

Technische Universität Dresden

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik

Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie

Studienarbeit

Modellbildung und Reglerentwurf für ein Brückenkransystem

vorgelegt von: Konstantin Wrede
geboren am: 19. Januar 1998 in Sondershausen

Betreuer:	M.Sc. Tommy Wohlfahrt Dipl.-Ing. Fabian Paschke Dr.-Ing. Carsten Knoll
Verantwortlicher Hochschullehrer:	Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack
Tag der Einreichung:	30. September 2022

Bitte ersetzen Sie diese Seite vor dem Binden mit der Aufgabenstellung.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tage an der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik eingereichte Studienarbeit zum Thema

Modellbildung und Reglerentwurf für ein Brückenkransystem

selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, wurden als solche kenntlich gemacht.

Dresden, 30. September 2022

Konstantin Wrede

Kurzfassung

An dieser Stelle fügen Sie bitte eine deutsche Kurzfassung ein.

Abstract

Please insert the English abstract here.

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Formelzeichen	VII
Abbildungsverzeichnis	VIII
Tabellenverzeichnis	1
1 Einleitung	2
2 System- und Problembeschreibung	3
2.1 Demonstratorsystem	3
2.2 Problembeschreibung und Zielsetzung	4
3 Analytische Modellbildung	6
3.1 Allgemeine Modellannahmen	6
3.2 Modellierung mittels Lagrange-Formalismus	7
3.2.1 Lagrange-Gleichungen erster Art	7
3.2.2 Lagrange-Gleichungen zweiter Art	8
3.3 Generierung und Simulation von DAE-Systemen	9
3.4 Analytisches Modell Einzelkran	10
3.5 Analytisches Modell Doppelkran	12
3.5.1 Ansatz über ein ODE-System	12
3.5.2 Ansatz über ein DAE-System	14
3.6 Systemidentifikation	17
4 Flachheitsanalyse	19
4.1 Definition differenzieller Flachheit	19
4.2 Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen	19
4.3 Anwendung Flachheitsanalyse am Einzelkran	21
4.4 Anwendung Flachheitsanalyse am Doppelkran	22
5 Steuerungs- und Regelungsentwurf	25
5.1 Regelung zur Stabilisierung von Ruhelagen	25
5.2 Trajektorienplanung des flachen Ausgangs	25
5.3 Trajektorienfolge Regelung	26
5.3.1 Vektorieller relativer Grad	26
5.3.2 Statische Rückführung	26

5.3.3	Dynamische Erweiterung	28
5.3.4	Quasi-statische Rückführungen	29
5.3.5	Exact feedforward linearization	32
6	Fazit und Ausblick	36
6.1	Fazit	36
6.2	Ausblick	36
	Literatur	37

Verzeichnis der Formelzeichen

Abbildungsverzeichnis

1	CAD-Zeichnung des Doppelkransystems	3
2	Doppelkran-Demonstratorsystem mit Laufkatzen und Last	4
3	Kurzbeschreibung für Abbildungsverzeichnis	10
4	Kurzbeschreibung für Abbildungsverzeichnis	12
5	Kurzbeschreibung für Abbildungsverzeichnis	15
6	Kurzbeschreibung für Abbildungsverzeichnis	30
7	Kurzbeschreibung für Abbildungsverzeichnis	33
8	Kurzbeschreibung für Abbildungsverzeichnis	34
9	Kurzbeschreibung für Abbildungsverzeichnis	35

Tabellenverzeichnis

1	Physikalische Parameter des Doppelkrandemonstratorsystems.	18
2	Relative Grade der Ausgänge und explizites Auftreten der Eingänge. . .	27
3	Auftreten der Eingänge τ_j bei Ordnung k der Ausgangsableitung y_i . . .	31

Kapitel 1

Einleitung

- ganz am Ende

Kapitel 2

System- und Problembeschreibung

2.1 Demonstratorsystem

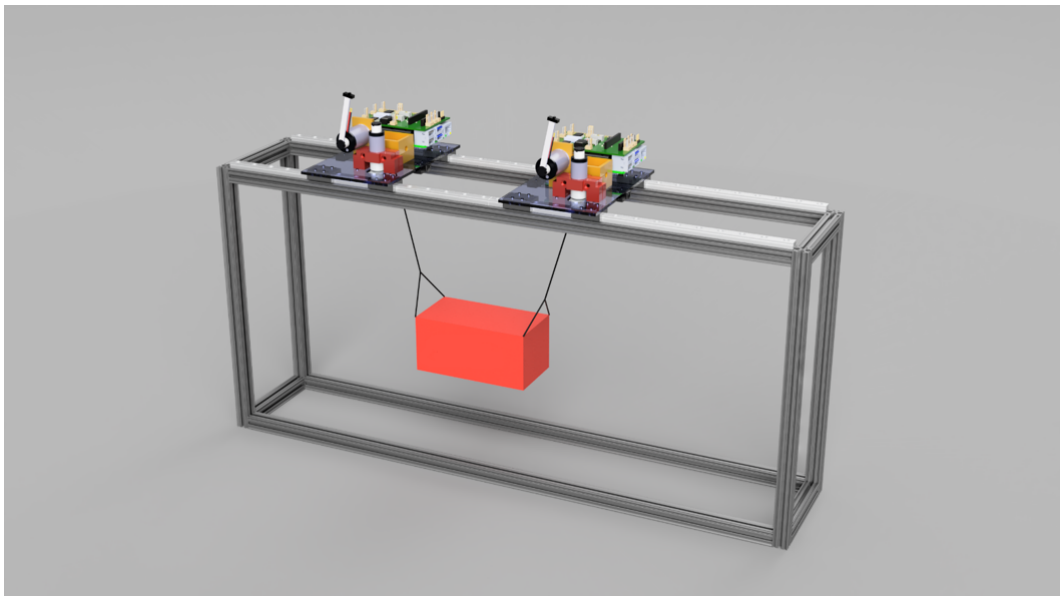


Abbildung 1 – CAD-Zeichnung des Doppelkran-Demonstratorsystems ohne Verkabelung.

Im Rahmen vorangegangener studentischer Arbeiten ist am Fraunhofer-Institut für Integrierte Schaltungen IIS, Institutsteil Entwicklung Adaptiver Systeme EAS [5] in Dresden ein Demonstratorsystem entwickelt worden. Langfristig soll dieses Vorteile von Regelungsstrategien auf verteilten Recheneinheiten gegenüber einer zentralen Messgrößenverarbeitung und Stellgrößenberechnung untersuchen. Das Konzept des Demonstrators ist in [Abbildung 1](#) dargestellt.

Das Demonstratorsystems besteht aus zwei Brückenkränen, die eine gemeinsame Last in einer festen Ebene anheben. Die Kräne befinden sich auf Schienen und verfügen jeweils

über einen Raspberry Pi 4B als Hauptrecheneinheit sowie einen STM32-Mikrocontroller für Motoransteuerungen und Messungen. Beide Raspberry Pis können über eine LAN-Verbindung miteinander kommunizieren.

Beide Kräne sind auf Schienen in horizontaler Richtung sowie die Seillängen mit jeweils einem DC-Motor aktuiert. Auf den STM32-Mikrocontroller ist bereits eine unterlagerte Strom- beziehungsweise Kraftregelung für diese implementiert. Messungen der Seillängen und Kranpositionen auf der Schiene erfolgen mittels Inkrementalgebern nach einem anfänglichen Kalibrierungsvorgang. Die Seilwinkel werden mittels mitschwingender Potentiometer bestimmt. Abbildung 2 zeigt eine Photographie der realen Anordnung des Demonstrators.

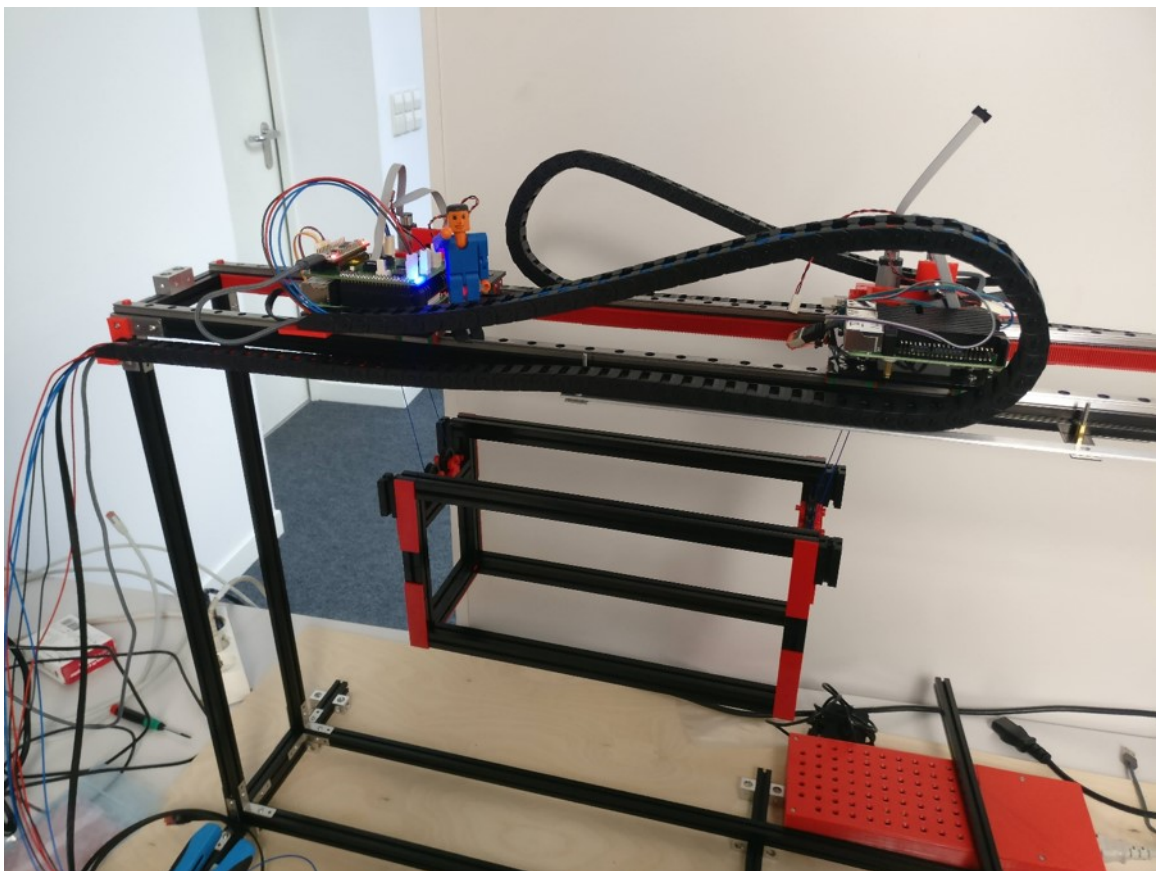


Abbildung 2 – Doppelkran-Demonstratorsystem mit Laufkatzen und Last.

2.2 Problembeschreibung und Zielsetzung

Bei der Bewegung von Containern in Häfen ist ein ruckarmer und gegenüber der Horizontalen stabiler Transport notwendig. Ziel der Studienarbeit ist es deshalb, bezüglich

des vorhandenen Demonstratorsystems eine zentrale Referenzregelstrategie zu entwerfen. Damit soll unter Vorgabe von Sollposen eine Planung von Trajektorien der Last in der Ebene und Folgeregelung zur Überführung dieser zwischen verschiedenen Ruhelagen ermöglicht werden. Diese Überlegungen sollen auf Basis einer Modellierung des Krans als Mehrkörpersystems geschehen.

