

# Technische Universität Dresden

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik

Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie

## Studienarbeit

### Modellbildung und Reglerentwurf für ein Brückenkransystem

vorgelegt von: Konstantin Wrede  
geboren am: 19. Januar 1998 in Sondershausen

Betreuer:	Dr.-Ing. Carsten Knoll M.Sc. Tommy Wohlfahrt Dipl.-Ing. Fabian Paschke
Verantwortlicher Hochschullehrer:	Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack
Tag der Einreichung:	11. November 2022

Bitte ersetzen Sie diese Seite vor dem Binden mit der Aufgabenstellung.

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tage an der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik eingereichte Studienarbeit zum Thema

## **Modellbildung und Reglerentwurf für ein Brückenkransystem**

selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, wurden als solche kenntlich gemacht.

Dresden, 11. November 2022

Konstantin Wrede

## Kurzfassung

Am Fraunhofer-Institut für Integrierte Schaltungen IIS wurde ein Versuchsstand entwickelt, der einen miniaturisierten Brückenkran mit zwei unabhängigen Steuerungseinheiten nachbildet. An diesem kann die Leistungsfähigkeit verschiedener Regelungsansätze in Hinblick auf das Maß ihrer Verteiltheit und Kommunikationsmöglichkeiten der Steuereinheiten untersucht werden. Für Vergleiche wird eine zentrale Referenzregelstrategie benötigt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde zu diesem Zweck ein analytisches Modell des Brückenkrans über den Lagrange-Formalismus hergeleitet. Für das ermittelte nichtlineare Mehrgrößensystem ist die differenzielle Flachheit konstruktiv nachgewiesen worden. Auf Basis des dabei bestimmten flachen Ausgangs sind für eine Referenzregelstrategie Ausgangstrajektorien zur Überführung zwischen Ruhelagen geplant worden. Außerdem ist darüber eine Parametrisierung der Eingangsgrößen des Systems für eine Vorsteuerung möglich. Verschiedene Folgeregelungen wurden für Anfangsfehler in den Zustandskomponenten simulativ geprüft.

## Abstract

At the Fraunhofer Institute for Integrated Circuits IIS, a test bed has been developed that represents a miniaturized overhead crane with two independent control units. This system can be used to investigate the performance of different control approaches with regard to their degree of distribution and the communication possibilities of the control units. For comparison, a central reference control strategy has to be designed.

Within the scope of this work, an analytical model of the crane was derived using the Lagrangian formalism. For the determined nonlinear multivariable system, the differential flatness has been constructively proved. Based on the flat output determined in this process, output trajectories for the transfer between equilibriums were planned leading to a reference control strategy. In addition, a parameterization of the system's

input variables for a feedforward control is possible using this flat output. Various trajectory tracking control strategies were examined within simulations with assumed initial errors in the state components.

# Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der wichtigsten Abkürzungen und Symbole	VIII
Abbildungsverzeichnis	X
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 System- und Problembeschreibung</b>	<b>2</b>
2.1 Aufbau des Demonstratorsystems . . . . .	2
2.2 Problembeschreibung und Zielsetzung . . . . .	4
<b>3 Analytische Modellbildung</b>	<b>5</b>
3.1 Allgemeine Modellannahmen . . . . .	5
3.2 Modellierung mittels Lagrange-Formalismus . . . . .	6
3.2.1 Lagrange-Gleichungen erster Art . . . . .	6
3.2.2 Lagrange-Gleichungen zweiter Art . . . . .	7
3.3 Generierung und Simulation von DAE-Systemen . . . . .	7
3.4 Analytisches Modell des Einzelkrans . . . . .	9
3.5 Analytisches Modell des Doppelkrans . . . . .	11
3.5.1 Ansatz über ein DAE-System . . . . .	11
3.5.2 Ansatz über ein ODE-System . . . . .	14
3.6 Identifikation der Systemparameter . . . . .	17
<b>4 Flachheitsanalyse</b>	<b>18</b>
4.1 Definition differenzieller Flachheit . . . . .	18
4.2 Flachheitsanalyse von Mehrgrößensystemen . . . . .	19
4.3 Flachheitsanalyse am Einzelkran . . . . .	20
4.4 Flachheitsanalyse am Doppelkran . . . . .	23
<b>5 Steuerungs- und Regelungsentwurf</b>	<b>25</b>
5.1 Trajektorienplanung für den flachen Ausgang . . . . .	25
5.2 Trajektorienfolge­regelung . . . . .	28
5.2.1 Vektorieller relativer Grad . . . . .	28
5.2.2 Statische Rückführung . . . . .	28
5.2.3 Zustandsrückführung aus Fehlerdynamik . . . . .	30
5.2.4 Dynamische Erweiterung . . . . .	31
5.2.5 Quasi-statische Rückführungen . . . . .	35

5.2.6	Exact feedforward linearization . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>44</b>
6.1	Fazit . . . . .	44
6.2	Ausblick . . . . .	45
	<b>Literatur</b>	<b>46</b>

# Verzeichnis der wichtigsten Abkürzungen und Symbole

Die folgenden Tabellen enthalten Abkürzungen sowie Symbole, welche in dieser Arbeit eine herausragende Bedeutung besitzen oder kapitelübergreifend verwendet werden.

Abkürzung	Bedeutung
AGL	algebraische Gleichungen
DAE	differenzial-algebraische Gleichungen, von engl. differential algebraic equations
DGL, ODE	(gewöhnliche) Differenzialgleichung, von engl. ordinary differential equation
LG	Lagrange-Gleichungen
ZB	Zwangsbedingung



Vektor- oder matrixwertige Größen werden durch **fett gedruckte Symbole** dargestellt.

Symbol	Bedeutung
$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$	Konfigurationskoordinaten
$\lambda$	Lagrange-Multiplikator
$\Lambda$	Entkopplungsmatrix
$\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}$	Systemeingang
$\mathbf{a}$	holonome Zwangsbedingungen
$\mathbf{e}$	Trajektorienfolgefehler
$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$	Felder in eingangsaffiner Zustandsraumdarstellung
$i_d$	differenzieller Index
$\mathbf{J}$	Jacobi-Matrix
$\mathcal{L}$	Lagrange-Funktion
$L_f$	Lie-Ableitung entlang Vektorfeld $\mathbf{f}$
$\mathbf{p}$	nicht direkt aktuierte Koordinaten
$\mathbf{q}$	direkt aktuierte Koordinaten
$\mathbf{Q}$	generalisierte (verallgemeinerte) Kraft
$\mathbf{r}$	vektorieller relativer Grad
$T$	kinetische Energie
$\mathbf{v}$	virtueller Systemeingang
$V$	potentielle Energie
$\mathbf{x}$	Systemzustand
$\mathbf{y}$	flacher Ausgang

Die Symbolik „func“ stellt einen allgemeinen und nicht weiter spezifizierten funktionalen Zusammenhang dar, welcher sich bei jeder Erwähnung unterscheiden kann.

# Abbildungsverzeichnis

1	Konstruktionsmodell des Doppelkransystems . . . . .	2
2	Doppelkran-Demonstratorsystem mit Laufkatzen und Last . . . . .	3
3	Planare Geometrie des Einzelkransystems . . . . .	9
4	Planare Geometrie des Doppellkransystems im DAE-Modell . . . . .	12
5	Planare Geometrie des Doppellkransystems im ODE-Modell . . . . .	15
6	Zwiebelschalendiagramm Ruhelagenüberführung prototypische Solltrajektorien . . . . .	27
7	Schematische Darstellung dynamischer Erweiterung des Doppellkransystems	33
8	Trajektorien Ruhelagenüberführung mit Regelung über dynamische Erweiterung . . . . .	34
9	Trajektorien Ruhelagenüberführung mit Regelung über exact feedforward linearization (Pseudoinverse) . . . . .	40
10	Eigenwerte der Jacobimatrix bei Trajektorienfolge mit Regelung über exact feedforward linearization (Selektionsmatrix) . . . . .	42
11	Trajektorien Ruhelagenüberführung mit Regelung über exact feedforward linearization (Selektionsmatrix) . . . . .	43

# Kapitel 1

## Einleitung

In einer Vielzahl heutiger industrieller Anwendungen wird eine zentrale Organisation zur Steuerung von Geräten im Kontext des Internets der Dinge<sup>1</sup> und deren Kollaboration eingesetzt. Das agile Zusammenarbeiten einzelner Teilsysteme verspricht eine besonders hohe Flexibilität und Anpassungsfähigkeit von Produktionsprozessen. Allerdings sind die IoT-Geräte aufgrund des zentralen Ansatzes auch in hohem Maße von der Verfügbarkeit und Verlässlichkeit ihrer Verbindung zur Steuerung abhängig. Gerade bei mobilen Geräten stellt die drahtlose Kommunikation auf den letzten Metern eine enorme Herausforderung dar.

Im Rahmen vorangegangener studentischer Arbeiten ist am Fraunhofer-Institut für Integrierte Schaltungen IIS, Institutsteil Entwicklung Adaptiver Systeme EAS [7] in Dresden ein Demonstratorsystem entwickelt worden. Mit diesem System sollen perspektivisch Regelungsstrategien auf verteilten Recheneinheiten gegenüber einer zentralen Messgrößenverarbeitung und Stellgrößenberechnung verglichen werden. Außerdem ist es möglich, damit den Einfluss von Störungen und Verzögerungen der (drahtlosen) Kommunikation zwischen den Recheneinheiten zu evaluieren.

Aufgabe dieser Studienarbeit war es, eine analytische Modellbildung des Versuchsstands durchzuführen sowie eine zentrale Referenzregelstrategie ohne Verteilung auf verschiedene Recheneinheiten für das Demonstratorsystem zu entwerfen. Zudem waren die dabei ermittelten Ansätze zur Steuerung und Folgeregelung simulativ zu verifizieren.

Da es sich beim Demonstrator um ein mechanisches Starrkörpersystem handelt, bietet sich eine kinetische Beschreibung des Systems mittels des Lagrange-Formalismus an. Die Systemgleichungen eines solchen nichtlinearen Mehrgrößensystems können auf die Eigenschaft der differentiellen Flachheit untersucht werden. Daraus kann bei erfolgreichem Nachweis eine flachheitsbasierte Trajektorienplanung der Ausgangsgrößen und Parametrisierung der Stellgrößen dadurch erfolgen. Die Korrektur von Abweichungen von den Referenzverläufen ist durch eine ebenfalls flachheitsbasierte Folgeregelung möglich.

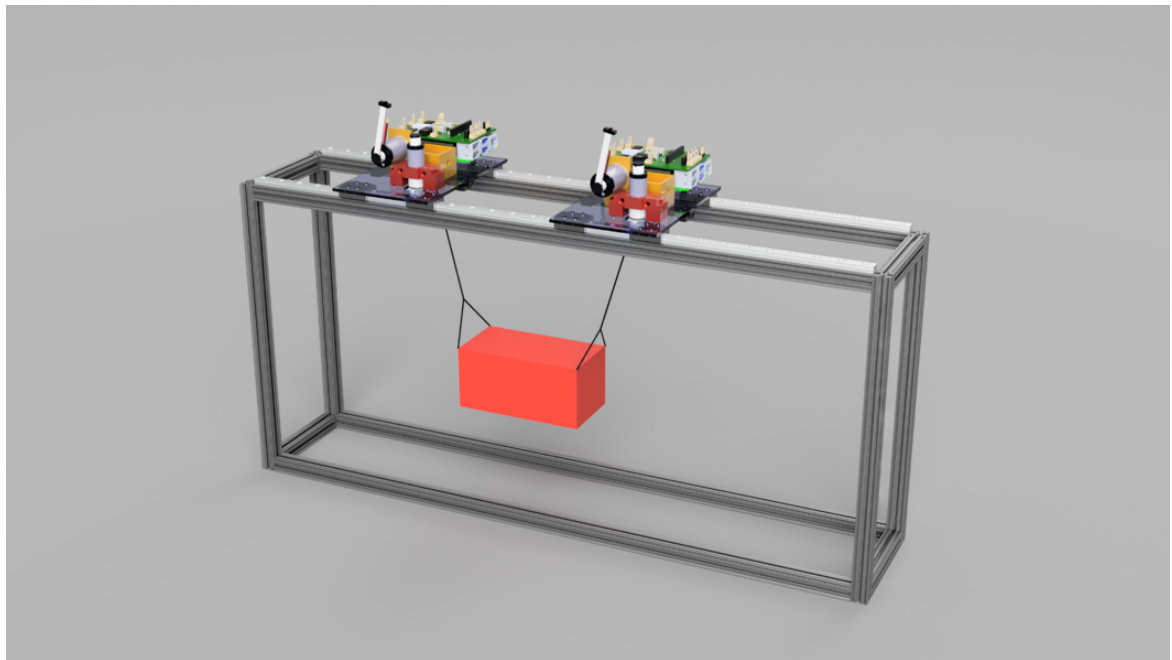
---

<sup>1</sup>„Mit dem „Internet der Dinge“ (engl.: Internet of things, IoT) oder „Allesnetz“ wird die Vernetzung von Gegenständen mit dem Internet verstanden, so dass diese Gegenstände über das Internet selbstständig kommunizieren und einen Material- oder Produktionsfluss festlegen.“ [2]

# Kapitel 2

## System- und Problembeschreibung

### 2.1 Aufbau des Demonstratorsystems



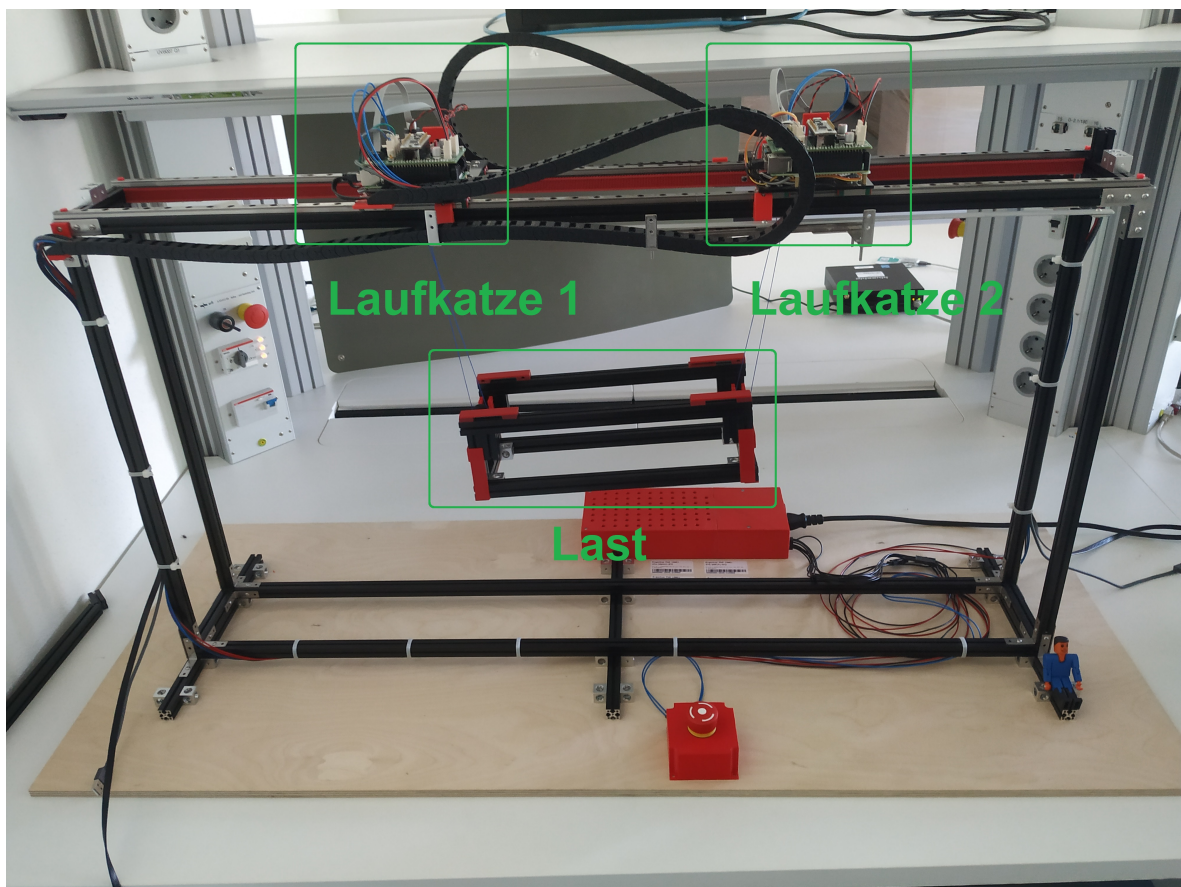
**Abbildung 1** – Konstruktionsmodell des Doppelkran-Demonstratorsystems ohne Verkabelung.

Das Demonstratorsystem besteht aus zwei Brückenkränen, die eine gemeinsame Last in der vertikalen Ebene anheben. Abbildung 1 stellt ein Modell des Aufbaus dar, das während des Konstruktionsprozesses entstanden ist. Die Kräne befinden sich auf zwei horizontalen Führungsschienen und verfügen jeweils <sup>1</sup> über einen Raspberry Pi 4B<sup>2</sup> als

<sup>1</sup>Diese Anordnung erlaubt eine Architektur verteilter Systeme. Im Rahmen dieser Studienarbeit wird allerdings nur ein zentraler Regelungsansatz, also die effektive Nutzung einer Recheneinheit, verfolgt.

<sup>2</sup>Spezifikationen: 8GB DDR4 RAM, 64-bit ARM64 SoC, 5.0 GHz WLAN, Bluetooth 5.0, BLE, Gigabit

Hauptrecheneinheit sowie einen STM32-Mikrocontroller<sup>3</sup> für die Motoransteuerungen und Messungen. Beide Raspberry Pis können über eine LAN-Verbindung miteinander kommunizieren. Die Kräne sind als Laufkatzen entlang der Schienen sowie Seilwinden darauf mit jeweils einem Gleichstrommotor aktuiert. Auf den STM32-Mikrocontrollern ist bereits eine unterlagerte Strom- beziehungsweise Kraftregelung für diese Motoren implementiert. Messungen der Seillängen und Kranpositionen auf der Schiene erfolgen mittels Inkrementalgebern nach einem anfänglichen Kalibrierungsvorgang. Die Seilwinkel zur Horizontalen werden mittels mitschwingender Potentiometer bestimmt. Abbildung 2 zeigt eine Fotografie der realen Anordnung des Demonstrators.



