximationsgenauigkeit in der Nähe von ω_0 hängt von der Dämpfung und der damit verbunden Resonanzüberhöhung ab. Für $\omega = \omega_0$ beträgt der Wert des Phasengangs 90° .

4.3. Das PT_n-Glied

Proportional wirkende Verzögerungsglieder höherer (n -ter) Ordnung. Für den Fall, dass die Pole der zugehörigen Übertragungsfunktion reell sind, kann das Verhalten des PT_n-Gliedes



(a) Bode-Diagramm des PT₂-Gliedes (schwingungsfähig) (b) Sprungantwort des PT₂-Gliedes (schwingungsfähig)

Abbildung 12

durch die Reihenschaltung von n PT₁-Gliedern mit ihren jeweiligen Knickfrequenzen beschrieben werden.

$$G(s) = \frac{K_p}{(1 + T_1 s) \cdot \dots \cdot (1 + T_n s)}. \quad (33)$$

Das bedeutet:

- Der Amplitudengang ist für Frequenzen, die deutlich kleiner als die kleinste Knickfrequenz sind, eine Gerade parallel zur ω -Achse und hat den Wert $|K_p|_{\text{dB}}$.
- Der Amplitudengang fällt für wachsende Frequenzen nach jeder Knickfrequenz mit -20, -40, -60, ... dB pro Dekade.
- Die Phase fällt von 0° auf $-n \cdot 90^\circ$.

4.4. Das I-Glied

Beim Integrierglied ist das Ausgangssignal proportional zum Integral der Eingangsgröße. Der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangssignal genügt der Gleichung

$$T_I \dot{y}(t) = u(t), \quad y(0) = y_0 \quad (34)$$

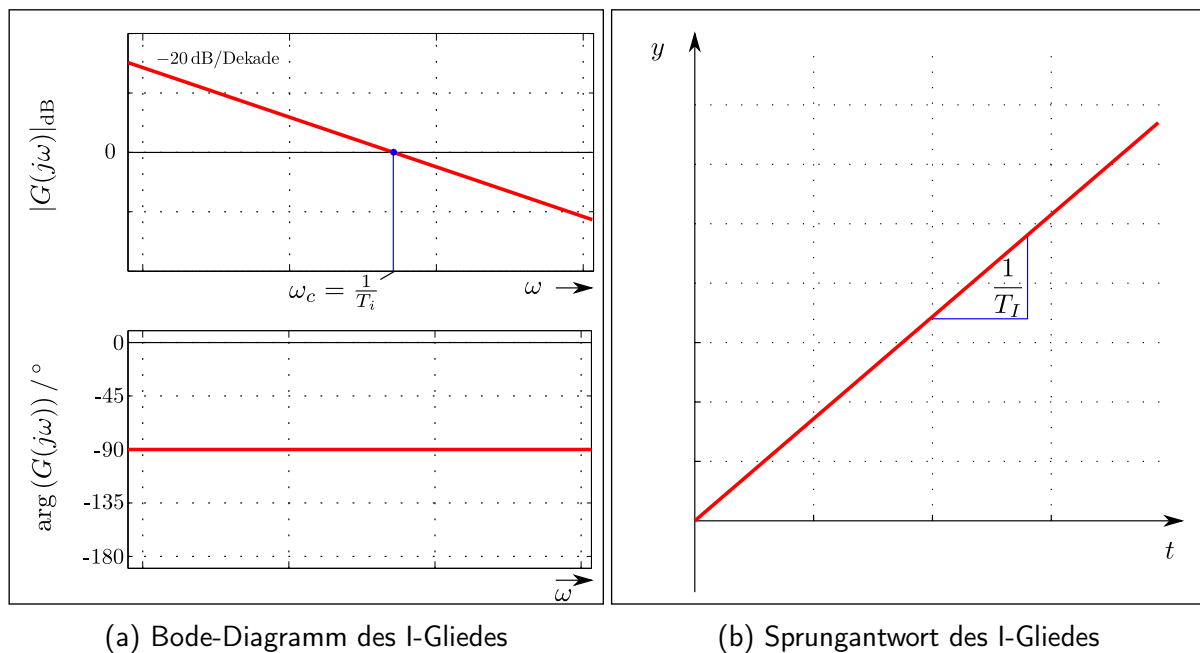


Abbildung 13

mit der *Integrierzeit* T_I . Der Kehrwert $1/T_I =: K_I$ wird *Integrierbeiwert* genannt. Für das Ausgangssignal gilt

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) d\tau + y(0) \quad (35)$$

und die Übergangsfunktion $h(t)$ lautet

$$h(t) = \frac{1}{T_I} t, \quad (36)$$

ist also eine Rampenfunktion mit dem Anstieg $\frac{1}{T_I}$.

Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{1}{T_I s}, \quad (37)$$

so dass sich für den Amplitudengang eine Gerade mit einem negativen Anstieg von -20 dB pro Dekade ergibt:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \lg T_I - 20 \lg \omega.$$

Diese schneidet die Frequenzachse bei $\omega = \frac{1}{T_I}$. Die Phase liegt konstant bei -90° .

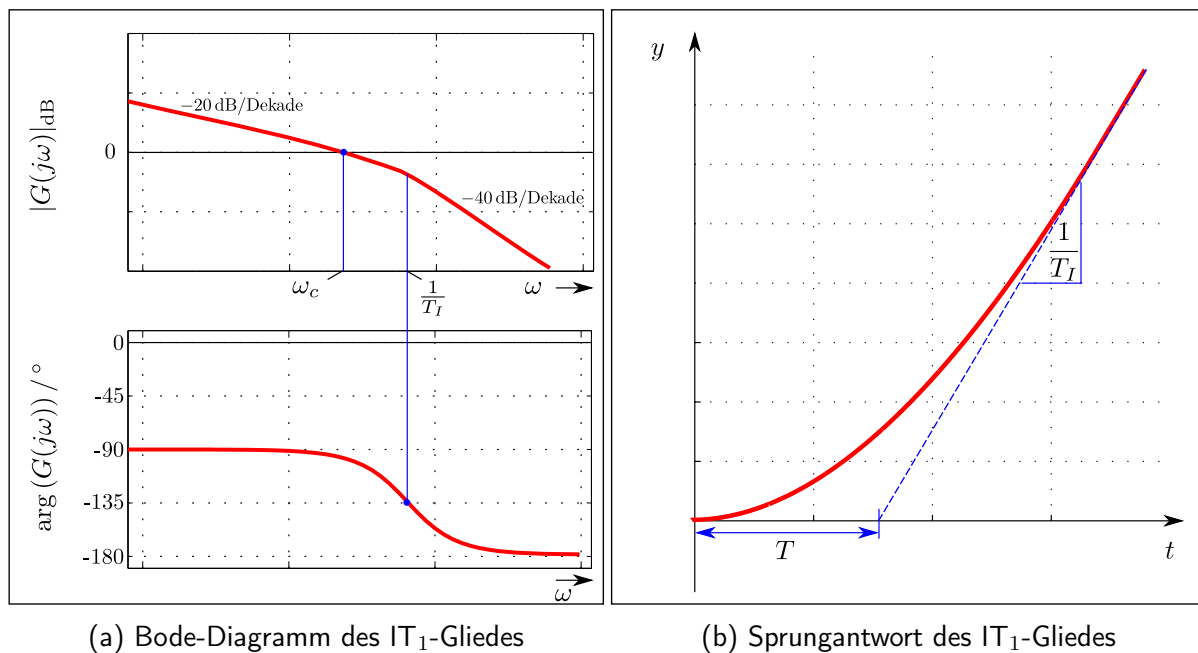


Abbildung 14

4.5. Das IT₁-Glieder

Integrierglied mit Verzögerung. Es wird durch die Differenzialgleichung

$$T_I T \ddot{y}(t) + T_I \dot{y}(t) = u(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (38)$$

mit der Integrierzeit T_I und der Verzögerungszeitkonstanten T beschrieben. Es handelt sich um die Reihenschaltung eines Integriergliedes und eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung. Das Übergangsverhalten des I-Gliedes (Rampenfunktion) wird erst mit einer durch T definierten Verzögerung erreicht. Die Übergangsfunktion $h(t)$ lautet

$$h(t) = \frac{1}{T_I} t - \frac{T}{T_I} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (39)$$

Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{1}{(Ts + 1)T_I s} = \frac{K_I}{(Ts + 1)s}. \quad (40)$$

Die Darstellung des Frequenzganges im Bodediagramm findet sich in [Abbildung 14a](#)

4.6. Das D-Glied

Das verzögerungsfreie Differenzierglied wird durch die Gleichung

$$y(t) = K_D \frac{du(t)}{dt} \quad (41)$$

beschrieben, d.h., ihre Ausgangsgröße hängt im wesentlichen von *Änderungen* der Eingangsgröße ab und wird bei konstanter Eingangsgröße Null. Der Parameter K_D wird *Differenzierbeiwert* genannt. Häufig wird auch das Symbol T_D verwendet, welches als *Differenzierzeit* bezeichnet wird. Die Übergangsfunktion wird durch den DIRAC-Impuls $\delta(t)$ beschrieben:

$$h(t) = T_D \delta(t). \quad (42)$$

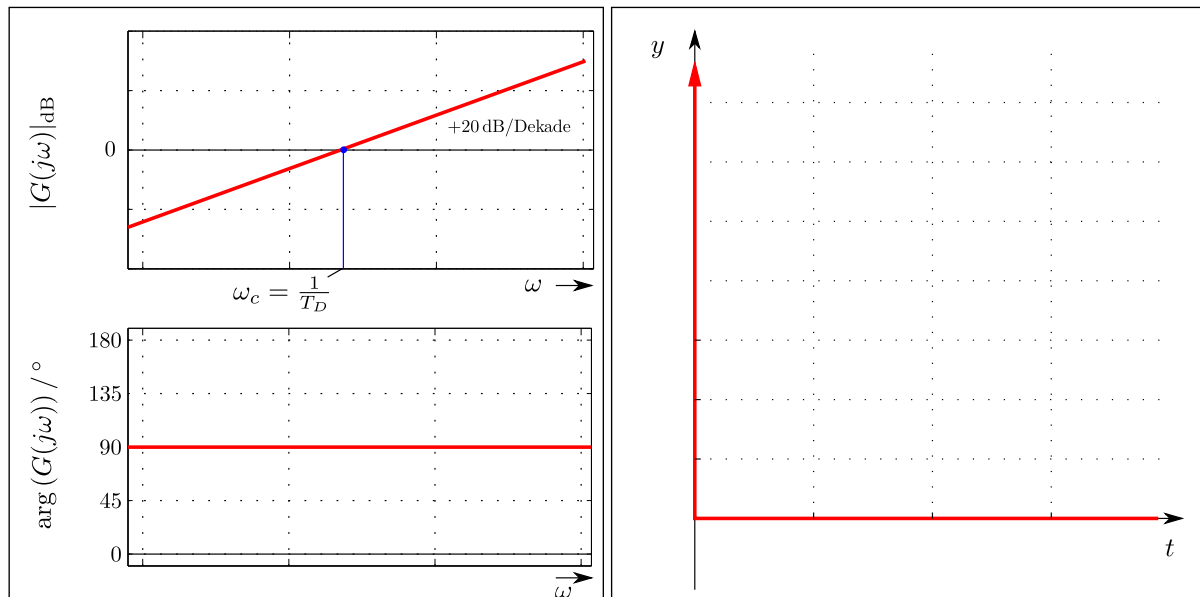
Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = T_D s, \quad (43)$$

so dass sich für den Amplitudengang eine Gerade mit einem positivem Anstieg von 20 dB pro Dekade ergibt:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg T_D + 20 \lg \omega.$$

Diese schneidet die Frequenzachse bei $\omega = \frac{1}{T_D}$. Die Phase liegt konstant bei 90° .



(a) Bode-Diagramm des D-Gliedes

(b) Sprungantwort des D-Gliedes

Abbildung 15

4.7. Das DT_1 -Glied

Verzögerungsbehaftetes Differenzierglied (auch *Vorhalteglied*), bei dem der differenzierende Charakter „gedämpft“ wird. Die Differenzialgleichung lautet

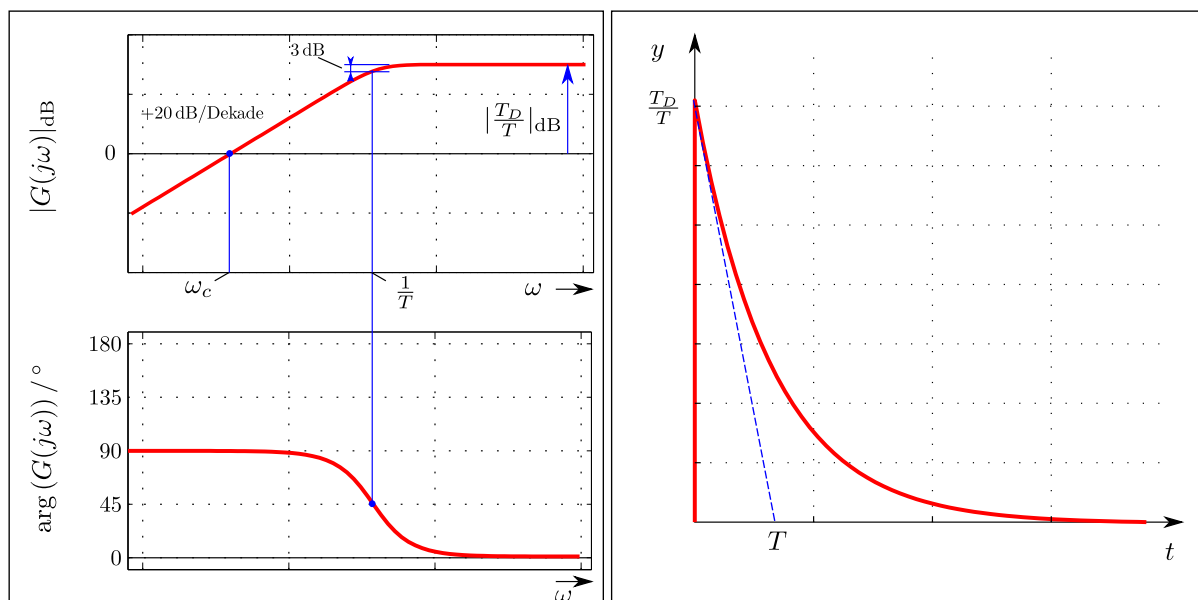
$$T\dot{y}(t) + y(t) = T_D\dot{u}(t), \quad y(0) = 0 \quad (44)$$

Die Übergangsfunktion des DT_1 -Gliedes steigt zunächst sprunghaft auf den Wert $\frac{T_D}{T}$ an und klingt dann exponentiell ab.

Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{T_D s}{T s + 1}. \quad (45)$$

Die Darstellung des Frequenzganges im Bodediagramm findet sich in Abbildung 16a.



(a) Bode-Diagramm des DT_1 -Gliedes

(b) Sprungantwort des DT_1 -Gliedes

Abbildung 16

4.8. Der Allpass erster Ordnung

Allpassglieder sind Übertragungsglieder, die alle Frequenzen in gleicher Weise verstärken und bei sinusförmigen Signalen nur die Phasenlage verändern. Für den Frequenzgang gilt damit

$$|G(j\omega)| = 1 \quad \forall \omega. \quad (46)$$

Allgemein gilt für Allpassglieder, dass es zu jedem Pol in der linken offenen Halbebene eine Nullstelle mit entgegengesetztem Realteil gibt, das heißt Pole und Nullstellen liegen symmetrisch zur imaginären Achse.

Die Differenzialgleichung eines Allpassgliedes erster Ordnung lautet:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = T\dot{u}(t) - u(t), \quad \dot{y}(0) = \dot{u}(0) = 0. \quad (47)$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = \frac{Ts - 1}{Ts + 1}. \quad (48)$$

Der Amplitudengang ergibt sich zu

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 T^2 + 1}{\omega^2 T^2 + 1}} = 1$$

und für den Phasengang erhält man

$$\arg G(j\omega) = \arctan\left(\frac{2\omega T}{\omega^2 T^2 - 1}\right) \approx \begin{cases} -\arctan(2\omega T) & \text{für } \omega T \ll 1 \\ \arctan(\frac{2}{\omega T}) & \text{für } \omega T \gg 1 \end{cases}$$

Das Allpassglied wirkt verzögernd und reagiert für ein sprungförmiges Eingangssignal zunächst in die falsche Richtung.

4.9. Das Totzeitglied

Das Totzeitglied gehört zur Klasse der allpasshaltigen Übertragungsglieder und verschiebt das Eingangssignal auf der Zeitachse um die Zeit T_t nach rechts:

$$y(t) = Ku(t - T_t). \quad (49)$$

Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$G(s) = Ke^{-sT_t} \quad (50)$$

mit dem Amplitudengang

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg K$$

und dem Phasengang

$$\arg G(j\omega) = -\omega T_t.$$

Die Phase ist also proportional zur Kreisfrequenz.