Kapitel 3

Analytische Modellbildung

3.1 Allgemeine Modellannahmen

In der folgenden Modellierung wird das Demonstratorsystem nur planar betrachtet, also die gesamte Bewegung aller Komponenten nur in der vertikalen Ebene berücksichtigt. Diese Annahme ist gerechtfertigt, weil die Laufkatzen nur entlang einer Achse verfahren können und die Lagerung bzw. Aufhängung der Last ein Schwingen dieser nur in einer Ebene zulässt. Die Seile werden aufgrund der geringen Dicke und auch im Vergleich zu den Laufkatzen und der Last als masselos angenommen sowie nicht mit einem Trägheitsmoment behaftet. Die Last wird trotz ihrer Aussparungen mit einer homogenen Masseverteilung modelliert. Für eine exakte Beschreibung wären CAD-Daten oder eine Demontage mit Vermessung der Teilkomponenten notwendig. Es wird aus Gründen der Einfachheit auf die Abbildung dissipativer Kräfte verzichtet. Zudem können diese bei einer funktionierenden unterlagerten Regelung als kompensiert angenommen werden.

Die Modellbildung erfolgt in mehreren Stufen. Es ist zunächst problemlos möglich mittels der Lagrange-Gleichungen erster oder auch zweiter Art den Einzelkran darzustellen. Dabei hat die Modellierung zweiter Art den Vorteil, dass Stellkräfte einfacher abgebildet werden können und sich ein typischerweise effizient zu simulierendes gewöhnliches Differenzialgleichungssystem (DGL-System, engl. ODE systems) ergibt. Ausgehend von den Erkenntnissen und aufgrund geringer Komplexität der überschaubaren Terme des Einzelkrans, kann die prinzipielle Methodik verifiziert werden. Daran anschließend wird eine Erweiterung auf ein Doppelkransystem in Analogie zum realen Demonstrator vorgenommen. Wegen der an beiden Laufkatzen befestigten Last liegt zunächst alternativ zum vorherigen Vorgehen die Nutzung der Lagrange-Gleichungen erster Art, bei der mittels algebraischer Zwangsbedingungen ein Differenzial-algebraisches Gleichungssystem (DAE-System, von engl. differential algebraic equations) zur Simulation generiert wird, nahe. Allerdings ist dabei eine Aktuierung der Seilwinden anspruchsvoller, da bereits für eine konstante Seillänge die bei der Katzfahrt auftretenden dynamischen Seilkräfte kompensiert werden müssen, ohne dass es dafür eine explizite resultierende Gesamtkraft gibt, die zu Null gesetzt werden kann. Beim physischen Demonstrator sperrt das Schneckengetriebe der Seilwinde im stromfreien Fall die Hubaktuierung.

Auch bei einem Doppelkransystem ist stattdessen eine Modellierung mit den Lagrange-Gleichungen zweiter Art möglich. Es folgt nun ein kurzer theoretischer Überblick zu beiden erwähnten Arten des Lagrange-Formalismus.

3.2 Modellierung mittels Lagrange-Formalismus

Die Dynamik mechanischer Systeme lässt sich über Differenzialgleichungen, den so genannten Lagrange-Gleichungen beschreiben. Dabei wird eine Menge aus n auftretenden und zeitlich veränderlichen Koordinaten als Konfigurationskoordinaten oder Systemgrößen $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$ bezeichnet. Die zeitlichen Änderungsraten dieser sind die (Konfigurations-)Geschwindigkeiten $\dot{\theta}$. Anfänglich wurde der Literatur [8, S.10] folgend eine Unterteilung der Systemgrößen in "aktive" und "passive" Koordinaten vorgenommen. Im Verlauf dieser Arbeit ist bemerkt worden, dass die Aufgliederung $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$ in die direkt aktuierten Koordinaten \mathbf{q} und nicht direkt aktuierten Koordinaten \mathbf{p} eine treffendere Bezeichnung darstellt. [8, S.7]

Die kinetische Energie eines Systems wird im Folgenden durch die Funktion T sowie die potentielle Energie durch V beschrieben. Die Lagrange-Funktion kann damit folgendermaßen definiert werden:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta). \quad (3.1)$$

Eine stark automatisierte Durchführung dieses Formalismus ist unter Nutzung des Python-Pakets symbtools [10] möglich.

3.2.1 Lagrange-Gleichungen erster Art

Mit den Lagrange-Gleichungen erster Art können Probleme mit Zwangsbedingungen und -kräften dargestellt werden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tilde{Q}_i + Q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Die sich auf die jeweilige Koordinate θ_i beziehende Stellkraft $Q_i = f_i - D_i$ entspricht der verallgemeinerten Kraft, welche sich aus der äußeren (Stell-)Kraft f_i sowie internen Reibungskraft D_i zusammensetzt [2, S. 49].

Es können m holonomen Zwangsbedingungen $g_1(\theta) = \dots = g_m(\theta) = 0$ eingeführt werden, aus denen die Zwangskraft \tilde{Q}_i in Richtung der Koordinate θ_i folgt:

$$\tilde{Q}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial \theta_i}. \quad (3.3)$$

In dieser Beziehung bezeichnet λ_j den jeweiligen Lagrange-Multiplikator.

3.2.2 Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art beschreiben bezüglich des Vorhergehenden den Spezialfall ohne Zwangsbedingungen, also $m = 0$. Zwangskräfte müssen dabei nicht explizit bestimmt werden. Die Bewegungsgleichungen können folgendermaßen aus der Lagrange-Funktion abgeleitet werden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

-> ggf. dazu in Nextcloud/Präsis Folien zu modeltools -> Matrixdarstellung mit M, C, K, B

Zur Bestimmung der Komponenten Q_i der verallgemeinerten Kraft wird das Prinzip der virtuellen Arbeit herangezogen [11]:

$$\delta W = \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots + \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_n} \delta \theta_n. \quad (3.5)$$

Dabei entspricht bei einem System von l (massebehafteten) Teilchen \mathbf{r}_k dem Richtungsvektor zum k -ten Partikel, \mathbf{F}_k der jeweils entlang dieses Richtungsvektoren angewandten Stellkraft, $\delta \mathbf{r}_k$ der virtuellen Verschiebung des Partikels im Raum und $\delta \theta_i$ der virtuellen Verschiebung der Koordinate θ_i , welche der Beziehung

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \delta \theta_i. \quad (3.6)$$

genügt.

Die gesamte virtuelle Arbeit des Systems dieser Teilchen kann also ebenso durch

$$\delta W = Q_1 \delta \theta_1 + \dots + Q_n \delta \theta_n = \sum_{k=1}^l \delta \mathbf{r}_k^T \mathbf{F}_k \quad (3.7)$$

dargestellt werden, wobei sich die Komponenten der verallgemeinerten Kraft zu

$$Q_i = \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \right)^T \mathbf{F}_k = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

ergeben.

3.3 Generierung und Simulation von DAE-Systemen

DAE-Systeme sind ODE-Systeme, welche um algebraische Gleichungen (AGL, auch Nebenbedingungen) ergänzt werden. Diese Nebenbedingungen können zur Darstellung von Zwangsbedingungen der Lagrange-Gleichungen erster Art genutzt werden. DAE-Systeme lassen sich typischerweise in einer semi-expliziten Form darstellen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, t) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t), \quad (3.10)$$

wobei \mathbf{x} dem Zustand, \mathbf{z} den algebraischen Variablen (weitere Systemgrößen, die in den Systemgleichungen nicht abgeleitet vorkommen), \mathbf{u} dem Systemeingang sowie t der Zeit entspricht. [7, S.137]

Eine Möglichkeit zu Klassifikation von DAE-Systemen ist der differenzielle Index i_d . Dieser entspricht der minimale Anzahl an Differenziation $\frac{d}{dt}$ der AGL \mathbf{g} (Zwangsbedingungen), damit unter Einbeziehung der DGL ein explizites DGL-System aus dem DAE-System entsteht. Ein gewöhnliches DGL-System besitzt also den differenzielle Index $i_d = 0$. Die Differenziation der AGL mit dem Resultat eines DAE-Systems mit kleinerem Index wird als Indexreduktion bezeichnet. [7, S.139]

Für die Simulation von DAE-Systemen ist die numerische Integration dieser Gleichungssysteme notwendig. Die in dieser Arbeit untersuchten mechanischen Systeme sind im Allgemeinen solche mit starrer Kopplung als Zwangsbedingungen vom Index $i_d = 3$ und können über folgende Bewegungsgleichungen beschrieben werden:

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{K}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{G}(\theta)\lambda - \mathbf{B}(\theta)\tau \quad (3.11)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\theta). \quad (3.12)$$

Zur Integration davon gibt es verschiedene Möglichkeiten [6, Kap. 8]:

- Indexreduktion auf Index $i_d = 2$ und anschließende Integration über ein implizites¹ Verfahren
- Indexreduktion auf Index $i_d = 1$ und anschließende Integration über ein explizites² Verfahren mit AGL-Löser oder ein implizites Verfahren
- Indexreduktion auf Index $i_d = 0$ und anschließende Integration über ein explizites oder implizites Verfahren.

¹Auf der linken und rechten Seite der zu integrierenden Gleichungen sind die gesuchten Näherungswerte von $\mathbf{x}(t_{i+1})$ an der Stelle t_{i+1} enthalten.

²Zur Berechnung des Näherungswertes von $\mathbf{x}(t_{i+1})$ an der Stelle t_{i+1} wird einzig der zuletzt berechnete Näherungswert von $\mathbf{x}(t_i)$ an der Stelle t_i benötigt.

Die im Python-Paket `sympbtools` [10] enthaltene Bibliothek `modeltools` führt die Reduktion von Index-3-Systemen auf Index-1-Systeme durch. Zur numerischen Berechnung kann daraufhin der Solver ODASSL des Python-Pakets `assimulo` [1] verwendet werden.

Zur Erfüllung der AGL zu Simulationsbeginn müssen konsistente Anfangswerte $\mathbf{x}(0)$ und $\mathbf{z}(0)$ bestimmt werden. Bei DAE-Systemen mit Index $i_d \geq 2$ kann $\mathbf{x}(0)$ nicht mehr frei gewählt werden, da $\mathbf{z}(0)$ nicht mehr allein aus AGL bestimmbar ist. Es ist notwendig, zusätzliche algebraische Bedingungen an \mathbf{x} und \mathbf{z} aus den DGL abzuleiten. Die Bibliothek `modeltools` berechnet konsistente Anfangswerte mit der Funktion `calc_consistent_init_vals`. Falls es andernfalls zu inkonsistenten Anfangswerten kommt, folgen daraus Simulationsfehler in den ersten Schritten oder sogar vollständig falsche Ergebnisse. [7, S.207]

3.4 Analytisches Modell Einzelkran

(Im Folgenden genutztes Notebook: `flatness_notebooks/ODE_flatness_analysis_single_crane.ipynb`)

Mittels der Lagrange-Gleichungen zweiter Art wird im Folgenden ein ODE-Modell des Einzelkrans erzeugt. Dabei wird entsprechend der Erläuterungen aus Abschnitt 3.2.2 vorgegangen. Diese Modellierung hat den Vorteil, dass durch die generalisierte Kraft gerade die Stellkraft im Seil gut abgebildet werden kann sowie eine Vielzahl verschiedener Integrationsverfahren für eine effiziente Lösung des ODE-Systems nutzbar ist. Abbildung 3 zeigt die Konfiguration des Einzelkransystems.

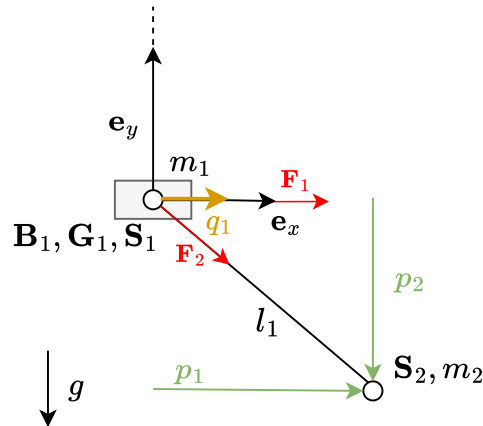


Abbildung 3 – Langbeschreibung, die gerne auch über mehrer Zeilen gehen darf.