**Abbildung 2** – Anordnung des Doppelkran-Demonstratorsystems mit Laufkatzen und Last am Versuchsstand.

Ethernet; Betriebssystem: Ubuntu 20.04 [4]

<sup>3</sup>Spezifikationen: STM32F303K8 mit 32-bit Arm Cortex-M4, 64 kB Flash-Speicher, 12-bit ADCs [13]

## **2.2 Problembeschreibung und Zielsetzung**

Bei der Bewegung von Containern in Häfen ist ein ruckarmer und gegenüber der Horizontalen stabiler Transport notwendig. Ziel dieser Studienarbeit ist es deshalb, für das vorhandene Demonstratorsystems eine zentrale Referenzregelstrategie zu entwerfen. Damit soll unter Vorgabe von Sollposen eine Planung von Trajektorien der Last in ihrer vertikalen Aufhängungsebene und eine Folgeregelung zur Überführung der Last zwischen verschiedenen Ruhelagen ermöglicht werden. Diese Überlegungen sollen auf Basis einer Modellierung des Krans als Mehrkörpersystem geschehen.

Perspektivisch soll diese zentrale Referenzregelstrategie einerseits zum Vergleich mit zukünftig zu entwickelnden verteilten Regelungsansätzen genutzt werden sowie andererseits als Grundlage für den Einsatz von Methoden des maschinellen Lernens dienen. Dabei ist es von Interesse zu untersuchen, ob etwa durch bestärkendes Lernen unter der Vorgabe von flachheitsbasierten Referenztrajektorien im Lernprozess ein künstliches neuronales Netz generiert werden kann, welches eine vergleichbar gute Regelung im Normalfall bietet, allerdings Vorteile in beispielsweise Robustheit und Adaptivität aufweist.

# Kapitel 3

## Analytische Modellbildung

### 3.1 Allgemeine Modellannahmen

In der folgenden Modellierung wird das Demonstratorsystem nur planar betrachtet, also die Bewegung aller Komponenten nur in der vertikalen Ebene berücksichtigt. Diese Annahme ist gerechtfertigt, weil die Laufkatzen nur entlang einer Achse verfahren können und die Lagerung bzw. Aufhängung der Last ein Schwingen senkrecht zur vertikalen Ebene unterdrückt. Die Seile werden aufgrund ihrer geringen Dicke als masselos im Vergleich zu den Laufkatzen sowie der Last angenommen und somit auch nicht mit einem Trägheitsmoment versehen. Die Last wird trotz ihrer Aussparungen (siehe Abbildung 2) mit einer homogenen Masseverteilung modelliert. Für eine genauere Beschreibung wären Konstruktionsdaten oder eine Demontage mit Vermessung der Teilkomponenten notwendig. Zur Reduktion weiterer Komplexität werden dissipative Kräfte im Modell nicht berücksichtigt.

Die Modellbildung erfolgt in mehreren Stufen. Zunächst wird mittels der Lagrange-Gleichungen zweiter Art ein Einzelkran modelliert. Das Modell liegt dann in Form eines gewöhnlichen Differenzialgleichungssystems (DGL-System, engl. ODE system) vor. Die Lagrange-Gleichungen erster Art geben die geschlossene kinematische Kette der durch die Last verbundenen Laufkatzen des Doppelkrans intuitiv wider, so dass ein differenzial-algebraisches Gleichungssystem (DAE-System, von engl. differential algebraic equations) entsteht. In der Arbeit hat sich allerdings gezeigt, dass die Lagrange-Gleichungen zweiter Art eine kompliziertere Formulierung der Hubaktuierung sowie aufwändigere Lösungsalgorithmen erfordern. Um das prinzipielle Vorgehen zur Herleitung eines DAE-Modells dennoch zu schildern, wird es auf den Doppelkran angewendet. Ausgehend vom Einzelkransystem kann die prinzipielle Methodik der Modellbildung verifiziert werden und ein Transfer der Erkenntnisse auf die Modellierung des Doppelkransystems erfolgen.

## 3.2 Modellierung mittels Lagrange-Formalismus

Die Dynamik mechanischer Systeme lässt sich über Differenzialgleichungen, den sogenannten Lagrange-Gleichungen (LG) beschreiben. Dabei wird eine Menge aus  $n$  zeitlich veränderlichen Koordinaten als Konfigurationskoordinaten oder Systemgrößen  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$  bezeichnet. Deren zeitliche Änderungsraten werden im Vektor der Konfigurationsgeschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  zusammengefasst. In [10, S.10] wird eine Unterteilung der Konfigurationskoordinaten  $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$  in „aktive“ Koordinaten  $\mathbf{q}$  und „passive“ Koordinaten  $\mathbf{p}$  vorgenommen. In Anlehnung daran wird in dieser Arbeit eine Aufteilung der Systemgrößen in die direkt aktuierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  und nicht direkt aktuierten Koordinaten  $\mathbf{p}$  durchgeführt. [10, S.7]

Die kinetische Energie eines Systems wird im Folgenden durch die Funktion  $T$  sowie die potentielle Energie durch die Funktion  $V$  beschrieben. Die Lagrange-Funktion kann damit folgendermaßen definiert werden:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - V(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.1)$$

Eine automatisierte Generierung von Systemgleichungen aus den Energiefunktionen ist unter Nutzung des Python-Pakets symbtools [14] möglich.

### 3.2.1 Lagrange-Gleichungen erster Art

Mit den LG erster Art können Problemstellungen mit Zwangsbedingungen (ZB) und -kräften abgebildet werden:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \tilde{Q}_i + Q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Die sich auf die jeweilige Koordinate  $\theta_i$  beziehende Stellkraft  $Q_i = f_i - D_i$  entspricht der verallgemeinerten Kraft, welche sich aus der äußeren Kraft  $f_i$  sowie internen Reibungskraft  $D_i$  zusammensetzt [3, S. 49].

Weiterhin können  $m$  holonome ZB  $a_1(\boldsymbol{\theta}) = \dots = a_m(\boldsymbol{\theta}) = 0$  eingeführt werden, aus denen die Zwangskraft  $\tilde{Q}_i$  in Richtung der Koordinate  $\theta_i$  folgt:

$$\tilde{Q}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial a_j}{\partial \theta_i}. \quad (3.3)$$

In dieser Beziehung bezeichnet  $\lambda_j$  den jeweiligen Lagrange-Multiplikator.



### 3.2.2 Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Die LG zweiter Art beschreiben bezüglich der LG erster Art den Spezialfall ohne ZB, also  $m = 0$ . Zwangskräfte sind dabei nicht explizit zu bestimmen. Als Voraussetzung müssen die Konfigurationskoordinaten unabhängig voneinander sein, es darf also keine ZB geben, die diese verkoppeln. In diesem Zusammenhang spricht man auch von den Minimalkoordinaten  $\boldsymbol{\theta}$ . Dann können die Bewegungsgleichungen folgendermaßen aus der Lagrange-Funktion abgeleitet werden:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Zur Bestimmung der Komponenten  $Q_i$  der verallgemeinerten Kraft wird das Prinzip der virtuellen Arbeit herangezogen [15]:

$$\delta W = \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots + \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_n} \delta \theta_n. \quad (3.5)$$

Dabei entspricht  $\mathbf{r}_k$  bei einem System aus  $l$  (massebehafteten) Teilchen dem Richtungsvektor zum  $k$ -ten Partikel und  $\mathbf{F}_k$  der jeweils entlang dieses Richtungsvektors angewandten Stellkraft. Die virtuelle Verschiebung des Partikels im Raum  $\delta \mathbf{r}_k$  und die virtuelle Verschiebung  $\delta \theta_i$  der Koordinate  $\theta_i$  genügen der Beziehung:

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \delta \theta_i. \quad (3.6)$$

Die gesamte virtuelle Arbeit des Systems dieser Teilchen kann also ebenso durch

$$\delta W = Q_1 \delta \theta_1 + \dots + Q_n \delta \theta_n = \sum_{k=1}^l \delta \mathbf{r}_k^T \mathbf{F}_k \quad (3.7)$$

dargestellt werden, wobei sich die Komponenten der verallgemeinerten Kraft zu

$$Q_i = \sum_{k=1}^l \left( \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \right)^T \mathbf{F}_k = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

ergeben.

## 3.3 Generierung und Simulation von DAE-Systemen

DAE-Systeme sind ODE-Systeme, welche um algebraische Gleichungen (AGL, auch als Nebenbedingungen bezeichnet) ergänzt werden. Diese Nebenbedingungen können

zur Darstellung von ZB der LG erster Art genutzt werden. DAE-Systeme lassen sich typischerweise in einer semi-expliziten Form darstellen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, t) \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t), \quad (3.9b)$$

wobei  $\mathbf{x}$  dem Systemzustand,  $\mathbf{z}$  den algebraischen Variablen (weitere Systemgrößen, die in den Systemgleichungen ohne Ableitung vorkommen),  $\mathbf{u}$  dem Systemeingang sowie  $t$  der Zeit entspricht. [8, S.137]

Eine Möglichkeit zur Klassifikation von DAE-Systemen ist der differenzielle Index  $i_d$ . Dieser entspricht der minimalen Anzahl an Differenziationen  $\frac{d}{dt}$  der AGL  $\mathbf{a}$  (auch ZB), damit unter Einbeziehung der DGL ein explizites DGL-System aus dem DAE-System entsteht. Ein gewöhnliches DGL-System besitzt also den differenziellen Index  $i_d = 0$ . Die Differenziation der AGL mit dem Resultat eines DAE-Systems mit kleinerem Index wird als Indexreduktion bezeichnet. [8, S.139]

Für die Simulation von DAE-Systemen ist die numerische Integration dieser Gleichungssysteme notwendig. Die in dieser Arbeit untersuchten mechanischen Systeme sind solche mit starrer Kopplung als ZB vom Index  $i_d = 3$  und können für den Zustandsvektor  $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T$  über folgende Bewegungsgleichungen mittels der Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{B}$  beschrieben werden [8, S.240]:

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{z} - \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.10b)$$

Zur Integration des Systems der Gleichungen (3.9) beziehungsweise (3.10) gibt es verschiedene Möglichkeiten [9, Kap. 8]:

- Indexreduktion auf Index  $i_d = 2$  und anschließende Integration über ein implizites<sup>1</sup> Verfahren
- Indexreduktion auf Index  $i_d = 1$  und anschließende Integration über ein explizites<sup>2</sup> Verfahren mit AGL-Löser oder ein implizites Verfahren
- Indexreduktion auf Index  $i_d = 0$  und anschließende Integration über ein explizites oder implizites Verfahren.

Die im Python-Paket `sympbtools` [14] enthaltene Bibliothek `modeltools` führt die Reduktion von Systemen mit Index  $i_d = 3$  auf  $i_d = 1$  durch. Zur numerischen Berechnung kann daraufhin der Solver `ODASSL` des Python-Pakets `assimulo` [1] verwendet werden.

<sup>1</sup>Auf der linken und rechten Seite der zu integrierenden Gleichungen sind die gesuchten Näherungswerte von  $\mathbf{x}(t_{i+1})$  an der Stelle  $t_{i+1}$  enthalten.

<sup>2</sup>Zur Berechnung des Näherungswertes von  $\mathbf{x}(t_{i+1})$  an der Stelle  $t_{i+1}$  wird einzig der zuletzt berechnete Näherungswert von  $\mathbf{x}(t_i)$  an der Stelle  $t_i$  benötigt.

Zur Erfüllung der AGL zu Simulationsbeginn müssen konsistente Anfangswerte  $\mathbf{x}(0)$  und  $\mathbf{z}(0)$  bestimmt werden. Bei DAE-Systemen mit Index  $i_d \geq 2$  kann  $\mathbf{x}(0)$  nicht mehr frei gewählt werden, da  $\mathbf{z}(0)$  nicht mehr ausschließlich aus AGL bestimmbar ist. Daher ist es notwendig, zusätzliche algebraische Bedingungen an  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{z}$  aus den DGL abzuleiten. Die Bibliothek `modeltools` berechnet konsistente Anfangswerte mit der Funktion `calc_consistent_init_vals`. Falls sich andernfalls inkonsistente Anfangswerte ergeben, folgen daraus Simulationsfehler in den ersten Schritten oder sogar vollständig falsche Ergebnisse. [8, S.207]

### 3.4 Analytisches Modell des Einzelkrans

Eine Implementierung der in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen ist unter [18, `flatness_notebooks/ODE_flatness_analysis_single_crane.ipynb`] zu finden.

Mittels der LG zweiter Art wird in diesem Abschnitt ein ODE-Modell des Einzelkrans erzeugt. Dabei wird entsprechend der Erläuterungen aus Abschnitt 3.2.2 vorgegangen. Diese Modellierung hat gegenüber den LG erster Art den Vorteil, dass durch die generalisierte Kraft  $\mathbf{Q}$  die Stellkraft im Seil gut abgebildet werden kann sowie eine Vielzahl verschiedener Integrationsverfahren für eine effiziente Lösung des ODE-Systems nutzbar ist. Abbildung 3 zeigt die Konfiguration des Einzelkransystems.



**Abbildung 3** – Planare Geometrie des Einzelkransystems mit Systemgrößen, Systemparametern und Kräften.

Als direkt aktuierte Koordinate wird nur die  $x$ -Verschiebung  $q_1$  der Laufkatzenposition  $\mathbf{S}_1$  ( $= \mathbf{B}_1 = \mathbf{G}_1$ ) ausgewählt. Die nicht direkt aktuierten Koordinaten sind die  $x$ - und  $y$ -Auslenkungen  $(p_1, p_2)$  der Last  $\mathbf{S}_2$  aus dem ortsfesten Ursprung. Die variable Seillänge wird mit  $l_1$  bezeichnet, die durch die Koordinaten auch mittels

$$l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2} \quad (3.11)$$

ausgedrückt werden kann. Die Position der beiden Massenschwerpunkte kann somit wie folgt durch die Koordinaten beschrieben werden:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Damit ist es möglich die kinetische und potentielle Energie des Systems zu formulieren:

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{S}}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{S}}_2^T \dot{\mathbf{S}}_2 = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2} \quad (3.13)$$

$$V = m_2 g \mathbf{S}_2^T \mathbf{e}_y = m_2 g p_2. \quad (3.14)$$

Die Systemgleichungen können durch die LG zweiter Art (3.4) zunächst in Abhängigkeit der Komponenten der generalisierten Kraft  $Q_i$  bestimmt werden:

$$-Q_1 + m_2 \ddot{p}_1 = 0 \quad (3.15a)$$

$$-Q_2 + g m_2 + m_2 \ddot{p}_2 = 0 \quad (3.15b)$$

$$-Q_3 + m_1 \ddot{q}_1 = 0. \quad (3.15c)$$

Die Eingangskomponenten  $\tau_1, \tau_2$  des Systems entsprechen den unterlagert geregelten Kräften der Motoren der Laufkatze bzw. der Seilwinde. Sie können über Stellkräfte vektoriell dargestellt werden:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} \\ \frac{p_2 \tau_2}{l_1} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit nach Gleichung (3.7) und (3.8) ist es möglich, die generalisierte Kraft durch diese Stellkräfte bzw. den Systemeingang auszudrücken:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} \\ \frac{p_2 \tau_2}{l_1} \\ \tau_1 - \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Durch Einsetzen dieser generalisierten Kraft in die Gleichungen (3.15) lässt sich ein abschließender Satz an Systemgleichungen des Einzelkrans bilden:

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} = 0 \quad (3.18a)$$

$$g m_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0 \quad (3.18b)$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} = 0. \quad (3.18c)$$

## 3.5 Analytisches Modell des Doppelkrans

Aufbauend auf der Modellierung eines Einzelkrans wird in diesem Abschnitt eine Erweiterung des Systems auf ein Doppelkransystem in Analogie zum realen Demonstrator vorgenommen. Aufgrund der an beiden Laufkatzen befestigten Last liegt zunächst alternativ zum vorherigen Vorgehen die Nutzung der LG erster Art nahe. Bei dieser wird mittels algebraischer ZB zur Modellierung der kinematischen Schleife<sup>3</sup> ein DAE-System erzeugt. Allerdings ist dabei die Beschreibung der Aktuierung der Seilwinden anspruchsvoller, da bereits für eine konstante Seillänge die bei der Katzfahrt auftretenden dynamischen Seilkräfte kompensiert werden müssen, ohne dass es dafür eine explizite resultierende Gesamtkraft gibt, die zu Null gesetzt werden kann. Beim realen Demonstrator sperrt ein Schneckengetriebe der Seilwinde im stromfreien Fall die Hubaktuierung. Auch bei einem Doppelkransystem ist wieder eine Modellierung mit den LG zweiter Art möglich.

### 3.5.1 Ansatz über ein DAE-System

Eine Implementierung der in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen ist unter [\[18, double\\_crane\\_notebooks/DAE\\_double\\_crane\\_cartesian.ipynb\]](#) zu finden.

Mittels der LG erster Art wird im Folgenden ein DAE-Modell des Doppelkrans erzeugt. Dabei wird entsprechend Abschnitt 3.2.1 vorgegangen. Schließlich ergibt sich hierbei ein komplexerer Satz an Systemgleichungen, die typischerweise weniger effizient zu simulieren sind als bei einem ODE-System. Daher wird dieser Ansatz in weiteren Kapiteln nicht weiter verfolgt. Eine Dokumentation dieser Modellierung wird trotzdem als sinnvoll erachtet. Durch die Einprägung von ZB kann die kinematische Schleife wegen der gemeinsamen Last intuitiv abgebildet werden. Es wird zunächst einzig eine horizontale Aktuierung der Laufkatzen durch den Eingang  $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T$  betrachtet. Für eine effiziente Simulation mit aktuierten Seilwinden, welche für diesen Ansatz nicht mehr im Rahmen dieser Studienarbeit durchgeführt wird, wäre eine Umformulierung des Problems mit den Seillängen als Stellgröße sinnvoll.[\[12\]](#) Abbildung 4 zeigt die Konfiguration dieses Doppelkransystems.