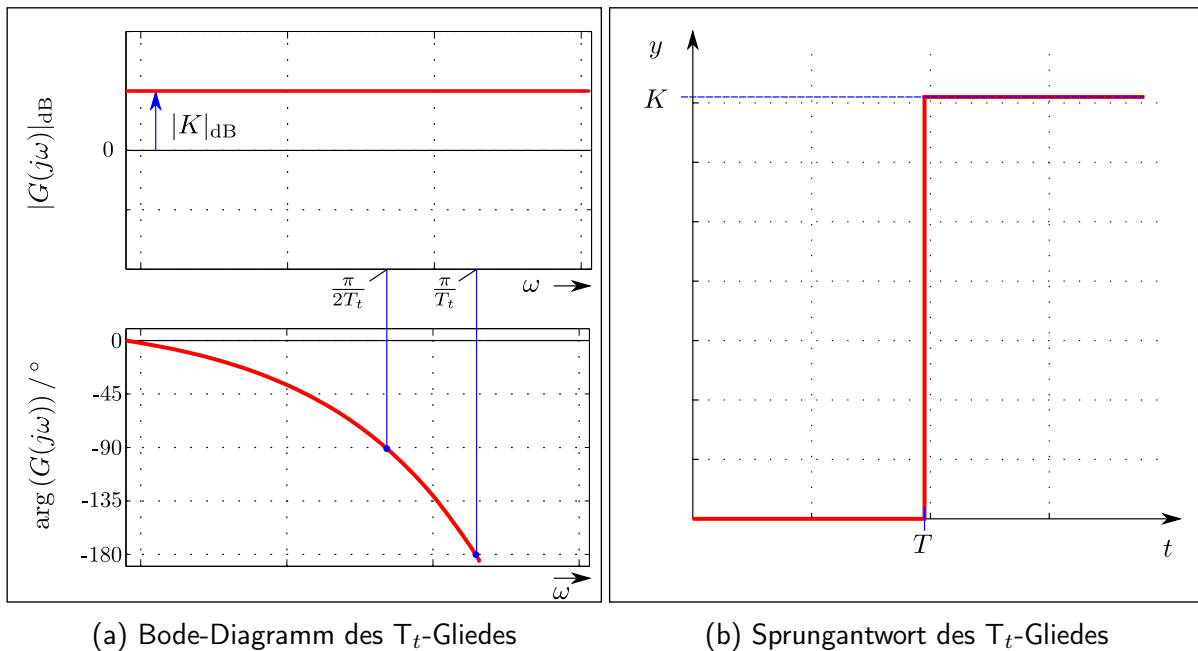


Abbildung 17

5. Der Regelkreis

HINWEIS Der Inhalt dieses Abschnittes muss für alle Praktika beherrscht werden.

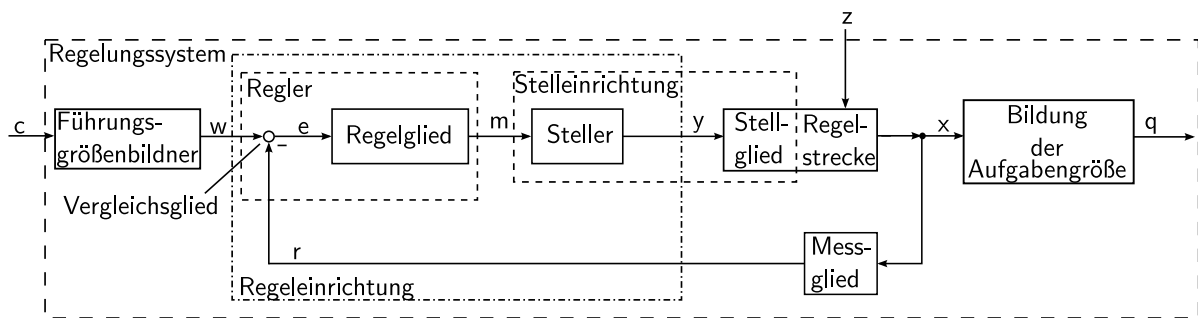
5.1. Aufbau des Regelkreises

Abbildung 18 zeigt den vollständigen Wirkungsplan eines geregelten Systems mit den normten Bezeichnungen und Abkürzungen entsprechend DIN IEC 60050-531.

Eine vereinfachte und für die Analyse häufig zweckmäßige Darstellung des geschlossenen Regelkreises ist in Abbildung 19 dargestellt. Hierin beschreibt $K(s)$ die Übertragungsfunktion des *Reglers* und $P(s)$ die Übertragungsfunktion der *Regelstrecke*. In der Regel beinhaltet $P(s)$ auch das Übertragungsverhalten der *Stelleinrichtung*. Bei Analyseaufgaben wird häufig die Übertragungsfunktion G_0 des *offenen Regelkreises*/ der *offenen Kette*/ des *aufgeschnittenen Kreises*⁷ benötigt. Diese ergibt sich nach Abbildung 19 zu $G_0(s) = K(s)P(s)$.

TIPP Prägen Sie sich den Unterschied zwischen *Regler*, *Regelstrecke*, *Offener Kreis*/ *Offene Kette*/ *Aufgeschnittener Kreis* und *Geschlossener Kreis* gut ein!

⁷Die drei Begriffe sind äquivalent.



Symbol	Deutsche Bezeichnung	Englische Bezeichnung
c	Zielgröße	<i>command variable</i>
w	Führungsgröße	<i>reference variable</i>
$e = w - r$	Regeldifferenz	<i>closed-loop error</i>
m	Reglerausgangsgröße	<i>closed-loop control output</i>
y	Stellgröße	<i>manipulated variable</i>
z	Störgröße	<i>disturbance variable</i>
x	Regelgröße	<i>controlled variable</i>
q	Aufgabengröße	<i>final controlled variable</i>
r	Rückführgröße	<i>feedback variable</i>

Abbildung 18: Genormter Wirkungsplan und genormte Bezeichnungen eines Regelungssystems (nach DIN IEC 60050-351).

5.2. Wichtige Übertragungsfunktionen

Die *Führungsübertragungsfunktion* G_W^X beschreibt das Führungsverhalten des Regelkreises, also das Verhalten der Regelgröße x in Abhängigkeit von der Führungsgröße w unter der Annahme, dass keine Störungen z auf den Regelkreis einwirken ($z \equiv 0$). Sie ergibt sich nach Gleichung 51 zu (siehe Abbildung 19)

$$G_W^X(s) := \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 \pm G_0(s)} = \frac{K(s)P(s)}{1 \pm K(s)P(s)}. \quad (51)$$

Dabei ist zu beachten, dass bei negativer Rückkopplung (d.h. $e = w - x$) im Nenner das positive Zeichen zu wählen ist, bei positiver Rückkopplung (d.h. $e = w + x$) hingegen das negative Zeichen.

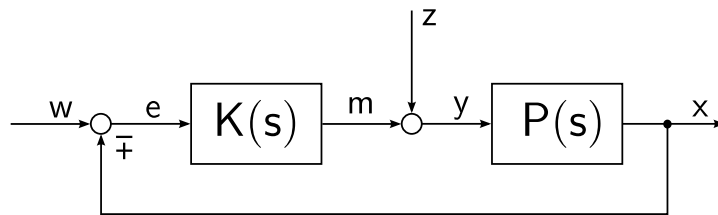


Abbildung 19: Signalflussplan des Standardregelkreises.

Die *Störübertragungsfunktion* G_Z^X beschreibt das Störverhalten des Regelkreises, das heißt das Verhalten der Regelgröße x in Abhängigkeit von der Störgröße z unter der Annahme, dass die Führungsgröße w verschwindet ($w \equiv 0$). Sie ergibt sich nach Gleichung 52 zu (siehe Abbildung 19)

$$G_Z^X(s) := \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{P(s)}{1 \pm G_0(s)} = \frac{P(s)}{1 \pm K(s)P(s)}. \quad (52)$$

Ist allgemein die Übertragungsfunktion zwischen zwei Größen in einem Regelkreis gesucht, so kann man sich diese schnell wie folgt herleiten. Im Regelkreis nach Abbildung 19 sei beispielsweise die Übertragungsfunktion $G_W^M(s)$ von der Führungsgröße zur Reglerausgangsgröße gesucht. Man setzt an:

$$M(s) = K(s)E(s)$$

und substituiert nun solange, bis man wieder bei M angekommen ist:

$$\begin{aligned} M(s) &= K(s)(W(s) \mp X(s)) \\ &= K(s)(W(s) \mp P(s)Y(s)) \\ &= K(s)(W(s) \mp P(s)M(s)). \end{aligned}$$

Nun löst man nach dem Quotienten $\frac{M(s)}{W(s)}$ auf:

$$\frac{M(s)}{W(s)} = \frac{K(s)}{1 \pm K(s)P(s)} =: G_W^M(s).$$

6. PID-Regler

HINWEIS Den Inhalt dieses Abschnittes müssen Sie für alle Praktika beherrschen!

6.1. Grundlegendes

Der PID-Regler berechnet aus der Regelabweichung e ein Stellsignal m . Er realisiert auf einfache Art und Weise die folgende menschlich-intuitive Herangehensweise:

- Je *größer* die momentane Regelabweichung, desto stärker muss der Regler dieser entgegen wirken. Dies wird durch ein P-Übertragungsglied realisiert.
- Je *länger* eine Regelabweichung anliegt, desto stärker muss offensichtlich der Regler auf die Regelstrecke einwirken, damit sich diese endlich reduziert. Dies wird durch ein I-Übertragungsglied realisiert.
- Je *schneller* sich die Regelabweichung ändert, desto stärker und schneller muss der Regler im Moment der Änderung dieser entgegenwirken. Dies wird durch ein D-Übertragungsglied realisiert.

Dank dieser Einfachheit ist der PID-Regler mit Abstand am weitestens verbreitet und wird oft komplexeren Regelalgorithmen vorgezogen. Es gibt nun verschiedene Ausbildungsformen dieser Gesetzmäßigkeiten, die im folgenden dargestellt werden.

6.2. Idealer PID-Regler

Das Übertragungsverhalten eines idealen PID-Reglers wird im Zeitbereich durch folgende Gleichung beschrieben:

$$m(t) = K_P \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (53a)$$

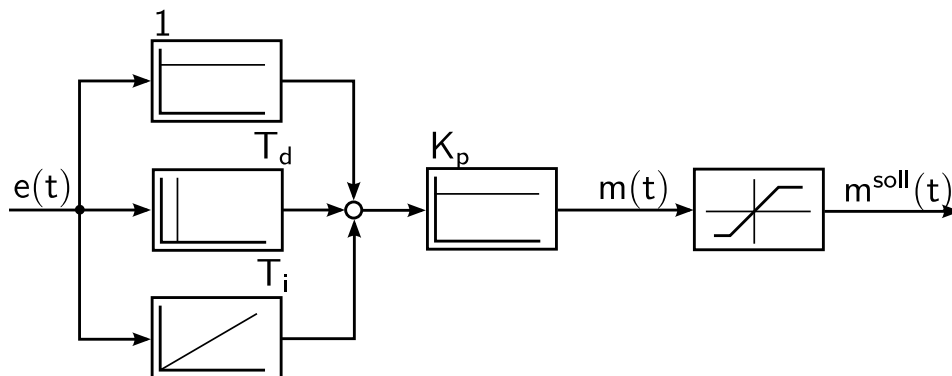
$$= K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}. \quad (53b)$$

Die Darstellung in Gl. (53a) nennt man die Zeitkonstantendarstellung, diejenige in Gl. (53b) einfach Paralleldarstellung. Im ersteren Fall sind die Parameter des Reglers durch die Proportionalverstärkung K_P , die Nachstellzeit T_i (alternatives, veraltetes Symbol: T_N) und die Vorhaltezeit T_d (alternatives, veraltetes Symbol: T_V) bestimmt. Im zweiten Fall durch die P-Verstärkung K_P , die I-Verstärkung K_I und die D-Verstärkung K_D .

Die Übertragungsfunktion des PID-Reglers in Zeitkonstantendarstellung lautet

$$K(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right). \quad (54)$$

Der Signalflussplan sieht wie folgt aus, wobei in diesem noch eine Begrenzung am Reglerausgang eingefügt wurde:



Die Sprungantwort und das Bodediagramm sind Abbildung 20 zu entnehmen.

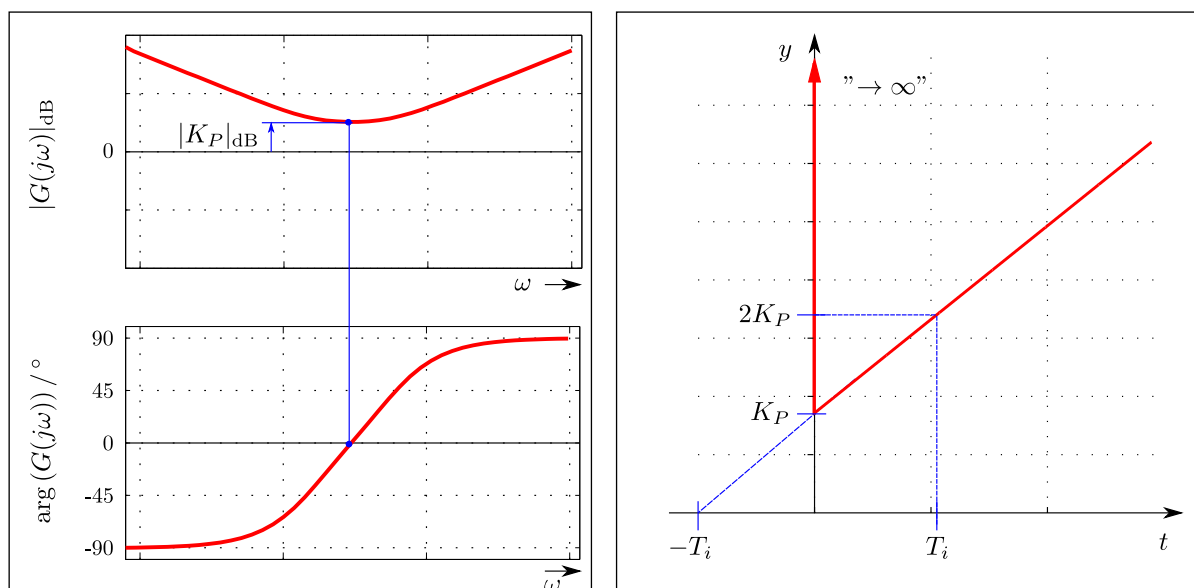


Abbildung 20: Bode-Diagramm und Sprungantwort des idealen PID-Reglers.

6.3. Realer PID-Regler

Eine Schwierigkeit des in Abschnitt 6.2 vorgestellten idealen PID-Reglers besteht darin, dass die Regelabweichung e im D-Anteil des Reglers direkt differenziert wird. Etwaiges Meßrauschen wird somit verstärkt. Darum wird der PID-Regler meist mit einem zusätzlichen PT_1 -Glieder (Tiefpass) realisiert. Hier gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Der PID-Regler wird als ganzes mit einem PT_1 -Glieder umgesetzt.
2. Nur der D-Anteil wird durch ein DT_1 -Glieder ersetzt.

6.3.1. Realisierung mit PT_1 -Glieder (Vorfilter)

Der PID-Regler wird in Reihe mit einem PT_1 -Glieder mit der Zeitkonstanten T_{n+1} realisiert. Das bedeutet, die Regelabweichung wird zunächst gefiltert, bevor sie auf den Regler trifft. Man erhält dann die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \frac{1}{sT_{n+1} + 1}. \quad (55)$$

Dies lässt sich umformen zu

$$K(s) = K_P \frac{(1 + sT_A)(1 + sT_B)}{sT_i(1 + sT_{n+1})} \quad (56)$$

mit $T_i = T_A + T_B$ und $T_d = \frac{T_A T_B}{T_A + T_B}$. Mittels T_A und T_B besteht die Möglichkeit, die beiden größten Zeitkonstanten der Regelstrecke T_1 und T_2 zu kompensieren.

Die Äquivalenz der Darstellungen (55) und (56) wird ersichtlich, indem (56) umgeformt wird zu

$$G(s) = K_P \frac{T_A + T_B}{T_i} \left(1 + \frac{1}{s(T_A + T_B)} + s \frac{T_A T_B}{T_A + T_B} \right) \frac{1}{sT_{n+1} + 1}$$

mit $T_i = T_A + T_B$ und $T_d = \frac{T_A T_B}{T_A + T_B}$ erhält man

$$G(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{s(T_A + T_B)} + s \frac{T_A T_B}{T_A + T_B} \right) \frac{1}{sT_{n+1} + 1}$$

Die Verzögerung T_{n+1} des PT_1 -Gliedes kann nach verschiedenen Kriterien ausgewählt werden. Beispielsweise kann diese so gewählt werden, dass bei einem sprunghaftigen Eingangssignal $e(t)$ des Reglers das Ausgangssignal m zu Beginn nicht übersteuert: Wendet man

den Anfangswertsatz der LAPLACE-Transformation an, so erhält man mit $W(s) = \frac{w_0}{s}$ und $e(0) = w(0)$

$$m(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)E(s) = K_P \frac{T_A T_B}{(T_A + T_B)T_{n+1}} w_0$$

als Anfangswert. Es ist ersichtlich, dass die Wahl von T_{n+1} somit auch von der Reglerverstärkung sowie der Führungsgröße $w(t)$ abhängig ist. Wie beim PI -Regler bestimmt die Verstärkung K_P die Überschwingweite maßgeblich.