Als direkt aktuierte Koordinate wird nur die x -Verschiebung q_1 der Laufkatzenposition ($B_1 = G_1 = S_1$) ausgewählt, als nicht direkt aktuierte Koordinaten die x - und y -Auslenkungen (p_1, p_2) der Last S_2 aus dem Ursprung. Die variable Seillänge wird mit l_1

bezeichnet, die durch die Koordinaten auch mittels:

$$l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2} \quad (3.13)$$

ausgedrückt werden kann.

Die Position der beiden Massenschwerpunkte kann somit wie folgt durch die Koordinaten beschrieben werden:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Damit ist es möglich die kinetische und potentielle Energie des Systems zu formulieren:

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{S}}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{S}}_2^T \dot{\mathbf{S}}_2 = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2} \quad (3.15)$$

$$V = m_2 g \mathbf{S}_2^T \mathbf{e}_y = m_2 g p_2. \quad (3.16)$$

Die Systemgleichungen können durch die Lagrange-Gleichungen zweiter Art zunächst in Abhängigkeit der Komponenten der generalisierten Kraft Q_i bestimmt werden:

$$-Q_1 + m_2 \ddot{p}_1 = 0 \quad (3.17a)$$

$$-Q_2 + g m_2 + m_2 \ddot{p}_2 = 0 \quad (3.17b)$$

$$-Q_3 + m_1 \ddot{q}_1 = 0. \quad (3.17c)$$

Die Eingangskomponenten τ_1, τ_2 des Systems entsprechen den unterlagert geregelten Kräften der Motoren der Laufkatze bzw. der Seilwinde. Sie können über Stellkräfte vektoriell dargestellt werden:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} \\ \frac{p_2 \tau_2}{l_1} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit nach Gleichung (3.7) und (3.8) ist es möglich, die generalisierte Kraft durch diese Stellkräfte bzw. den Systemeingang auszudrücken:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} \\ \frac{p_2 \tau_2}{l_1} \\ \tau_1 - \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Durch einsetzen dieser lässt sich ein abschließender Satz an Systemgleichungen des Einzelkrans bilden:

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} = 0 \quad (3.20a)$$

$$g m_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0 \quad (3.20b)$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} = 0. \quad (3.20c)$$

3.5 Analytisches Modell Doppelkran

3.5.1 Ansatz über ein ODE-System

(Im Folgenden genutztes Notebook: flatness_notebooks/ODE_flatness_analysis.ipynb)

Mittels der Lagrange-Gleichungen zweiter Art wird im Folgenden ein ODE-Modell des Doppelkrans erzeugt. Dabei wird entsprechend der Erläuterungen aus Abschnitt 3.2.2 vorgegangen. Abbildung 4 zeigt die Konfiguration dieses Doppelkransystems.

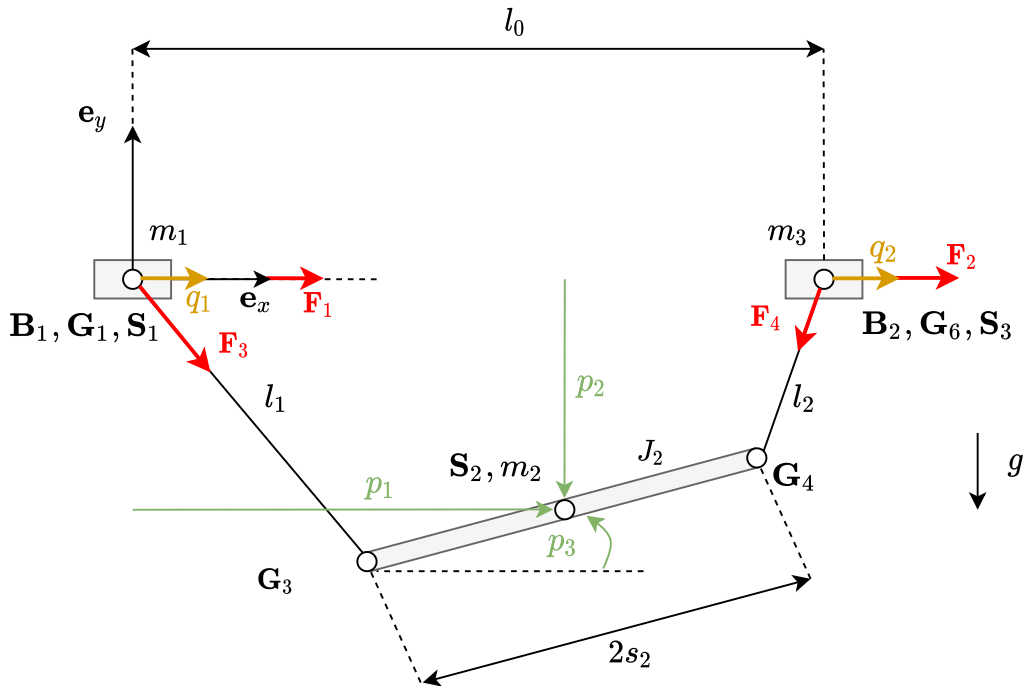


Abbildung 4 – Langbeschreibung, die gerne auch über mehrer Zeilen gehen darf.

Als direkt aktuierte Koordinate werden zunächst nur die x -Verschiebungen q_1 und q_2 der Laufkatzenpositionen ($\mathbf{B}_1 = \mathbf{G}_1 = \mathbf{S}_1$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{G}_6 = \mathbf{S}_3$) ausgewählt, als nicht direkt aktuierte Koordinaten die absolute Position (p_1, p_2) des Lastschwerpunkts (\mathbf{S}_2) sowie die Orientierung der Last p_3 gegenüber der Horizontalen. Die variable Seillänge wird mit l_1 sowie l_2 bezeichnet, die durch die Koordinaten auch mittels:

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2} \quad (3.21)$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2} \quad (3.22)$$

ausgedrückt werden kann.

Die Position der Massenschwerpunkte und Gelenke kann somit wie folgt durch die Koordinaten beschrieben werden:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} l_0 + q_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} p_1 - s_2 \cos(p_3) \\ p_2 - s_2 \sin(p_3) \end{pmatrix}, \mathbf{G}_4 = \begin{pmatrix} p_1 + s_2 \cos(p_3) \\ p_2 + s_2 \sin(p_3) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Damit ist es möglich, die kinetische und potentielle Energie des Systems zu formulieren:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{S}}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{S}}_2^T \dot{\mathbf{S}}_2 + \frac{J_2}{2} \dot{p}_3^2 + \frac{m_3}{2} \dot{\mathbf{S}}_3^T \dot{\mathbf{S}}_3 \\ &= \frac{J_2 \dot{p}_3^2}{2} + \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{q}_2^2}{2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$V = m_2 g \mathbf{S}_2^T \mathbf{e}_y = m_2 g p_2. \quad (3.25)$$

Die Systemgleichungen können durch die Lagrange-Gleichungen zweiter Art zunächst in Abhängigkeit der Komponenten der generalisierten Kraft Q_i bestimmt werden:

$$-Q_1 + m_2 \ddot{p}_1 = 0 \quad (3.26a)$$

$$-Q_2 + g m_2 + m_2 \ddot{p}_2 = 0 \quad (3.26b)$$

$$J_2 \ddot{p}_3 - Q_3 = 0 \quad (3.26c)$$

$$-Q_4 + m_1 \ddot{q}_1 = 0 \quad (3.26d)$$

$$-Q_5 + m_3 \ddot{q}_2 = 0. \quad (3.26e)$$

Die Komponenten des Systemeingangs τ können über Stellkräfte vektoriell dargestellt werden:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_3(p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))}{\frac{l_1}{\tau_3(p_2 - s_2 \sin(p_3))}} \\ \frac{l_1}{\tau_3(p_2 - s_2 \sin(p_3))} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))}{\frac{l_2}{\tau_4(p_2 + s_2 \sin(p_3))}} \\ \frac{l_2}{\tau_4(p_2 + s_2 \sin(p_3))} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit ist es möglich, die generalisierte Kraft durch diese Stellkräfte bzw. den Systemeingang auszudrücken (Abkürzungen $s_x := \sin x$ und $c_x := \cos x$):

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 c_{p_3})}{l_2} + \frac{\tau_3(p_1 - q_1 - s_2 c_{p_3})}{l_1} \\ \frac{\tau_4(p_2 + s_2 s_{p_3})}{l_2} + \frac{\tau_3(p_2 - s_2 s_{p_3})}{l_1} \\ \frac{s_2 \tau_4(p_2 + s_2 s_{p_3}) c_{p_3}}{l_2} - \frac{s_2 \tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 c_{p_3}) s_{p_3}}{l_2} - \frac{s_2 \tau_3(p_2 - s_2 s_{p_3}) c_{p_3}}{l_1} + \frac{s_2 \tau_3(p_1 - q_1 - s_2 c_{p_3}) s_{p_3}}{l_1} \\ \tau_1 - \frac{\tau_3(p_1 - q_1 - s_2 c_{p_3})}{l_1} \\ \tau_2 - \frac{\tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 c_{p_3})}{l_2} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Durch Einsetzen dieser lässt sich ein abschließender Satz an Systemgleichungen des

Doppelkrans bilden:

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_4 (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))}{l_2} - \frac{\tau_3 (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))}{l_1} = 0 \quad (3.29a)$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{\tau_4 (p_2 + s_2 \sin(p_3))}{l_2} - \frac{\tau_3 (p_2 s_2 \sin(p_3))}{l_1} = 0 \quad (3.29b)$$

$$J_2 \ddot{p}_3 - \frac{s_2 \tau_4 (p_2 + s_2 \sin(p_3)) \cos(p_3)}{l_2} + \frac{s_2 \tau_4 (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)) \sin(p_3)}{l_2} \\ + \frac{s_2 \tau_3 (p_2 - s_2 \sin(p_3)) \cos(p_3)}{l_1} - \frac{s_2 \tau_3 (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)) \sin(p_3)}{l_1} = 0 \quad (3.29c)$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_3 (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))}{l_1} = 0 \quad (3.29d)$$

$$m_3 \ddot{q}_2 - \tau_2 + \frac{\tau_4 (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))}{l_2} = 0. \quad (3.29e)$$

Alternativ kann das Doppelkransystem auch eingangsaffin im Zustandsraum beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\tau \text{ mit} \\ \mathbf{x} &= (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, 0, -g, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{l_1 m_2} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{l_2 m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{l_1 m_2} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{l_2 m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_2 (p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 l_1} & \frac{s_2 (l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 l_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{l_1 m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_3} & 0 & \frac{l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3)}{l_2 m_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.5.2 Ansatz über ein DAE-System

(Im Folgenden genutzt Notebook: double_crane_notebooks/DAE_double_crane_cartesian.ipynb)

Mittels der Lagrange-Gleichungen erster Art wird im Folgenden ein DAE-Modell des Doppelkrans erzeugt. Dabei wird entsprechend der Erläuterungen aus Abschnitt 3.2.1 vorgegangen. Schließlich ergibt sich hierbei ein komplexerer Satz an Systemgleichungen, die typischerweise weniger effizient zu simulieren sind als bei einem ODE-System. Daher wird dieser Ansatz in weiteren Kapiteln nicht weiter verfolgt. Eine Dokumentation dieser Modellierung ist trotzdem sinnvoll. Durch die Einprägung von Zwangsbedingungen kann die kinematische Schleife wegen der gemeinsamen Last intuitiv abgebildet werden kann. Aufgrund der algebraischen Gleichungen würde sich ein Flachheitsnachweis anders als

bei den ODE-Systemen gestalten. Es wird zunächst einzig eine horizontale Aktuierung der Laufkatzen durch den Eingang $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T$ betrachtet. Für eine spätere effiziente Simulation mit aktuierten Seilwinden wäre gerade bei konstanten Seillängen eine Umformulierung des Problems mit diesen Längen als Stellgröße sinnvoll. (Quelle: Buch von Rudolf S.21 -> Nextcloud Flachheit/fotos ???) Abbildung 5 zeigt die Konfiguration dieses Doppelkransystems.