Als direkt aktuierte Koordinate werden nur die  $x$ -Verschiebungen  $q_1$  der Position der linken Laufkatze  $\mathbf{S}_1$  ( $= \mathbf{G}_1 = \mathbf{B}_1$ ) und  $q_2$  der Position der rechten Laufkatze  $\mathbf{S}_5$  ( $= \mathbf{G}_4 = \mathbf{B}_2$ ) ausgewählt, als nicht direkt aktuierte Koordinaten die absolute Position  $(p_1, p_2)$  des Gelenks  $\mathbf{G}_2$  ( $= \mathbf{S}_2$ ) sowie  $(p_3, p_4)$  des Gelenks  $\mathbf{G}_3$  ( $= \mathbf{S}_4$ ).

<sup>3</sup>Diese Bezeichnung zielt auf den Vergleich des Systems mit einem Viergelenk aus der Literatur ab, durch die gemeinsame Last wird die Schleife „geschlossen“.



aus drei Massen ( $m_2, m_3, m_4$ ) beschrieben, das sich unter Einhaltung der folgenden Zusammenhänge simulativ äquivalent verhält:

$$m_{\text{ges}} = m_2 + m_3 + m_4 \quad (3.23a)$$

$$m_2 = m_4 \quad (3.23b)$$

$$J = m_2 s_3^2 + m_4 s_3^2 = 2m_2 s_3^2 \quad (3.23c)$$

$$\Rightarrow m_2 = m_4 = \frac{J}{2s_3^2} \quad (3.23d)$$

$$\Rightarrow m_3 = m_{\text{ges}} - m_2 - m_4. \quad (3.23e)$$

Die Größen  $m_{\text{ges}}$  und  $J$  beziehen sich auf die in Abschnitt 3.6 identifizierten Systemparameter, die so auch bei der Modellbildung des Doppelkrans als ODE-System genutzt wurden.

Somit ist es möglich, die kinetische und potentielle Energie des Systems zu formulieren:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{S}}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{S}}_2^T \dot{\mathbf{S}}_2 + \frac{m_3}{2} \dot{\mathbf{S}}_3^T \dot{\mathbf{S}}_3 + \frac{m_4}{2} \dot{\mathbf{S}}_4^T \dot{\mathbf{S}}_4 + \frac{m_5}{2} \dot{\mathbf{S}}_5^T \dot{\mathbf{S}}_5 \\ &= \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2} + \frac{m_3 \cdot 0.25 (\dot{p}_1 + \dot{p}_3)^2}{2} + \frac{m_3 \cdot 0.25 (\dot{p}_2 + \dot{p}_4)^2}{2} \\ &\quad + \frac{m_4 \dot{p}_3^2}{2} + \frac{m_4 \dot{p}_4^2}{2} + \frac{m_5 \dot{q}_2^2}{2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} V &= (m_2 g \mathbf{S}_2^T + m_3 g \mathbf{S}_3^T + m_4 g \mathbf{S}_4^T) \mathbf{e}_y \\ &= g (m_2 p_2 + m_3 (0.5 p_2 + 0.5 p_4) + m_4 p_4). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Unter Nutzung der Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_j$  ist es mittels der LG zweiter Art (3.2)

möglich, die Systemgleichungen auszudrücken:

$$\begin{aligned}
& - \frac{\lambda_1 p_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} + \frac{\lambda_1 q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} - \frac{\lambda_2 p_1}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} \\
& + \frac{\lambda_2 p_3}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} + m_2 \ddot{p}_1 + 0.25 m_3 \ddot{p}_1 + 0.25 m_3 \ddot{p}_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.26a}$$

$$\begin{aligned}
& g m_2 + 0.5 g m_3 - \frac{\lambda_1 p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} - \frac{\lambda_2 p_2 + \lambda_2 p_4}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} \\
& + m_2 \ddot{p}_2 + 0.25 m_3 \ddot{p}_2 + 0.25 m_3 \ddot{p}_4 = 0
\end{aligned} \tag{3.26b}$$

$$\frac{\lambda_2 (p_1 - p_3)}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} + \frac{\lambda_3 (l_0 - p_3 + q_2)}{\sqrt{p_4^2 + (l_0 - p_3 + q_2)^2}} \tag{3.26c}$$

$$+ \frac{m_3 (0.5 \ddot{p}_1 + 0.5 \ddot{p}_3)}{2} + m_4 \ddot{p}_3 = 0 \tag{3.26d}$$

$$\begin{aligned}
& 0.5 g m_3 + g m_4 + \frac{\lambda_2 p_2}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} - \frac{\lambda_2 p_4}{\sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}} \\
& - \frac{\lambda_3 p_4}{\sqrt{p_4^2 + (l_0 - p_3 + q_2)^2}} + 0.25 m_3 \ddot{p}_2 + 0.25 m_3 \ddot{p}_4 + m_4 \ddot{p}_4 = 0
\end{aligned} \tag{3.26e}$$

$$\frac{\lambda_1 (p_1 - q_1) + \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} (m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1)}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} = 0 \tag{3.26f}$$

$$\frac{-\lambda_3 (l_0 - p_3 + q_2) + \sqrt{p_4^2 + (l_0 - p_3 + q_2)^2} (m_5 \ddot{q}_2 - \tau_2)}{\sqrt{p_4^2 + (l_0 - p_3 + q_2)^2}} = 0. \tag{3.26g}$$

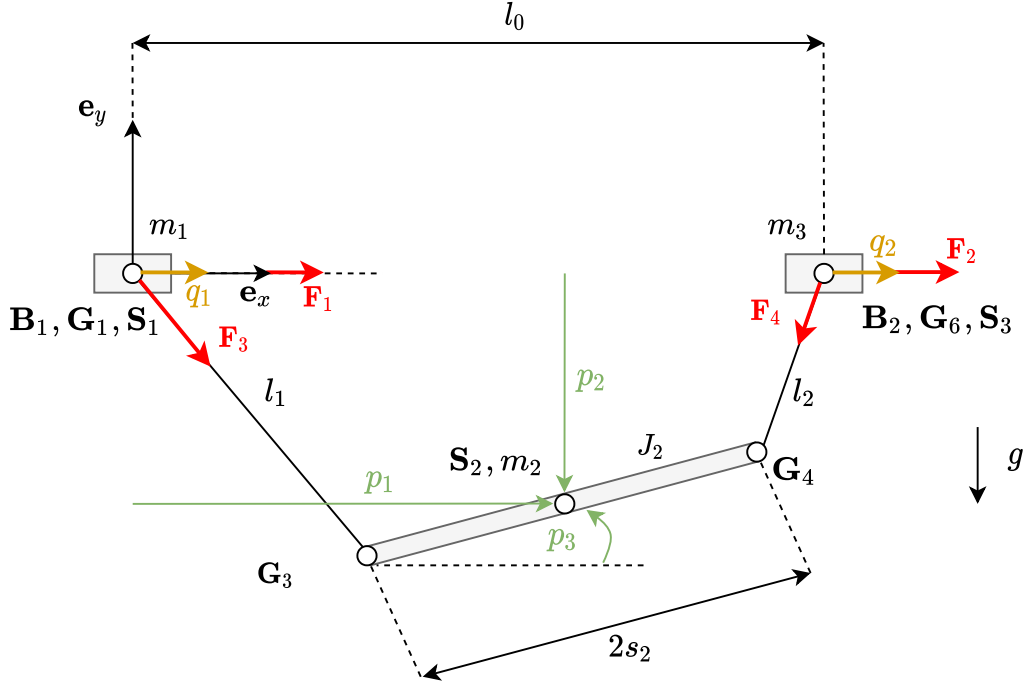
### 3.5.2 Ansatz über ein ODE-System

Eine Implementierung der in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen ist unter [\[18, flatness\\_notebooks/ODE\\_flatness\\_analysis.ipynb\]](#) zu finden.

Mittels der LG zweiter Art wird im Folgenden ein ODE-Modell des Doppelkrans erzeugt. Dabei wird entsprechend Abschnitt 3.2.2 vorgegangen. Abbildung 5 zeigt die Konfiguration dieses Doppelkransystems.

Als direkt aktuierte Koordinate werden zunächst nur die  $x$ -Verschiebungen  $q_1$  der Position der linken Laufkatze  $\mathbf{S}_1$  ( $= \mathbf{G}_1 = \mathbf{B}_1$ ) und  $q_2$  der Position der rechten Laufkatze  $\mathbf{S}_3$  ( $= \mathbf{B}_2 = \mathbf{G}_6$ ) ausgewählt. Die absolute Position  $(p_1, p_2)$  des Lastschwerpunkts  $\mathbf{S}_2$  sowie die Orientierung der Last  $p_3$  gegenüber der Horizontalen entsprechen den nicht direkt aktuierten Koordinaten. Die variablen Seillängen werden mit  $l_1$  sowie  $l_2$  bezeichnet,





**Abbildung 5** – Planare Geometrie des Doppellkransystems im ODE-Modell mit Systemgrößen, Systemparametern und Kräften.

die durch die Koordinaten auch mittels

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}, \quad (3.27)$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2} \quad (3.28)$$

ausgedrückt werden können. Die Position der Massenschwerpunkte und Gelenke kann somit wie folgt beschrieben werden:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} l_0 + q_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} p_1 - s_2 \cos(p_3) \\ p_2 - s_2 \sin(p_3) \end{pmatrix}, \mathbf{G}_4 = \begin{pmatrix} p_1 + s_2 \cos(p_3) \\ p_2 + s_2 \sin(p_3) \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Damit ist es möglich, die kinetische und potentielle Energie des Systems zu formulieren:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{S}}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{S}}_2^T \dot{\mathbf{S}}_2 + \frac{J_2}{2} \dot{p}_3^2 + \frac{m_3}{2} \dot{\mathbf{S}}_3^T \dot{\mathbf{S}}_3 \\ &= \frac{J_2 \dot{p}_3^2}{2} + \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{q}_2^2}{2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$V = m_2 g \mathbf{S}_2^T \mathbf{e}_y = m_2 g p_2. \quad (3.31)$$

Die Systemgleichungen können durch die LG zweiter Art (3.4) zunächst in Abhängigkeit

der Komponenten der generalisierten Kraft  $Q_i$  bestimmt werden:

$$-Q_1 + m_2 \ddot{p}_1 = 0 \quad (3.32a)$$

$$-Q_2 + gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 = 0 \quad (3.32b)$$

$$J_2 \ddot{p}_3 - Q_3 = 0 \quad (3.32c)$$

$$-Q_4 + m_1 \ddot{q}_1 = 0 \quad (3.32d)$$

$$-Q_5 + m_3 \ddot{q}_2 = 0. \quad (3.32e)$$

Über die Komponenten des Systemeingangs  $\tau$  und normierte Richtungsvektoren der Führungsschiene bzw. der Seile können die vektoriellen Stellkräfte dargestellt werden:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_3(p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))}{l_1} \\ \frac{\tau_3(p_2 - s_2 \sin(p_3))}{l_1} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))}{l_2} \\ \frac{\tau_4(p_2 + s_2 \sin(p_3))}{l_2} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit ist es möglich, die generalisierte Kraft durch die Stellkräfte bzw. den Systemeingang auszudrücken (Abkürzungen  $\nu_x := \sin x$  und  $\mu_x := \cos x$ ):

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \mu_{p_3})}{l_2} + \frac{\tau_3(p_1 - q_1 - s_2 \mu_{p_3})}{l_1} \\ \frac{\tau_4(p_2 + s_2 \nu_{p_3})}{l_2} + \frac{\tau_3(p_2 - s_2 \nu_{p_3})}{l_1} \\ \frac{s_2 \tau_4(p_2 + s_2 \nu_{p_3}) \mu_{p_3}}{l_2} - \frac{s_2 \tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \mu_{p_3}) \nu_{p_3}}{l_2} - \frac{s_2 \tau_3(p_2 - s_2 \nu_{p_3}) \mu_{p_3}}{l_1} + \frac{s_2 \tau_3(p_1 - q_1 - s_2 \mu_{p_3}) \nu_{p_3}}{l_1} \\ \tau_1 - \frac{\tau_3(p_1 - q_1 - s_2 \mu_{p_3})}{l_1} \\ \tau_2 - \frac{\tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \mu_{p_3})}{l_2} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Durch Einsetzen dieser generalisierten Kraft in die Gleichungen (3.32) lässt sich ein abschließender Satz an Systemgleichungen des Doppelkrans bilden:

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))}{l_2} - \frac{\tau_3(p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))}{l_1} = 0 \quad (3.35a)$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{\tau_4(p_2 + s_2 \sin(p_3))}{l_2} - \frac{\tau_3(p_2 - s_2 \sin(p_3))}{l_1} = 0 \quad (3.35b)$$

$$J_2 \ddot{p}_3 - \frac{s_2 \tau_4(p_2 + s_2 \sin(p_3)) \cos(p_3)}{l_2} + \frac{s_2 \tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)) \sin(p_3)}{l_2} \\ + \frac{s_2 \tau_3(p_2 - s_2 \sin(p_3)) \cos(p_3)}{l_1} - \frac{s_2 \tau_3(p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)) \sin(p_3)}{l_1} = 0 \quad (3.35c)$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_3(p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))}{l_1} = 0 \quad (3.35d)$$

$$m_3 \ddot{q}_2 - \tau_2 + \frac{\tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))}{l_2} = 0. \quad (3.35e)$$

Alternativ kann das Doppelkransystem für spätere regelungstechnische Untersuchungen auch eingangsaffin im Zustandsraum beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} \text{ mit} \\ \mathbf{x} &= (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, 0, -g, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{l_1 m_2} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{l_2 m_2} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{l_1 m_2} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{l_2 m_2} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 l_1} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 l_2} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{l_1 m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_3} & 0 & \frac{l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3)}{l_2 m_3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

### 3.6 Identifikation der Systemparameter

Die meisten Systemparameter der Modelle sind Massen oder geometrische Größen und lassen sich durch Messungen mit einem Lineal oder einer Waage empirisch bestimmen. Lediglich für das Trägheitsmoment  $J$  der Last ist eine direkte experimentelle Bestimmung, etwa durch einen Pendelversuch, zu aufwendig. Daher wird dieser Parameter unter der Annahme eines Quaders mit homogener Masseverteilung und Rotationsachse durch seinen Mittelpunkt in der vertikalen Aufhängeebene nach [16] berechnet:

$$J = \frac{1}{12} m_2 ((2s_2)^2 + h^2). \quad (3.37)$$

Dabei entspricht  $h$  der Höhe der Last,  $2s_2$  der Lastlänge und  $m_2$  der Masse der Last. Die numerische Belegung der Systemparameter ist in Tabelle 1 zusammengefasst.

**Tabelle 1** – Physikalische Parameter des Doppelkrandemonstratorsystems.

Parameter	Bezeichnung im ODE-Modell	Wert
Masse Laufkatze 1	$m_1$	0,45 kg
Masse Laufkatze 2	$m_3$	0,45 kg
Masse Last	$m_2$	0,557 kg
Länge Last	$2s_2$	0,15 m
Höhe Last	$h$	0,09 m
Initialer Laufkatzenabstand	$l_0$	0,3 m
Trägheitsmoment Last	$J_2$	0,00455 kgm <sup>2</sup>

# Kapitel 4

## Flachheitsanalyse

Zur Erweiterung des Begriffs der Steuerbarkeit auf nichtlineare Systeme wird die sogenannte (differenzielle) Flachheit als Systemeigenschaft definiert. Gerade für flache Mehrgrößensysteme gestaltet sich die Bestimmung geeigneter Eingangsgrößenverläufe zur Steuerung und auch Folgeregelung aus der Vorgabe nur weniger Referenztrajektorien als sehr praktikabel.

### 4.1 Definition differenzieller Flachheit

Ein System der Form  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  mit  $\mathbf{F}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  heißt (differenziell) flach, falls ein  $m$ -Tupel  $y := (y_1, \dots, y_m)^T$  sowie glatte Funktionen  $\Psi, \theta$  existieren, so dass

$$\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_x)}) \text{ mit } n_x < \infty \text{ und} \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{u} = \theta(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_u)}) \text{ mit } n_u < \infty \text{ gilt.} \quad (4.1b)$$

Dabei ist  $\mathbf{y}$  ein flacher Ausgang. Aus der Existenz eines flachen Ausgangs folgt, dass die Systemgrößen bestehend aus dem Zustand  $\mathbf{x}$  und Eingang  $\mathbf{u}$  eindeutig aus dem flachen Ausgang  $\mathbf{y}$  und einer endlichen Anzahl dessen Zeitableitungen berechnet werden können, also keine Differenzialgleichungen durch Integration dafür gelöst werden müssen. Eine alternative Formulierung des Flachheitsbegriffs verzichtet auf die Angabe der gleichen Dimension  $m$  von Eingang und flachem Ausgang, fordert aber die differenzielle Unabhängigkeit der Komponenten von  $\mathbf{y}$ . Die Existenzbedingungen eines flachen Ausgangs sind bei Eingrößensystemen bekannt, allerdings ist der systematische Flachheitsnachweis und die Berechnung eines flachen Ausgangs bei Mehrgrößensystemen im Allgemeinen nicht abschließend gelöst. [11, S. 185]

## 4.2 Flachheitsanalyse von Mehrgrößensystemen

Im Folgenden wird ein prinzipielles praktisches Vorgehen zur Bestimmung flacher Ausgänge von Mehrgrößensystemen sowie zur Parametrisierung der Systemgrößen anhand solcher flachen Ausgänge skizziert. Für eine mathematisch fundierte und systematische Herangehensweise sei auf den Beitrag [5] und die dort zitierten Quellen verwiesen. Im Unterschied zu diesem Beitrag wird hier aber nicht auf den Gleichungen des sogenannten Tangentialsystems operiert, sondern auf den originalen nichtlinearen Gleichungen<sup>1</sup>.