6.3.2. Realisierung mit DT_1 -Glieder

Ersetzt man den D-Anteil des idealen PID-Reglers aus Gleichung (54) durch ein DT_1 -Glieder, so wird nur die zu differenzierende Komponente der Regelabweichung vor der Differentiation gefiltert. So erreicht man durch geeignete Wahl der Parameter eine Begrenzung der Signalverstärkung. Anstelle von (54) erhält man einen neuen PID-Regler der Form

$$G(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_{N+1} s + 1} \right).$$

Die Filterzeitkonstante T_{N+1} wird meist zu $T_{N+1} = \frac{T_d}{n}$ gewählt, wobei n im Bereich $5 \leq n \leq 20$ gewählt wird. Der Parameter T_{N+1} kann aber auch dazu verwendet werden, die Anfangsreaktion des Reglers bei einer sprunghaftigen Erregung zu beschränken, denn es gilt:

$$m(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s K_P \left(1 + \frac{1}{s T_i} + \frac{T_d s}{T_{N+1} s + 1} \right) \frac{w_0}{s} = K_P \left(1 + \frac{T_d}{T_{N+1}} \right) w_0.$$

6.4. Das Windup-Problem

Die Aktorsättigung ist eine häufig auftretende Nichtlinearität, welche bei PID-Reglern den sogenannten *Windup-Effekt* hervorruft. Sie rührt daher, dass das Stellglied (vergl. Abbildung 18) nur einen begrenzten Bereich der vom Regler geforderten Reglerausgangsgröße m im Prozess umsetzen kann. Man stelle sich hierzu ein Wasserventil vor, welches eine vollständig geöffnete Stellung, eine vollständig geschlossene Stellung und eine Durchflusscharakteristik für Stellungen des Ventils zwischen diesen zwei Extrempositionen hat. In Abbildung 22 ist solch eine typische Charakteristik dargestellt.

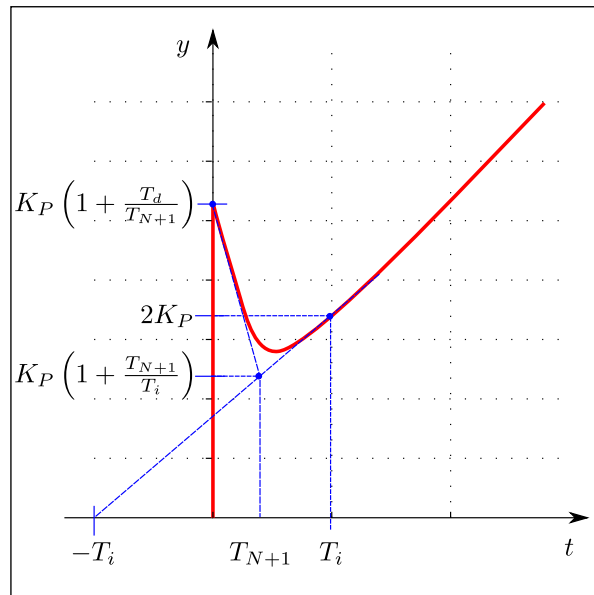
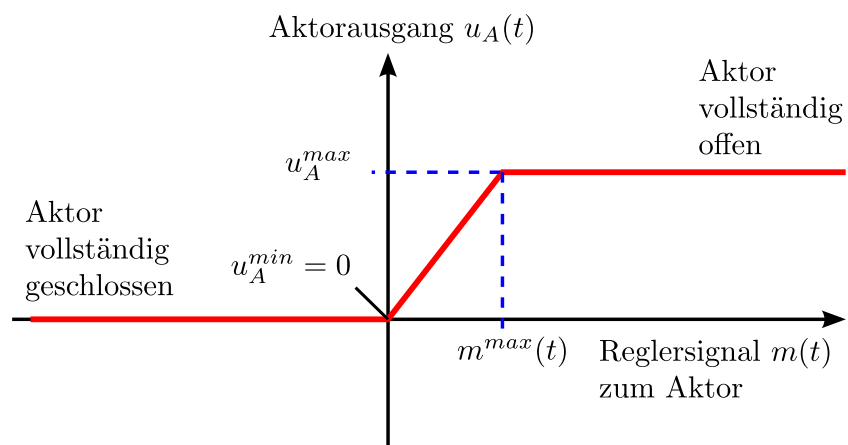
Abbildung 21: Spungantwort des PID-Reglers mit DT_1 -Glied.

Abbildung 22: Typische Aktorsättigungcharakteristik

Die vollständig offene Position stellt eine ernsthafte Begrenzung der Effektivität der Regelung dar, denn sobald der Ausgang des Stellers in den Sättigungsbereich u_A^{max} gelangt, wird das System zu einem offenen Regelkreis degradiert, da der tatsächlich umgesetzte und zu u_A^{max} gehörige Reglerausgangswert m^{max} konstant und kleiner als der geforderte Reglerausgangswert m ist. Das hat zur Folge, dass weitere Erhöhungen der Reglerausgangsgröße keinen Einfluss mehr auf das Verhalten des Prozesses haben. Der Regler mit Begrenzung ist in Abbildung 23 dargestellt.

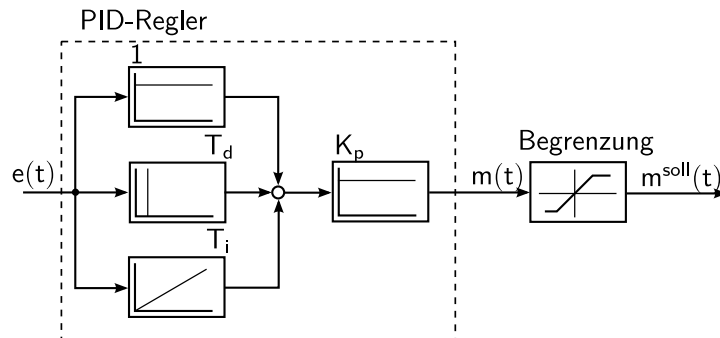


Abbildung 23: PID-Regler mit Begrenzung

Angenommen, die Regeldifferenz $e(t)$ ist positiv bei einer bereits wirksamen Begrenzung der Stellgröße, dann wird diese Regeldifferenz im I-Anteil des Reglers weiter aufintegriert, ohne dass sich dies auf die am Prozess anliegende Stellgröße und damit auf die Regelgröße auswirkt. Je nach Dauer der anliegenden Begrenzung kann der Integralanteil des PID-Reglers einen sehr hohen Wert annehmen. Dieser muss, sobald die Regeldifferenz wieder negativ wird, zunächst abintegriert werden, bevor überhaupt auf diese negative Regeldifferenz eine wirksame Reaktion im I-Anteil erfolgen kann. Die Konsequenz dieses sogenannten Windup des Integralanteils sind länger andauernde, größere Schwingungen in der Regelgröße.

Zur Vermeidung des Windup wird im Allgemeinen der Integrator gestoppt, sobald $m(t)$ in die Begrenzung geht. Hierfür gibt es vielfältige Anti-Windup Schaltungen, die auf der Rückführung, der Anpassung und der Subtraktion des Stellfehlers von der Regelabweichung am Eingang des Integralanteils basieren. Eine mögliche und intuitive Schaltung ist in Abbildung 24 dargestellt.

Sobal es zur Begrenzung kommt, wird der rot dargestellte Rückführzweig mit der Differenz aus gefordertem und tatsächlich anliegendem Stellwert beaufschlagt. Über einen geeignet einstellbaren Faktor $K_{p,arw}$ wird diese Differenz negiert dem Eingang des I-Anteiles beaufschlagt, so dass ein weiteres Aufintegrieren verhindert wird. Sobald das Stellglied aus der Begrenzung hinausläuft, erfolgt wieder eine normale Integration im I-Anteil des Reglers, so dass keine zeitraubende Abintegration nötig ist. Das dynamische Verhalten des Regelkreises wird dadurch signifikant verbessert.

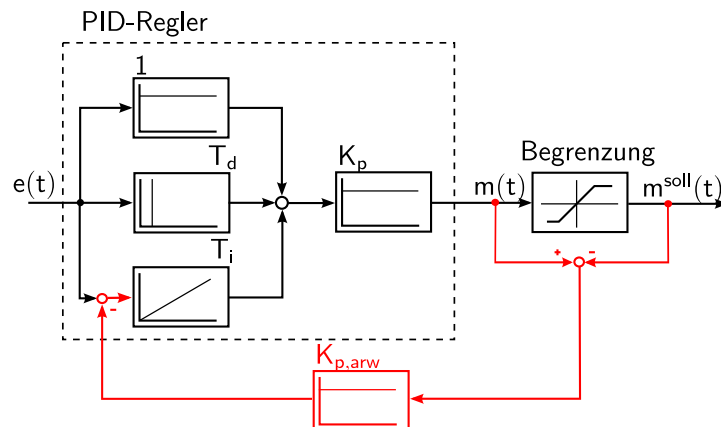


Abbildung 24: PID-Regler mit Anti-Windup

7. Einstellverfahren für PID-Regler

HINWEIS Dieser Abschnitt dient als Informationsquelle für die Versuchsvorbereitung.

In der Regelungstechnik wurden im Laufe der Zeit eine Vielzahl von Verfahren zur Dimensionierung von Reglern entwickelt. Dabei liegen den Verfahren in der Regel zwei Forderungen zu Grunde: Auf der einen Seite soll die Regelgröße den Wert der Führungsgröße möglichst schnell erreichen. Auf der anderen Seite sollen auf den Regelkreis einwirkende Störungen möglichst schnell ausgegelt werden. Dabei ist auch das jeweilige Verhalten der Stellgröße zu beachten. Oft führen diese beiden Forderungen zu sich widersprechenden Auslegungen des Reglers, so dass ein Kompromiss gefunden oder aber der Fokus nur auf das Führungs- oder das Störverhalten gelegt werden muss. Die Dimensionierung kann grob unterteilt werden in

- Dimensionierung durch Probieren (empirisches Einstellen),
- Analytische Dimensionierung nach Einstellverfahren auf Basis von Sprungantworten (Zeitbereich),
- Analytische Dimensionierung auf Basis des Bode-Diagramms oder der Wurzelortskurve (Frequenzbereich).

7.1. Wahl der Reglstruktur

Bevor man sich für ein bestimmtes Einstellverfahren entscheidet, sollte jedoch die Reglerstruktur festgelegt werden. So ist es nicht immer sinnvoll, einen vollständigen PID-Regler zu

verwenden, sondern stattdessen bspw. nur einen P-, PI- oder PD-Regler. Diese Vorentscheidung hängt maßgeblich vom Typ der zu regelnden Strecke ab. Die grundlegende Strategie besteht dabei darin, die Zeitkonstanten der Regelstrecke durch geeignete Wahl der Zeitkonstanten des Reglers vollständig zu kompensieren und dann mit der Reglerverstärkung K_P den Pol des geschlossenen Kreises wie gewünscht zu platzieren. Dieses Verfahren funktioniert natürlich nur bis zu Regelstrecken mit maximal zwei Zeitkonstanten. Weist die Regelstrecke mehr Zeitkonstanten auf, so kompensiert man in der Regel die beiden größten, um das Verhalten des geschlossenen Kreises möglichst schnell machen zu können. Die nachfolgenden Tabellen geben hierzu eine Übersicht:

	P-Strecke	I-Strecke
Übertragungsfunktion	$P(s) = K_S$	$P(s) = \frac{K_S}{s}$
Regler	I-Regler mit $T_i = 1$: $R(s) = \frac{K_P}{s}$	P-Regler: $R(s) = K_P$
Geschl. Kreis	$G(s) = \frac{1}{\frac{s}{K_S K_P} + 1}$	$G(s) = \frac{1}{\frac{s}{K_S K_P} + 1}$
Pol des geschl. Kreises	$s_1 = -K_S K_P$	$s_1 = -K_P K_S$

	PT ₁ -Strecke	PT ₂ -Strecke
Übertragungsfunktion	$P(s) = \frac{K_S}{1 + T_1 s}$	$P(s) = \frac{K_S}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$
Regler	PI-Regler mit $T_i = T_1$: $R(s) = \frac{K_P(1 + sT_1)}{sT_1}$	PID-Regler mit $T_i = T_1 + T_2$, $T_d = T_1 T_2 / (T_1 + T_2)$: $R(s) = \frac{K_P(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{s(T_1 + T_2)}$ (vergl. Abschnitt 6.3.1)
Geschl. Kreis	$G(s) = \frac{1}{\frac{sT_1}{K_S K_P} + 1}$	$G(s) = \frac{1}{\frac{s(T_1 + T_2)}{K_S K_P} + 1}$
Pol des geschl. Kreises	$s_1 = -\frac{K_P K_S}{T_1}$	$s_1 = -\frac{K_P K_S}{(T_1 + T_2)}$

	IT ₁ -Strecke
Übertragungsfunktion	$P(s) = \frac{K_S}{s(1 + Ts)}$
Regler	PD-Regler mit $T_d = T$: $R(s) = K_P(1 + Ts)$
Geschl. Kreis	$G(s) = \frac{1}{\frac{s}{K_S K_P} + 1}$
Pol des geschl. Kreises	$s_1 = -K_S K_P$

7.2. Übersicht zu Einstellverfahren

Im nachfolgenden werden ausgewählte und im Praktikum angewandte Verfahren vorgestellt, die zur Parametrierung von P-, PI- und PID-Reglern verwendet werden. Eine Übersicht ausgewählter Verfahren gibt Tabelle 5.

Verfahren	Strecke	Anmerkung
Handeinstellung	beliebig	<ul style="list-style-type: none"> • zeitaufwändig, häufig Probieren im falschen Bereich
Kompensation von Zeitkonstanten	für stabile P-Strecken mit 1 oder 2 (dominierenden) Zeitkonstanten	siehe Erläuterungen zu PT_1 und PT_2 -Strecken in Abschnitt 7.1, K_P für Polplatzierung nutzen
Ziegler und Nichols (experimentell)	für stabile Strecken, die als $PT_1 - T_t$ -Strecke approximiert werden können; geht mitunter auch bei I -Strecken	<ul style="list-style-type: none"> • Mit P-Regler geschlossener Kreis muss zum Schwingen gebracht werden → bei vielen Strecken aus technischen Gründen nicht möglich/ erlaubt • Regler wird hauptsächlich gutes Störverhalten aufweisen
Ziegler und Nichols (mit Modell)	für Strecken, die als $PT_1 - T_t$ -Strecke approximiert werden können	<ul style="list-style-type: none"> • Streckenverstärkung K_S, Zeitkonstante T_1 und Totzeit T_t der Strecke müssen bekannt sein • Regler wird hauptsächlich gutes Störverhalten aufweisen

Verfahren	Strecke	Anmerkung
Chien, Hrones, Reswick	für Strecken mit Verzögerung und ohne Überswingverhalten	<ul style="list-style-type: none"> Anwendbar wenn Ausgleichszeit drei mal größer ist als die Verzugszeit kann auch für Strecken mit I-Anteil verwendet werden → Beachte: I-Anteil in Strecke kann zu strukturinstabilem Verhalten beim Einsatz von PI, bzw. PID Reglern führen Symmetrisches Optimum kann dann bessere Ergebnisse liefern
Reinisch	für P-Strecken mit rein reellen Polen/Nullstellen; ein zusätzlicher Integrator und Totzeit möglich ⁸	<ul style="list-style-type: none"> Sehr fein justierbar Vergleichsweise hoher Rechenaufwand
Integralkriterien	für jegliche Art von Strecke	Bemessung der Reglerparameter durch numerische Minimierung eines Gütefunktional (in Spezialfällen ist auch analytische Lösung möglich)
Betragsoptimum	für P-Strecken	Betrag des Frequenzgangs des geschlossenen Regelkreises für möglichst großen Frequenzbereich gleich 1
Symmetrisches Optimum	für P- und I-Strecken	geschickte Wahl der Durchtrittsfrequenz

Tabelle 5: Übersicht ausgewählter Einstellverfahren.

7.3. Handeinstellung eines PID-Reglers

⁸Es ist zu beachten, dass Regelstrecken, deren Übertragungsfunktion neben rein reellen Polen auch rein reelle Nullstellen aufweist, sehr wohl überschwingen können!