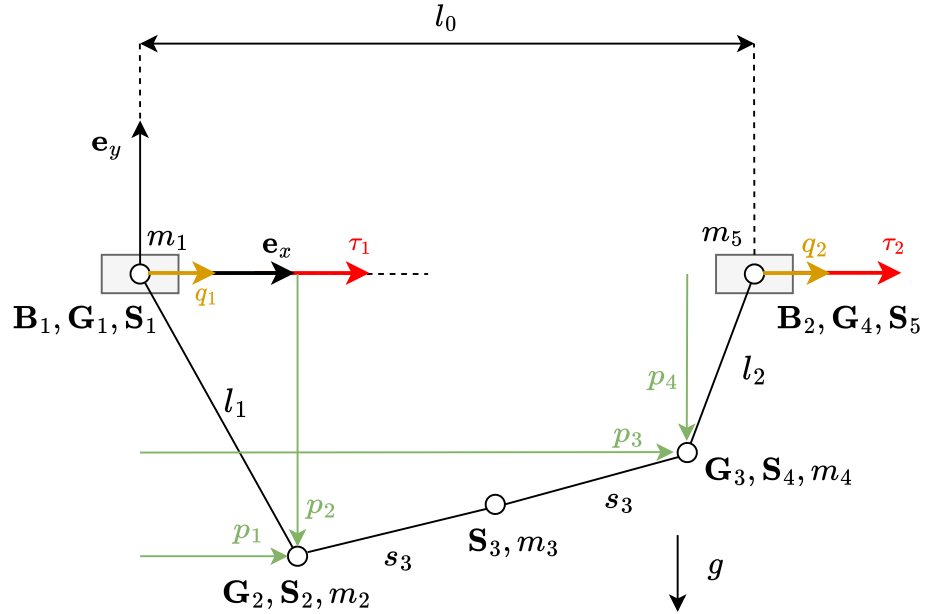


Abbildung 5 – Langbeschreibung, die gerne auch über mehrer Zeilen gehen darf.

Als direkt aktuierte Koordinate werden nur die x -Verschiebungen q_1 und q_2 der Laufkatzenpositionen ($\mathbf{B}_1 = \mathbf{G}_1 = \mathbf{S}_1$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{G}_4 = \mathbf{S}_5$) ausgewählt, als nicht direkt aktuierte Koordinaten die absolute Position (p_1, p_2) des Gelenks $\mathbf{G}_2 (= \mathbf{S}_2)$ sowie (p_3, p_4) des Gelenks $\mathbf{G}_3 (= \mathbf{S}_4)$.

Für konstante Seillängen können folgende Zwangsbedingungen formuliert werden:

$$l_1 - \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} = 0 \quad (3.31)$$

$$l_2 - \sqrt{p_4^2 + (-l_0 + p_3 - q_2)^2} = 0. \quad (3.32)$$

Die konstante Lastlänge wird durch

$$2s_3 - \sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2} \quad (3.33)$$

ausgedrückt.

Die Position der Massenschwerpunkte und Gelenke kann somit wie folgt durch die Koordinaten beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_4) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1 + p_3 \\ p_2 + p_4 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_4 &= \begin{pmatrix} p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_5 = \begin{pmatrix} l_0 + q_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Es ist notwendig, dass alle abgeleiteten Koordinaten in der kinetischen Energie T vorhanden sind, damit die Massenmatrix $\mathbf{M}(\theta)$ in Gleichung (3.11) regulär ist [8, S. 7]. Dies wäre bei einer Modellierung der Last mit homogener Masseverteilung und Trägheitsmoment nicht der Fall. Deshalb wird die Last durch ein System aus drei Massen (m_2, m_3, m_4) beschrieben, das sich simulativ äquivalent verhält und folgenden Gleichungen genügt:

$$m_{\text{ges}} = m_2 + m_3 + m_4 \quad (3.35)$$

$$m_2 = m_4 \quad (3.36)$$

$$J = m_2 s_3^2 + m_4 s_3^2 = 2m_2 s_3^2 \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow m_2 = m_4 = \frac{J}{2s_3^2} \quad (3.38)$$

$$\Rightarrow m_3 = m_{\text{ges}} - m_2 - m_4. \quad (3.39)$$

Die Größen m_{ges} und J beziehen sich auf die in Abschnitt 3.6 identifizierten Systemparameter, die so auch bei der Modellbildung des Doppelkrans als ODE-System genutzt wurden.

Somit ist es möglich, die kinetische und potentielle Energie des Systems zu formulieren:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{S}}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{S}}_2^T \dot{\mathbf{S}}_2 + \frac{m_3}{2} \dot{\mathbf{S}}_3^T \dot{\mathbf{S}}_3 + \frac{m_4}{2} \dot{\mathbf{S}}_4^T \dot{\mathbf{S}}_4 + \frac{m_5}{2} \dot{\mathbf{S}}_5^T \dot{\mathbf{S}}_5 \\ &= \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2} + \frac{m_3 \cdot 0.25 (\dot{p}_1 + \dot{p}_3)^2}{2} + \frac{m_3 \cdot 0.25 (\dot{p}_2 + \dot{p}_4)^2}{2} \\ &\quad + \frac{m_4 \dot{p}_3^2}{2} + \frac{m_4 \dot{p}_4^2}{2} + \frac{m_5 \dot{q}_2^2}{2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} V &= (m_2 g \mathbf{S}_2^T + m_3 g \mathbf{S}_3^T + m_4 g \mathbf{S}_4^T) \mathbf{e}_y \\ &= g (m_2 p_2 + m_3 (0.5p_2 + 0.5p_4) + m_4 p_4). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Unter Nutzung der Lagrange-Multiplikatoren λ_j lassen sich die Systemgleichungen

ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\lambda_1 p_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} + \frac{\lambda_1 q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} - \frac{\lambda_2 p_1}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} \\
 & + \frac{\lambda_2 p_3}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} + m_2 \ddot{p}_1 + 0.25 m_3 \ddot{p}_1 + 0.25 m_3 \ddot{p}_3 = 0
 \end{aligned} \tag{3.42a}$$

$$\begin{aligned}
 & g m_2 + 0.5 g m_3 - \frac{\lambda_1 p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} - \frac{\lambda_2 p_2 + \lambda_2 p_4}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} \\
 & + m_2 \ddot{p}_2 + 0.25 m_3 \ddot{p}_2 + 0.25 m_3 \ddot{p}_4 = 0
 \end{aligned} \tag{3.42b}$$

$$\frac{\lambda_2 (p_1 - p_3)}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} + \frac{\lambda_3 (l_0 - p_3 + q_2)}{\sqrt{p_4^2 + (l_0 - p_3 + q_2)^2}} \tag{3.42c}$$

$$+ \frac{m_3 (0.5 \ddot{p}_1 + 0.5 \ddot{p}_3)}{2} + m_4 \ddot{p}_3 = 0 \tag{3.42d}$$

$$\begin{aligned}
 & 0.5 g m_3 + g m_4 + \frac{\lambda_2 p_2}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} - \frac{\lambda_2 p_4}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} \\
 & - \frac{\lambda_3 p_4}{\sqrt{p_4^2 + (l_0 - p_3 + q_2)^2}} + 0.25 m_3 \ddot{p}_2 + 0.25 m_3 \ddot{p}_4 + m_4 \ddot{p}_4 = 0
 \end{aligned} \tag{3.42e}$$

$$\frac{\lambda_1 (p_1 - q_1) + \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} (m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1)}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} = 0 \tag{3.42f}$$

$$\frac{-\lambda_3 (l_0 - p_3 + q_2) + \sqrt{p_4^2 + (l_0 - p_3 + q_2)^2} (m_5 \ddot{q}_2 - \tau_2)}{\sqrt{p_4^2 + (l_0 - p_3 + q_2)^2}} = 0. \tag{3.42g}$$

3.6 Systemidentifikation

Die meisten in den Modellen vorkommenden Systemparameter sind geometrischer Natur oder Massen und lassen sich durch Messen mit einem Lineal oder einer Wage bestimmen. Nur für das Trägheitsmoment der Last J ist eine direkte experimentelle Bestimmung (z.B. durch einen Pendelversuch) zu aufwendig. Daher wird dieser Parameter, unter der Annahme eines Quaders mit homogener Masseverteilung und Rotationsachse durch seinen Mittelpunkt, die in die Ebene zeigt, berechnet [12]:

$$J = \frac{1}{12} m_2 ((2s_2)^2 + h^2). \tag{3.43}$$

Dabei entspricht h der Höhe der Last, welche zu $h = 90$ mm bestimmt wurde. Die numerische Belegung der Systemparameter ist in Tabelle 1 zusammengefasst.

Tabelle 1 – Physikalische Parameter des Doppelkrandemonstratorsystems.

Parameter	Bezeichnung im ODE-Modell	Wert
Masse Laufkatze 1	m_1	0,45 kg
Masse Laufkatze 2	m_3	0,45 kg
Masse Last	m_2	0,557 kg
Länge Last	$2s_2$	0,15 m
Initialer Laufkatzenabstand	l_0	0,3 m
Trägheitsmoment Last	J_2	0,00455 kgm ²

Kapitel 4

Flachheitsanalyse

4.1 Definition differenzieller Flachheit

Ein System der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ mit $\mathbf{F}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ heißt (differenziell) flach, falls ein m -Tupel $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_m)^T$ sowie glatte Funktionen Ψ, Θ existieren, so dass:

$$\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_x)}) \text{ mit } n_x < \infty \text{ und} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u} = \Theta(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_u)}) \text{ mit } n_u < \infty. \quad (4.2)$$

Dabei ist \mathbf{y} ein flacher Ausgang.

Aus der Existenz eines flachen Ausgangs folgt, dass die Systemgrößen bestehend aus dem Zustand \mathbf{x} und Eingang \mathbf{u} eindeutig aus dem flachen Ausgang \mathbf{y} und einer endlichen Anzahl dessen Zeitableitungen berechnet werden können, also keine Differenzialgleichungen durch Integration dafür gelöst werden müssen. Eine alternative Formulierung des Flachheitsbegriffs verzichtet auf die Angabe der gleichen Dimension m von Eingang und flachem Ausgang, fordert aber die differenzielle Unabhängigkeit der Komponenten von \mathbf{y} .

Die Existenzbedingungen eines flachen Ausgangs sind bei Eingrößensystemen bekannt, allerdings ist der systematische Flachheitsnachweis und die Berechnung eines flachen Ausgangs bei Mehrgrößensystemen im Allgemeinen nicht abschließend gelöst. [9, S. 185]

4.2 Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

Im Folgenden wird ein prinzipielles praktisches Vorgehen zur Bestimmung flacher Ausgänge von Mehrgrößensystemen sowie zur Parametrisierung der Systemgrößen anhand solcher flachen Ausgänge skizziert. Für eine mathematisch fundierte und systematische Herangehensweise sei auf den Beitrag [3] verwiesen.

Es sei ein nichtlineares Mehrgrößensystem der Form aus Abschnitt 4.1 gegeben. Dessen Eingang \mathbf{u} kommt in affiner Form vor und könne mittels der Systemgleichungen eliminiert werden, so dass ein autonomes System aus $p = n - m$ Gleichungen folgt. Diese Gleichungen werden wiederum zur Elimination p übriger Zustandskomponenten genutzt, so dass sich ein flacher Ausgang \mathbf{y} der Dimension $n - p = m$ ergibt.