Es sei ein nichtlineares Mehrgrößensystem wie in der Definition 4.1 gegeben. Dieses sei affin bezüglich des Eingangs  $\mathbf{u}$ . Der Eingang könne mittels der Systemgleichungen eliminiert werden, so dass ein autonomes System aus  $p := n - m$  Gleichungen folgt. Diese Gleichungen werden wiederum zur Elimination von  $p$  der übrigen Zustandskomponenten genutzt, wobei jeweils eine Gleichung und eine Systemgröße gemeinsam eliminiert werden. Wenn sich dieses sukzessive Vorgehen bis einschließlich der letzten Gleichung durchführen lässt, verbleiben schlussendlich  $n - p = m$  Systemgrößen, die keiner Gleichung mehr genügen müssen. Diese bilden dann den flachen Ausgang  $\mathbf{y}$ .

Zur sukzessiven Elimination von Gleichungen und Systemgrößen bietet sich folgendes Vorgehen an: Um Systemgleichungen und Eingangskomponenten, welche mit geringem Aufwand eliminiert werden können zu identifizieren, wird die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_i$  der zu diesem Zeitpunkt noch  $i$  verbliebenen Systemgleichungen bezüglich der noch verbliebenen Eingangskomponenten  $\mathbf{u}_{m-(n-i)}$  gebildet. Dabei sind die zu den Matrixzeilen korrespondierenden Gleichungen geeignet, in denen nur ein isolierter Spalteneintrag  $\varepsilon \neq 0$  steht, also weitere Einträge der Spalte Null sind:

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & \varepsilon & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Falls keine solche Spalte zu finden ist, kann sie durch eine Transformation der Systemgleichungen durch die Multiplikation mit der Matrix  $\mathbf{T}_i$  erzeugt werden:

$$\mathbf{T}_i \mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-(n-i)} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times (m-(n-i))} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>Direkt auf den nichtlinearen Systemgleichungen zu operieren erschwert ggf. die Eliminierung von Größen bzw. ist diese nicht immer möglich. Es muss im Gegensatz zu [5] jedoch keine Integrabilitätsbedingung geprüft werden.

Dabei kann  $\mathbf{T}_i$  über das linke Orthokomplement (der Vektorraum aller Zeilen, die orthogonal zu allen Spalten von  $\mathbf{J}_i$  sind)  $\mathbf{J}_i^{\text{L}\perp}$  und die linke Pseudoinverse  $\mathbf{J}_i^{\text{L}+}$  der Jacobi-Matrix folgendermaßen gebildet werden [5, Abschnitt 2.1.2]:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_i^{\text{L}+}\mathbf{J}_i &= \mathbf{I}_{m-(n-i)} \\ \mathbf{J}_i^{\text{L}\perp}\mathbf{J}_i &= \mathbf{0}_{(n-m)\times(m-(n-i))} \\ \Rightarrow \mathbf{T}_i &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_i^{\text{L}+} \\ \mathbf{J}_i^{\text{L}\perp} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Nachdem die Eingangskomponenten aus den Systemgleichungen eliminiert wurden, kann die Behandlung der anderen noch vorhandenen Systemgrößen analog durch Bildung der Jacobi-Matrix bezüglich dieser erfolgen. Der flache Ausgang  $\mathbf{y}$  besteht aus der Menge an Systemgrößen, welche im Idealfall nach Elimination aller Gleichungen übrig ist. Der konstruktive Flachheitsnachweis für ein System ist erbracht, wenn mittels der Zusammenhänge aus den Systemgleichungen entsprechend der Gleichungen (4.1) alle Systemgrößen (insbesondere auch der Systemeingang) allein durch  $(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots)$  parametrisiert sind. Dafür werden die Systemgleichung in umgekehrter Reihenfolge ihrer Eliminierung zur Berechnung der Parametrisierung verwendet. Jede eliminierte Gleichung wird als Definitionsgleichung einer Hilfsgröße auf Basis des flachen Ausgangs (und ggf. seiner Zeitableitungen) aufgefasst, die in den weiteren Gleichungen dann ggf. auch abgeleitet vorkommt.

Bei nichtlinearen Systemen ist es allerdings oft nicht direkt möglich, alle Gleichungen direkt zu eliminieren, so dass Freiheitsgrade bestehen, was eine Schwierigkeit der Flachheitsanalyse im Mehrgrößenfall darstellt. Der skizzierte Algorithmus ist deshalb nur als hinreichend zur Bestimmung eines flachen Ausgangs, aber nicht als notwendig zu betrachten.

### 4.3 Flachheitsanalyse am Einzelkran

Eine Implementierung der in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen ist unter [18, flatness\_notebooks/ODE\_flatness\_analysis\_single\_crane.ipynb] zu finden.

Die im vorherigen Abschnitt allgemein geschilderte Vorgehensweise wird nun auf das Einzelkransystem aus Abschnitt 3.4 angewendet. Aus der analytischen Modellbildung mit den LG zweiter Art folgen die drei Systemgleichungen (3.18), welche als Grundlage des Flachheitsnachweises dienen.

Zunächst wird die Jacobi-Matrix dieser Gleichungen bezüglich  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_2 = (\tau_1, \tau_2)^T$

gebildet:

$$\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ 0 & -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -1 & \frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Dabei ist zu erkennen, dass in der ersten Spalte der Jacobi-Matrix ein isolierter Nicht-Null-Eintrag vorkommt, also die Eingangskomponente  $\tau_1$  durch die korrespondierende dritte Systemgleichung (3.18c) bestimmt werden kann. Eine Transformation des Systems ist dafür nicht notwendig. Dementsprechend können die letzte Zeile von  $\mathbf{J}_3$  und die Ausgangskomponente  $\tau_1$  eliminiert werden.

Im nächsten Schritt wird die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_2$  der verbliebenen Gleichungen (3.18a) und (3.18b) bezüglich  $\mathbf{u}_1 = \tau_2$  berechnet:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Diese weist keine Spalte mit nur einer Komponente ungleich Null auf, also ist eine Transformation  $\mathbf{T}_2$  des Systems entsprechend der Gleichungen (4.4) durchzuführen. Wegen der nicht-quadratischen Dimension von  $\mathbf{J}_2$  gilt es, eine linke Pseudoinverse  $\mathbf{J}_2^{L+} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  zu finden:

$$\mathbf{J}_2^{L+} \mathbf{J}_2 = \mathbf{I}_1 = 1, \quad (4.7)$$

sowie das linke Orthokomplement  $\mathbf{J}_2^{L\perp} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ :

$$\mathbf{J}_2^{L\perp} \mathbf{J}_2 = \mathbf{0}_{1 \times 1} = 0. \quad (4.8)$$

Da beide Matrizen nicht eindeutig sind, kann für ihre Bestimmung der folgende Ansatz gewählt werden:

$$\mathbf{J}_2^{L+} = \left( \left( J_{2,(1,1)} \right)^{-1} \mathbf{0}_{1 \times 1} \right), \mathbf{J}_2^{L\perp} = \begin{pmatrix} -J_{2,(2,1)} & J_{2,(1,1)} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Durch Einsetzen der Komponenten von  $\mathbf{J}_2$  folgt für die Transformationsmatrix:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{p_1^2 - 2p_1q_1 + p_2^2 + q_1^2}}{-p_1 + q_1} & 0 \\ \frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} & \frac{-p_1 + q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Die damit transformierten verbliebenen Systemgleichungen ergeben sich zu:

$$\frac{\left( -m_2 \ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + \tau_2 (p_1 - q_1) \right)}{(p_1 - q_1)} = 0 \quad (4.11a)$$

$$g \frac{m_2 (-gp_1 + gq_1 - p_1 \ddot{p}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + \ddot{p}_2 q_1)}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1q_1 + p_2^2 + q_1^2}} = 0. \quad (4.11b)$$

Per Konstruktion gilt für die dazu bezüglich  $\mathbf{u}_1 = \tau_2$  gebildete Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}'_2 = (1 \ 0)^T$ . Die erste transformierte Systemgleichung (4.11a) kann somit zusammen mit  $\tau_2$  eliminiert werden. Es verbleibt die Systemgleichung (4.11b), welche folgende Menge  $\mathcal{M}$  an Systemgrößen und deren Ableitungen beinhaltet:

$$\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}. \quad (4.12)$$

Das rein algebraische Auftreten von  $q_1$  legt nahe, dass eine Parametrisierung dieser und aller weiteren Systemgrößen durch einen flachen Ausgang  $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$  möglich ist. Es wird nun begonnen, in umgekehrter Reihenfolge zur Elimination die Systemgrößen durch  $\mathbf{y}$  zu parametrisieren. Aus Gleichung (4.11b) folgt:

$$q_1 = \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}. \quad (4.13)$$

Durch die transformierte Systemgleichung (4.11a) kann unter Einsetzen von (4.13) die Eingangskomponente  $\tau_2$  bestimmt werden:

$$\tau_2 = \frac{m_2\ddot{p}_1\sqrt{p_2^2 + \left(p_1 - \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}\right)^2}}{p_1 - \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}}. \quad (4.14)$$

Die zuerst eliminierte originale Systemgleichung (3.18c) kann nach  $\tau_1$  aufgelöst werden:

$$\tau_1 = \frac{m_1\ddot{q}_1\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + p_1\tau_2 - q_1\tau_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}}. \quad (4.15)$$

Diese Darstellung enthält allerdings mit  $q_1$  sowie  $\ddot{q}_1$  und  $\tau_2$  Größen, welche keine Komponenten des flachen Ausgangs sind. Die Ableitung  $\ddot{q}_1$  kann zu

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 = & \frac{1}{(g + \ddot{p}_2)^3} (-2\ddot{p}_2(g + \ddot{p}_2)(g\dot{p}_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1 - \dot{p}_1\dot{p}_2 + \ddot{p}_2\dot{p}_1) \\ & + (g + \ddot{p}_2)^2(g\ddot{p}_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1 - 2\dot{p}_1\dot{p}_2 + 2\ddot{p}_2\dot{p}_1) \\ & - (\dot{p}_2(g + \ddot{p}_2) - 2\ddot{p}_2^2)(gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\dot{p}_1)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

gebildet werden. Durch einsetzen davon, Gleichung (4.13) und (4.14) in (4.15) wird eine Parametrisierung von  $\tau_1$  durch den flachen Ausgang gewonnen:

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \frac{1}{g^3 + 3g^2\ddot{p}_2 + 3g\ddot{p}_2^2 + \ddot{p}_2^3} (g^3m_1\ddot{p}_1 + g^3m_2\ddot{p}_1 - g^2m_1p_2\ddot{p}_1 - 2g^2m_1\ddot{p}_1\dot{p}_2 \\ & + 2g^2m_1\dot{p}_1\ddot{p}_2 + 3g^2m_2\ddot{p}_1\dot{p}_2 - 2gm_1p_2\ddot{p}_1\dot{p}_2 + gm_1p_2\ddot{p}_2\ddot{p}_1 + 2gm_1p_2\dot{p}_1\ddot{p}_2 \\ & - 4gm_1\ddot{p}_1\dot{p}_2\dot{p}_2 + 2gm_1\ddot{p}_2\dot{p}_1\dot{p}_2 + gm_1\dot{p}_1\ddot{p}_2^2 + 3gm_2\ddot{p}_1\dot{p}_2^2 - m_1p_2\ddot{p}_1\dot{p}_2^2 \\ & + m_1p_2\ddot{p}_2\dot{p}_1\dot{p}_2 + 2m_1p_2\ddot{p}_1\ddot{p}_2\dot{p}_2 - 2m_1p_2\ddot{p}_2^2\dot{p}_1 - 2m_1\ddot{p}_1\dot{p}_2^2\dot{p}_2 \\ & + 2m_1\ddot{p}_2\dot{p}_1\ddot{p}_2\dot{p}_2 + m_2\dot{p}_1\ddot{p}_2^3). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Parametrisierung aller Systemgrößen durch  $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$  und endlich viele Ableitungen davon zeigt, dass es sich dabei um einen flachen Ausgang handelt. Der Flachheitsnachweis wurde somit konstruktiv erbracht.



## 4.4 Flachheitsanalyse am Doppelkran

Eine Implementierung der in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen ist unter [\[18, flatness\\_notebooks/ODE\\_flatness\\_analysis.ipynb\]](#) zu finden.

Aus der analytischen Modellbildung des Doppelkransystems mit den LG zweiter Art im Unterabschnitt 3.5.2 folgen die fünf Systemgleichungen (3.35), welche als Grundlage des Flachheitsnachweises dienen.

Zunächst wird die Jacobi-Matrix dieser Gleichungen bezüglich  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_4 = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)^T$  gebildet (Abkürzungen  $\nu_x := \sin x$  und  $\mu_x := \cos x$ ):

$$\mathbf{J}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{p_1 - q_1 - s_2 \mu(p_3)}{l_1} & -\frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \mu(p_3)}{l_2} \\ 0 & 0 & -\frac{p_2 - s_2 \nu(p_3)}{l_1} & -\frac{p_2 + s_2 \nu(p_3)}{l_2} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_2 - s_2 \nu(p_3)) \mu(p_3)}{l_1} - \frac{s_2(p_1 - q_1 - s_2 \mu(p_3)) \nu(p_3)}{l_1} & -\frac{s_2(p_2 + s_2 \nu(p_3)) \mu(p_3)}{l_2} + \frac{s_2(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \mu(p_3)) \nu(p_3)}{l_2} \\ -1 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \mu(p_3)}{l_1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \mu(p_3)}{l_2} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist zu erkennen, dass in den letzten beiden Systemgleichungen, die zu den Spalten der Jacobi-Matrix korrespondieren, zwei Eingangsgrößen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  jeweils isoliert vorkommen. Für deren Bestimmung ergeben sich keine redundanten Gleichungen. Dementsprechend können die letzten beiden Zeilen in  $\mathbf{J}_5$  sowie diese Eingangskomponenten eliminiert werden.

Für den reduzierten Eingang  $\mathbf{u}_2 = (\tau_3, \tau_4)^T$  gibt es in der darauf bezogenen Jacobimatrix  $\mathbf{J}_3$  zu den ersten drei Systemgleichungen (3.35a), (3.35b) und (3.35c) keine Spalten mehr, in denen diese Eingangskomponenten nur einmal vorkommen:

$$\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - q_1 - s_2 \mu(p_3)}{l_1} & -\frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \mu(p_3)}{l_2} \\ -\frac{p_2 - s_2 \nu(p_3)}{l_1} & -\frac{p_2 + s_2 \nu(p_3)}{l_2} \\ \frac{s_2(p_2 - s_2 \nu(p_3)) \mu(p_3)}{l_1} - \frac{s_2(p_1 - q_1 - s_2 \mu(p_3)) \nu(p_3)}{l_1} & -\frac{s_2(p_2 + s_2 \nu(p_3)) \mu(p_3)}{l_2} + \frac{s_2(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \mu(p_3)) \nu(p_3)}{l_2} \end{pmatrix}.$$

Also ist eine Transformation  $\mathbf{T}_3$  des Systems entsprechend der Gleichungen (4.4) durchzuführen. Wegen der nicht-quadratischen Dimension von  $\mathbf{J}_3$  gilt es, eine linke Pseudoinverse  $\mathbf{J}_3^{L+} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  zu finden:

$$\mathbf{J}_3^{L+} \mathbf{J}_3 = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

sowie das linke Orthokomplement  $\mathbf{J}_3^{L\perp} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ :

$$\mathbf{J}_3^{L\perp} \mathbf{J}_3 = \mathbf{0}_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Da beide Matrizen nicht eindeutig sind, kann für ihre Bestimmung der folgende Ansatz

gewählt werden:

$$\mathbf{J}_3^{\text{L}+} = \left( \begin{pmatrix} J_{3,(1,1)} & J_{3,(1,2)} \\ J_{3,(2,1)} & J_{3,(2,2)} \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{0}_{2 \times 1} \right), \mathbf{J}_3^{\text{L}\perp} = \begin{pmatrix} J_{3,(2,1)}J_{3,(3,2)} - J_{3,(2,2)}J_{3,(3,1)} \\ -J_{3,(1,1)}J_{3,(3,2)} + J_{3,(1,2)}J_{3,(3,1)} \\ J_{3,(1,1)}J_{3,(2,2)} - J_{3,(1,2)}J_{3,(2,1)} \end{pmatrix}^T. \quad (4.20)$$

Durch Einsetzen der Komponenten von  $\mathbf{J}_3$  in (4.20) kann die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_3$  nach den Gleichungen (4.4) berechnet werden. Auf die konkrete Angabe dieser sowie der später vorgenommenen Parametrisierungen aller Systemgrößen wird aus Platz- und Praktikabilitätsgründen verzichtet und stattdessen auf das zu Beginn dieses Abschnitts 4.4 erwähnte Jupyter-Notebook verwiesen. Aus der Multiplikation der somit gefundenen Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_3$  mit den übrigen drei Systemgleichungen lassen sich entsprechend der Anforderungen an ihre Konstruktion anschließend die noch übrigen Eingangskomponenten  $\tau_3$  und  $\tau_4$  sowie die ersten beiden transformierten Systemgleichungen eliminieren.

Die letzte verbliebene Systemgleichung enthält folgende Menge  $\mathcal{M}$  an Systemgrößen und deren Ableitungen:

$$\mathcal{M} = \{p_1, p_2, p_3, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2, \ddot{p}_3, q_1, q_2\}. \quad (4.21)$$

In dieser Gleichung sind sowohl  $q_1$  als auch  $q_2$  rein algebraisch enthalten. Eine dieser beiden Größen kann also ebenso wie der Eingang  $\tau$  eliminiert werden. Die übrigen Systemgrößen bilden einen flachen Ausgang  $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$  oder alternativ  $\tilde{\mathbf{y}} = (p_1, p_2, p_3, q_2)^T$ .