HINWEIS Wir betrachten hier die PID-Übertragungsfunktion der Form

$$G_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s.$$

In der Praxis werden Regelkreise häufig ohne Verwendung eines Modelles realisiert. Dabei wird der Regler durch Wahl von Erfahrungswerten und anschließender Variation der Reglerparameter dimensioniert. Als Hilfsmittel dient hierbei die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises. Grundsätzlich kann man sich folgende Reihenfolge für die Einstellung eines PID-Reglers merken.

1. K_P bei deaktiviertem I- und D-Anteil ($K_I = K_D = 0$) so einstellen, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises stabil ist.
2. K_I bei deaktiviertem D-Anteil so einstellen, dass keine bleibende Regelabweichung verbleibt. Bei Strecken, die bereits einen I-Anteil aufweisen, kann auf diesen Schritt verzichtet werden. Allerdings kann es später bei der Feineinstellung erforderlich werden, doch einen I-Anteil hinzuzunehmen.
3. Sollte der geschlossene Kreis noch inakzeptable Schwingungen aufweisen, K_D so einstellen, dass diese reduziert oder unterdrückt werden (Stellaufwand im Auge behalten).

Am Beispiel einer P-Strecke sei dies erläutert: Zunächst beginnt man mit einer unkritischen Einstellung des PID-Reglers, indem K_P sehr klein gewählt wird und sowohl K_I als auch K_D zu 0 gesetzt werden (vergl. Abbildung 25a). Nun erhöht man K_P solange, bis eine Schwingungsneigung erkennbar wird (Abbildung 25b), anschließend wird K_P soweit verringert, dass keine Schwingungen beobachtet werden können (Abbildung 25c). Damit ist der P-Anteil grob eingestellt. Zu beachten ist hierbei, dass der gewünschte stationäre Endwert mit einem P-Regler nicht erreicht wird, wenn es sich bei der zu regelnden Strecke um eine P-Strecke handelt (vergl. Abschnitt 4). Anschließend erhöht man K_I solange, bis sich die Sprungantwort dem Endwert annähert ohne, dass sich eine Schwingung ausbildet. Oft kann hier von der weiteren Einstellung mittels des Parameters K_D abgesehen werden, da ein gut eingestellter PI-Regler (Abbildung 25f) für viele Anwendungen ausreichend ist.

Möchte man eine schnellere Regelung erreichen oder lässt sich mittels PI-Regler kein schwingungsfreier Betrieb realisieren, so ist es nötig, den D-Anteil durch Verwendung des Parameters K_D zu aktivieren. Dieser wird nun ebenfalls erhöht (Abbildung 26) bis das Ergebnis den Vorgaben entspricht. Ist der D-Anteil zu schwach, verbleiben oft Schwingungen im System (Abbildung 26a), ist er zu stark gewählt, wird das System stärker gedämpft und kann den Endwert oft nicht mehr schnell genug erreichen (Abbildung 26b). Oft ist auch eine nachträgliche Anpassung von K_P und K_I empfehlenswert. Ein zu dominanter P-Anteil ist in Abbildung 26c dargestellt. Die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises mit einem gut eingestellten PID-Regler ist in Abbildung 26d dargestellt.

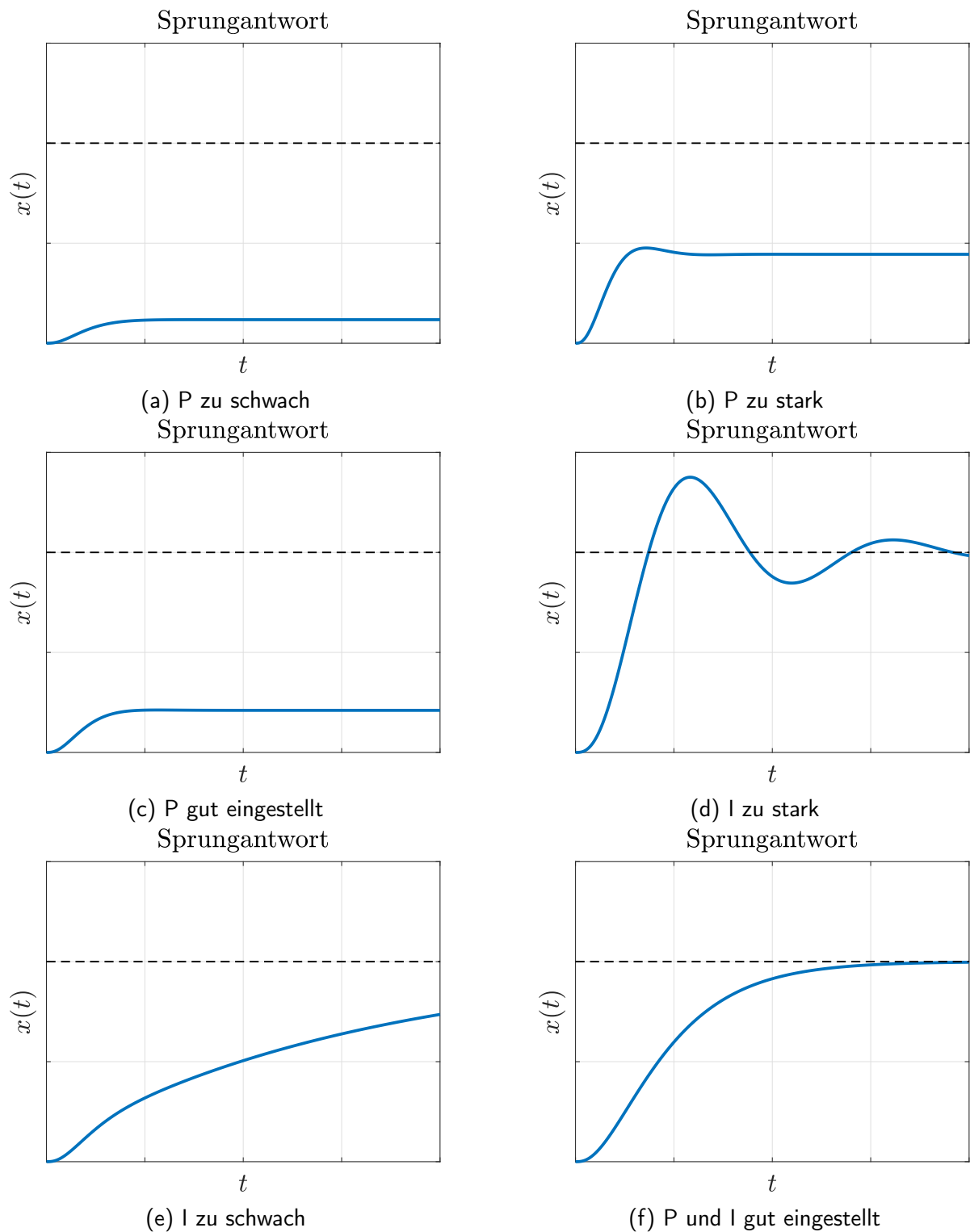


Abbildung 25: Sprungantworten der Handeinstellung eines PI-Reglers am Beispiel einer P-Strecke.

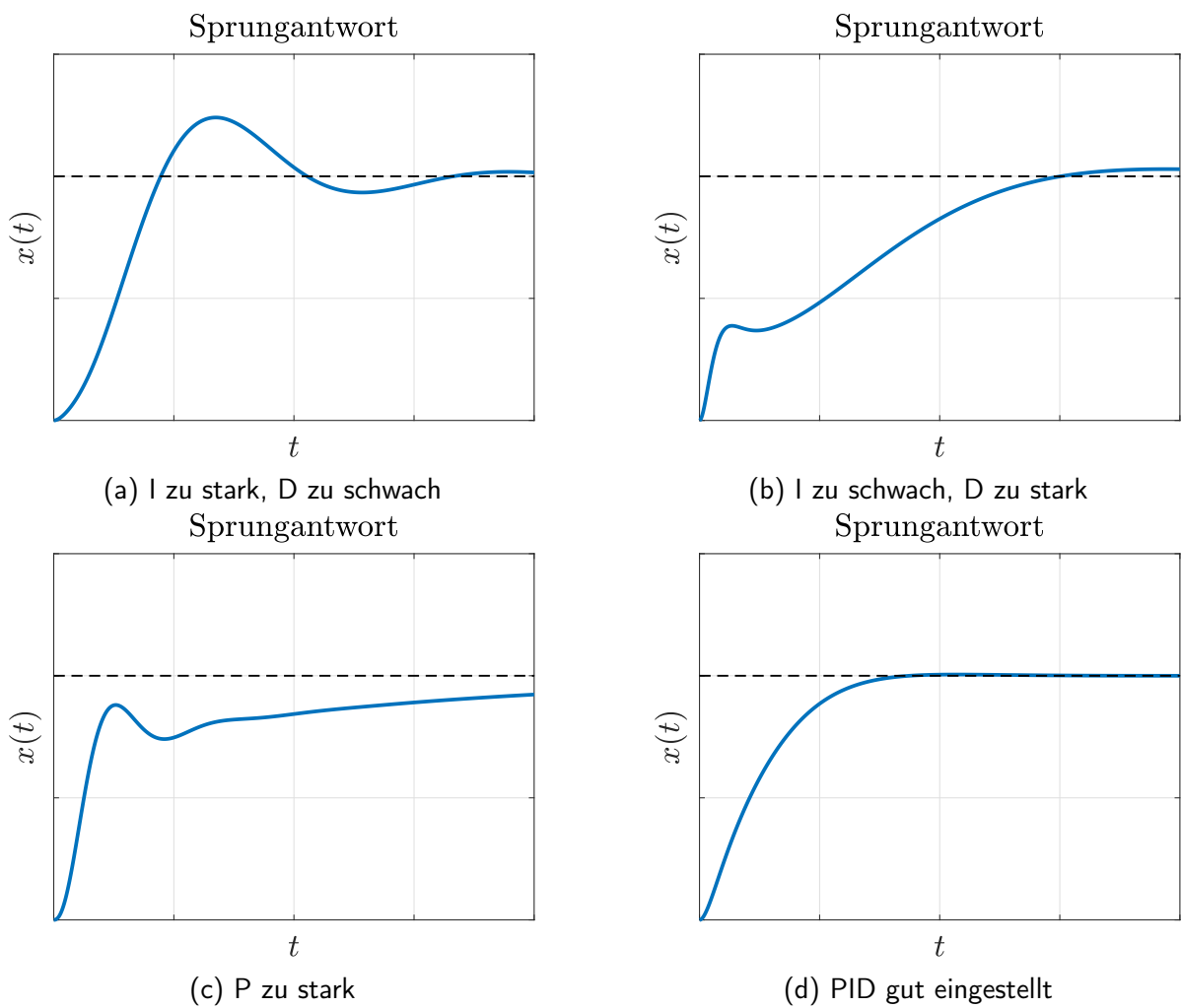


Abbildung 26: Sprungantworten der Handeinstellung eines PID-Reglers am Beispiel einer P-Strecke.

7.4. Einstellverfahren im Zeitbereich

In diesem Abschnitt werden Einstellverfahren vorgestellt, die auf der Analyse der Sprungantwort des zu regelnden Systems bzw. der Kenntnis von Streckenparametern wie Zeitkonstanten und Verstärkungen beruhen.

7.4.1. Ziegler und Nichols

Das Einstellverfahren nach Ziegler und Nichols geht davon aus, dass sich die Regelstrecke näherungsweise als PT_1T_t -Glied modellieren lässt:

$$G(s) = \frac{K_S}{T_s + 1} e^{-sT_t}. \quad (57)$$

Die nachfolgenden beiden Kriterien bestimmen die Parameter so, dass der geschlossene Kreis ein möglichst gutes *Störverhalten* aufweist.

Reglerparameter bei bekannten Streckenparametern Ist die Regelstrecke bekannt, also die Parameter K_S , T und T_t in (57), so ergeben sich nach Ziegler-Nichols die Reglerparameter nach Tabelle 6. Häufig lassen sich die Parameter näherungsweise aus einer Sprungantwort ermitteln. Ist eine direkte Experimentation mit der Regelstrecke nicht möglich, kann auf das nachfolgend erläuterte experimentelle Verfahren zurückgegriffen werden, das direkt im geschlossenen Regelkreis arbeitet.

Reglerparameter bei unbekannten Streckenparametern Sind die Streckenparameter unbekannt, so werden die Reglerparameter empirisch bestimmt. Die nach Ziegler-Nichols ermittelten Parameter sind als Richtwerte anzusehen. Sie sind grob und manchmal unbrauchbar, sind in der Praxis jedoch schnell zu ermitteln. Das zugrunde liegende Verfahren ist der Schwingversuch. Das Verfahren lässt sich manchmal auch bei I-Strecken anwenden, sofern im Schwingungsversuch die Betriebsgrenzen nicht überschritten werden.

Bei diesem Versuch wird die Regelstrecke im geschlossenen Regelkreis mit einem P-Regler betrieben. Als Führungsgröße schaltet man wiederholt Sprungfunktionen auf und erhöht mit jedem Mal langsam die Reglerverstärkung K_P bis die Stabilitätsgrenze des Systems erreicht

Regler	K_P	T_i	T_d
P-Regler	$\frac{T}{K_S T_t}$	-	-
PI-Regler	$0.9 \frac{T}{K_S T_t}$	$3,33 T_t$	-
PID-Regler	$1.2 \frac{T}{K_S T_t}$	$2 T_t$	$0,5 T_t$

Tabelle 6: Reglerparameter nach Ziegler und Nichols bei bekannter Strecke.

wird, dass heißt derjenige Einstellwert, bei dem die Regelgröße $y(t)$ und alle anderen Systemgrößen ungedämpft schwingen (sich dabei aber nicht aufschwingen). An der Stabilitätsgrenze ermittelt man den Wert der kritischen Reglerverstärkung K_{krit} ($K_P = K_{krit}$) und die kritische Periodendauer T_{krit} der sich einstellenden Schwingung. Die Reglerparameter ergeben sich dann wie in Tabelle 7 beschrieben.

HINWEIS Nachteil dieses Verfahrens ist, dass der Regelkreis an seiner Stabilitätsgrenze betrieben werden muss, dies ist jedoch technisch nicht immer möglich oder erlaubt. Bei praktischen Anwendungen genügt es, wenn die gemessene Ausgangsgröße 2 bis 3 feststellbare Schwingungsperioden durchläuft. Bei manchen Prozessen ist dies jedoch auch nicht möglich, weil der Prozess zu schnell beendet ist. Im Falle einer Simulation kann man den Schwingungsversuch natürlich bis zur Stabilitätsgrenze durchführen.

Regler	K_P	T_i	T_d
P-Regler	$0.5 K_{krit}$	-	-
PI-Regler	$0.45 K_{krit}$	$0.83 T_{krit}$	-
PID-Regler	$0.6 K_{krit}$	$0.5 T_{krit}$	$0.125 T_{krit}$

Tabelle 7: Reglerparameter nach Ziegler und Nichols bei unbekannter Strecke.

7.4.2. Chien, Hrones und Reswick

Auch bei diesem Einstellverfahren wird mit einem beschränkten experimentellen Aufwand versucht, eine gewisse Information über die Regelstrecke zu ermitteln. Betrachtet werden Regelstrecken mit Verzögerung und ohne Überspringen. Aus der Sprungantwort der Regelstrecke ermittelt man hier die erforderlichen Parameter:

- Verzugszeit T_e ,
- Ausgleichszeit T_b ,

- Streckenverstärkung K_S .

Für die genannten Streckentypen und mit den ermittelten Parametern wurden günstige Einstellregeln von Chien, Hrones und Reswick ermittelt, sowohl für Störverhalten „St“ als auch für Führungsverhalten „Fü“. Diese Einstellregeln sind anwendbar für $\frac{T_b}{T_e} > 3$. Die berechneten Einstellwerte sind für den aperiodischen Regelverlauf ($\nu_m \approx 0\%$) und für den Regelverlauf mit Überschwingen von $\nu_m = 20\%$ in Tabelle 8 angegeben.

Regler	Parameter	$\nu_m \approx 0\%$		$\nu_m \approx 20\%$	
		Fü	St	Fü	St
P	K_P	$0.3 \frac{T_b}{T_e K_S}$	$0.3 \frac{T_b}{T_e K_S}$	$0.7 \frac{T_b}{T_e K_S}$	$0.7 \frac{T_b}{T_e K_S}$
PI	K_P	$0.35 \frac{T_b}{T_e K_S}$	$0.6 \frac{T_b}{T_e K_S}$	$0.6 \frac{T_b}{T_e K_S}$	$0.7 \frac{T_b}{T_e K_S}$
	T_i	$1.2 T_b$	$4.0 T_e$	$1.0 T_b$	$2.3 T_e$
PID	K_P	$0.6 \frac{T_b}{T_e K_S}$	$0.95 \frac{T_b}{T_e K_S}$	$0.95 \frac{T_b}{T_e K_S}$	$1.2 \frac{T_b}{T_e K_S}$
	T_i	$1.0 T_b$	$2.4 T_e$	$1.35 T_b$	$2.0 T_e$
	T_d	$0.5 T_e$	$0.42 T_e$	$0.47 T_e$	$0.42 T_e$

Tabelle 8: Reglerparameter nach Chien, Hrones und Reswick.