Zur Auswahl einer geeigneten Systemgleichung und Eingangskomponente für die Elimination bietet sich die Bildung der Jacobi-Matrix \mathbf{J}_i der **zu diesem Zeitpunkt noch i verbleibenden Systemgleichungen** bezüglich des Eingangs $\mathbf{u}_{m-(n-i)}$ an. Dabei sind die zu den Matrixzeilen korrespondierenden Gleichungen geeignet, in denen nur ein isolierter Spalteneintrag $\varepsilon \neq 0$ steht, also weitere Einträge der Spalte Null sind:

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & \varepsilon & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Falls keine solcher Spalten zu finden ist, kann eine Transformation \mathbf{T}_i der Systemgleichungen durchgeführt werden, welche mittels linkem Orthokomplement $\mathbf{J}_i^{L\perp}$ und linker Pseudoinverser \mathbf{J}_i^{L+} der Jacobi-Matrix das System in eine geeignete Form überführt [3, Abschnitt 2.1.2]:

$$\mathbf{T}_i \mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-(n-i)} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times (m-(n-i))} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Wobei \mathbf{T}_i über die Eigenschaften von \mathbf{J}_i^{L+} und $\mathbf{J}_i^{L\perp}$ folgendermaßen gebildet werden kann:

$$\mathbf{J}_i^{L+} \mathbf{J}_i = \mathbf{I}_i \quad (4.5)$$

$$\mathbf{J}_i^{L\perp} \mathbf{J}_i = \mathbf{0}_{(n-m) \times (m-(n-i))} \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_i^{L+} \\ \mathbf{J}_i^{L\perp} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Nachdem die Eingangskomponenten aus den Systemgleichungen eliminiert wurden, kann die Behandlung der anderen noch vorhandenen Systemgrößen analog durch Bildung der Jacobi-Matrix bezüglich dieser vorgenommen werden. Der flache Ausgang \mathbf{y} besteht aus der Menge an Systemgrößen, welche im Idealfall nach Elimination aller Gleichungen übrig ist. Mittels der Zusammenhänge aus den Systemgleichungen können dann nach Abschnitt 4.1 alle Systemgrößen allein durch $(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots)$ parametrisiert werden.

Bei nichtlinearen Systemen ist es allerdings oft nicht direkt möglich, alle Gleichungen direkt zu eliminieren, so dass Freiheitsgrade bestehen. Diese stellen eine Schwierigkeit

der Flachheitsanalyse im Mehrgrößenfall dar. Der skizzierte Algorithmus ist deshalb nur als hinreichend aber nicht als notwendig zu betrachten.

4.3 Anwendung Flachheitsanalyse am Einzelkran

Herangezogen: ODE Modell des Einzelkrans aus Lagrange 2

(flatness_notebooks/ODE_flatness_analysis_single_crane.ipynb)

Aus der analytischer Modellbildung des Einzelkransystems folgen die 3 Systemgleichungen 3.20a, 3.20b und 3.20c, welche als Grundlage des Flachheitsnachweises dienen.

Zunächst wird die Jacobi-Matrix dieser Gleichungen bezüglich τ gebildet:

$$\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ 0 & -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -1 & \frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Dabei ist zu erkennen, dass in der ersten Spalte der Jacobi-Matrix die Eingangskomponente τ_1 isoliert vorkommt, also durch die korrespondierende dritte Systemgleichung 3.20c bestimmt werden kann. Dementsprechend kann die letzte Zeile von \mathbf{J}_3 eliminiert werden.

Die verbleibenden ersten beiden Systemgleichungen 3.20a und 3.20b enthalten jeweils die Eingangskomponente τ_2 . Da in der zweiten Gleichung 3.20b τ_2 allein durch p_2 und die Ableitung \ddot{p}_2 dargestellt werden kann, wird diese Gleichung zur Elimination von τ_2 genutzt. Eine vorweggenommene Parametrisierung durch p_2 und \ddot{p}_2 ergibt:

$$\tau_2 = \frac{l_1 m_2 (g + \ddot{p}_2)}{p_2}. \quad (4.9)$$

Es ist zu bemerken, dass in dieser Beschreibung von τ_2 die Koordinaten p_1, p_2, q_1 zusätzlich durch l_1 enthalten sind. Diese können nach der Parametrisierung durch einen flachen Ausgang anschließend ersetzt werden.

Die letzte verbleibende Systemgleichung 3.20a weist nach Substitution des soeben ermittelten τ_2 nur noch die Systemgrößen bzw. Ableitungen $p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, q_1$ auf. Daher bietet sich die Elimination des allein algebraisch auftretenden q_1 und auch an dieser Stelle die Vorwegnahme der Parametrisierung dessen durch p_1, p_2 und deren Ableitungen an:

$$q_1 = \frac{p_1 (g + \ddot{p}_2) - p_2 \ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}. \quad (4.10)$$

Somit kann auch die Substitution von q_1 in l_1 zu einer flachen Darstellung von 4.9

erfolgen:

$$\tau_2 = \frac{m_2 \sqrt{\frac{p_2^2 (g + \ddot{p}_2)^2 + (-gp_1 - p_1 \ddot{p}_2 + p_1 (g + \ddot{p}_2) + p_2 \ddot{p}_1)^2}{(g + \ddot{p}_2)^2}} (g + \ddot{p}_2)}{p_2}. \quad (4.11)$$

Um abschließend die zuerst eliminierte Eingangskomponente τ_1 ebenso auszudrücken, wird nach Gleichung 3.20c die zweite zeitliche Ableitung \ddot{q}_1 benötigt:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 = & \frac{-2\ddot{p}_2 (g + \ddot{p}_2) (p_1 \ddot{p}_2 - p_2 \ddot{p}_1 - \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + \dot{p}_1 (g + \ddot{p}_2))}{(g + \ddot{p}_2)^3} \\ & + \frac{(g + \ddot{p}_2)^2 (p_1 \ddot{p}_2 - p_2 \ddot{p}_1 - 2\ddot{p}_1 \dot{p}_2 + 2\ddot{p}_2 \dot{p}_1 - \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + \dot{p}_1 (g + \ddot{p}_2))}{(g + \ddot{p}_2)^3} \\ & - \frac{(p_1 (g + \ddot{p}_2) - p_2 \ddot{p}_1) (\ddot{p}_2 (g + \ddot{p}_2) - 2\ddot{p}_2^2)}{(g + \ddot{p}_2)^3}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \frac{-m_1 2\ddot{p}_2 (g + \ddot{p}_2) (p_1 \ddot{p}_2 - p_2 \ddot{p}_1 - \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + \dot{p}_1 (g + \ddot{p}_2))}{(g + \ddot{p}_2)^3} \\ & + \frac{-m_1 (g + \ddot{p}_2)^2 (-p_1 \ddot{p}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + 2\ddot{p}_1 \dot{p}_2 - 2\ddot{p}_2 \dot{p}_1 + \ddot{p}_1 \dot{p}_2 - \dot{p}_1 (g + \ddot{p}_2))}{(g + \ddot{p}_2)^3} \\ & + \frac{-m_1 (p_1 (g + \ddot{p}_2) - p_2 \ddot{p}_1) (\ddot{p}_2 (g + \ddot{p}_2) - 2\ddot{p}_2^2)}{(g + \ddot{p}_2)^3} + \frac{m_2 \ddot{p}_1 (g + \ddot{p}_2)^3}{(g + \ddot{p}_2)^3} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Diese Parametrisierung zeigt, dass es sich bei $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$ um einen flachen Ausgang handelt.

4.4 Anwendung Flachheitsanalyse am Doppelkran

Herangezogen: ODE Modell des Gantrys aus Lagrange 2

(flatness_notebooks/ODE_flatness_analysis_control.ipynb)

Aus der analytischer Modellbildung des Doppelkransystems mit dem Lagrange-Formalismus zweiter Art folgen die 5 Systemgleichungen 3.29a bis 3.29e, welche als Grundlage des Flachheitsnachweises dienen.

Zunächst wird die Jacobi-Matrix dieser Gleichungen bezüglich τ gebildet:

$$\mathbf{J}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{l_1} & -\frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{l_2} \\ 0 & 0 & -\frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{l_1} & -\frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{l_2} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_2 - s_2 \sin(p_3)) \cos(p_3)}{l_1} - \frac{s_2(p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)) \sin(p_3)}{l_1} & -\frac{s_2(p_2 + s_2 \sin(p_3)) \cos(p_3)}{l_2} + \frac{s_2(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)) \sin(p_3)}{l_2} \\ -1 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{l_1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{l_2} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Dabei ist zu erkennen, dass in den ersten beiden Spalten der zu den Systemgleichungen korrespondierenden Jacobi-Matrix zwei Eingangsgrößen jeweils isoliert vorkommen. Es ergeben sich zur Bestimmung der Größen τ_1 und τ_2 keine redundanten Gleichungen. Dementsprechend können die letzten beiden Zeilen von \mathbf{J}_5 eliminiert werden und jeweils eine Gleichung zur Bestimmung der Eingänge τ_1 , τ_2 aus den übrigen Eingängen ermittelt werden.

Bei den übrigen Eingangsgrößen τ_3 , τ_4 gibt es in der darauf bezogenen Jacobimatrix \mathbf{J}_3 keine Spalten mehr, in denen diese Eingangskomponenten nur einmal vorkommen:

$$\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{l_1} & -\frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{l_2} \\ -\frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{l_1} & -\frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{l_2} \\ \frac{s_2(p_2 - s_2 \sin(p_3)) \cos(p_3)}{l_1} - \frac{s_2(p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)) \sin(p_3)}{l_1} & -\frac{s_2(p_2 + s_2 \sin(p_3)) \cos(p_3)}{l_2} + \frac{s_2(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)) \sin(p_3)}{l_2} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Wegen der nicht-quadratischen Dimension von \mathbf{J}_3 , gilt es eine linke Pseudoinverse $\mathbf{J}_3^{L+} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ zu finden:

$$\mathbf{J}_3^{L+} \mathbf{J}_3 = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

sowie das linke Orthokomplement (der Vektorraum aller Zeilen, die orthogonal zu allen Spalten von \mathbf{J}_3 sind) $\mathbf{J}_3^{L\perp} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$:

$$\mathbf{J}_3^{L\perp} \mathbf{J}_3 = \mathbf{0}_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

so dass eine Transformation \mathbf{T}_3 der übrigen Systemgleichungen erneut Spalten einer korrespondierenden Jacobi-Matrix impliziert mit jeweils nur einem konstanten nicht-Null-Eintrag:

$$\mathbf{T}_3 \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_3^{L+} \\ \mathbf{J}_3^{L\perp} \end{pmatrix} \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{3 \times 2}. \quad (4.18)$$

Da beide Matrizen nicht eindeutig sind, kann für ihre Bestimmung der folgende Ansatz gewählt werden:

$$\mathbf{J}_3^{L+} = \left(\begin{pmatrix} J_{3,(1,1)} & J_{3,(1,2)} \\ J_{3,(2,1)} & J_{3,(2,2)} \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{0}_{2 \times 1} \right), \quad \mathbf{J}_3^{L\perp} = \begin{pmatrix} J_{3,(2,1)} J_{3,(3,2)} - J_{3,(2,2)} J_{3,(3,1)} \\ -J_{3,(1,1)} J_{3,(3,2)} + J_{3,(1,2)} J_{3,(3,1)} \\ J_{3,(1,1)} J_{3,(2,2)} - J_{3,(1,2)} J_{3,(2,1)} \end{pmatrix}^T. \quad (4.19)$$

Aus der Multiplikation der somit gefundenen Transformationsmatrix \mathbf{T}_3 mit den übrigen 3 Systemgleichungen lassen sich entsprechend der Forderung ihrer Konstruktion anschließend die noch übrigen Eingangskomponenten τ_3 und τ_4 sowie die beiden transformierte Systemgleichungen eliminieren.

Die letzte verbliebene Systemgleichung enthält folgende Menge M an Systemgrößen und deren Ableitungen:

$$M = \{p_1, p_2, p_3, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2, \ddot{p}_3, q_1, q_2\}. \quad (4.20)$$

In dieser Gleichung sind sowohl q_1 als auch q_2 rein algebraisch enthalten. Eine dieser beiden Größen kann also ebenso wie der Eingang τ eliminiert werden. Die übrigen Systemgrößen bilden einen flachen Ausgang $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$ oder alternativ $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_2)^T$.

Die zur Eliminierung umgeformten Systemgleichungen ermöglichen die Parametrisierung der Systemgrößen durch einen flachen Ausgang, welche konstruktiv entsprechend dieses Flachheitsnachweises bestimmt werden kann. Im Konkreten ist die Parametrisierung im Jupyter-Notebook (LINK!) berechnet worden, besteht allerdings aus zu vielen Operationen, um diese übersichtlich an dieser Stelle darzustellen.