Die zur Eliminierung umgeformten Systemgleichungen ermöglichen die Parametrisierung der Systemgrößen durch einen flachen Ausgang, welche durch sukzessives Umformen und ggf. ineinander Einsetzen der (transformierten) Systemgleichungen in umgekehrter Reihenfolge zur Elimination analog zu Abschnitt 4.3 erfolgt. Eine abschließende flache Parametrisierung aller Systemgrößen durch den flachen Ausgang  $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$  enthält folgende funktionale Zusammenhänge:

$$q_2 = \text{func}(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1) \quad (4.22a)$$

$$\tau_1 = \text{func}(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1, \ddot{q}_1) \quad (4.22b)$$

$$\tau_2 = \text{func}(p_1, \dot{p}_1, \ddot{p}_1, p_1^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_2, p_2^{(3)}, p_2^{(4)}, p_3, \dot{p}_3, \ddot{p}_3, p_3^{(3)}, p_3^{(4)}, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1) \quad (4.22c)$$

$$\tau_3 = \text{func}(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1) \quad (4.22d)$$

$$\tau_4 = \text{func}(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1). \quad (4.22e)$$

Die Symbolik `func` stellt in dieser Arbeit einen allgemeinen und nicht weiter spezifizierten funktionalen Zusammenhang dar, welcher sich bei jeder Erwähnung unterscheiden kann.

# Kapitel 5

## Steuerungs- und Regelungsentwurf

Auf Grundlage der Flachheitsanalyse des Brückenkransystems ist es im Folgenden möglich, Referenztrajektorien für einen flachen Ausgang aufzustellen, die Eingangsgrößen danach zu parametrisieren und eine Folgerelung dafür zu ermitteln.

### 5.1 Trajektorienplanung für den flachen Ausgang

Aufgabe der Trajektorienplanung ist es, Zeitverläufe des flachen Ausgangs vorzugeben, anhand derer später die Eingänge parametrisiert werden können, um eine Überführung des Kransystems zwischen zwei Ruhelagen zu ermöglichen. Für den real vorhandenen Versuchsstand gibt es bisher keine formal spezifizierten Grenzwerten für die Beschleunigungen oder die maximalen Geschwindigkeiten seiner Komponenten. Aus physikalischer beziehungsweise technischer Sicht ist es sinnvoll, eine Planung der Referenztrajektorien so vorzunehmen, dass die Stell- bzw. Eingangsgrößen des Systems stetig verlaufen.

Aufgrund der einfachen Vorgabe von Randbedingungen und Erfüllung von Differenzierbarkeitsbedingungen ist die Wahl eines polynombasierten Trajektorienansatzes sinnvoll. Aus der Flachheitsanalyse in Abschnitt 4.4 ist ersichtlich, dass für den flachen Ausgang  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$  der Eingang  $\tau_2 \stackrel{(4.22c)}{=} \text{func}(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots)$  die höchsten Ausgangsableitungen aufweist. Damit für die polynomialen Trajektorien außerdem aus den Ruhelagen  $(t_0, y_{i,0})$  ein stetig differenzierbarer Übergang der Eingangsgrößenverläufe (ohne Sprünge an den Rändern) in die Ruhelage  $(t_e, y_{i,e})$  gewährleistet

werden kann, müssen demnach folgende 36 Bedingungen erfüllt sein [11, S. 230]:

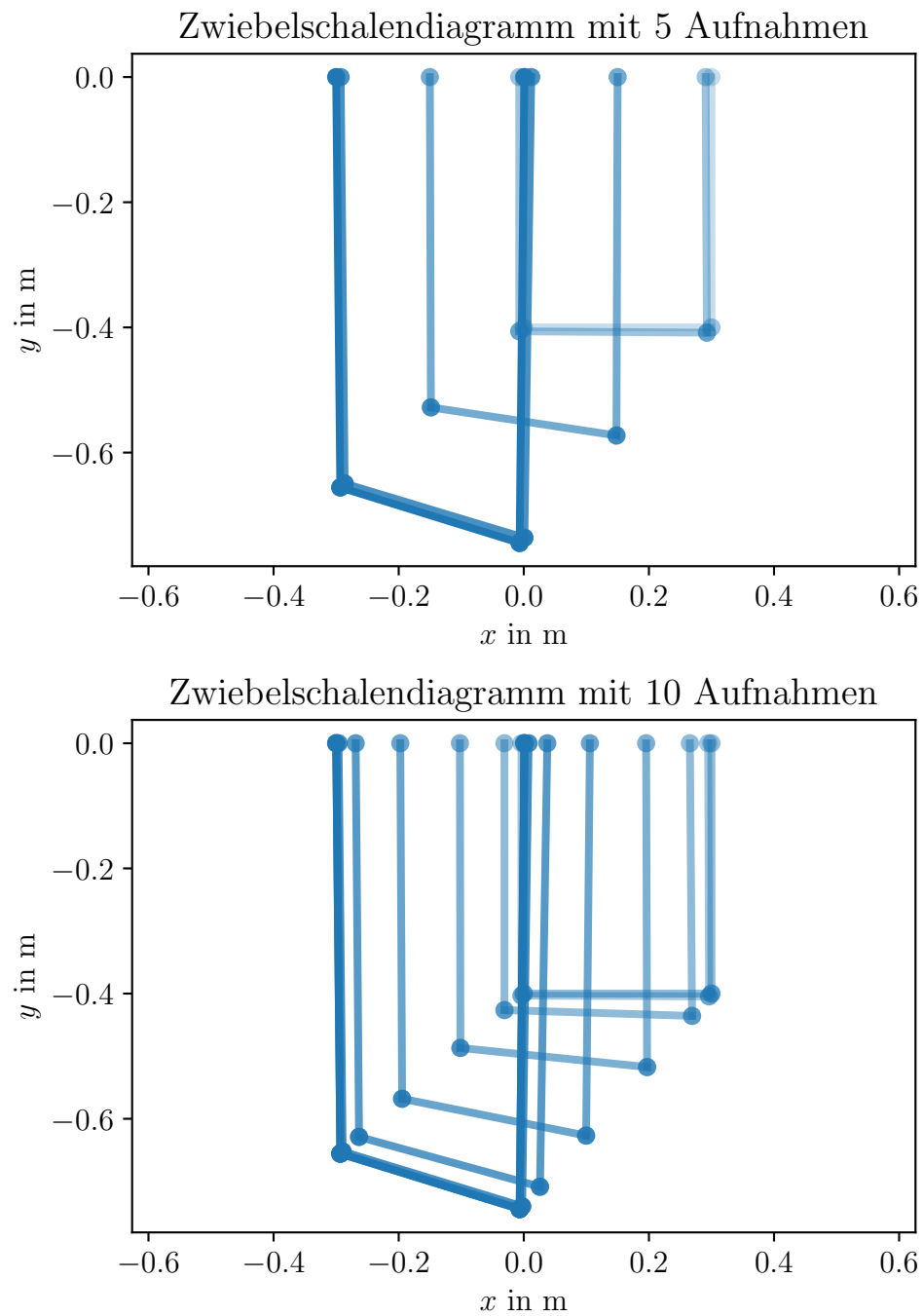
$$\begin{aligned}
 y_i(t_0) &= y_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \\
 y_i(t_e) &= y_{i,e} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \\
 \dot{y}_i(t_0) &= \ddot{y}_i(t_0) = y_i^{(3)}(t_0) = y_i^{(4)}(t_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \\
 \dot{y}_i(t_e) &= \ddot{y}_i(t_e) = y_i^{(3)}(t_e) = y_i^{(4)}(t_e) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \\
 \dot{y}_4(t_0) &= \ddot{y}_4(t_0) = 0 \\
 \dot{y}_4(t_e) &= \ddot{y}_4(t_e) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Es ergeben sich Ansatzfunktionen für die Trajektorien des flachen Ausgangs mit jeweiliger Ordnung  $N_i - 1$ , wobei  $N_i$  der Anzahl der Randbedingungen des jeweiligen Ausgangs entspricht:

$$\begin{aligned}
 y_i(t) &= a_{i,9}t^9 + a_{i,8}t^8 + \dots + a_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3; \quad t_0 < t < t_e \\
 y_4(t) &= a_{4,5}t^5 + a_{4,4}t^4 + \dots + a_{4,0} \quad \text{für } t_0 < t < t_e.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Die Koeffizienten der Trajektorien  $a_{i,j}$  können durch Einsetzen der Randbedingungen und Lösen des resultierenden linearen Gleichungssystems bestimmt werden. In der Simulation wurde als Implementierung dafür die Funktion `condition_poly` der Bibliothek `symbtools` verwendet.

Die Zwiebschalendiagramme in Abbildung 6 zeigen eine geometrische Veranschaulichung prototypischer Solltrajektorien des Doppelkransystems zwischen zwei Ruhelagen. Dabei ist die Bewegung der vier Gelenke sowie der beiden Seile und der Last dargestellt.



**Abbildung 6** – Zwiebelschalendiagramme der geplanten Sollbewegung der vier Gelenke sowie der beiden Seile und der Last für prototypische Trajektorien des Doppelkransystems bei der Überführung zwischen zwei Ruhelagen. Für spätere Simulationszeitpunkte sind diese Momentaufnahmen der Konfiguration des Doppelkransystems dunkler dargestellt.

## 5.2 Trajektorienfolgeregelung

### 5.2.1 Vektorieller relativer Grad

Ein Ansatz zur Steuerung und Folgeregelung nichtlinearer Systeme fußt auf dem Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung. Dabei erfolgt im Folgenden eine Definition des sogenannten vektoriellen relativen Grades, der die Möglichkeit bietet, Aussagen über die Entkopplung der Nichtlinearitäten zwischen den Ein- und Ausgängen von Mehrgrößensystemen zu treffen.

Es wird zunächst ein allgemeines Mehrgrößensystem mit  $m$  Eingangskomponenten  $u_1, \dots, u_m$  und  $m$  Ausgangskomponenten  $y_1, \dots, y_m$  betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (5.3)$$

Dabei gelte für den Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  sowie für die Vektorfelder  $\mathbf{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{h} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$  und die Matrix  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , wobei  $\mathcal{M}$  eine offene Teilmenge  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  repräsentiert. Dieses System hat an der Stelle  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{M}$  den vektoriellen relativen Grad  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$ , falls [11, S. 194]:

1. Die Lie-Ableitungen  $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\mathbf{x}$  aus einer Umgebung von  $\boldsymbol{\gamma}$  sowie für alle  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  und  $k \in \{0, \dots, r_i - 2\}$  und
2. die sogenannte Entkopplungsmatrix

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

im Punkt  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}$  regulär ist.

Wenn diese Matrix regulär ist, dann gibt es einen Vektor von Ausgangsableitungen wie bei der statischen Rückführung in Gleichung (5.6) aufgezeigt, der sich nach allen Eingangskomponenten auflösen lässt. Die Regularität der Entkopplungsmatrix ist allerdings keineswegs selbstverständlich. Im Fall einer Singularität ist der vektorielle relative Grad an dieser Stelle nicht wohldefiniert.

### 5.2.2 Statische Rückführung

Ein vergleichsweise einfacher systematischer Ansatz zum Entwurf einer Folgeregelung entlang einer Referenztrajektorie ist die statische Rückführung gemessener Zustandskomponenten. Die Umsetzbarkeit dieses Ansatzes hängt allerdings von der Wohldefiniertheit des vektoriellen relativen Grades ab.

Durch die Rückkopplung gemessener Zustandskomponenten soll eine Stabilisierung des Systems und Folgeregelung entlang der Referenztrajektorien erreicht werden. Bei der statischen Rückführung wird ein System mit dem Eingangs-Ausgangs-Verhalten

$$\mathbf{y}^{(r)} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) = (L_{\mathbf{f}}^{r_1}h_1(\mathbf{x}), \dots, L_{\mathbf{f}}^{r_m}h_m(\mathbf{x}))^T \quad (5.5)$$

betrachtet. Wenn die Entkopplungsmatrix entsprechend der Definition des vektoriellen relativen Grades regulär und damit invertierbar ist, kann die nichtlineare Eingangs-Ausgangs-Verkopplung durch eine statische (Zustands-)Rückführung

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u} \stackrel{!}{=} \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})) \quad (5.6)$$

unter Nutzung eines virtuellen Eingangs  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)^T$  kompensiert werden. Eine lineare Eingangs-Ausgangs-Dynamik wird erreicht. Der neue virtuelle Eingang kann dann in einem zweiten Entwurfsschritt so gewählt werden, dass der Trajektorienfolgefehler einer asymptotisch stabilen DGL genügt, siehe Abschnitt 5.2.3. [11, S. 195]

Bei dem vorliegenden Doppelkransystem kann durch Zeitableitungen der jeweiligen Komponente des flachen Ausgangs  $y_i$  die damit korrespondierende Komponente des relativen Grades  $r_i$  bestimmt werden. Diese entspricht der Ableitungsordnung, bei der das erste mal *eine* Komponente des Eingangs  $\mathbf{u} := \boldsymbol{\tau}$  explizit auftritt. Hierbei werden die Zeitableitungen des Ausgangs durch Lie-Ableitungen entlang des Vektorfelds des Zustandsraummodells des Systems

$$\boldsymbol{\delta} := \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} + \mathbf{g}\boldsymbol{\tau}, \quad (5.7)$$

welches in Gleichung (3.36) bestimmt wurde, rekursiv erzeugt:

$$y_i^{(k)} = L_{\boldsymbol{\delta}} y_i^{(k-1)}. \quad (5.8)$$

In Tabelle 2 sind die daraus bestimmten relativen Grade sowie die dabei explizit auftretenden Eingänge aufgelistet.

**Tabelle 2** – Relative Grade der Ausgänge und explizites Auftreten der Eingänge.

Index $i$	1	2	3	4
Komponente des vektoriellen relativen Grades $r_i$	2	2	2	2
explizites Auftreten von $\tau_j$ bei $y_i^{(r_i)}$	$\tau_3, \tau_4$	$\tau_3, \tau_4$	$\tau_3, \tau_4$	$\tau_1, \tau_3$
$y_j^{(k)}$ mit minimalem $k$ , bei dem $\tau_i$ zuerst auftritt	$y_4^{(2)}$	$y_{1,2,3}^{(4)}$	$y_{1,2,3,4}^{(2)}$	$y_{1,2,3}^{(2)}$

Das Fehlen von  $\tau_2$  bei all diesen Ausgangsableitungen bedeutet für die Entkopplungsmatrix  $\mathbf{\Lambda}$  gemäß Gleichung (5.4) eine Singularität, weil die zugehörige Spalte nur

Nulleinträge enthält:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Der einzige von Null verschiedene Eintrag in der zweiten Spalte  $\mathbf{g}_2$  der Eingangsmatrix  $\mathbf{g}$  erfolgt nämlich durch  $g_{10,2} = \frac{1}{m_3}$  und die Lie-Ableitungen  $L_{\mathbf{f}} y_i = \dot{y}_i$  geben nur die zeitliche Ableitung des flachen Ausgangs  $\dot{\mathbf{y}} = (\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{q}_1)^T$  wieder. So folgt für das relevante Produkt  $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} L_{\mathbf{f}} y_i \cdot g_{10,2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \dot{y}_i \cdot g_{10,2} = 0$  für  $i = 1, \dots, 4$ , weil  $\dot{q}_2 \notin \dot{\mathbf{y}}$ . Allgemeiner gilt, dass ein Eingang  $\tau_j$  in den Komponenten der Ausgangsableitung  $y_i^{(r_i)}$  genau dann nicht explizit auftritt, also die  $j$ -te Spalte von  $\mathbf{\Lambda}$  eine Nullspalte ist, wenn für alle zugehörigen gemischten Lie-Ableitungen  $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} y_i = 0$  mit  $i = 1, \dots, m$  gilt. [11, S. 201]

Analog gilt dies für den alternativen flachen Ausgang  $\tilde{\mathbf{y}} = (p_1, p_2, p_3, q_2)^T$  aufgrund des Fehlens von  $\tau_1$ , welches eine erste Nullspalte von  $\mathbf{\Lambda}$  impliziert.

Daher ist die Entkopplungsmatrix  $\mathbf{\Lambda}$  in dieser Form nie regulär und der vektorielle relative Grad  $\mathbf{r}$  nie wohldefiniert. Das Doppelkransystem ist in dieser Eingangs-Ausgangskonfiguration also nicht statisch eingangs-ausgangs-linearisierbar. Stattdessen wird zur Regelung des Doppelkransystems ein Ansatz mit einer dynamischen Erweiterung oder quasi-statischen Zustandsrückführung verfolgt.

### 5.2.3 Zustandsrückführung aus Fehlerdynamik

Nicht nur bei der statischen Rückführung sondern nach jeglicher Kompensation der Nichtlinearitäten ist die Wahl einer Stabilisierung bezüglich der Abweichung von der Referenztrajektorie vorzunehmen.

Nach [11, S. 195] kann eine lineare Fehlerdynamik bezüglich des Trajektorienfolgefehlers  $e_i := y_i - y_{i,\text{ref}}$  mit dem Messwert bzw. simuliertem Wert  $y_i$  und dem Wert der Referenztrajektorie  $y_{i,\text{ref}} = \text{func}(t)$ . In der Literatur wird an dieser Stelle lediglich die Abweichung bezüglich eines Festwerts  $y_{i,\text{ref}} = \text{const.}$  angesetzt. Damit können auch die Komponenten des virtuellen Eingangs gewählt werden:

$$e_i^{(r_i)} + c_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)} + \dots + c_{i,1} \dot{e}_i + c_{i,0} e_i = 0 \quad (5.10)$$

$$\Leftrightarrow v_i = y_i^{(r_i)} = y_{i,\text{ref}}^{(r_i)} - c_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)} - \dots - c_{i,1} \dot{e}_i - c_{i,0} e_i. \quad (5.11)$$

Die Koeffizienten  $c_{i,k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, r_i - 1$  sind für eine Stabilisierung des Systems so zu wählen, dass das charakteristische Polynom dieser Gleichung ausschließlich Nullstellen



mit negativem Realteil aufweist. Die konkrete Wahl der Koeffizienten bzw. der Nullstellen stellt einen Entwurfsfreiheitsgrad dar.