7.4.3. Verfahren nach Reinisch

Bei diesem Verfahren wird die Nachstellzeit T_i des PI-Reglers gleich der größten Zeitkonstante T_1 der Regelstrecke gesetzt (Pol-Nullstellen-Kompensation) und die sich so ergebende Übertragungsfunktion der offenen Ketten durch IT₁-Verhalten approximiert. Die Reglerverstärkung K_P wird dann so bemessen, dass die Führungssprungantwort des Regelkreises eine gewünschte Überschwingweite ν_m zeigt. Die Fehler, die durch die I-T₁- Approximation auftreten, werden durch Wahl eines weiteren Entwurfsparameters a berücksichtigt.

Das Verfahren geht von Regelstrecken des Typs

$$P(s) = K_S \frac{1 + sT_Z}{\prod_{k=1}^n (1 + sT_k)} e^{-sT_t} \quad (58)$$

mit $T_1 \geq T_2 \geq T_3 \cdots \geq T_n > 0$, $T_t \geq 0$, reell und $T_Z < T_3$ bzw. $T_Z < T_4$ bei Verwendung eines PID-Regler aus.

Beim Einsatz eines PID-Reglers kann man die zwei größten Zeitkonstanten T_1 und T_2 der Regelstrecke kompensieren.

Zusammenfassung des Verfahrens

PI-Regler (Kennzahlen):

$$K_{R1}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) = K_P \frac{1 + sT_i}{sT_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = 2, \mu = n}$$

PID-Regler (Kennzahlen):

$$K_{R2}(s) = K_P \frac{(1 + sT_A)(1 + sT_B)}{sT_i} \frac{1}{1 + sT_{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = 3, \mu = n + 1}$$

Es wird gesetzt:

$$T_1 > T_2 > T_3 > \dots > T_i, \quad T_Z < T_{\nu+1}, \quad T_t \geq 0$$

Strecke:

$$P(s) = K_S \frac{1 + sT_Z}{\prod_{k=1}^n (1 + sT_k)} e^{-sT_t}$$

Überschwingverhalten:

ν_m in %	0	5	10	15	20	30	40	50	60
a	4	1.9	1.4	1.0	0.83	0.51	0.31	0.18	0.11
c	0	0	1	1	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4

Zwischenwerte:

$$T_\Sigma = \left(\sum_{k=\nu}^{\mu} T_k \right) - T_Z + T_t$$

$$b = \left(\sum_{k=\nu}^{\mu-1} \sum_{j=k+1}^{\mu} T_k T_j \right) + (T_t - T_Z) \left(\sum_{k=\nu}^{\mu} T_k - T_Z \right) + \frac{T_t^2}{2}$$

$$a_K = a + c \frac{b}{T_\Sigma^2}$$

Reglerparameter:

Verstärkung:

$$K_P = \frac{T_i}{a_K K_S T_\Sigma}$$

Nachstellzeit PI-Regler:

$$T_i = T_1$$

Nachstell- und Vorhaltezeit PID-Regler:

$$T_i = T_1 + T_2$$
$$T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

7.4.4. Integralkriterien

Die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises gibt Auskunft über bestimmte Kenngrößen, beispielsweise die Anstiegszeit, die Überschwingweite oder den Stellaufwand. Ein Regelkreis ist dann optimal ausgelegt, wenn ausgewählte Kenngrößen möglichst klein sind. Da sich viele der Forderungen widersprechen, muss in der Regel ein Kompromiss eingegangen werden. Im Zeitbereich kann beispielsweise das Integral der Regeldifferenz $e(t)$ – die sog. *Regelfläche* – verwendet und gefordert werden, dass diese möglichst klein ist.

Allgemein betrachtet formuliert man bei den sogenannten Integralkriterien ein Gütefunktional, dessen Wert es durch Wahl der Reglerparameter zu minimieren gilt. Diejenigen Reglerparameter, für die das Funktional dann minimal ist, werden am Regelkreis eingestellt. Die Berechnung erfolgt in der Regel numerisch. In Spezialfällen ist auch eine analytische Berechnung der im Sinne eines minimierten Gütefunktionals optimalen Reglerparameter möglich.

Im nachfolgenden werden einige häufig verwendete Integralkriterien vorgestellt.

Lineare Regelfläche:

$$J = \int_0^{\infty} (e(t) - e_{\infty}) dt. \quad (59)$$

Nachteil: Bei schwingungsfähigem geschlossenen Kreis können sich die positiven und negativen Regelflächen aufheben und das Kriterium versagt.

Betragsregelfläche:

$$J = \int_0^{\infty} |e(t) - e_{\infty}| dt. \quad (60)$$

Der Nachteil der sich aufhebenden Regelflächen existiert hier nicht.

Quadratische Regelfläche:

$$J = \int_0^{\infty} (e(t) - e_{\infty})^2 dt. \quad (61)$$

Größere Regelabweichungen werden stärker bestraft. Damit wird der Regelkreis sehr schnell, zeigt dafür aber häufig ein stärkeres Überschwingen.

Zeitgewichtete Betragsregelfläche/ quadratische Regelfläche:

Möchte man lang anhaltende Schwingungen unterdrücken, so ist es sinnvoll, die Regelfläche mit der Zeit zu wichten. Dann werden Regelabweichungen für größere Zeiten "teuer" und die Reglerparameter werden durch das Minimierungskriterium so bestimmt, dass das Überschwingen unterdrückt/ reduziert wird:

$$J = \int_0^{\infty} t \cdot |e(t) - e_{\infty}| dt. \quad (62)$$

$$J = \int_0^{\infty} t \cdot (e(t) - e_{\infty})^2 dt. \quad (63)$$

Zeitquadratisch gewichtete Betragsregelfläche/ quadratische Regelfläche:

Schwingungen können noch stärker unterdrückt werden, indem man die Regelfläche mit der Zeit quadratisch wichtet:

$$J = \int_0^{\infty} t^2 \cdot |e(t) - e_{\infty}| dt. \quad (64)$$

$$J = \int_0^{\infty} t^2 \cdot (e(t) - e_{\infty})^2 dt. \quad (65)$$

Quadratische Regelfläche mit Stellgrößenwichtung

Durch Mitbetrachtung des Reglerausgangs $m(t)$ und der Wichtung mit der Streckenverstärkung K_S und dem Faktor r wird der Stellaufwand bewertet und je nach Wahl von r auch die Überschwingweite beeinflusst:

$$J = \int_0^{\infty} ((e(t) - e_{\infty})^2 + r K_S^2 (m(t) - m_{\infty})^2) dt. \quad (66)$$

Selbstverständlich kann (66) auch noch mit der Zeit oder dem Zeitquadrat gewichtet werden. Gute Ergebnisse erhält man für Werte von r im Bereich $0, \dots, 0.1$. Auch die anderen Kriterien können um den Stellaufwand erweitert werden.

Berechnung der optimalen Reglerparameter

Die Berechnung der optimalen Reglerparameter unter Verwendung der o.g. Kriterien erfolgt in der Regel numerisch. Hierzu ist in einer geeigneten Programmierumgebung, z.B. Matlab oder Python, eine Funktion $J = f(x)$ zu definieren, wobei die Komponenten des Vektors x die Reglerparameter K_P , T_i und ggf. auch T_d repräsentieren. Diese Funktion berechnet in Abhängigkeit von den übergebenen Reglerparametern die Sprungantwort des geschlossenen Kreises und liefert dann den Wert des Gütefunktional zurück. Diese Funktion wird einem Minimierungsalgorithmus, z.B. `fmin` unter Python, übergeben, die das Minimum des Gütefunktional in Abhängigkeit von den Reglerparametern bestimmt und die gefundenen optimalen Parameter zurückliefert.

Alternativ kann man auch eine Menge von Werten für die Reglerparameter vorgeben, für diese alle das Gütefunktional berechnen und dann dasjenige heraussuchen, das den geringsten Wert aufweist. Der Zeitaufwand zum Auffinden der optimalen Parameter wird bei dieser Methode jedoch dramatisch erhöht.

In einigen Spezialfällen ist auch eine analytische Berechnung der Parameter möglich, siehe [7].

7.5. Einstellverfahren im Frequenzbereich

Die hier vorgestellten Verfahren beruhen auf einer Analyse des Frequenzgangs $G_0(j\omega)$ des offenen Kreises (also Regler mit der Übertragungsfunktion $G_R(s)$ und Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $G_S(s)$ in Reihenschaltung ohne Rückführung) bzw. des geschlossenen Regelkreises $G(j\omega)$. Hierbei können unterschiedliche Forderungen in den Reglerentwurf Einzug halten. Sinnvoll ist bspw., dass der Amplitudengang $|G(j\omega)|_{dB}$ des geschlossenen Kreises über einen relativ großen Frequenzbereich beginnend bei $\omega = 0$ konstant gleich 1 (entsprechend einer Regelabweichung von Null) ist⁹. Dies ist natürlich technisch nicht vollständig realisierbar, aber zumindest näherungsweise umsetzbar. Generell lässt sich der Frequenzgang des aufgeschnittenen Kreises in drei typische Bereiche aufteilen, wobei $\omega_D = \omega_s$ die Durchtrittsfrequenz des offenen Kreises darstellt (d.h. $|G_0(j\omega_s)| = 1$, $|G_0(j\omega_s)|_{dB} = 0$), siehe Abbildung 27:

1. **Abschnitt I** ist praktisch nur für das stationäre Verhalten des Regelkreises entscheidend.

⁹Entsprechend einem logarithmischen Amplitudengang von 0.

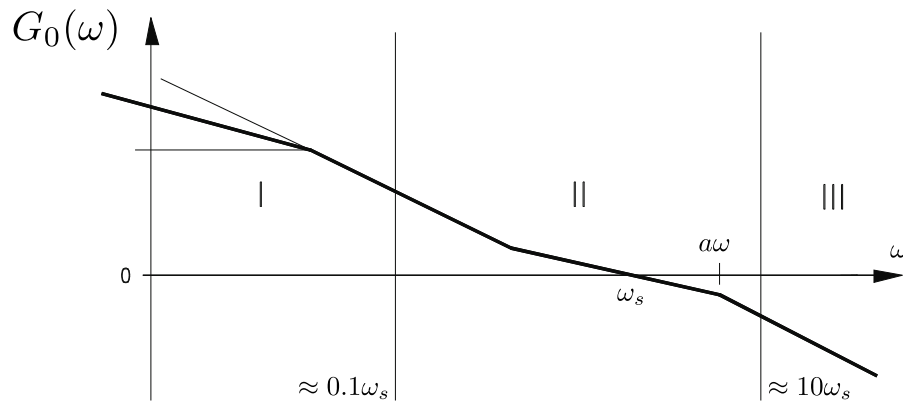


Abbildung 27: Typischer Frequenzgang eines aufgeschnittenen Kreises.

2. **Abschnitt II** ist wesentlich für das dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises verantwortlich. Die Schnittfrequenz mit der 0 dB-Achse bestimmt die Einschwingzeit. Eine genügende Dämpfung (ausreichende Phasenreserve) wird bei einer Steigung von -20 dB/Dekade in diesem Bereich garantiert. Je breiter dieser Bereich ist, um so größer wird der Phasenrand.
3. **Abschnitt III** ist ohne nennenswerten Einfluss auf das Verhalten des Regelkreises.

Bei der Dimensionierung des Reglers nach diesen Verfahren ist es zur Vereinfachung zweckmäßig, die kleinen Zeitkonstanten der Strecke T_j , die im Abschnitt III liegen, zu einer Summenzeitkonstanten T_Σ zusammenzufassen. Unter „kleinen“ Zeitkonstanten werden diejenigen Zeitkonstanten verstanden, die klein gegenüber ein bis zwei anderen Zeitkonstanten T_1 und T_2 sind. Man erhält dann (mit $n = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
 G_S(j\omega) &= \frac{K_S}{\prod_{g=1}^n (1 + j\omega T_g) \prod_{k=n+1}^m (1 + j\omega T_k)} \\
 &= \frac{K_S}{\prod_{g=1}^n (1 + j\omega T_g) \left(1 + j\omega \sum_{k=n+1}^m T_k + (j\omega)^2 \sum_{k=n+1}^{m-1} \sum_{q=k+1}^m T_k T_q + \dots \right)}.
 \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung der Terme mit $(j\omega)^2$, $(j\omega)^3$, ... erhält man den vereinfachten Ausdruck

$$G_S(j\omega) = \frac{K_S}{\prod_{g=1}^n (1 + j\omega T_g) (1 + j\omega T_\Sigma)} \quad \text{mit} \quad T_\Sigma = \sum_{k=n+1}^m T_k.$$

Der gleiche Ansatz kann auch auf Strecken mit I-Anteil übertragen werden..

7.5.1. Betragsoptimum (nur P-Strecken)

Dieses Verfahren ist nur für nicht schwingungsfähige P-Strecken anwendbar. Für den Frequenzgang $G(j\omega)$ des geschlossenen Kreises wird gefordert:

$$|G(j\omega)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 0 \quad \forall \omega \geq 0. \quad (67)$$

Charakteristisch für das Verfahren ist es, dass mit der Nachstellzeit T_i des Reglers die größte Zeitkonstante der Strecke kompensiert und die Reglerverstärkung K_P dazu verwendet wird, Bedingung (67) näherungsweise einzuhalten.

Am Beispiel einer PT_n -Strecke mit einer dominierenden Zeitkonstante wird die Herleitung des Verfahrens kurz erläutert. Für die Serienschaltung eines PI-Reglers mit der Übertragungsfunktion $G_R(s)$ und der Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $G_S(s)$ gilt dann:

$$G_0(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{K_P(1 + T_i s)}{T_i s} \frac{K_S}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)} \quad (68)$$

mit $T_1 \gg T_2 + \dots + T_n$. Kompensiert man mittels T_i die dominierende Zeitkonstante T_1 , so erhält man eine IT_n-Kette:

$$G_0(s) = \frac{K_P K_S}{T_1 s (1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)}. \quad (69)$$

Wegen $T_1 \gg T_2 + \dots + T_n$ lässt sich hierfür näherungsweise schreiben

$$G_0(s) \approx \frac{K_P K_S}{T_1 s (1 + T_\Sigma s)} \quad \text{mit } T_\Sigma = T_2 + \dots + T_n. \quad (70)$$

Für den Frequenzgang des geschlossenen Kreises gilt dann:

$$G(j\omega) = \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} = \frac{K_P K_S}{K_P K_S - \omega^2 T_1 T_\Sigma + j\omega T_1}. \quad (71)$$

Es soll gelten: $|G(j\omega)| = 1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |K_P K_S - \omega^2 T_1 T_\Sigma + j\omega T_1| &= |K_P K_S| \\ \Leftrightarrow (K_P K_S - \omega^2 T_1 T_\Sigma)^2 + \omega^2 T_1^2 &= K_P^2 K_S^2 \\ \Leftrightarrow -2K_P K_S T_1 T_\Sigma \omega^2 + T_1^2 T_\Sigma^2 \omega^4 + \omega^2 T_1^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (T_1^2 - 2K_P K_S T_1 T_\Sigma) \omega^2 + T_1^2 T_\Sigma^2 \omega^4 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Bedingung lässt sich offenbar nur näherungsweise erfüllen, indem der Faktor für ω^2 zu Null gesetzt wird:

$$T_1 - 2K_P K_S T_\Sigma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_P = \frac{T_1}{2K_S T_\Sigma}. \quad (72)$$

Damit ist die Reglerverstärkung K_P auch bestimmt.

Betragsoptimal eingestellte Regelkreise zeigen gutes Führungsverhalten. Die Phasenreserve lässt sich zu 63° berechnen. Störungen am Streckeneingang werden allerdings nur langsam ausgeregelt.