Kapitel 5

Steuerungs- und Regelungsentwurf

5.1 Regelung zur Stabilisierung von Ruhelagen

- notwendig???

5.2 Trajektorienplanung des flachen Ausgangs

Aufgabe der Trajektorienplanung ist es, Zeitverläufe des flachen Ausgangs vorzugeben, anhand derer später die Eingänge parametrisiert werden können, um eine Überführung des Kransystems zwischen zwei Ruhelagen zu ermöglichen. An den real vorhandenen Versuchsstand gibt es keine festgelegten Anforderungen bezüglich Grenzwerten von etwa Beschleunigungen oder Geschwindigkeiten, die bei der Abfahrt von Trajektorien auftreten dürfen.

Aufgrund der einfachen Einprägung von Randbedingungen und Erfüllung von Differenzierbarkeitsbedingungen ist die Wahl eines polynombasierten Trajektorienansatzes sinnvoll. Aus der Flachheitsanalyse ist ersichtlich, dass der Eingang $\tau_2 = \Phi(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots)$ die höchsten Ausgangsableitungen aufweist. Damit für die polynomialen Trajektorien außerdem aus der Ruhelage $(t_0, y_{i,0})$ ein stetig differenzierbarer Übergang der Eingangsgrößenverläufe ohne Sprünge an den Rändern in die Ruhelage $(t_e, y_{i,e})$ gewährleistet werden kann, müssen demnach folgende Bedingungen erfüllt sein [9, S. 230]:

$$\begin{aligned} y_i(t_0) &= y_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \\ y_i(t_e) &= y_{i,e} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \\ \dot{y}_i(t_0) &= \ddot{y}_i(t_0) = y_i^{(3)}(t_0) = y_i^{(4)}(t_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \\ \dot{y}_i(t_e) &= \ddot{y}_i(t_e) = y_i^{(3)}(t_e) = y_i^{(4)}(t_e) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \\ \dot{y}_4(t_0) &= \ddot{y}_4(t_0) = 0 \\ \dot{y}_4(t_e) &= \ddot{y}_4(t_e) = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Es ergeben sich Ansatzfunktionen für die Trajektorien des flachen Ausgangs mit jeweiliger Ordnung $\alpha_i = 2N_i - 1$, wobei N_i der Anzahl der Randbedingungen des jeweiligen Ausgangs entspricht:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= a_{i,9}t^9 + a_{i,8}t^8 + \dots + a_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3; t_0 < t < t_e \\ y_4(t) &= a_{4,5}t^5 + a_{4,4}t^4 + \dots + a_{4,0} \quad \text{für } t_0 < t < t_e. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Koeffizienten der Trajektorien $a_{i,j}$ können durch einsetzen der Randbedingungen und lösen des resultierenden linearen Gleichungssystems bestimmt werden. In der Simulation wurde als Implementierung dafür die Funktion `condition_poly` der Bibliothek `symbtools` verwendet.

5.3 Trajektorienfolgeregelung

5.3.1 Vektorieller relativer Grad

Es wird ein Mehrgrößensystem mit m Ein- und Ausgangskomponenten u_1, \dots, u_m und y_1, \dots, y_m betrachtet [9, S. 194]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (5.3)$$

Dabei gelte für den Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sowie für die Vektorfelder $\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ und die Matrix $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, wobei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dieses System hat an der Stelle $\mathbf{p} \in M$ den vektoriellen relativen Grad $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$, falls:

1. $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^k \mathbf{h}_i(\mathbf{x}) = 0$ für alle \mathbf{x} aus einer Umgebung von \mathbf{p} sowie für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{0, \dots, r-2\}$ und
2. die Matrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ regulär ist.

5.3.2 Statische Rückführung

- Durch Zeitableitungen der jeweiligen Komponente des flachen Ausgangs y_i kann die damit korrespondierende Komponente des relativen Grades r_i bestimmen. Diese entspricht der Ableitungsordnung, bei der das erste mal ein Eingang explizit auftritt.

- Hierbei werden die Zeitableitungen des Ausgangs durch Lie-Ableitungen entlang des Vektorfelds der Systemgleichungen $\delta = \mathbf{f} + \mathbf{g}\tau$ rekursiv erzeugt:

$$y_i^{(k)} = L_\delta y_i^{(k-1)} \quad (5.4)$$

-In der folgenden Tabelle sind die daraus bestimmten relativen Grade sowie die dabei explizit auftretenden Eingänge aufgelistet.

Tabelle 2 – Relative Grade der Ausgänge und explizites Auftreten der Eingänge.

i	1	2	3	4
r_i	2	2	2	2
explizites Auftreten von τ_j bei $y_i^{(r_i)}$	τ_3, τ_4	τ_3, τ_4	τ_3, τ_4	τ_1, τ_3

Das Fehlen von τ_2 bei allen dieser Ausgangsableitungen bedeutet für die Entkopplungsmatrix $\mathbf{\Lambda}$ (auf Section Statische Eingangs-Ausgangs-Linearisierung verweisen) eine Singularität aufgrund der zweiten Nullspalte, denn der einzige von Null verschiedene Eintrag in \mathbf{g}_2 erfolgt durch $g_{10,2} = \frac{1}{m_3}$ und die Lie-Ableitungen $L_f y_i = \dot{y}_i$ geben nur die zeitliche Ableitung des flachen Ausgangs $\dot{\mathbf{y}} = (\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{q}_1)^T$ wieder. So folgt für das relevante Produkt $\frac{\partial L_f y_i}{\partial \dot{q}_2} = 0 \forall i$. Allgemeiner gilt, dass ein Eingang τ_j in den Ausgangsableitungen $y_i^{(r_i)}$ genau dann nicht explizit auftritt, also die j -te Spalte von $\mathbf{\Lambda}$ eine Nullspalte ist, wenn für alle zugehörigen gemischten Lie-Ableitungen $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} y_i = 0$ gilt [9, S. 201]:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Analog gilt für den alternativen flachen Ausgang $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_2)^T$ aufgrund des Fehlens von τ_1 , welches eine erste Nullspalte von $\mathbf{\Lambda}$ impliziert.

Daher ist $\mathbf{\Lambda}$ in dieser Form nie regulär und \mathbf{r} nie wohldefiniert und dieses System nicht statisch eingangs-ausgangs-linearisierbar. Stattdessen können zur Regelung Ansätze mit einer dynamischen Erweiterung oder quasistatischen Zustandsrückführung verfolgt werden.

Zustandsrückführung aus Fehlerdynamik

Nach [9, S. 195] kann eine lineare Fehlerdynamik, in diesem Fall allerdings bezüglich des Trajektorienfolgefehlers $e := y - y_{\text{ref}}$ und nicht eines Festwerts, angesetzt werden:

$$e^{(n)} + c_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + c_1\dot{e} + c_0e = 0 \Leftrightarrow y^{(n)} = y_{\text{ref}}^{(n)} - c_{n-1}e^{(n-1)} - \dots - c_1\dot{e} - c_0e. \quad (5.6)$$

Die Koeffizienten c_i , $i \in 0, 1, \dots, n-1$ müssen so gewählt werden, dass das charakteristische Polynom dieser Gleichung ausschließlich Polstellen mit negativem Realteil aufweist.

5.3.3 Dynamische Erweiterung

Die Entkopplungsmatrix \mathbf{A} hat eine Nullspalte, weil τ_2 in keine r Ausgangsableitung $y_i^{(r_i)}$ explizit auftritt. Somit gilt $\text{rang } \mathbf{A} = k = 3 < m = 4$.

Verhindern von frühzeitigem auftreten der 3 Eingangskomponenten τ_1, τ_3, τ_4 in den entsprechenden Ausgangsableitungen. Dafür:

- Ergänzung dieser Eingänge um in diesem Fall jeweils zwei Integratoren, so dass die neuen Eingangskomponenten bei der selben Ableitungsordnung das erste mal explizit auftreten wie τ_2 und Erweiterung der Systemgleichungen um die folgenden DGL:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_1 &=: \alpha_1 \\ \dot{\tau}_3 &=: \alpha_3 \\ \dot{\tau}_4 &=: \alpha_4 \\ \dot{\alpha}_1 &=: \beta_1 \\ \dot{\alpha}_3 &=: \beta_3 \\ \dot{\alpha}_4 &=: \beta_4. \end{aligned} \quad (5.7)$$

- Definition des neuen Eingangsvektors unter Einsortierung der zuvor abwesenden Komponente τ_2 zuletzt $\tilde{\tau} = (\beta_1, \beta_3, \beta_4, \tau_2)^T$.

- Erweiterung des Zustandsvektors auf $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)^T$
- Umsortierung der Nullspalte von \mathbf{A} auf die letzte Position analog zum neuen Eingangsvektor
- Herleitung des Ausgangsableitungen über Lie-Ableitungen entlang erweiterter Zu-

standsgleichungen $\tilde{\delta} = \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{g}}\tilde{\tau}$ mit

$$\tilde{\delta} = \begin{pmatrix} \delta \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\delta}|_{\tilde{\tau}=0}, \quad \tilde{\mathbf{g}} = \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \tilde{\tau}} \quad (5.8)$$

und diese sollen nach [9, S. 195] Gleichung 4.157 jeweils auch über:

$$y_i^{(r_i)} = L_{\tilde{\mathbf{f}}}^{r_i} y_i + L_{\tilde{\mathbf{g}}_1} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^{r_i-1} y_i \beta_1 + L_{\tilde{\mathbf{g}}_2} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^{r_i-1} y_i \beta_3 + L_{\tilde{\mathbf{g}}_3} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^{r_i-1} y_i \beta_4 + L_{\tilde{\mathbf{g}}_4} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^{r_i-1} y_i \tau_2. \quad (5.9)$$

berechnet werden können.

- Für dieses modifizierte System folgt somit stets für $r_i = 4 \forall i$.

Problem:

- Pole müssen weiter links platziert werden für gutes Folgeverhalten bei Anfangsfehlern (wegen der zusätzlichen Integratoren bei den Eingängen ???)
- sehr lange Simulationsdauer

Anpassung der Trajektorienplanung

- an beiden Rändern für jede Referenztrajektorie jeweils 2 mal mehr stetig diffbar wegen weiterer differenzierender Zustände von τ_1, τ_3, τ_4 notwendig -> Trajektorienordnung erhöht sich jeweils um 4

5.3.4 Quasi-statische Rückführungen

Ebenso wie die dynamische Erweiterung kann eine quasi-statische Zustandsrückführung bei einem nicht wohldefiniertem relativen vektoriiellen Grad im statischen Ansatz [9, S. 206].