### 5.2.4 Dynamische Erweiterung

Eine Implementierung der in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen ist unter [18, flatness\_notebooks/ODE\_flatness\_trajectory\_control\_simulation\_dyn.ipynb] zu finden.

Die in (5.9) berechnete Entkopplungsmatrix  $\mathbf{\Lambda}$  hat eine Nullspalte, weil  $\tau_2$  in keiner Ableitung der Ausgangskomponenten  $y_i^{(r_i)}$  explizit auftritt. Somit gilt  $\text{rang } \mathbf{\Lambda} =: k = 3 < m = 4$ . Um durch eine andere Definition der Eingänge eine reguläre Entkopplungsmatrix  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$  zu erhalten, muss also verhindert werden, dass die drei sonstigen Eingangskomponenten  $\tau_1$ ,  $\tau_3$  und  $\tau_4$  in allen Ausgangsableitungen bereits bei der Ableitungsordnung 2 auftreten. Tabelle 2 kann entnommen werden, dass  $\tau_2$  das erste Mal in einer der Ausgangsableitungen der Ordnung 4 von  $y_1$ ,  $y_2$  oder  $y_3$  auftritt. Daher ist eine Ergänzung aller  $k = 3$  Eingangskomponenten außer  $\tau_2$  um jeweils zwei Integratoren vorzunehmen. [11, S. 200]

Das Zustandsraummodell wird um folgende definitorische Gleichungen erweitert:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &:= \dot{\tau}_1 \\ \alpha_3 &:= \dot{\tau}_3 \\ \alpha_4 &:= \dot{\tau}_4.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Als neuer Systemeingang wird unter Umsortierung der Komponente  $\tau_2$  an die letzte Stelle analog zu [11, S. 201]:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} := (\beta_1, \beta_3, \beta_4, \tau_2)^T\tag{5.13}$$

gewählt. Der Zustandsvektor wird auf

$$\tilde{\mathbf{x}} := (\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)^T\tag{5.14}$$

erweitert. Physikalisch bleibt das System allerdings unverändert. Einzig die Berechnung der Stellgrößen dieser Komponenten wird angepasst, indem nicht die jeweiligen Kräfte sondern ihre zweiten Zeitableitungen vorgegeben werden. So treten die neuen Eingangskomponenten ebenso wie  $\tau_2$  das erste mal bei der Ableitungsordnung 4 explizit auf. Es ergeben sich weiterhin folgende dynamische Gleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &=: \beta_1 \\ \dot{\alpha}_3 &=: \beta_3 \\ \dot{\alpha}_4 &=: \beta_4.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Die Ausgangsableitungen werden analog zu den Gleichungen (5.7) und (5.8) rekursiv über Lie-Ableitungen entlang der erweiterten Zustandsgleichungen

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}(\tilde{\mathbf{x}}) := \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\boldsymbol{\tau}}\tag{5.16}$$

mit

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}} := (\boldsymbol{\delta}, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_3, \beta_4)^T, \quad \tilde{\mathbf{f}} := \tilde{\boldsymbol{\delta}}|_{\tilde{\tau}=0}, \quad \tilde{\mathbf{g}} := \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\partial \tilde{\tau}} \quad (5.17)$$

gebildet.

Für dieses modifizierte System folgt somit  $r_i = 4$  für  $i = 1, \dots, 4$ . Dieser relative Grad ist bei der simulativen Untersuchung mit einer Auswahl prototypischer Referenztrajektorien stets wohldefiniert<sup>1</sup>, da Bedingung 1 aus Abschnitt 5.2.1 erfüllt ist und die Inverse der dynamisch erweiterten Entkopplungsmatrix (\* repräsentieren Einträge verschieden von Null)

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

existiert,  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$  also regulär ist. Dementsprechend ist eine Zustandsrückführung nach Gleichung (5.6) bezüglich des dynamisch erweiterten Systems mit  $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ -Größen möglich. Diese wird aufgrund der drei neu eingeführten Doppelintegratoren vor den ursprünglichen Systemeingängen als dynamische Rückführung bezeichnet. Eine Veranschaulichung der dynamischen Erweiterung dieses Systems erfolgt in Abbildung 7.

Ein Nachteil der dynamischen Rückführung ist die höhere „Trägheit“ des Systems beim Ausregeln von Abweichungen von der Solltrajektorie, welche durch die zusätzlichen Integratoren vor den physikalischen Systemeingängen hervorgerufen werden. So ist es notwendig, die Pole der Fehlerdynamik für ein schnelles Ausgleichen von Anfangsfehlern relativ weit links in der komplexen Ebene zu platzieren. Zudem ergeben sich sehr lange Simulationsdauern, welche auch aus den relativ komplexen Stellgesetzen mit mehr als 20 000 Operationen je Eingangsgröße folgen.

Auf die konkrete symbolische Angabe der Stellgesetze des Systemeingangs wird aus Platz- und Praktikabilitätsgründen verzichtet und stattdessen auf das zu Beginn dieses Teilabschnitts 5.2.4 erwähnte Jupyter-Notebook verwiesen. Übersichtlicher ist an dieser Stelle eine Angabe von funktionalen Abhängigkeiten:

$$\beta_1 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)}) \quad (5.19a)$$

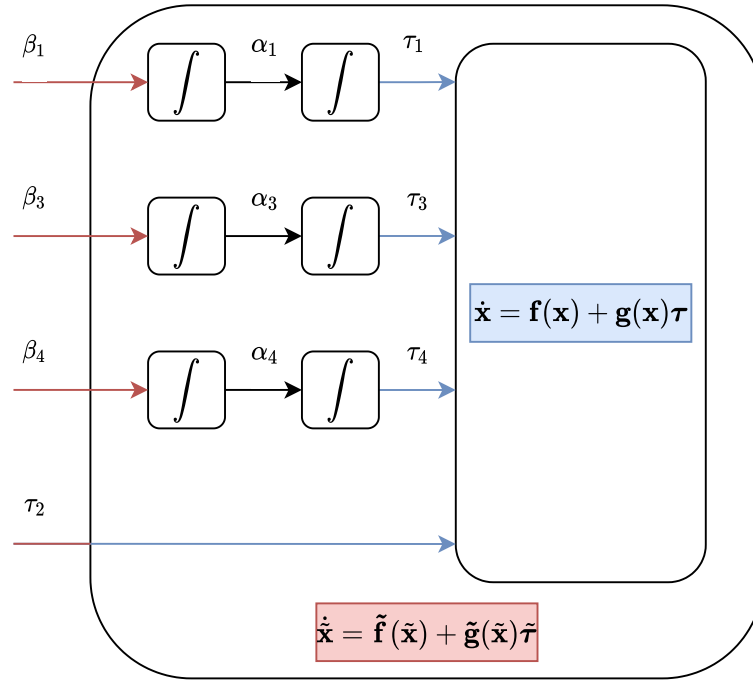
$$\beta_3 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)}) \quad (5.19b)$$

$$\beta_4 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)}) \quad (5.19c)$$

$$\tau_2 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)}). \quad (5.19d)$$

Der neue Eingang  $\boldsymbol{\beta}$  hängt statisch vom alten Eingang  $\boldsymbol{\tau}$  ab. Dies kann wie aus der Doppelintegratorstruktur in Abbildung 7 ersichtlich als Rückführung von  $\boldsymbol{\tau}$  interpretiert werden und ist somit Teil die dynamischen Regelung.

<sup>1</sup>In dieser Arbeit erfolgt keine fundierte mathematische Untersuchung der Regularität von  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$  beispielsweise auf Basis ihrer Determinante. Ob es physikalisch „sinnvolle“ Zustände des Systems gibt, bei dem  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$  singulär wird, stellt einen relevanten Gegenstand weiterer Untersuchungen dar.

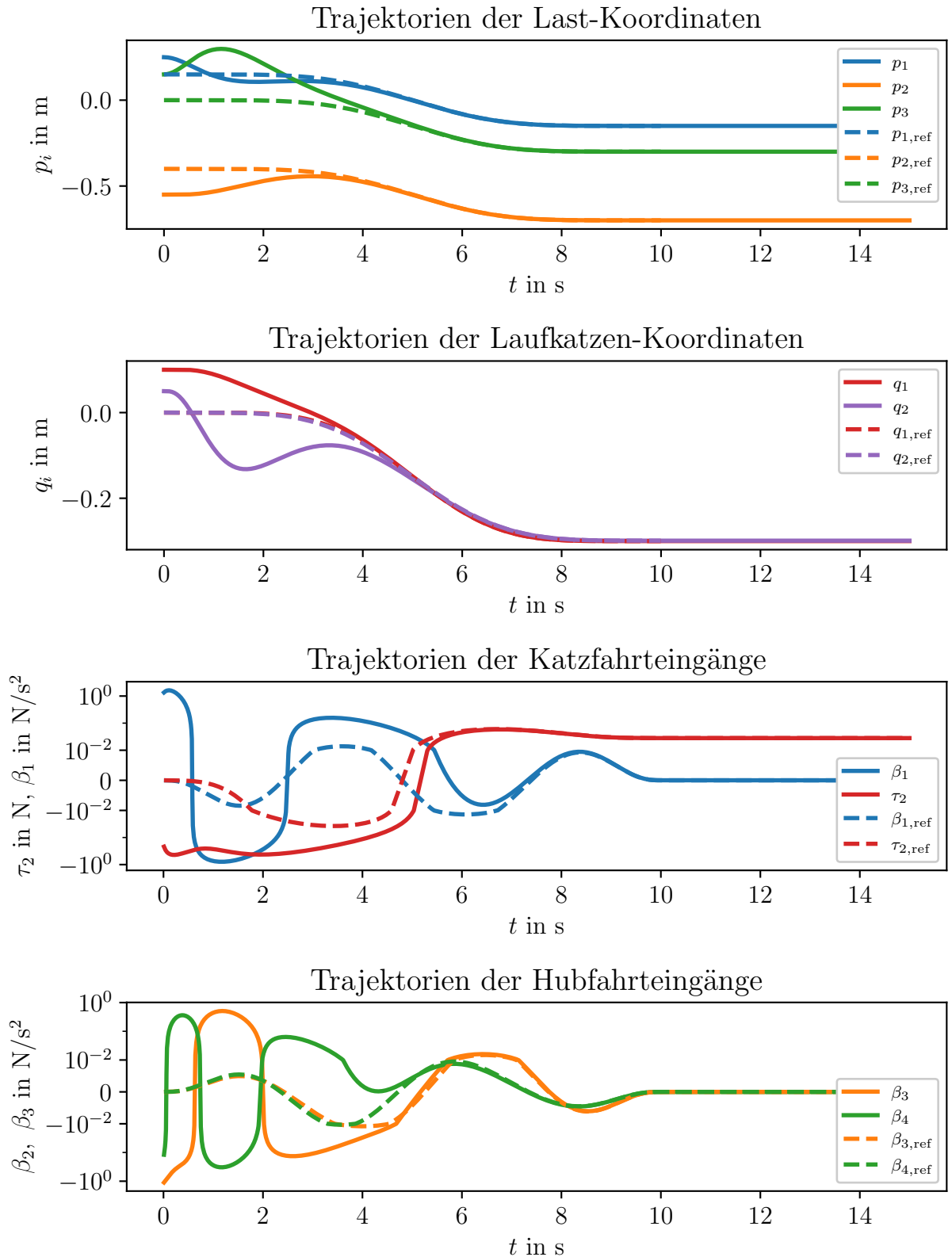


**Abbildung 7** – Schematische Darstellung der dynamischen Erweiterung des Doppellkransystems.

Prototypische Trajektorien beim Übergang zwischen zwei Ruhelagen mit einem auszuregelnden Anfangsfehler sind in Abbildung 8 dargestellt. Diese Simulation bestätigt, dass mittels der dynamischen Rückführung eine akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei fehlerbehafteter Kenntnis der initialen Systemzustände erreicht werden kann. Ermöglicht wird dies durch die Vorschaltung jeweils eines Doppelintegrators vor die Eingangskomponenten  $\tau_1$ ,  $\tau_3$  und  $\tau_4$ , so dass sich im Gegensatz zur statischen Rückführung eine invertierbare Entkopplungsmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  ergibt.

### Anpassung der Trajektorienplanung

Durch die Einführung von jeweils zwei Integratoren nach den neuen Stellgrößen  $\beta_1$ ,  $\beta_3$  und  $\beta_4$  ist an beide Rändern jeder Referenztrajektorie der flachen Ausgangskomponenten  $y_i$  auch eine um jeweils zwei Ordnungen höhere Forderung an die stetige Differenzierbarkeit zu stellen. Das Vorgehen nach Abschnitt 5.1 kann erneut analog durchgeführt werden mit jeweils um vier Ordnungen höheren Polynomen der Ausgangstrajektorien in den Gleichungen (5.2).



**Abbildung 8** – Prototypische Trajektorien des Doppelkransystems bei der Überführung zwischen zwei Ruhelagen unter der Ausregelung von Anfangsfehlern über die dynamische Erweiterung. Koordinatenbezeichnung entsprechend Abbildung 5. Teilweise nichtlineare Achseneinteilung aufgrund verschiedener Größenordnungen in Referenz- und Isttrajektorien wegen Anfangsfehlern.

### 5.2.5 Quasi-statische Rückführungen

Eine Implementierung der in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen ist unter [18, flatness\_notebooks/ODE\_flatness\_trajectory\_control\_simulation\_qstat.ipynb] zu finden.

Ebenso wie die dynamische Erweiterung in Abschnitt 5.2.4 kann eine quasi-statische Zustandsrückführung bei einem nicht wohldefinierten relativen vektoriellen Grad im statischen Ansatz entsprechend Abschnitt 5.2.2 zur Stabilisierung des Systems angesetzt werden. Dafür wird das Vorgehen nach [11, S. 206] im Folgenden nachvollzogen und am Doppelkransystem angewendet. Dabei ergeben sich Unterschiede bzw. in der Literatur nicht betrachtete Situationen, so dass die Vorgehensweise an einigen Stellen angepasst werden muss oder nur sinngemäß angewendet werden kann.

Tabelle 3 gibt die Ableitungsordnung  $k_{i,j}$  der Ausgangskomponente  $y_i$  an, bei der die Eingangskomponente  $\tau_j$  mit  $i, j = 1, \dots, 4$  (erstmal) auftritt<sup>2</sup>.

**Tabelle 3** – Ableitungsordnung  $k_{i,j}$  für das Auftreten des Eingangs  $\tau_j$  beim Ausgang  $y_i$ .

	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$
$y_1^{(k_{1,j})}$	4	4	2	2
$y_2^{(k_{2,j})}$	4	4	2	2
$y_3^{(k_{3,j})}$	4	4	2	2
$y_4^{(k_{4,j})}$	2	>4	2	4

Erneut wird o. B. d. A. der flache Ausgang  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$  betrachtet. Die zeitlichen Ausgangsableitungen können wieder rekursiv gemäß Gleichung (5.8) mittels Lie-Ableitungen bezüglich des hierfür erweiterten Zustandsvektors  $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\tau}})^T$  entlang des Vektorfelds der Zustandsgleichungen  $\bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{g}}\bar{\boldsymbol{\tau}}$  mit

$$\bar{\boldsymbol{\delta}} := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{g}}\bar{\boldsymbol{\tau}} \\ \dot{\boldsymbol{\tau}} \\ \ddot{\boldsymbol{\tau}} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

(sowie  $\bar{\mathbf{f}}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}$  analog zu (5.17)) generiert werden.

Die Eingangskomponente  $\tau_3$  tritt in der zweiten Ableitung jeder Komponente des flachen Ausgangs auf. Dadurch müssten die Komponenten des relativen Grades alle den Wert  $r_i = 2$  haben. Aus Abschnitt 5.2.2 ist allerdings bekannt, dass der relative vektorielle Grad für  $r_i = 2$  für  $i = 1, \dots, 4$  nicht wohldefiniert ist. Außerdem tritt  $\tau_4$  auch bei  $r_3 = 2$  in  $\ddot{y}_1$ ,  $\ddot{y}_2$  und  $\ddot{y}_3$ , nicht aber in  $\ddot{y}_4$  auf. Dies entspricht nicht der in [11, S. 206] dargestellten

<sup>2</sup>Bei dieser Untersuchung wurden im CAS nur Ausgangsableitungen bis zur vierten Ordnung gebildet. Bis dahin trat die Eingangskomponente  $\tau_2$  in  $y_4^{(k_{4,j})}$  nicht auf. Aus Aufwandsgründen wurde auf die Bildung höherer Ableitungen verzichtet.

Form, bei der für das Auftreten von  $u_2$  der Ausgang  $y_2$  noch weiter differenziert werden muss. Trotzdem wird das in der Literatur beschriebene Vorgehen anschließend weiter verfolgt. Die Eingangsgröße  $\tau_2$  erscheint das erste Mal explizit bei  $r_i = 4$  in  $y_1^{(4)}$ ,  $y_2^{(4)}$  oder  $y_3^{(4)}$ ,  $\tau_1$  zuerst bei  $r_4 = 2$  in  $\ddot{y}_4$ . Demnach treten die Eingangskomponenten nicht gestaffelt entsprechend einer Dreiecksstruktur auf wie in [11, S. 207] angedeutet.