Das Verfahren lässt sich auf verschiedene P-Streckentypen erweitern bzw. spezialisieren. Es werden folgende Fälle unterschieden:

PT₂-Strecke mit einer dominierenden Zeitkonstante (→ PI-Regler)

$$G(s) = \frac{K_S}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad T_1 > T_2.$$

Für einen PI-Regler gilt dann:

$$\boxed{T_i = T_1 \quad K_P = \frac{T_1}{2K_S T_2}.$$

PT_n-Strecke mit einer dominierenden Zeitkonstante (→ PI-Regler)

$$G(s) = \frac{K_S}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)} \quad T_1 \gg T_\Sigma := T_2 + \dots + T_n.$$

Dann lässt sich die Strecke wie folgt annähern

$$G(s) \approx \frac{K_S}{(1 + T_1 s)(1 + T_\Sigma s)}$$

und für die Parameter des PI-Reglers ergibt sich

$$\boxed{T_i = T_1 \quad K_P = \frac{T_1}{2K_S T_\Sigma}.$$

PT_n-Strecke mit zwei dominierenden Zeitkonstanten (→ PID-Regler)

$$G(s) = \frac{K_S}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s) \dots (1 + T_n s)} \quad T_1 > T_2 \gg T_\Sigma := T_3 + \dots + T_n.$$

Dann lässt sich die Strecke wie folgt annähern

$$G(s) \approx \frac{K_S}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_\Sigma s)}$$

und für die Parameter des PID-Reglers ergibt sich

$$T_i = T_1 \quad T_d = T_2 \quad K_P = \frac{T_1}{2K_S T_\Sigma}.$$

7.5.2. Symmetrisches Optimum für P-Strecken

Dieses Verfahren geht von einer PT_n Regelstrecke aus, bei der eine oder zwei Zeitkonstanten dominierend sind. Die restlichen Zeitkonstanten werden in einer Summenzeitkonstanten T_Σ zusammengefasst. Die Nachstellzeit des PI-Reglers wird hier *nicht* dazu verwendet, die größte Zeitkonstante der Strecke zu kompensieren. Stattdessen wird $T_i = a^2 T_\Sigma$ mit einem Parameter $a > 1$ gesetzt. Dadurch wird gewährleistet, dass die Durchtrittsfrequenz ω_d der Übertragungsfunktion des offenen Kreises das geometrische Mittel aus den Kreisfrequenzen $\omega_a = \frac{1}{a^2 T_\Sigma}$ und $\omega_\Sigma = \frac{1}{T_\Sigma}$ ist. Mit dem Parameter a kann dann die Phasenreserve an der Durchtrittsfrequenz festgelegt werden und zwar so, dass diese maximal ist. Daraus ergibt sich dann auch die Reglerverstärkung K_P . Fordert man statt einer maximalen Durchtrittsfrequenz wieder einen möglichst großen Bereich, bei dem der Betrag des Amplitudenganges des geschlossenen Kreises gleich 1 ist, so ergibt sich, dass der Parameter a gleich 2 zu setzen ist. Dieses Verfahren eignet sich auch für Strecken mit I-Verhalten, siehe nachfolgender Abschnitt 7.5.3. Eine ausführliche Herleitung findet sich in [1].

Die Phasenreserve verringert sich beim Einsatz eines PI-Reglers, z.B. für $T_i = 10 T_\Sigma$ auf 48° und für $T_i = 20 T_\Sigma$ auf 42° . Damit vergrößert sich aber das Überschwingen bei der Führungssprungantwort und kann maximal 43 % erreichen. Zur Verringerung dieses Überschwingens sollte man durch Einschalten eines PT₁-Gliedes mit $T_V \neq 0$ die Führungsgröße verzögert aufschalten. Empfohlen wird $T_V = T_i$. Das Störverhalten der Regelung verbessert sich im Vergleich zu dem Betragsoptimum deutlich sofern $T_1 \gg T_\Sigma$.

PT_n-Strecke mit einer dominierenden Zeitkonstante (→ PI-Regler)

$$G(s) = \frac{K_S}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)} \quad T_1 \gg a^2 T_\Sigma; \quad T_\Sigma := T_2 + \dots + T_n.$$

Dann lässt sich die Strecke wie folgt annähern

$$G(s) \approx \frac{K_S}{(1 + T_1 s)(1 + T_\Sigma s)}$$

und für die Parameter des PI-Reglers ergibt sich

$$T_i = a^2 T_\Sigma \quad K_P = \frac{T_1}{a K_S T_\Sigma} \quad (\text{in der Regel wird } a = 2 \text{ gesetzt}).$$

PT_n-Strecke mit zwei dominierenden Zeitkonstante (→ PID-Regler)

$$G(s) = \frac{K_S}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s) \dots (1 + T_n s)}$$

$$T_1 > T_2 \gg a^2 T_\Sigma; \quad T_\Sigma := T_3 + \dots + T_n.$$

Dann lässt sich die Strecke wie folgt annähern

$$G(s) \approx \frac{K_S}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_\Sigma s)}$$

und für die Parameter des PID-Reglers ergibt sich

$$T_i = a^2 T_\Sigma \quad T_d = T_2 \quad K_P = \frac{T_1}{a K_S T_\Sigma} \quad (\text{in der Regel wird } a = 2 \text{ gesetzt}).$$

7.5.3. Symmetrisches Optimum für I-Strecken

Die Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt lassen sich auch auf IT_n-Strecken übertragen. Die maximale Phasenreserve beträgt bei mit $a = 2$ symmetrisch optimierten Regelkreisen nur 37°. Das daraus resultierende große Überschwingen der Führungssprungantwort kann hier ebenfalls durch Verwendung eines Verzögerungsgliedes mit $T_V = T_i$ für die Führungsgröße verringert werden.

IT_n-Strecke ohne dominierende Zeitkonstante (→ PI-Regler)

$$G(s) = \frac{K_S}{T_0 s (1 + T_1 s) \dots (1 + T_n s)} \quad T_\Sigma := T_1 + \dots + T_n.$$

Dann lässt sich die Strecke wie folgt annähern

$$G(s) \approx \frac{K_S}{T_0 s (1 + T_\Sigma s)}$$

und für die Parameter des PI-Reglers ergibt sich

$$T_i = a^2 T_\Sigma \quad K_P = \frac{T_0}{a K_S T_\Sigma} \quad (\text{in der Regel wird } a = 2 \text{ gesetzt}).$$

IT_n-Strecke mit einer dominierenden Zeitkonstante (→ PID-Regler)

$$G(s) = \frac{K_S}{T_0 s (1 + T_1 s) (1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)} \quad T_1 \gg T_\Sigma; \quad T_\Sigma := T_2 + \dots + T_n.$$

Dann lässt sich die Strecke wie folgt annähern

$$G(s) \approx \frac{K_S}{T_0 s (1 + T_1 s) (1 + T_\Sigma s)}$$

und für die Parameter des PID-Reglers ergibt sich

$$T_i = a^2 T_\Sigma \quad T_d = T_1 \quad K_P = \frac{T_0}{a K_S T_\Sigma} \quad (\text{in der Regel wird } a = 2 \text{ gesetzt}).$$

7.5.4. Zusammenfassung

WICHTIG Das Betragsoptimum ist nur an P-Strecken anwendbar. Bei diesem Verfahren werden eine (PI-Regler) oder zwei (PID-Regler) dominierende Zeitkonstante(n) der Regelstrecke kompensiert. Das Symmetrische Optimum ist hingegen sowohl bei P als auch bei I-Strecken anwendbar. Falls hier ein PI-Regler verwendet wird, so wird nicht die größte Zeitkonstante kompensiert, sondern stattdessen die um einen Faktor a^2 skalierte Summenzeitkonstante. Im Falle eines PID-Reglers wird nur eine dominierende Zeitkonstante kompensiert.

TIPP Merke gut: Man erzielt ein

1. **gutes Führungsverhalten** bei Anwendung des Betragsoptimums für unverzögerte Eingangsgrößen (vorgeschalteter Tiefpass mit der Zeitkonstanten $T_V = 0$)
2. **gutes Störverhalten** bei Anwendung des symmetrischen Optimums
3. **gutes Stör- und Führungsverhalten** bei Einstellung des Regelkreises nach dem symmetrischen Optimum, sofern ein Tiefpass mit der Zeitkonstanten T_V zur Verzögerung der Führungsgröße mit $T_V = T_i$ verwendet wird.

8. Orts- und Wurzelortskurven (ab 6. Semester/ Praktika im Sommersemester)

HINWEIS Die sichere Kenntnis des Inhaltes dieses Abschnittes ist erst für die ab dem 6. Semester stattfindenden Praktika erforderlich, also nach der Vorlesung *Regelungstechnik 1*. Das betrifft die Praktika *Regelungstechnik 2* für die Studienrichtung AMR im Studiengang Elektrotechnik, das Praktikum *Regelung und Steuerung* (Versuche V5 und V8) für den Studiengang Mechatronik und das Praktikum *Regelungstechnik* im Studiengang Regenerative Energiesysteme.

8.1. Die Ortskurve

Neben dem in Abschnitt 3 vorgestellten Bode-Diagramm bietet sich auch die so genannte *Ortskurve* als Darstellungsmöglichkeit des Frequenzgangs eines linearen zeitinvarianten Übertragungsgliedes an. Die Ortskurve ist das Bild der imaginären Achse der komplexen s -Ebene in der $G(s)$ -Ebene (vergl. Abbildung 28). Wegen der Eigenschaften

$$\begin{aligned}|G(-j\omega)| &= |G(j\omega)| \\ \arg G(j\omega) &= -\arg G(-j\omega)\end{aligned}$$

beschränkt man sich dabei in der Regel auf die Darstellung für $\omega = 0 \dots \infty$. In den Abbildungen 29 und 30 sind die Ortskurven einiger wichtiger Übertragungsglieder dargestellt.

WICHTIG Die Ortskurve ist nicht mit dem Bild des so genannten Nyquist-Pfades zu verwechseln. Beim Nyquist-Pfad handelt es sich um eine geschlossene Kurve in der s -Ebene, dessen Bild $G(s)$, die Nyquist-Bildkurve, für Stabilitätsuntersuchungen betrachtet wird, siehe Vorlesungsmitschrift *Regelungstechnik*

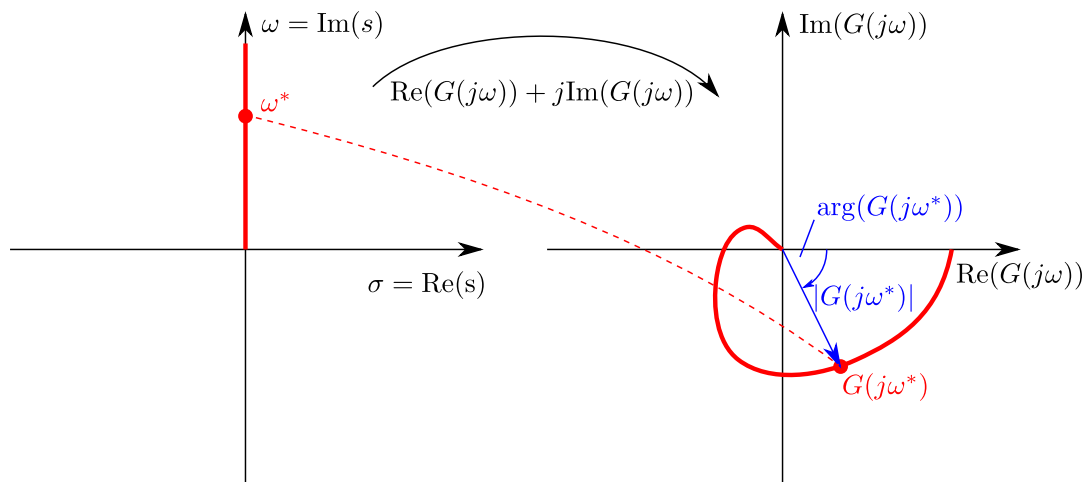


Abbildung 28: Die Ortskurve ist die Abbildung der positiven imaginären Achse durch die Übertragungsfunktion $G(s)$.

8.2. Stabilitätskriterien auf Basis der Ortskurven- und Nyquist-Bildkurven

Das Nyquist-Stabilitätskriterium basiert auf der Orts- beziehungsweise Nyquist-Bildkurven-darstellung.

Vereinfachtes Nyquist-Kriterium Ist die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Regelkreises stabil oder besitzt nur einen instabilen Pol und zwar bei $s = 0$, so ist der geschlossene Regelkreis genau dann stabil, wenn beim Durchlaufen der Ortskurve des Frequenzganges $G_0(j\omega)$ mit wachsendem ω (für $0 < \omega < \infty$) der kritische Punkt $(-1, j0)$ links von der Ortskurve liegt.

Allgemeines Nyquist-Kriterium Besitzt der offene Regelkreis mit der rationalen Übertragungsfunktion $G_0(s)$ genau n_0 Polstellen mit $\text{Re}(s) = 0$ und n_+ Polstellen mit $\text{Re}(s) > 0$, so ist der geschlossene Regelkreis genau dann stabil, wenn die Nyquist-Bildkurve von $G_0(s)$ den Punkt $(-1, j0)$ nicht enthält und genau $(n_0 + n_+)$ -mal im Gegenuhrzeigersinn umkreist.

8.3. Die Wurzelortskurve

Häufig tritt die Fragestellung nach der Stabilität des Standardregelkreises in Abhängigkeit vom Wert eines Verstärkungsfaktors k auf. Diese lässt sich mit Hilfe der Wurzelortskurven

Name	Wurzelort	Übertragungs- funktion	Ortskurve
D-Glied		$K_D \cdot s$	
PD-Glied		$K_p \cdot (1 + T_d \cdot s)$	
I-Glied		$\frac{K_I}{s}$	
PT ₁ -Glied		$\frac{K_p}{1 + T_1 \cdot s}$	
DT ₁ -Glied		$\frac{K_D \cdot s}{1 + T_1 \cdot s}$	
Lead-Glied für $T_D > T_1$		Lead-Lag-Glied $K \cdot \frac{1 + T_D \cdot s}{1 + T_1 \cdot s}$	
Lag-Glied für $T_D < T_1$			

Abbildung 29: Wurzelortskurven und Ortskurven einfacher Übertragungsglieder (nach [4]).
Es bedeuten: \times Pol, \circ Nullstelle.

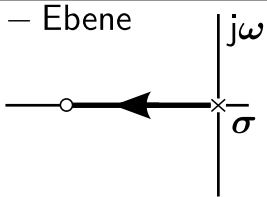
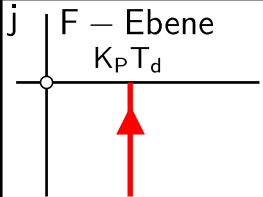
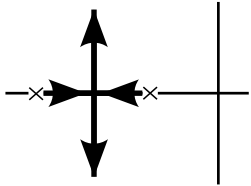
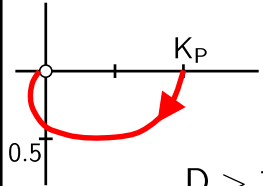
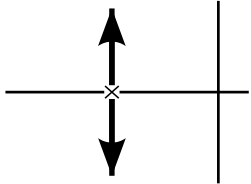
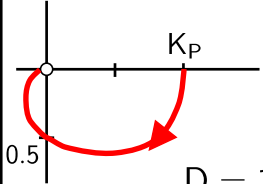
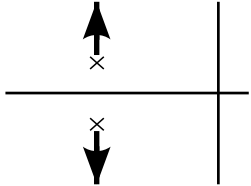
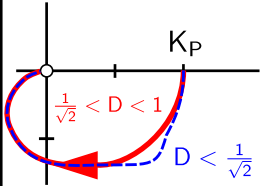
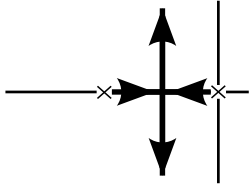
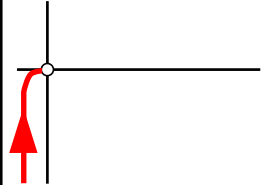
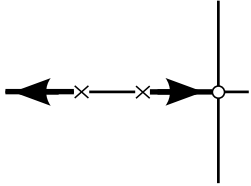
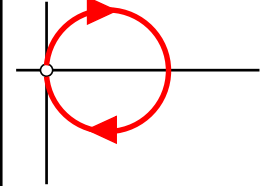
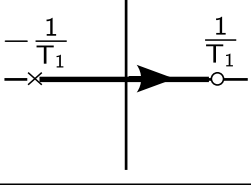
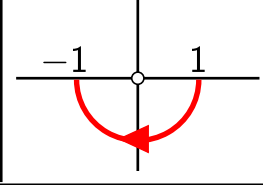
Name	Wurzelort	Übertragungs- funktion	Ortskurve
PI-Glied	$s - \text{Ebene}$ 	$K_p \cdot \frac{1+T_d \cdot s}{s}$	$j - \text{Ebene}$ 
PT ₂ -Glied, nicht schwingungsfähig		$\frac{K_p}{(1+T_1 \cdot s) \cdot (1+T_2 \cdot s)}$	
PT ₂ -Glied, aperiodischer Grenzfall		$\frac{K_p}{(1+T_1 \cdot s)^2}$	
PT ₂ -Glied, schwingungsfähig		$\frac{K_p}{1 + \frac{2 \cdot D}{\omega_0} \cdot s + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot s^2}$	
IT ₁ -Glied		$\frac{K}{s \cdot (1+T_1 \cdot s)}$	
DT ₂ -Glied mit reellen Polen		$\frac{K_D \cdot s}{(1+T_1 \cdot s) \cdot (1+T_2 \cdot s)}$	
Allpass		$\frac{1-T_1 \cdot s}{1+T_1 \cdot s}$	

Abbildung 30: Wurzelortskurven und Ortskurven einfacher Übertragungsglieder (nach [4]).
Es bedeuten: \times Pol, \circ Nullstelle.

beantworten. Bei einer Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{y=1}^m (s - s_y^0)}{\prod_{\nu=1}^n (s - s_{\nu}^{\infty})}$$

mit $m \leq n$ und $\frac{b_m}{a_n} > 0$ wird der Regelkreis genau dann stabil, wenn alle Nullstellen (=Wurzeln) des charakteristischen Polynoms

$$N(s) + kZ(s) = 0$$

einen negativen Realteil haben.