- Im Folgenden wird der flache Ausgang $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$ betrachtet.
- Zeitliche Ableitungen werden durch Lie-Ableitungen bezüglich des erweiterten Zustandsvektors $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \tau, \dot{\tau})^T$ entlang des Vektorfelds der Zustandsgleichungen $\tilde{\delta} = \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{g}}\tilde{\tau}$ mit

$$\tilde{\delta} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} + \mathbf{g}\tau \\ \dot{\tau} \\ \ddot{\tau} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

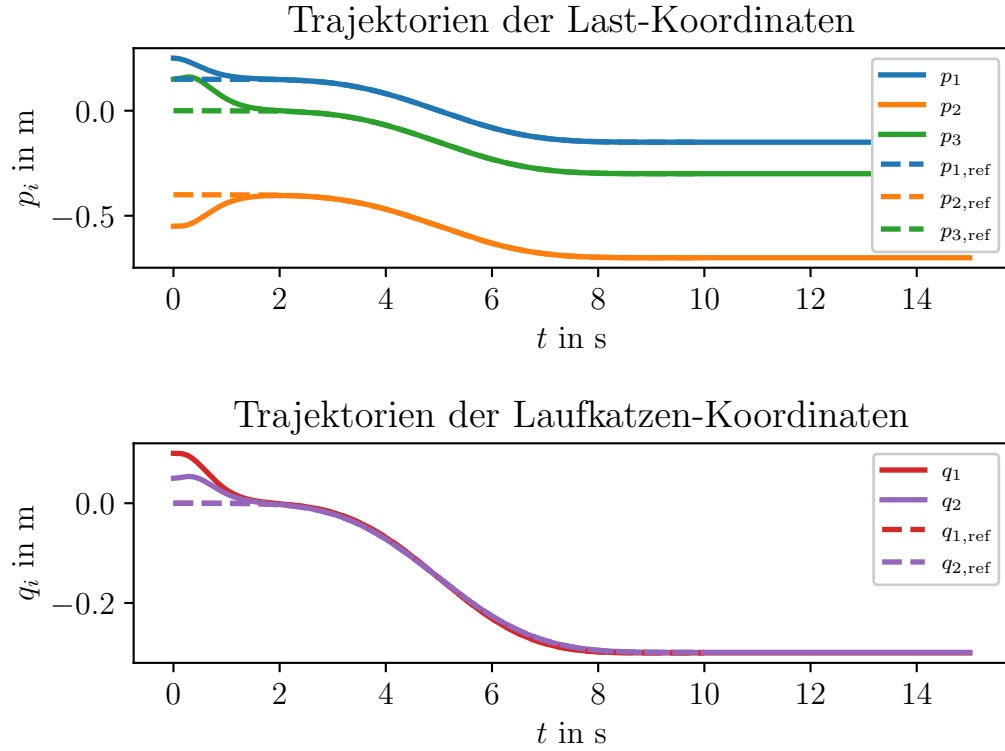


Abbildung 6 – Langbeschreibung, die gerne auch über mehrer Zeilen gehen darf.

- τ_3 tritt das erste mal bei $r_1 = 2$ in \ddot{y}_1 sowie auch in allen anderen zweiten Ableitungen des flachen Ausgangs auf. Dies gilt nicht für alle weiteren Eingänge, da der relative vektorielle Grad für $r_i = 2 \forall i$ nicht wohldefiniert ist.
- Außerdem tritt τ_4 auch bei $r_3 = 2$ in \ddot{y}_1 , \ddot{y}_2 und \ddot{y}_3 , nicht aber in \ddot{y}_4 auf.
- > Widerspruch zu [9, S. 206], bei dem für Auftreten von u_2 der Ausgang y_2 noch weiter differenziert werden muss!
- τ_2 tritt erst bei $r_2 = 4$ in $y_1^{(4)}$, $y_2^{(4)}$ oder $y_3^{(4)}$ auf.
- τ_1 tritt erst bei $r_4 = 2$ in \ddot{y}_4 auf.
- Definition neuer Eingänge:

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}_1 &= \ddot{p}_1 =: v_1 = \gamma_1(x, \tau_3, \tau_4) \\
 y_2^{(4)} &= p_2^{(4)} =: v_2 = \gamma_2(x, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \dot{\tau}_3, \dot{\tau}_4, \ddot{\tau}_3, \ddot{\tau}_4) \\
 \ddot{y}_3 &= \ddot{p}_3 =: v_3 = \gamma_3(x, \tau_3, \tau_4) \\
 \ddot{y}_4 &= \ddot{q}_1 =: v_4 = \gamma_4(x, \tau_1, \tau_3).
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

- Daraus ersichtlich, dass aus einem Gleichungssystem aus v_1 , v_3 und v_4 in denen alle Eingänge jeweils affin auftreten, eine explizite Darstellung von τ_1 , τ_3 und τ_4 möglich ist.
- > im Gegensatz zu [9, S. 207], bei dem relative Grade der Ausgangskomponenten aufsteigend sind, so dass kein Gleichungssystem gelöst werden muss, sondern sukzessives

Tabelle 3 – Auftreten der Eingänge τ_j bei Ordnung k der Ausgangsableitung y_i .

k	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
$y_1^{(k)}$	4	4	2	2
$y_2^{(k)}$	4	4	2	2
$y_3^{(k)}$	4	4	2	2
$y_4^{(k)}$	2	>4	2	4
$(y_5^{(k)} = q_2^{(k)})$	>4	2	4	2

Einsetzen vorher berechneter Eingänge und Umstellen der abgeleiteten Ausgänge genügt.

- Die Berechnung von τ_2 erfordert größeren Aufwand. Dabei Substitution bisheriger Eingangskomponenten und deren Ableitungen, welche aus Lie-Ableitung entlang von $\tilde{\delta}$ generiert werden. Es folgt ein sehr umfangreicher Ausdruck für τ_2 , der bereits zu diesem Zeitpunkt mehr als einhunderttausend Rechenoperationen enthält.
- Nach [9, S. 208] kann eine lineare Fehlerdynamik \mathbf{v} entsprechend jeweiligem relativen Grad der Ausgangskomponente angesetzt werden. Für v_1 , v_3 und v_4 diese jeweils nur von Zustandskomponenten abhängig, bei v_2 allerdings auch von $\ddot{y}_2 = \ddot{p}_2$ und $y_2^{(3)} = p_2^{(3)}$:

$$\begin{aligned}\ddot{p}_2 &= L_{\tilde{\delta}}\dot{y}_2 = L_{\tilde{\delta}}\dot{p}_2 \\ p_2^{(3)} &= L_{\tilde{\delta}}\ddot{p}_2.\end{aligned}\tag{5.12}$$

und Ableitungen der anderen Komponenten von \mathbf{v} , die wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}\ddot{e} + c_1\dot{e} + c_0e &= 0 \\ e^{(3)} + c_1\ddot{e} + c_0\dot{e} &= 0 \\ e^{(3)} + c_1(-c_1\dot{e} - c_0e) + c_0\dot{e} &= 0 \\ e^{(3)} - c_1^2\dot{e} + c_0\dot{e} - c_0c_1e &= 0 \\ e^{(3)} + (c_0 - c_1^2)\dot{e} - c_0c_1e &= 0 \\ e^{(4)} + (c_0 - c_1^2)\ddot{e} - c_0c_1\dot{e} &= 0 \\ e^{(4)} + (c_0 - c_1^2)(-c_1\dot{e} - c_0e) - c_0c_1\dot{e} &= 0 \\ e^{(4)} + (c_1^3 - 2c_0c_1)\dot{e} + (c_0c_1^2 - c_0^2)e &= 0 \\ \Rightarrow \text{für } i = 1, 3, 4 : \dot{v}_i = y_i^{(3)} = y_{i,\text{ref}}^{(3)} - (c_{i,0} - c_{i,1}^2)\dot{e} + c_{i,0}c_{i,1}e \\ \ddot{v}_i = y_i^{(4)} = y_{i,\text{ref}}^{(4)} - (c_{i,1}^3 - 2c_{i,0}c_{i,1})\dot{e} - (c_{i,0}c_{i,1}^2 - c_{i,0}^2)e,\end{aligned}\tag{5.13}$$

so dass sich der neue Eingang v_2 wie folgt ergibt:

$$v_2 = y_2^{(4)} = y_{\text{ref}}^{(4)} - c_{2,3}(y^{(3)} - y_{\text{ref}}^{(3)}) - c_{2,2}(\ddot{y} - \ddot{y}_{\text{ref}}) - c_{2,1}(\dot{y} - \dot{y}_{\text{ref}}) - c_{2,0}(y - y_{\text{ref}})\tag{5.14}$$

- Problem mit Singularitäten wenn in den Berechneten Stellgrößen wirklich alle gemessenen Zustandskomponenten \mathbf{x} vorkommen statt nur die von \mathbf{y} und seinen Ableitungen.

Singularitäten in der Nähe von Ruhelagen

In allen Eingangsgrößen treten bei diesem quasi-statischen Rückführungsentwurf in der Nähe von Ruhelagen Singularitäten auf. Diese ergeben sich aus numerischen Effekten. Beim Einsetzen einer zuvor ermittelten Ruhelage entstehen Definitionslücken, sowohl Zähler als auch Nenner der Eingangsgrößen werden Null. Es ist nicht auszuschließen, dass diese durch algebraische Manipulation hebbar sind. Allerdings ist eine weitere händische Untersuchung dieses Zusammenhangs mit hohem Aufwand verbunden und wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt. Die CAS-Bibliothek SymPy bietet mittels des Aufrufs `simplify` allerdings keine Lösung dieses Problems in den Eingangsgrößen.

Für eine weitere Betrachtung würden sich die einfacheren Terme der Nenner $N_{1,3,4}$ von τ_1 , τ_3 und τ_4 anbieten:

$$\begin{aligned} N_{1,3,4} = & s_2(-4l_0pm_1 \sin(pm_3) + 2l_0pm_2 \cos(pm_3) + 4l_0qm_1 \sin(pm_3) + l_0s_2 \sin(2pm_3) \\ & + 4pm_1^2 \sin(pm_3) - 4pm_1pm_2 \cos(pm_3) - 4pm_1qm_1 \sin(pm_3) - 4pm_1qm_2 \sin(pm_3) \\ & + 2pm_2qm_1 \cos(pm_3) + 2pm_2qm_2 \cos(pm_3) + 4qm_1qm_2 \sin(pm_3) - qm_1s_2 \sin(2pm_3) \\ & + qm_2s_2 \sin(2pm_3)). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Des Weiteren ist die Fragestellung von Interesse, weshalb sich solche Lücken bei der Konstruktion der Trajektorie in den Ruhelagen ergeben.

5.3.5 Exact feedforward linearization

An der Stelle einer Kompensation der Nichtlinearität mittels Rückführung der gemessenen beziehungsweise simulierten Zustandskomponenten wie bei der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung wird im Folgenden die Referenztrajektorie eingesetzt. [4]

Heuristisch wird eine Fehlerdynamik der Ordnung zwei für alle Komponenten des Koordinatenvektors angesetzt:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}. \quad (5.16)$$

Aus der Zusammensetzung des Zustandsvektors $\mathbf{x} = (\theta, \dot{\theta})^T$ und der eingangsaffine Zustandsraumdarstellung kann außerdem der Zusammenhang:

$$\ddot{\theta} = \mathbf{f}_{[6,10]}(\theta) + \mathbf{g}_{[6,10]}(\theta)\tau \quad (5.17)$$

hergestellt werden. Dabei bedeutet die Indizierung $\bullet_{[i,j]}$, die Auswahl der Zeilen i bis j von \bullet . Da $\tau \in \mathbb{R}^4$ und $\mathbf{g}_{[6,10]} \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$ gilt, kann dieser Zusammenhang über die Bildung einer Pseudo-Inversen von $\mathbf{g}_{[6,10]}^+$ nach dem Eingangsvektor aufgelöst werden:

$$\tau = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\theta) (\ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\theta)). \quad (5.18)$$

Unter Einsetzen von θ_{ref} in $\mathbf{g}_{[6,10]}^+$ und $\mathbf{f}_{[6,10]}(\theta)$ wird die Exact feedforward linearization realisiert:

$$\tau = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\theta_{\text{ref}}) (\ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\theta_{\text{ref}})). \quad (5.19)$$

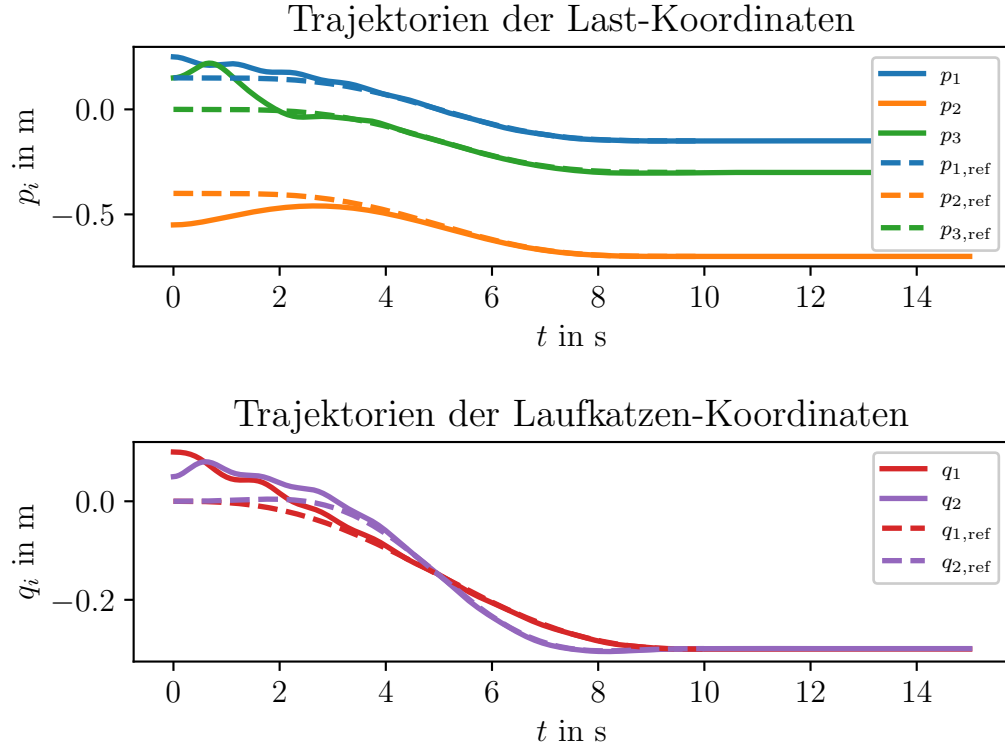


Abbildung 7 – Langbeschreibung, die gerne auch über mehrer Zeilen gehen darf.