Auf Basis der Ausgangsableitungen  $y_i^{(r_i)}$  wird eine Linearisierung des Systems durch Rückführung entsprechend Abschnitt 5.2.2 angesetzt, allerdings können in diesem quasi-statischen Fall auch Eingangsableitungen in den neuen virtuellen Eingängen  $v_i$  auftreten:

$$\ddot{y}_1 = \ddot{p}_1 =: v_1 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_3, \tau_4) \quad (5.21a)$$

$$y_2^{(4)} = p_2^{(4)} =: v_2 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \dot{\tau}_3, \dot{\tau}_4, \ddot{\tau}_3, \ddot{\tau}_4) \quad (5.21b)$$

$$\ddot{y}_3 = \ddot{p}_3 =: v_3 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_3, \tau_4) \quad (5.21c)$$

$$\ddot{y}_4 = \ddot{q}_1 =: v_4 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3). \quad (5.21d)$$

Daraus ist ersichtlich, dass durch ein Gleichungssystem aus (5.21a), (5.21c) und (5.21d), in denen die Eingangskomponenten  $\tau_1$ ,  $\tau_3$  und  $\tau_4$  affin auftreten, eine explizite Darstellung dieser Komponenten möglich ist. Auch hier besteht ein Unterschied zur Situation in [11, S. 207], bei der die relativen Grade der Ausgangskomponenten aufsteigend sind. Dabei muss kein Gleichungssystem gelöst werden, sondern es genügt das sukzessive Einsetzen der vorher berechneten Eingänge und die algebraische Umformung der abgeleiteten Ausgänge. Dieser Unterschied bedeutet also einen Mehraufwand durch die Lösung eines Gleichungssystems in dieser Arbeit.

Das Auflösen von Gleichung (5.21b) nach  $\tau_2$  erfordert einen größeren Aufwand als bei den anderen Eingangskomponenten. Zusammen mit den Gleichungen (5.21a) und (5.21c) ist ersichtlich, dass dafür auch Ableitungen der Eingangskomponenten  $\tau_3$  und  $\tau_4$  und somit auch des neuen Eingangs  $\mathbf{v}$  gebildet werden müssen. Diese können analog zu Gleichung (5.8) aus den Lie-Ableitungen entlang  $\bar{\delta}$  generiert werden. Es folgt ein relativ umfangreicher Ausdruck für

$$\tau_2 = \text{func}(\mathbf{x}, v_1, v_2, v_3, v_4, \dot{v}_1, \dot{v}_3, \ddot{v}_1, \ddot{v}_3), \quad (5.22)$$

der mehr als einhunderttausend Rechenoperationen enthält.

Nach [11, S. 208] können lineare Fehlerdynamiken und daraus  $\mathbf{v}$  entsprechend der jeweiligen relativen Grade der Ausgangskomponenten zur Stabilisierung des Systems angesetzt werden. Die Komponenten des virtuellen Eingangs  $v_1$ ,  $v_3$  und  $v_4$  sind jeweils nur von den Zustandskomponenten  $\bar{\mathbf{x}}$  abhängig. Die Komponente  $v_2$  hängt allerdings auch von den Ableitungen  $\ddot{y}_2 = \ddot{p}_2$  und  $y_2^{(3)} = p_2^{(3)}$  ab, welche durch Lie-Ableitungen berechnet werden können:

$$\begin{aligned} \ddot{p}_2 &= \ddot{y}_2 = L_{\bar{\delta}} \dot{y}_2 = L_{\bar{\delta}} \dot{p}_2 = \text{func}(\mathbf{x}, v_1, v_3) \\ p_2^{(3)} &= y_2^{(3)} = L_{\bar{\delta}} \ddot{p}_2 = \text{func}(\mathbf{x}, v_1, v_3, \dot{v}_1, \dot{v}_3). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Außerdem werden nach Gleichung (5.22) in der Darstellung von  $\tau_2$  Ableitungen der Eingangskomponenten  $v_1$  und  $v_3$  benötigt. Für diese können Fehlerdynamiken zweiter Ordnung wie in Gleichung (5.10) angesetzt werden:

$$\ddot{e}_i + c_{i,1}\dot{e}_i + c_{i,0}e_i = 0 \quad (5.24a)$$

$$\stackrel{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} e_i^{(3)} + c_{i,1}\ddot{e}_i + c_{i,0}\dot{e}_i = 0 \quad (5.24b)$$

$$\stackrel{(5.24a)}{\Rightarrow} e_i^{(3)} + c_{i,1}(-c_{i,1}\dot{e}_i - c_{i,0}e_i) + c_{i,0}\dot{e}_i = 0 \quad (5.24c)$$

$$\Leftrightarrow e_i^{(3)} - c_{i,1}^2\dot{e}_i + c_{i,0}\dot{e}_i - c_{i,0}c_{i,1}e_i = 0 \quad (5.24d)$$

$$\Leftrightarrow e_i^{(3)} + (c_{i,0} - c_{i,1}^2)\dot{e}_i - c_{i,0}c_{i,1}e_i = 0 \quad (5.24e)$$

$$\stackrel{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} e_i^{(4)} + (c_{i,0} - c_{i,1}^2)\ddot{e}_i - c_{i,0}c_{i,1}\dot{e}_i = 0 \quad (5.24f)$$

$$\stackrel{(5.24a)}{\Rightarrow} e_i^{(4)} + (c_{i,0} - c_{i,1}^2)(-c_{i,1}\dot{e}_i - c_{i,0}e_i) - c_{i,0}c_{i,1}\dot{e}_i = 0 \quad (5.24g)$$

$$\Leftrightarrow e_i^{(4)} + (c_{i,1}^3 - 2c_{i,0}c_{i,1})\dot{e}_i + (c_{i,0}c_{i,1}^2 - c_{i,0}^2)e_i = 0. \quad (5.24h)$$

Somit können die Ableitungen  $\dot{v}_i$  und  $\ddot{v}_i$  für  $i = 1, 3$  aus der Definition des Trajektorienfolgefehlers  $e_i = y_i - y_{i,\text{ref}}$  gebildet werden:

$$\stackrel{(5.24e)}{\Rightarrow} \dot{v}_i = y_i^{(3)} = y_{i,\text{ref}}^{(3)} - (c_{i,0} - c_{i,1}^2)\dot{e}_i + c_{i,0}c_{i,1}e_i \quad (5.25a)$$

$$\stackrel{(5.24h)}{\Rightarrow} \ddot{v}_i = y_i^{(4)} = y_{i,\text{ref}}^{(4)} - (c_{i,1}^3 - 2c_{i,0}c_{i,1})\dot{e}_i - (c_{i,0}c_{i,1}^2 - c_{i,0}^2)e_i. \quad (5.25b)$$

Zur weiteren Stabilisierung wird für die Komponente  $v_2$  ein Ansatz vierter Ordnung unter Einbeziehung des Zusammenhangs (5.23) gewählt:

$$v_2 = y_2^{(4)} = y_{2,\text{ref}}^{(4)} - c_{2,3}(y_2^{(3)} - y_{2,\text{ref}}^{(3)}) - c_{2,2}(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_{2,\text{ref}}) - c_{2,1}(\dot{y}_2 - \dot{y}_{2,\text{ref}}) - c_{2,0}(y_2 - y_{2,\text{ref}}). \quad (5.26)$$

Auf die konkrete symbolische Angabe der Stellgesetze wird aus Platz- und Praktikabilitätsgründen verzichtet und stattdessen auf das zu Beginn dieses Abschnitts 5.2.5 erwähnte Jupyter-Notebook verwiesen. Übersichtlicher ist an dieser Stelle eine Angabe von funktionalen Abhängigkeiten:

$$\tau_1 = \text{func}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}) \quad (5.27a)$$

$$\tau_2 = \text{func}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)}) \quad (5.27b)$$

$$\tau_3 = \text{func}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}) \quad (5.27c)$$

$$\tau_4 = \text{func}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}). \quad (5.27d)$$

Bei der simulativen Untersuchung dieses Ansatzes ergibt sich bereits im reinen Vorsteuerungsfall, also ohne Anfangsfehler oder Störungen des Systems, ein Problem mit Singularitäten in den berechneten Stellgrößen. Wenn im Stellgesetz allerdings nicht alle Zustandskomponenten  $\mathbf{x}$  vorkommen, sondern nur diejenigen, welche auch Teil des flachen Ausgangs  $\mathbf{y}$  und seiner Ableitungen sind, treten keine Singularitäten auf. Eine Simulation oder gar Implementierung dieses Regelungsansatzes ist daher erschwert und kann erst weiter verfolgt werden, wenn dieses Problem gelöst ist.

### Singularitäten in der Nähe von Ruhelagen

In allen Eingangskomponenten treten bei diesem quasi-statischen Rückführungsentwurf in der Nähe von Ruhelagen Singularitäten auf. Diese ergeben sich auf Grund von Artefakten der symbolischen Berechnungen. Beim Einsetzen einer zuvor ermittelten Ruhelage entstehen Definitionslücken: Sowohl der Zähler als auch der Nenner in der symbolischen Darstellung des Eingangs  $\tau$  werden Null. Die CAS-Bibliothek SymPy bietet mittels des Aufrufs `simplify` allerdings keine Lösung dieses Problems in den Eingangsgrößen. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese Lücken durch algebraische Manipulation hebbar sind. Allerdings ist eine weitere händische Untersuchung dieses Zusammenhangs mit hohem Aufwand verbunden und wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt. Für eine weitere Analyse dieses Problems eignen sich die einfacheren Terme des Nenners  $N_{1,3,4}$  von  $\tau_1$ ,  $\tau_3$  und  $\tau_4$ :

$$\begin{aligned} N_{1,3,4} = & s_2(-4l_0pm_1 \sin(pm_3) + 2l_0pm_2 \cos(pm_3) + 4l_0qm_1 \sin(pm_3) + l_0s_2 \sin(2pm_3) \\ & + 4pm_1^2 \sin(pm_3) - 4pm_1pm_2 \cos(pm_3) - 4pm_1qm_1 \sin(pm_3) - 4pm_1qm_2 \sin(pm_3) \\ & + 2pm_2qm_1 \cos(pm_3) + 2pm_2qm_2 \cos(pm_3) + 4qm_1qm_2 \sin(pm_3) - qm_1s_2 \sin(2pm_3) \\ & + qm_2s_2 \sin(2pm_3)). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Des Weiteren ist die Fragestellung von Interesse, weshalb sich solche Lücken bei der Konstruktion der Trajektorie in den Ruhelagen ergeben und ob sie sich systematisch verhindern lassen.

### 5.2.6 Exact feedforward linearization

Eine Implementierung der in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen ist unter [18, flatness\_notebooks/ODE\_flatness\_trajectory\_control\_simulation.ipynb] zu finden.

Bei der exact feedforward linearization wird, im Unterschied zur exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung, die Nichtlinearität nicht mittels Rückführung der gemessenen beziehungsweise simulierten Zustandskomponenten  $\mathbf{x}$  kompensiert, sondern an deren Stelle die Referenztrajektorie  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  eingesetzt [6].

Heuristisch wird eine Fehlerdynamik der Ordnung zwei für alle Komponenten des Koordinatenvektors  $\boldsymbol{\theta} = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2)^T$  (nicht nur solchen, die auch Teil des flachen Ausgangs sind) angesetzt:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}. \quad (5.29)$$

Aus der Zusammensetzung des Zustandsvektors  $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T$  und der eingangsaffinen Zustandsraumdarstellung in Gleichung (5.3) kann außerdem der Zusammenhang

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\tau} \quad (5.30)$$



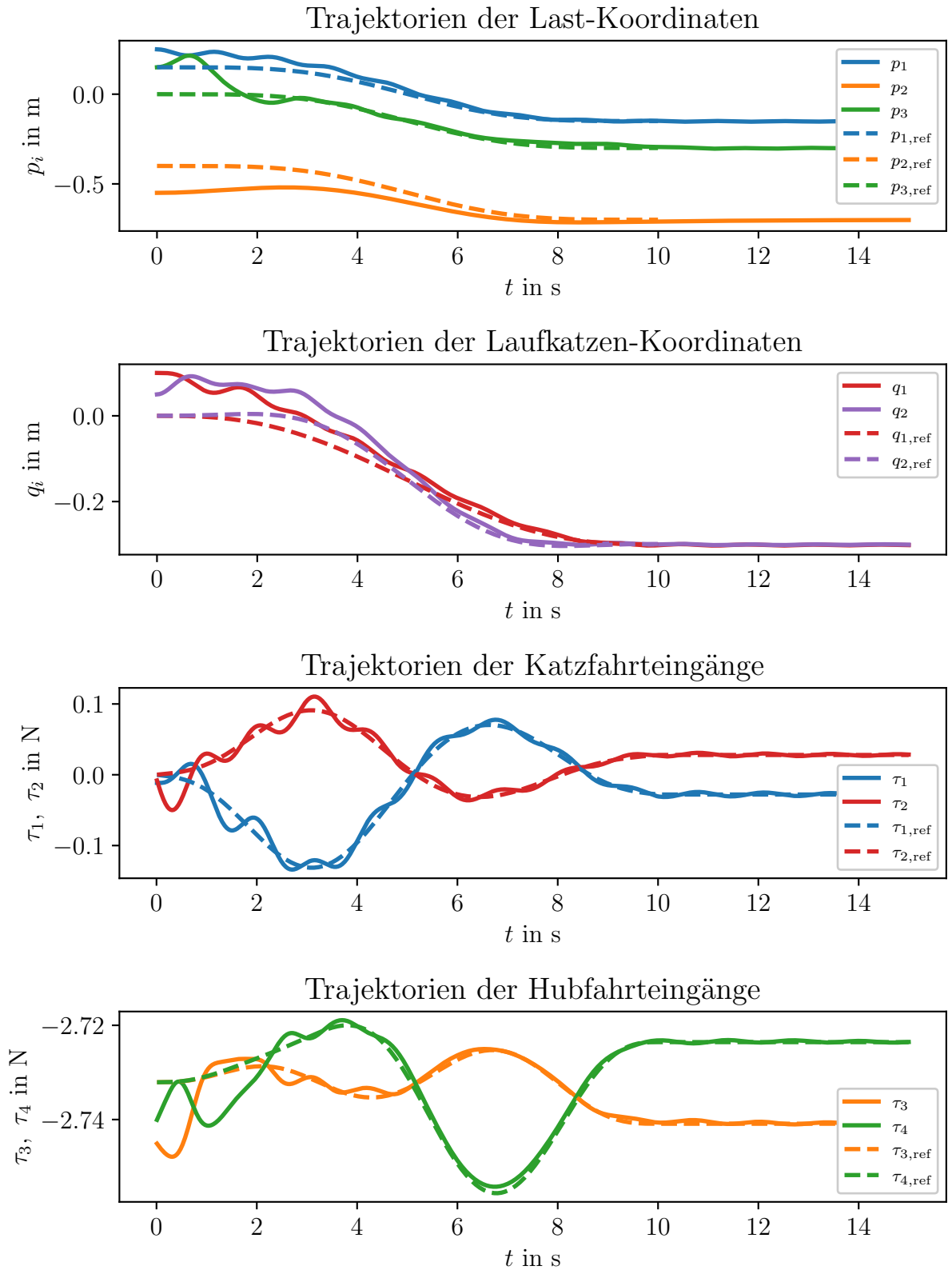
hergestellt werden. Dabei bedeutet die Indizierung  $\bullet_{[i,j]}$ , die Auswahl der Zeilen  $i$  bis  $j$  von  $\bullet$ . Da für den Systemeingang  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^4$  und für die Eingangsmatrix  $\mathbf{g}_{[6,10]} \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$  gilt, kann dieser Zusammenhang über die Bildung einer Pseudo-Inversen  $\mathbf{g}_{[6,10]}^+$  nach dem Eingangsvektor aufgelöst werden:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta}) (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta})). \quad (5.31)$$

Durch Einsetzen der Referenztrajektorien der Koordinaten  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}$  in  $\mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta})$  und  $\mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta})$  wird die exact feedforward linearization realisiert:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})). \quad (5.32)$$

Abbildung 9 zeigt prototypische Trajektorien beim Übergang zwischen zwei Ruhelagen mit einem auszuregelnden Anfangsfehler für diesen Regelungsansatz.



**Abbildung 9** – Prototypische Trajektorien des Doppelkransystems bei der Überführung zwischen zwei Ruhelagen unter der Ausregelung von Anfangsfehlern über die exact feedforward linearization mit Pseudoinverser. Koordinatenbezeichnung entsprechend Abbildung 5.

### Vereinfachung mittels Ausgangsselektion

Statt der Nutzung einer Pseudo-Inversen wie in Gleichung (5.32) wird im Folgenden eine Selektion von vier der fünf Gleichungen der Beschleunigungen  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$  vorgenommen. Symbolisch wird dies über eine Selektionsmatrix  $\mathbf{S}$  dargestellt:

$$\mathbf{S} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{S} \cdot (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{S} \cdot \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\tau}. \quad (5.33)$$

Durch die Wahl der letzten vier Gleichungen kann eine direkte Inversion der somit quadratischen Eingangsmatrix  $\mathbf{g}_{[7,10]} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{g}_{[6,10]}$  erfolgen:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}_{[7,10]}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) \text{ mit } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Diese Berechnungsvorschrift der Stellgrößen enthält deutlich weniger Operationen als alle zuvor dargestellten Ansätze. Damit eignet sie sich insbesondere für eine spätere Implementierung auf einem Echtzeitsystemen sowie sehr viel kürzeren Simulationszeiten. Abbildung 11 zeigt, dass sich für Beispieltrajektorien mit Anfangsfehlern ebenso wie bei den vorherigen Ansätzen ein sehr gutes Folgeverhalten sowie stationäre Genauigkeit ergibt.