Die Wurzelortskurve ist nun der geometrische Ort aller Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$N(s) + kZ(s) = 0,$$

die in Abhängigkeit von k (mit $k > 0$) in der s -Ebene aufgezeichnet werden können. Die Wurzelortskurven einiger wichtiger Übertragungsglieder finden sich in den Abbildungen [29](#) und [30](#).

Für die Wurzelortskurven (WOK) gelten folgende wichtige Regeln:

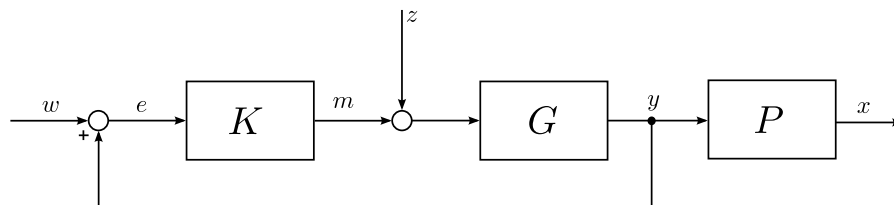
- Die Wurzelorte liegen symmetrisch zur reellen Achse.
- Die Wurzelorte beginnen für $k = 0$ in den Polen von $P(s)$.
- Die Wurzelorte enden für $k \rightarrow \infty$ in den Nullstellen von $P(s)$.
- Hat $P(s)$ n Pole und m Nullstellen im Endlichen, so enden $n - m$ -Abschnitte der WOK im Unendlichen.
- Auf der reellen Achse gehören alle Punkte links von einer ungeraden Anzahl an reellen Polen und Nullstellen zu einem WOK-Abschnitt.
- Aus einem l -fachen Pol s_i^{∞} treten l WOK-Stücke aus.
- in einer l -fachen Nullstelle s_i^0 münden l WOK-Stücke.

Weitere Regeln siehe Vorlesungsmitschrift *Regelungstechnik* beziehungsweise in [\[6\]](#), Abschnitt 3.6.2.1.

9. Kontrollfragen

Für alle Praktika ab dem 5. Semester (1. Semester)

1. Geben Sie den allgemeinen mathematischen Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangssignal bei einem linearen, zeitinvarianten Übertragungsglied im Zeitbereich an. Benennen Sie alle Symbole!
2. Erläutern Sie die Begriffe Übertragungsfunktion, Übergangsfunktion, Gewichtsfunktion und geben Sie die Zusammenhänge zwischen diesen an!
3. Stellen Sie sicher, dass sie für ein gegebenes Übertragungsglied mit Hilfe des Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip *nachweisen* können, ob dieses linear oder nichtlinear ist.
4. Stellen Sie sicher, dass sie für ein gegebenes Übertragungsglied mit Hilfe des Verschiebungsprinzips *nachweisen* können ob dieses zeitinvariant oder zeitvariant ist.
5. Stellen Sie sicher, dass Sie aus einer gegebenen gewöhnlichen linearen zeitinvarianten Differentialgleichung die Übertragungsfunktion ableiten können.
6. Skizzieren Sie das Strukturbild eines Standardregelkreises und bezeichnen Sie in ihm alle Elemente (Größen und Übertragungsglieder mit Formelzeichen und Namen).
7. Machen Sie sich damit vertraut, die Übertragungsfunktion von einem Signal zu einem anderen aus einem Signalflussplan zu bestimmen, z.B. G_Z^X oder G_W^X in:



8. Bestimmen Sie die Ruhelagen eines durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschriebenen nichtlinearen dynamischen Systems und linearisieren Sie dieses um diese Ruhelagen.
 9. Überführen Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung n .ter Ordnung in n Differentialgleichungen erster Ordnung.
 10. Geben Sie einige Beispiele für Regelstrecken mit Ausgleich an.
 11. Geben Sie einige Beispiele für Regelstrecken ohne Ausgleich an.
 12. Skizzieren Sie die Sprungantwort eines PT_1 -Gliedes und geben Sie eine Möglichkeit zur Bestimmung der Zeitkonstanten T aus der Sprungantwort an!
 13. Skizzieren Sie die Sprungantwort eines IT_1 -Gliedes!
-

14. Skizzieren Sie die Sprungantwort eines DT_1 -Gliedes!
 15. Skizzieren Sie die Sprungantwort eines Totzeitglieds. Markieren Sie die Totzeit in dem Diagramm!
 16. Skizzieren Sie die Sprungantwort eines PT_2 -Gliedes. Die Eigenwerte der Übertragungsfunktion seien beide negativ reell/ positiv reell / konjugiert komplex mit negativem Realteil / konjugiert komplex mit positivem Realteil / beide Null. Geben Sie folgende Kenngrößen an (sofern vorhanden): Anschwingzeit, Einschwingzeit, Überschwingweite, Verzögerungszeit, Verzugszeit, Ausgleichszeit, Wendezeit.
 17. Stellen Sie sicher, dass Sie das Ausgangssignal eines PT_1 , PT_2 , IT_1 oder DT_1 -Gliedes für einen gegebenen sprungförmigen Eingangssignalverlauf *qualitativ* skizzieren können (mehrere Sprünge auf unterschiedliche Niveaus, auch ins Negative).
 18. Wie ändert sich das Verhalten der Sprungantwort eines PT_1 -Gliedes qualitativ, wenn der Pol der Übertragungsfunktion immer weiter nach links in der linken offenen Halbebene geschoben wird?
 19. Wie unterscheidet sich der Anstieg der Sprungantwort eines PT_1 und eines PT_2 -Gliedes für $t = 0$?
 20. Geben Sie an, wie die Darstellung des Frequenzgangs im Bodediagramm definiert ist.
 21. Skizzieren Sie das Bodediagramm eines PT_1 -, IT_1 -, DT_1 - oder eines Totzeitglieds.
 22. Skizzieren Sie das Bodediagramm eines PT_2 -Gliedes. Die Eigenwerte der Übertragungsfunktion seien beide negativ reell/ konjugiert komplex mit negativem Realteil.
 23. Skizzieren Sie die Sprungantwort eines P-, I-, D-, PI-, PD- oder PID-Reglers. Geben Sie wichtige Kenngrößen an!
 24. Skizzieren Sie das Bodediagramm eines P-, I-, D-, PI-, PD- oder PID-Reglers. Geben Sie wichtige Kenngrößen an!
 25. Geben Sie die den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal beschreibende Differentialgleichung eines I-, D-, PT_1 , DT_1 und IT_1 -Gliedes an.
 26. Was sind die charakteristischen Übertragungseigenschaften eines Allpassgliedes?
 27. Wodurch ist die Sprungantwort eines allpasshaltigen Systems charakterisiert?
 28. Geben Sie die Übertragungsfunktion eines Allpassgliedes an. Charakterisieren Sie die Lage der Pole und Nullstellen!
-

29. Gegeben sei ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

Berechnen Sie den Amplituden- und Phasengang und zeigen Sie dabei, dass alle Frequenzen gleich verstärkt werden.

30. Gegeben sei ein PT_3 -Glieder. Geben Sie die Übertragungsfunktion an! Unter welcher Bedingung kann das Verhalten dieses Übertragungsgliedes durch die Reihenschaltung dreier PT_1 -Glieder beschrieben werden?
31. Geben Sie zwei Möglichkeiten zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens eines PID-Reglers im Zeitbereich an und benennen Sie die Einstellparameter.
32. Geben Sie zwei Möglichkeiten zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens eines PID-Reglers im Frequenzbereich an und benennen Sie die Einstellparameter.
33. Gegeben Sei eine $PT_1 / PT_2 / I, I^2, \dots$ Strecke. Zeigen Sie, dass sich diese durch einen P-/ I-/ D-/ PI-Regler stabilisieren/ nicht stabilisieren lässt.

**Zusätzlich für alle Praktika im Studiengang ET ab dem 6. Semester
(2. Semester)**

1. Erläutern Sie den Unterschied zwischen der Ortskurve und der Nyquist-Bildkurve eines linearen zeitinvarianten Übertragungsgliedes.
 2. Skizzieren Sie die Ortskurve eines P-, I-, D-, PT_1 -, DT_1 -, IT_1 -, PD- und PI-Gliedes! Tragen Sie die Laufrichtung der Frequenz ω ein!
 3. Skizzieren Sie die Ortskurve eines PT_2 -Gliedes, das zwei negative reelle Pole, einen negativen reellen Doppelpol bzw. ein konjugiert-komplexes Polpaar mit negativem Realteil hat! Tragen Sie die Laufrichtung der Frequenz ω ein!
 4. Skizzieren Sie die Wurzelortskurve eines P-, I-, D-, PT_1 -, DT_1 -, IT_1 -, PD- und PI-Gliedes! Tragen Sie die Laufrichtung und die ggf. vorhandenen Pole und Nullstellen ein!
 5. Skizzieren Sie die Wurzelortskurve eines PT_2 -Gliedes, das zwei negative reelle Pole, einen negativen reellen Doppelpol bzw. ein konjugiert-komplexes Polpaar mit negativem Realteil hat! Tragen Sie die Laufrichtung und die ggf. vorhandenen Pole und Nullstellen ein!
 6. Stellen Sie sicher, dass Sie das allgemeine und vereinfachte Nyquistkriterium sicher beherrschen, so dass Sie entsprechende Aufgaben zur Stabilitätsanalyse bei gegebener Ortskurve/ Nyquist-Bildkurve lösen können!
-

7. Gegeben sei die Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Übertragungsgliedes mit 4 Polen. Ein Pol liege auf der negativen reellen Achse, zwei auf der imaginären Achse und einer auf der positiven reellen Achse. Skizzieren Sie einen möglichen Nyquist-Pfad.
-

Teil II.

Gerätetechnische Ausstattung

10. Der elektronische Modellregelkreises MRK 931

Ein Großteil der im Praktikum durchzuführenden Versuche finden am Modellregelkreis MRK 931 statt¹⁰. Dessen Aufbau und Wirkungsweise wird in diesem Abschnitt beschrieben.

10.1. Einführung

Der elektronische Modellregelkreis MRK 931 dient zur Simulation von Regelstrecken und Regelkreisen. Er ist modular aus einzelnen Übertragungsgliedern (Baugruppen) aufgebaut. Diese können beliebig miteinander verbunden werden. Der Modellregelkreis enthält 12 Steckplätze für Baugruppen.

Bei der Verwendung des Modellregelkreises ist grundsätzlich zwischen *zwei* Betriebsregimen zu unterscheiden:

1. *Nichtrepetierender Betrieb*: Hier ist die Aufnahme der Signalverläufe mit einem langsamen Registriergerät (beispielsweise mit einem PC/Microcontroller mit langsamer Schnittstelle oder mit einem XY-Schreiber) vorgesehen. Die Dauer von Übergangsvorgängen liegt bei mehreren Sekunden (Strecken-Zeitkonstanten im Bereich von 0.1 bis 11 Sekunden).
2. *Repetierender Betrieb*: In dieser Betriebsart wird durch eine Zeittransformation um den Faktor 1000 ein stehendes Bild auf einem Oszillographen ermöglicht (Strecken-Zeitkonstanten im Bereich von 0.1 bis 11 Millisekunden).

Die Einstellung der Betriebsart erfolgt über die Baugruppe *Steuerung*, siehe Abschnitt [10.4](#).

Bei den Praktikumsversuchen wird bis auf wenige Ausnahmen die langsame Betriebsart (nichtrepetierender Betrieb) verwendet.

Die Baugruppen sind als Operationsverstärkerschaltungen realisiert. Der nominelle Aussteuerbereich der Schaltungen beträgt $\pm 10\text{ V}$. Die Übersteuerungsanzeige spricht bei etwa $\pm 11\text{ V}$ an. Der Maximalwert der Spannungen liegt bei ungefähr $\pm 13\text{ V}$. Alle Ein- und Ausgangsschaltungen wurden so realisiert, dass sie bis $\pm 15\text{ V}$ spannungs- beziehungsweise gegenspannungsfest sind.

¹⁰Dieses System wurde Anfang der 1980er Jahre an der Sektion 9 (Informationstechnik), Bereich 3 (Automatisierungstechnik) der TU Dresden entwickelt.

Alle Signale werden durch Spannungen (nicht durch Ströme!) repräsentiert. Die Addition von Signalen ist damit nicht durch einfaches Zusammenstecken von Steckern möglich sondern hat über entsprechende Summierpunkte zu erfolgen!

10.2. Übertragungsglieder

In diesem Abschnitt werden die einzelnen im Modellregelkreis realisierten Übertragungsglieder vorgestellt. Details werden gegebenenfalls in den zugehörigen Praktikumsanleitungen diskutiert.

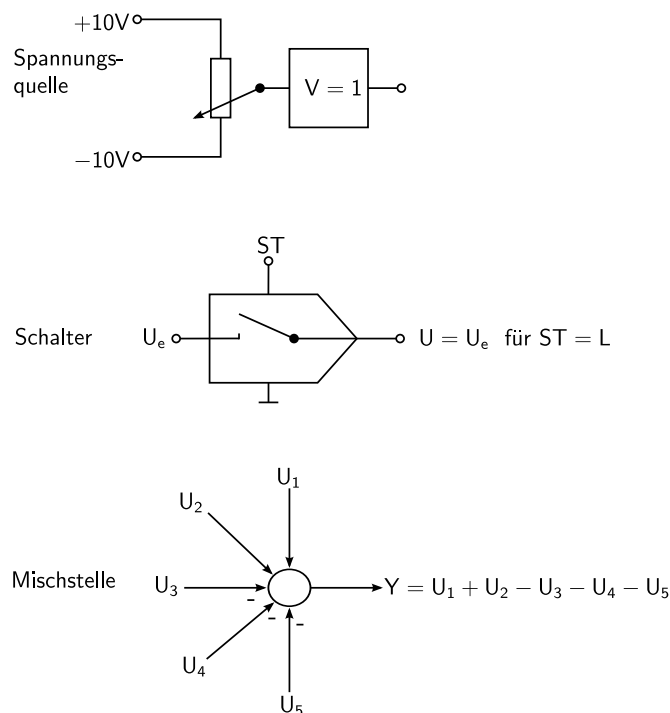


Abbildung 31: Baugruppe Summierglied, Spannungsquelle, Schalter (logische Pegel: $H=5V$, $L=0V$)

10.2.1. Baugruppe Spannungsquelle, Schalter, Summierglied

Diese Baugruppe realisiert folgende Funktionen (siehe auch Abbildung 31):

- Variable Spannungsquelle (Spannungsbereich $-10 \dots +10V$),
- Schalter zum Einschalten einer Spannung U_e , sobald das Steuersignal ST den logischen Pegel $L = 0V$ hat (siehe Abschnitt 10.4, Seite 85),

- Mischstelle zur Addition beziehungsweise Subtraktion verschiedener Spannungen,
- Übersteuerungsanzeige für das Ausgangssignal Y der Mischstelle.

Die Frontplatte dieser Baugruppe ist in Abbildung 32 wiedergegeben.

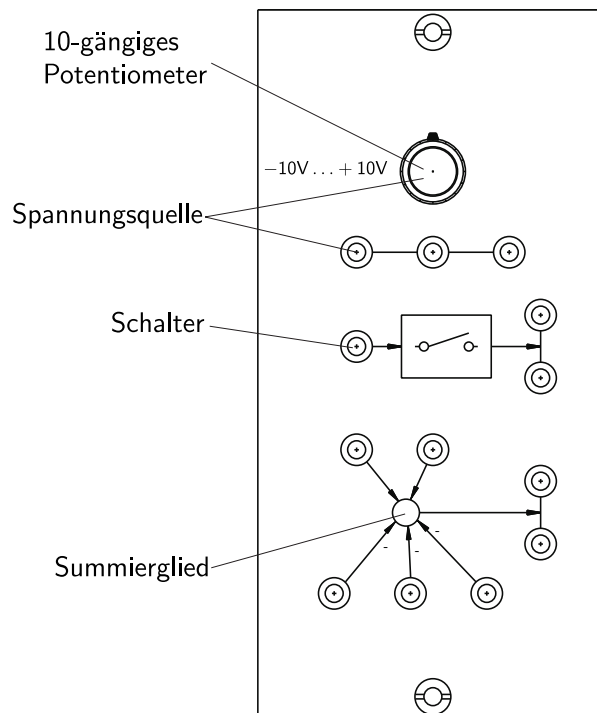


Abbildung 32: Frontplatte der Baugruppe Spannungsquelle, Schalter, Summierglied

10.2.2. Lineare dynamische Übertragungsglieder

Mit diesen Baugruppen wird ein Übertragungsglied mit einem Signalfluss nach Abbildung 33 realisiert. Die Übertragungsfunktionen der im Modellregelkreis verfügbaren Baugruppen finden sich in Tabelle 9.