Vereinfachung mittels Ausgangsselektion

Statt der Nutzung einer Pseudo-Inversen kann auch eine Selektion von vier der fünf Gleichungen der Beschleunigungen $\ddot{\theta}$ vorgenommen werden. Symbolisch werde dies über eine Selektionsmatrix \mathbf{S} dargestellt:

$$\mathbf{S}\ddot{\theta} = \mathbf{S}(\ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}) = \mathbf{S}\mathbf{f}_{[6,10]}(\theta) + \mathbf{S}\mathbf{g}_{[6,10]}(\theta)\tau. \quad (5.20)$$

Durch die Wahl der letzten 4 Gleichungen kann eine direkte Inversion der somit quadratischen Eingangsmatrix $\mathbf{g}_{[7,10]} = \mathbf{S}\mathbf{g}_{[6,10]}$ erfolgen:

$$\tau = \mathbf{g}_{[7,10]}^{-1}(\theta_{\text{ref}}) \mathbf{S}(\ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\theta_{\text{ref}})) \text{ mit } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Diese Berechnungsvorschrift der Stellgrößen enthält deutlich weniger Operationen als alle zuvor dargestellten Ansätze. Damit eignet sie sich insbesondere für eine spätere Implementierung in Echtzeitsystemen sowie sehr viel kürzeren Simulationszeiten. Es ergibt sich für Beispieltrajektorien mit Anfangsfehlern ein sehr gutes Folgeverhalten sowie eine stationäre Genauigkeit.

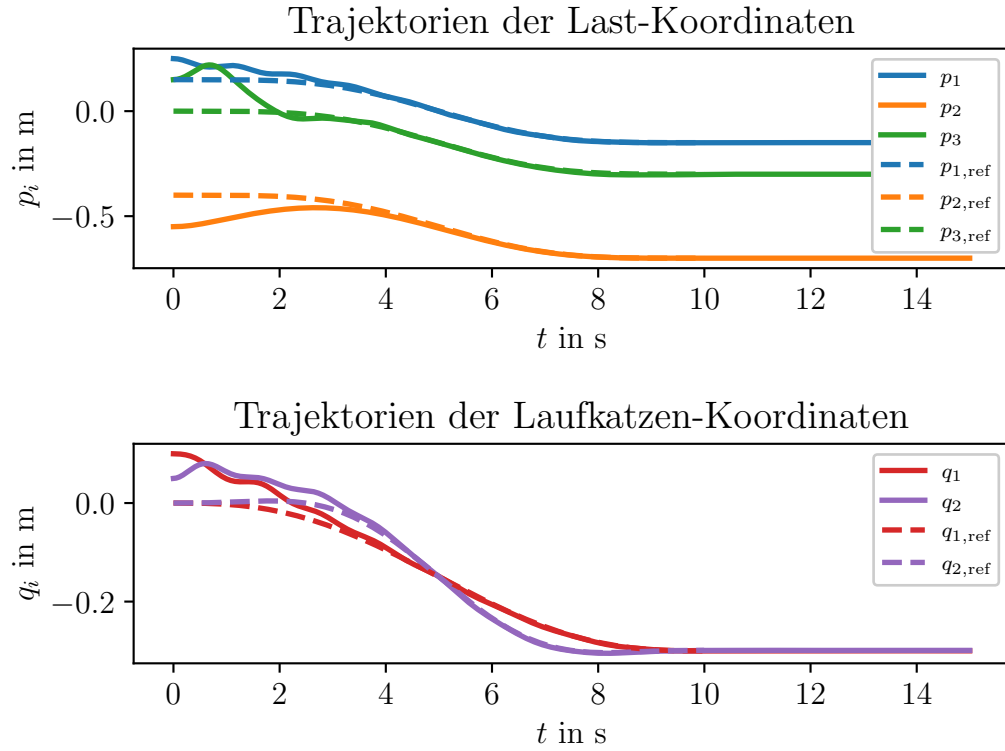


Abbildung 8 – Langbeschreibung, die gerne auch über mehrer Zeilen gehen darf.

Stabilitätsbetrachtung

Die Betrachtung einer prototypischen Trajektorien zeigt, dass zu späteren Zeitpunkten der Simulation Eigenwerte der Jacobimatrix $\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{e}}}$ einer Fehlerdynamik:

$$\mathbf{e} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{e} + \mathbf{x}_{ref} \quad (5.22)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{ref} = \mathbf{f}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{ref}) + \mathbf{g}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{ref})\tau - \dot{\mathbf{x}}_{ref} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{e}}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{e}}}{\partial \mathbf{e}} \quad (5.24)$$

mit positiven Realteilen vorkommen. Es ist möglich, dass aufgrund des bis dahin abgeklungenen Folgefehlers keine weitere Destabilisierung des Systems stattfindet, sondern eine stationäre Genauigkeit dennoch erreicht wird. Bis zum Ende der Simulationen

weisen alle Eigenwerte erneut einen negativen Realteil auf. Formal kann allerdings bereits am Beispiel einer möglichen Referenztrajektorie mit Ljapunows erster (indirekter) Methode gezeigt werden, dass dieser Regelungsansatz zu einem instabilen System zu gewissen Simulationszeitpunkten führt. Eine andere Wahl von Rückführung (keine lineare Dynamik) könnte dieses Problem lösen.

Eigenwerte der Jacobimatrix bei prototypischer Referenztrajektorie

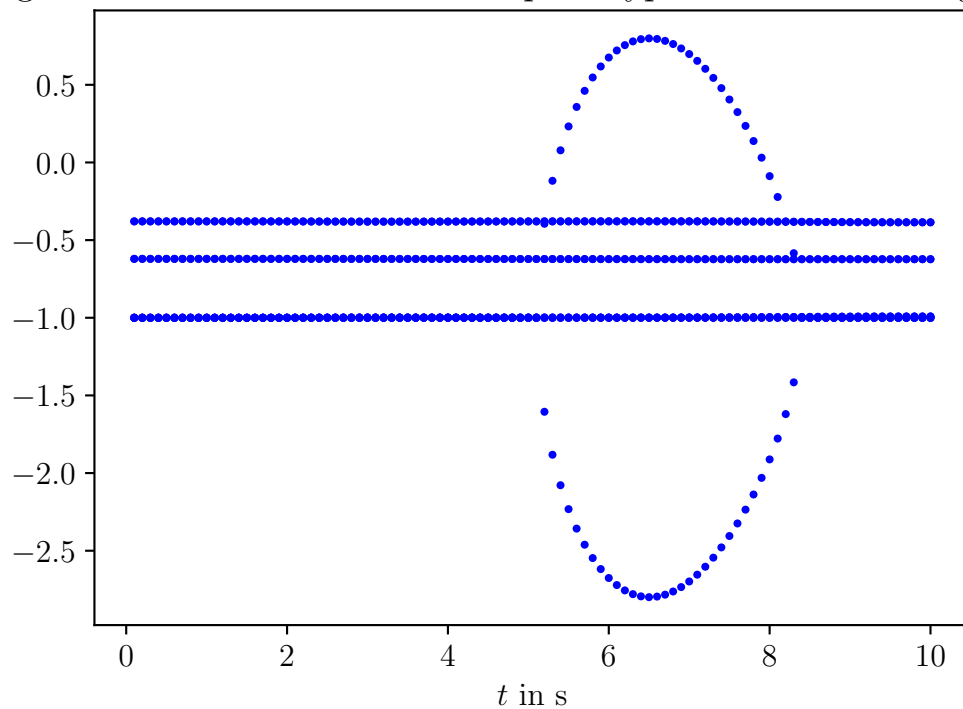


Abbildung 9 – Langbeschreibung, die gerne auch über mehrer Zeilen gehen darf.

Kapitel 6

Fazit und Ausblick

6.1 Fazit

bla

6.2 Ausblick

blub

Literatur

- [1] Christian Andersson, Claus Führer und Johan Åkesson. „Assimulo: A unified framework for $\{\text{ODE}\}$ solvers“. In: *Mathematics and Computers in Simulation* 116.0 (2015), S. 26–43. ISSN: 0378-4754. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2015.04.007>.
- [2] Torsten Fließbach. *Mechanik : Lehrbuch zur Theoretischen Physik I*. Spektrum Akademischer Verlag, 2009. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2188-3_8.
- [3] Klemens Fritzsche u. a. „Zur systematischen Bestimmung flacher Ausgänge nichtlinearer Mehrgrößensysteme“. In: *at - Automatisierungstechnik* 64.12 (2016), S. 948–960. DOI: [doi:10.1515/auto-2016-0079](https://doi.org/10.1515/auto-2016-0079). URL: <https://doi.org/10.1515/auto-2016-0079>.
- [4] Veit Hagenmeyer und Emmanuel Delaleau. „Exact feedforward linearization based on differential flatness“. In: *International Journal of Control* 76.6 (2003), S. 537–556. DOI: [10.1080/0020717031000089570](https://doi.org/10.1080/0020717031000089570). eprint: <https://doi.org/10.1080/0020717031000089570>. URL: <https://doi.org/10.1080/0020717031000089570>.
- [5] Home page Fraunhofer IIS/EAS. Fraunhofer-Institut fuer Integrierte Schaltungen IIS, Institutsteil Entwicklung Adaptiver Systeme EAS. Juni 2022. URL: <https://www.eas.iis.fraunhofer.de/>.
- [6] Klaus Janschek. „Skript Elemente der Modellbildung und Simulationstechnik Sommersemester 2020“. In: (2020).
- [7] Klaus Janschek. *Systementwurf mechatronischer Systeme Methoden - Modelle - Konzepte*. Berlin: Springer, 2010. ISBN: 9783540788768. URL: [http://slubdd.de/katalog?TN_libero_mab2\)500406929](http://slubdd.de/katalog?TN_libero_mab2)500406929).
- [8] Carsten Knoll. „Regelungstheoretische Analyse- und Entwurfsansätze fuer unteraktuierte mechanische Systeme“. Diss. TU Dresden, 2016. URL: <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-209765>.
- [9] Klaus Röbenack. *Nichtlineare Regelungssysteme*. Springer Vieweg Berlin, Heidelberg, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-44091-9>.
- [10] *symbtools GitHub Repository*. Juni 2022. URL: <https://github.com/TUD-RST/symbtools>.
- [11] Bruce Torby. „Energy Methods“. In: *Advanced Dynamics for Engineers* (1984).

-
- [12] Trägheitsmoment. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A4gheitsmoment#:~:text=Ein%20Quader%2C%20der%20um%20eine%20Achse%20durch%20den%20Mittelpunkt%20rotiert%2C%20die%20parallel%20zu%20seinen%20Kanten%20c%20liegt..>