Auf die Darstellung konkreter symbolischer Ausdrücke für die Stellgesetze wird aus Platz- und Praktikabilitätsgründen dennoch verzichtet, da jede Eingangskomponente trotzdem mehr als einhundert Rechenoperationen beinhaltet. Stattdessen wird auf das zu Beginn dieses Abschnitts 5.2.6 erwähnte Jupyter-Notebook verwiesen. Übersichtlicher ist an dieser Stelle eine Angabe von funktionalen Abhängigkeiten:

$$\tau_1 = \text{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}) \quad (5.35a)$$

$$\tau_2 = \text{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}) \quad (5.35b)$$

$$\tau_3 = \text{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}) \quad (5.35c)$$

$$\tau_4 = \text{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}). \quad (5.35d)$$

### Stabilitätsbetrachtung

Im Folgenden wird die Simulation einer prototypischen Referenztrajektorie mit dem zuletzt vorgestellten Regelungsansatz betrachtet. Die Eigenwerte der Jacobimatrix  $\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{e}}}$  einer Fehlerdynamik

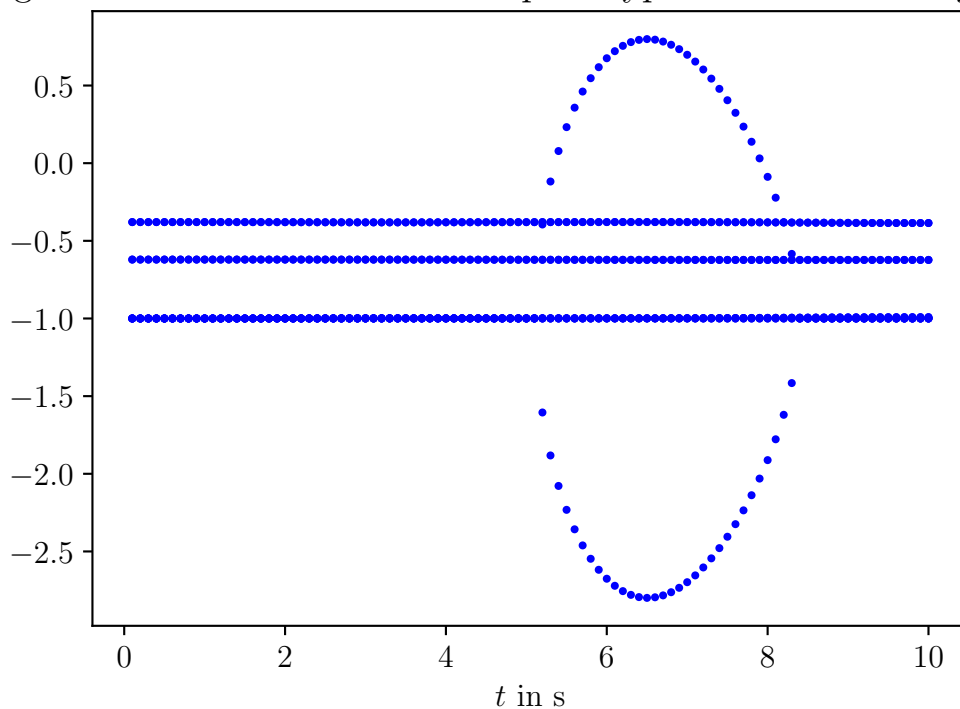
$$\mathbf{e} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{e} + \mathbf{x}_{\text{ref}} \quad (5.36)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{\text{ref}} = \mathbf{f}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{\text{ref}}) + \mathbf{g}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{\text{ref}}) \boldsymbol{\tau} - \dot{\mathbf{x}}_{\text{ref}} \quad (5.37)$$

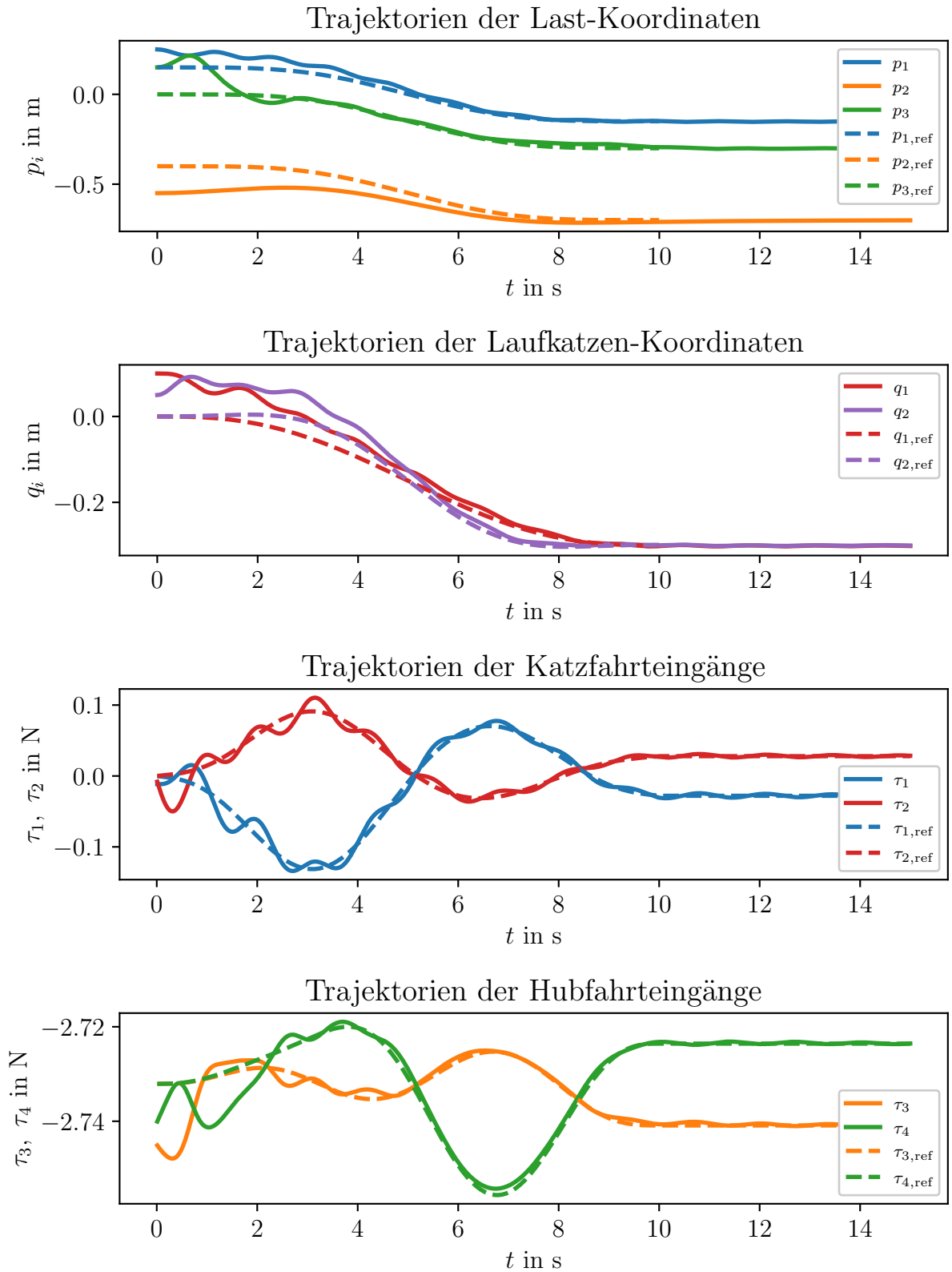
$$\mathbf{J}_{\dot{\mathbf{e}}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{e}}}{\partial \mathbf{e}} \quad (5.38)$$

sind für eine Stabilitätsbetrachtung von Interesse. Abbildung 10 zeigt, dass diese Eigenwerte in diesem Fall im Zeitraum von 5 s bis 9 s einen positiven Realteil aufweisen. Es ist möglich, dass aufgrund des bis dahin bereits stark abgeklungenen Folgefehlers keine ausreichende Destabilisierung des Systems stattfindet, sondern eine stationäre Genauigkeit dennoch erreicht wird. Bis zum Ende der Simulation weisen alle Eigenwerte erneut einen negativen Realteil auf. Formal kann allerdings bereits am Beispiel einer möglichen Referenztrajektorie mit Ljapunows erster (indirekter) Methode gezeigt werden, dass dieser Regelungsansatz zu einem instabilen System zu gewissen Simulationszeitpunkten führt [17, Vorlesung 4]. Eine andere Wahl der Rückführung, etwa ohne lineare Dynamik, könnte dieses Problem lösen.

Eigenwerte der Jacobimatrix bei prototypischer Referenztrajektorie



**Abbildung 10** – Eigenwerte der Jacobimatrix  $\mathbf{J}_\mathbf{e}$  bei der Folge einer prototypischen Referenztrajektorie bei der Regelung über exact feedforward linearization mit Selektionsmatrix.



**Abbildung 11** – Prototypische Trajektorien des Doppelkransystems bei der Überführung zwischen zwei Ruhelagen unter der Ausregelung von Anfangsfehlern über die exact feedforward linearization mit Selektionsmatrix. Koordinatenbezeichnung entsprechend Abbildung 5.

# Kapitel 6

## Fazit und Ausblick

### 6.1 Fazit

Für das zu untersuchende Brückenkransystem wurden analytische nichtlineare Modelle unter Nutzung des Lagrange-Formalismus ermittelt. Diese ergaben sich für die LG erster Art zu DGL- und für die LG zweiter Art zu DAE-Systemen. Für eine bessere Nachvollziehbarkeit der zugrunde liegenden Methodik wurde dieses Vorgehen zunächst anhand eines Einzelkransystems durchgeführt. Es erfolgte eine Identifikation aller zumeist geometrischen Modellparameter.

Die DGL-Modelle von Einzel- und Doppelkransystem wurden auf differenzielle Flachheit untersucht. Dabei wurde eine systematische Vorgehensweise für Mehrgrößensysteme skizziert. Dieses konnte auf Gleichungsebene anhand des Einzelkransystems veranschaulicht werden. Für das Doppelkransystem wurde aus Platz- und Praktikabilitätsgründen auf eine explizite Darstellung der umfangreichen Ausdrücke in den Ergebnissen verzichtet. Unter Zuhilfenahme von Computeralgebrasystemen war eine Beschreibung dieser Zusammenhänge sowie Darstellung funktionaler Abhängigkeiten möglich.

Auf Grundlage des für das Doppelkransystem bestimmten flachen Ausgangs konnten polynombasierte Trajektorien der Ausgangskomponenten aufgestellt werden. Diese dienen der Überführung des Systems von einer gegebenen Ruhelage in eine andere. Auf Basis der Parametrisierung der Eingangskomponenten durch den flachen Ausgang war es möglich daraus Stellgrößenverläufe für eine Vorsteuerung abzuleiten. Zur Folgeregelung ist eine statische Rückführung aufgrund eines nicht wohldefinierten vektoriellen relativen Grades nicht möglich. Stattdessen konnte durch eine dynamische Rückführung mit linearen Fehlerdynamiken eine Stabilisierung des Systems bei Anfangsfehlern sowie Einschwingen entlang der Solltrajektorie erzielt werden, allerdings in Verbindung mit einem hohen Komplexitätsgrad des Stellgesetzes. Der Ansatz einer quasi-statischen Rückführung mündete aufgrund von Singularitäten in der Nähe von Ruhelagen in numerischen Problemen. Diese konnten im Rahmen dieser Arbeit nicht behoben werden. Mittels der exact feedforward linearization wurde alternativ ein Regelungsansatz verfolgt, aus welchem ein kompaktes Stellgesetz folgt. Dafür wurde eine kleinere Ordnung der

linearen Fehlerdynamiken angenommen sowie alle Komponenten oder auch nur eine heuristische Selektion der Zustandskomponenten mit diesen Fehlerdynamiken versehen. Dieser Ansatz eignete sich während praktischer Untersuchungen ebenso zur Stabilisierung des Systems bei Anfangsfehlern, verstößt aber gegen formale Stabilitätsbedingungen.

Die Durchführung umfangreicher symbolischer Berechnungen wie auch die numerisch simulative Verifikation der ermittelten Steuerungs- und Regelungsgesetze erfolgte über Jupyter-Notebooks in Python. Über eine Robustheit der Regelungsansätze wurde keine Aussage getroffen. Gerade bei nichtlinearen Systemen wie dem in dieser Arbeit untersuchten können bereits geringe Modellabweichungen zur Instabilität bei Regelungsansätzen der exakten Linearisierung führen, woraus hohe Genauigkeitsanforderungen für die Modellbildung folgen.

## 6.2 Ausblick

Für die Untersuchung der Eignung der ermittelten Regelungsansätze am realen Demonstratorsystem ist eine Implementierung auf der vorhandenen Hardware der Raspberry Pis notwendig. Gerade die Einhaltung von Anforderungen an die Echtzeitfähigkeit bei numerisch umfangreichen Stellgesetzen stellt dabei eine Herausforderung dar.

Die flachheitsbasierte Vorsteuerung kann zuerst allein erprobt werden, so dass auch aus Betrachtung der Abweichung von Ist- und Referenztrajektorien auf die Größenordnung der Modellabweichungen geschlossen werden kann. Die Regelungsansätze sollten daraufhin unter Begrenzung von Stellgrößen und Überwachung des gegebenenfalls instabil werdenden Systems getestet werden.

Neben einer vertieften Auseinandersetzung mit der quasi-statischen Rückführung, bei der Singularitäten in den Stellgesetzen gegebenenfalls durch die Hebung von Definitionslücken vermieden werden könnten, verspricht auch die Nutzung moderner Regelungsansätze aus dem Gebiet des maschinellen Lernens kompaktere sowie robuste Lösungen. Über das sogenannte bestärkende Lernen (englisch reinforcement learning) können sich Agenten für den Übergang zwischen Ruhelagen selbstständig eine Strategie aneignen. Ein Transferlernen aus Stelltrajektorien klassischer Regelungsansätze auf die Agenten wäre zudem denkbar.

Eine Präzisierung des physikalischen Modells durch Einbeziehung von Reibungseffekten könnte vor allem die Effektivität der daraus abgeleiteten Vorsteuerung weiter verbessern. Allerdings ergibt bereits das einfachere aktuelle Modell bei einem flachheitsbasiertem Vorgehen äußerst umfangreiche Terme für die Stellgrößen, so dass die Anpassung zuvor darauf trainierter Agenten über beispielsweise bestärkendes Lernen eine kompaktere Lösung ergeben könnte.

# Literatur

- [1] Christian Andersson, Claus Führer und Johan Åkesson. „Assimulo: A unified framework for ODE solvers“. In: Mathematics and Computers in Simulation 116.0 (2015), S. 26–43. ISSN: 0378-4754. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2015.04.007>.
- [2] Dr. rer. nat. Christine Steinhoff. Aktueller Begriff: Industrie 4.0. Techn. Ber. Wissenschaftliche Dienste des dt. Bundestages, 2016. URL: <https://www.bundestag.de/resource/blob/474528/cae2bfac57f1bf797c8a6e13394b5e70/industrie-4-0-data.pdf>.
- [3] Torsten Fließbach. Mechanik : Lehrbuch zur Theoretischen Physik I. Spektrum Akademischer Verlag, 2009. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2188-3\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2188-3_8).
- [4] Raspberry Pi Foundation. Technische Spezifikationen Raspberry Pi 4. Sep. 2022. URL: <https://www.raspberrypi.com/products/raspberry-pi-4-model-b/specifications/>.
- [5] Klemens Fritzsche u. a. „Zur systematischen Bestimmung flacher Ausgänge nichtlinearer Mehrgrößensysteme“. In: at - Automatisierungstechnik 64.12 (2016), S. 948–960. DOI: [doi:10.1515/auto-2016-0079](https://doi.org/10.1515/auto-2016-0079). URL: <https://doi.org/10.1515/auto-2016-0079>.
- [6] Veit Hagenmeyer und Emmanuel Delaleau. „Exact feedforward linearization based on differential flatness“. In: International Journal of Control 76.6 (2003), S. 537–556. DOI: [10.1080/0020717031000089570](https://doi.org/10.1080/0020717031000089570). eprint: <https://doi.org/10.1080/0020717031000089570>. URL: <https://doi.org/10.1080/0020717031000089570>.
- [7] Internetpräsenz Fraunhofer IIS/EAS. Fraunhofer-Institut fuer Integrierte Schaltungen IIS, Institutsteil Entwicklung Adaptiver Systeme EAS. Juni 2022. URL: <https://www.eas.iis.fraunhofer.de/>.
- [8] Klaus Janschek. Systementwurf mechatronischer Systeme. Berlin: Springer, 2010. ISBN: 9783540788768. URL: [http://slubdd.de/katalog?TN\\_libero\\_mab2\)500406929](http://slubdd.de/katalog?TN_libero_mab2)500406929).
- [9] Klaus Janschek. Vorlesungsskript Elemente der Modellbildung und Simulationstechnik. 2020.
- [10] Carsten Knoll. „Regelungstheoretische Analyse- und Entwurfsansätze fuer unteraktuierte mechanische Systeme“. Diss. TU Dresden, 2016. URL: <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-209765>.



- 
- [11] Klaus Röbenack. Nichtlineare Regelungssysteme. Springer Vieweg Berlin, Heidelberg, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-44091-9>.
  - [12] J. Rudolph. Vorlesungsskript Flache Systeme. 2007.
  - [13] STMicroelectronics. Technische Spezifikationen STM32F303K8. Sep. 2022. URL: <https://www.st.com/en/microcontrollers-microprocessors/stm32f303k8.html>.
  - [14] sybtools GitHub Repository. Juni 2022. URL: <https://github.com/TUD-RST/sybtools>.
  - [15] Bruce Torby. „Energy Methods“. In: Advanced Dynamics for Engineers (1984).
  - [16] Wikipedia. Trägheitsmoment - Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Juni 2022. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A4gheitsmoment#:~:text=Ein%20Quader%2C%20der%20um%20eine%20Achse%20durch%20den%20Mittelpunkt%20rotiert%2C%20die%20parallel%20zu%20seinen%20Kanten%20c%20liegt..>
  - [17] Jan Winkler. Vorlesungsskript Nichtlineare Regelungstechnik 1. 2021.
  - [18] Konstantin Wrede. GitHub Repository zu dieser Studienarbeit. Sep. 2022. URL: <https://github.com/wredsen/SA-Wrede>.