Die Übersteuerungsanzeige überwacht die Signale Y und $Y + Z$ sowie innere Signale.

Der PI-Regler (siehe Abbildung 34b) enthält zusätzlich weitere Funktionen. Die Mischstelle am Eingang realisiert den Soll-Ist-Wertvergleich ($U = X_D = E = W - X$). Sein Ausgangssignal Y kann durch ein äußeres Signal *Begrenzung* begrenzt werden, das bedeutet, die angelegte Spannung ist die obere Schranke von $|Y|$. Mittels Schalter kann ein P-, PI- oder Plarw-Verhalten eingestellt werden. Dabei steht die Abkürzung *arw* für „anti-Reset-Windup“¹¹. Bei einer Begrenzung des Ausgangssignals Y der I-Anteil des Reglers nicht weiter

¹¹Das Windup-Problem ist näher in Abschnitt 6.4 erläutert

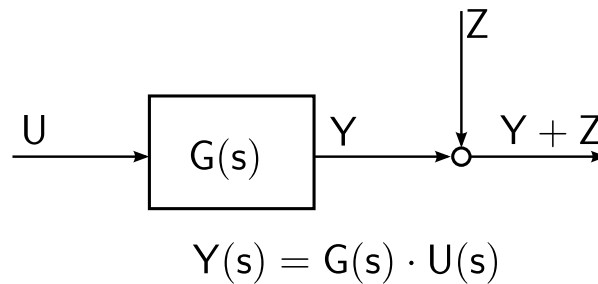
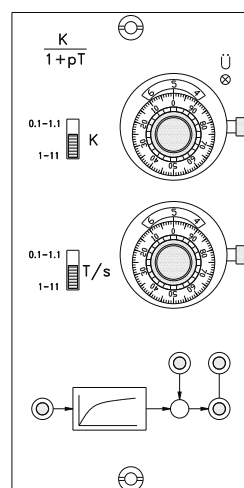
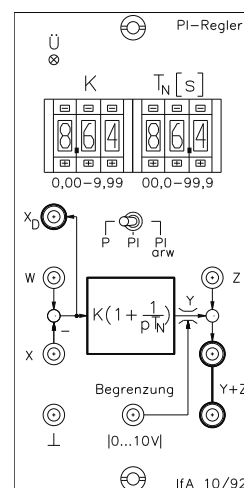


Abbildung 33: Dynamische Übertragungsglieder

in Richtung einer Erhöhung der Übersteuerung integriert. Dadurch wird verhindert, dass es zu einem Aufintegrieren (engl. *Windup*) kommt. Das dynamische Verhalten der Regelung kann dadurch verbessert werden.

(a) Frontplatte der Baugruppe PT₁-Glieder

(b) Frontplatte der Baugruppe PI-Regler

Abbildung 34

Spezielle Baugruppen, die nur in einzelnen Praktikumsversuchen verwendet werden, werden in den entsprechenden Versuchsleitungen detailliert beschrieben.

Baugruppe realisiert $G(s)$	Zeitkonstante in s (nichtrepetier. Betrieb) ms (repetierender Betrieb)	K bzw. D	Bemerkungen
K		$0, 1 \dots 1, 1$ $1 \dots 11$	Mischstelle am Eingang
$\frac{K}{1 + sT}$	$T = \begin{cases} 0, 1 \dots 1, 1 \\ 1 \dots 11 \end{cases}$	$0, 1 \dots 1, 1$ $1 \dots 11$	
$K \frac{sT}{1 + sT}$	$T = \begin{cases} 0, 1 \dots 1, 1 \\ 1 \dots 11 \end{cases}$	$0, 1 \dots 1, 1$ $1 \dots 11$	
$\frac{0.5}{s^2 T^2 + 2 D s T + 1}$	$T = \begin{cases} 0, 1; 0, 2 \dots 1, 1 \\ 1; 2 \dots 11 \end{cases}$	$0, 0 \dots 1, 0$	diskrete Werte für T über Schalter einstellbar
$K_R \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$	$T_i = \begin{cases} 0, 1 \dots 99, 9 \\ \infty \end{cases}$	$0, 0 \dots 9, 99$	Mischstelle am Eingang, P-, PI-, Plarw über Schalter einstellbar, Begrenzung möglich

Tabelle 9: Lineare Übertragungsglieder. „Plarw“ bedeutet: PI-Regler mit Anti-Reset-Windup

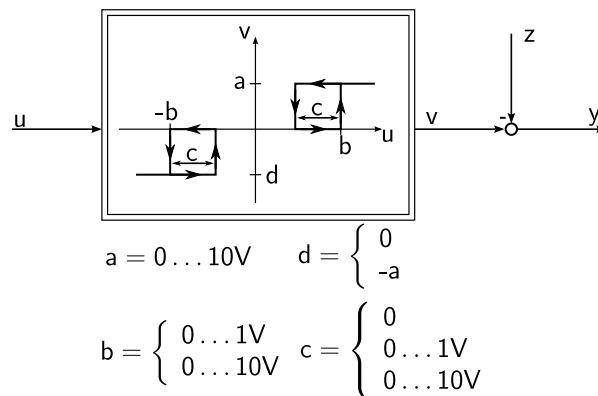


Abbildung 35: Baugruppe Dreipunktglied (Achtung: z wird negativ eingekoppelt!)

10.2.3. Baugruppe Universelles Dreipunktglied

Diese Baugruppe kann als Dreipunktglied oder Zweipunktglied mit und ohne Hysterese eingesetzt werden. Dazu dienen drei Drehpotentiometer für die Spannungen a , b und c . Über die Wahl von $d = a$ oder $d = 0$ kann festgelegt werden, ob die Kennlinie des Übertragungsgliedes symmetrisch zur x -Achse ist. Die Einstellung von $c = 0$ und $d = 0$ erfolgt über Schiebeschalter. Details können Abbildung 35 entnommen werden.

10.3. Einsatz quasi-analoger Baugruppen

Die Baugruppen des Modellregelkreises MRK 931 sind analog mit Operationsverstärkerschaltungen aufgebaut. Damit lassen sich schnelle Vorgänge (Grenzfrequenz ca. 10 kHz) auch für umfangreichere Schaltungen realisieren.

Für bestimmte Aufgaben ist jedoch die Verwendung eines digitalen Rechners sinnvoll:

- Realisierung von Abtastreglern,
- Realisierung von modellbasierten oder komplizierteren Regelalgorithmen,
- Testsignalerzeugung,
- Messwertaufnahme und Verarbeitung.

Die Kopplung mit dem Modellregelkreis erfolgt hierzu mittels Analog-Digital-Wandlern beziehungsweise Digital-Analog-Wandlern.

10.4. Baugruppe Steuerung

Diese Baugruppe (Frontplatte siehe Abbildung 36) dient der Festlegung des Betriebsregimes, der Synchronisation von Oszillographen mit dem Modellregelkreis und zur Registrierung der Messsignale mit einem XY-Schreiber.

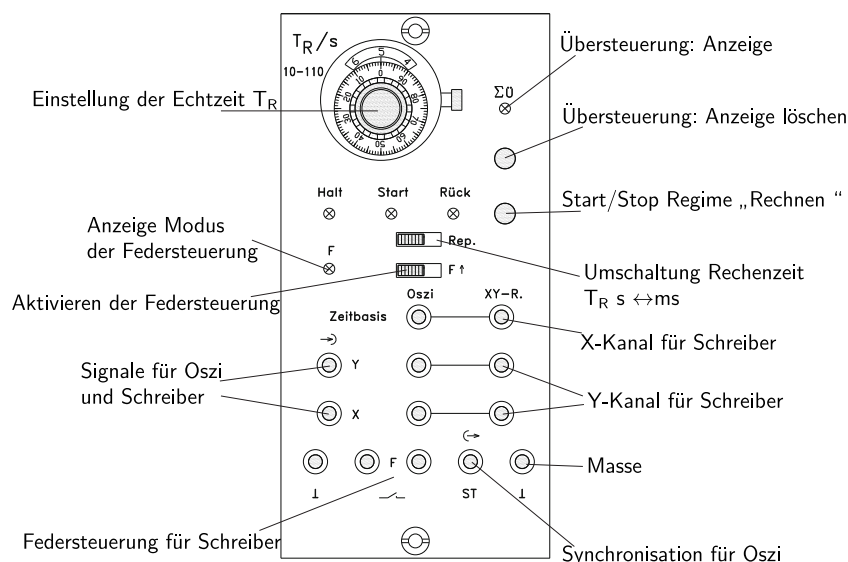


Abbildung 36: Frontplatte der Baugruppe Steuerung für die Registrierung der Messergebnisse mit XY-Schreiber

Festlegung des Betriebsregimes

Die Festlegung des Betriebsregimes erfolgt mit dem Schalter *Umschaltung Rechenzeit T_R* . Die Zeiten T_R und T_D (siehe Abbildung 37) werden dabei um den Faktor 1000 geändert. Folgende Modi sind möglich:

- *nichtrepetierender Betrieb*, langsamer Betrieb, alle Zeitkonstanten liegen im Sekundenbereich,
- *repetierender Betrieb*, schneller Betrieb, alle Zeitkonstanten liegen im Millisekundenbereich.

Steuerung des Schalters in der Baugruppe „Schalter, Spannungsquelle, Summierglied“

Die Steuerung des Schalters in der Baugruppe *Schalter, Spannungsquelle, Summierglied*, siehe Abschnitt 10.2.1, erfolgt über den Taster „Start/Stop Regime Rechnen“.

In der Betriebsart *repetierender Betrieb* erfolgt im Zustand *Start* eine zyklische Wiederholung des Ablaufes *Start – Rück* (nach Ablauf von T_R) – *Halt* bis dieser Ablauf mittels *Stop* beendet wird (siehe Abbildung 37).

Während des Vorganges *Start* liegt das Signal an der Buchse *ST* auf L (0 V), d.h., der Schalter in der Baugruppe *Schalter, Spannungsquelle, Summierglied* ist geschlossen. Während der Vorgänge *Rück* und *Halt* liegt das Signal auf H (5 V), das bedeutet, der Schalter in der Baugruppe *Schalter, Spannungsquelle, Summierglied* ist geöffnet.

Im nichtrepetierenden Betrieb wird durch wiederholtes Drücken des Tasters „*Start/Stop Regime Rechnen*“ zwischen den Zuständen *Start*, *Rück* und *Halt* gewechselt.

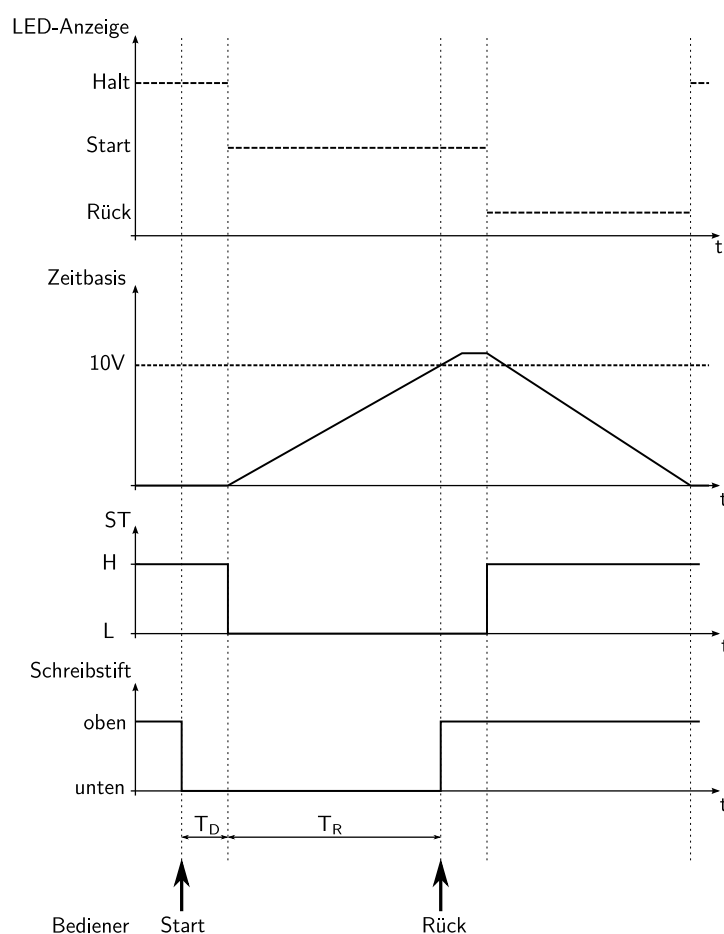


Abbildung 37: Signalverlauf Baugruppe Steuerung (nichtrepetierender Betrieb)

Triggersignal

Im Modus *repetierender Betrieb* liegt das binäre Triggersignal, mit dessen Hilfe ein Oszilloskop oder ein PC-Rechenprogramm extern getriggert werden kann, an der Buchse *ST* an.

Übersteuerung

Die Übersteuerungsanzeige speichert kurzzeitige Übersteuerungen. Das Löschen dieser gespeicherten Anzeige erfolgt über einen Taster.

Festlegung von Anfangsbedingungen

In den Baugruppen *I-Glied* und *PT₁-Glied mit einstellbarem Anfangswert* lassen sich die Anfangsbedingungen über die Vorgabe einer Spannung festlegen. Durch den Taster *Start/Stop Regime Rechnen* werden die Anfangswerte gesetzt, so dass die betreffenden Übertragungsglieder ausgehend von diesen Werten rechnen können.

Die Kommandos *Start* und *Rück* (Rücksetzen) werden vom Bediener über den Taster *Start/Stop Regime Rechnen* aktiviert. Im Zustand *Start* ist die Baugruppe von außen, beginnend mit dem eingestellten Anfangswert, steuerbar. Im Zustand *Rücksetzen* ist die Baugruppe von außen nicht steuerbar (siehe Abbildung 37).

Weitere Bedienelemente

Die nachfolgend aufgeführten Bedienelemente beziehen sich auf den Betrieb des Modellregelkreises zusammen mit einem *X – Y*-Schreiber. Diese wird im Praktikum nicht mehr verwendet, die Elemente werden jedoch der Vollständigkeit halber an dieser Stelle erläutert.

Das analoge Signal *Zeitbasis* und das binäre Signal *F* (*Federsteuerung*) dienen der Ansteuerung des *XY*-Schreibers im nichtrepetierenden Betrieb. Die Rechenzeit T_R (siehe Abbildung 37) kann im nichtrepetierenden Betrieb im Bereich von $T_R = 10 \dots 110$ s eingestellt werden.

Dabei ist die Federsteuerung inaktiv und die Signale *Zeitbasis*, T_R und T_D werden an den Buchsen *XY-R* zur Schonung des Schreibers abgeschaltet.

Die Schreibstiftsteuerung wird über einen Schiebeschalter eingestellt, $F \uparrow$ bedeutet: *Stift immer abgehoben*. Bei aktiver Schreibstiftsteuerung (Dioden-Anzeige leuchtet) ist der Schreibstift in der Zeit $T_D + T_R$ abgesenkt (Relaiskontakt geschlossen).

Anhang

A. Bezeichnungen nach alter und neuer DIN

	DIN 19226	DIN IEC 60050-351
Reglerausgangsgröße	y_R	m
Verzugszeit	t_u	T_e
Ausgleichszeit	t_g	T_b
Anregelzeit	t_{anr}	T_{cr}
Ausregelzeit	t_{ausr}	T_{cs}
Überschwingweite	\ddot{u}	ν_m, x_m
Ansteigszeit	t_r	T_b
Durchtrittsfrequenz	ω_d	ω_c
Amplitudenreserve	A_r	G_m
Phasenreserve	Φ_R	φ_m
Dämpfungsgrad	d bzw. D	ϑ
Integrationszeitkonstante, Nachstellzeit	T_I	T_i
Vorhaltezeit	T_D	T_d
Verstärkungsfaktor, proportionale Verstärkung	K_s	K_p

Tabelle 10: Bezeichnungen von Kenngrößen nach alter DIN 19226 und neuer DIN IEC 60050-351.

Literatur

- [1] O. Föllinger. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 12. VDE Verlag, 2016.
 - [2] O. Föllinger und M. Kluwe. *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*. 10. VDE Verlag, 2011.
 - [3] J. Lunze. *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 11. Berlin: Springer, 2016.
 - [4] Winfried Oppelt. *Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge*. Verlag Chemie Weinheim, 1972.
 - [5] K. Reinschke. *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. 1. Springer, 2005.
 - [6] K. Reinschke. *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. 2. Springer, 2014.
 - [7] Lutz Wendt. *Taschenbuch der Regelungstechnik*. Verlag Harri Deutsch, 2010.
-