

Konstantin Wrede

TU Dresden, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie; Fraunhofer IIS/EAS

# Verteidigung der Studienarbeit: Modellbildung und Reglerentwurf für ein Brückenkransystem

Dresden, 22. November 2022

# Gliederung

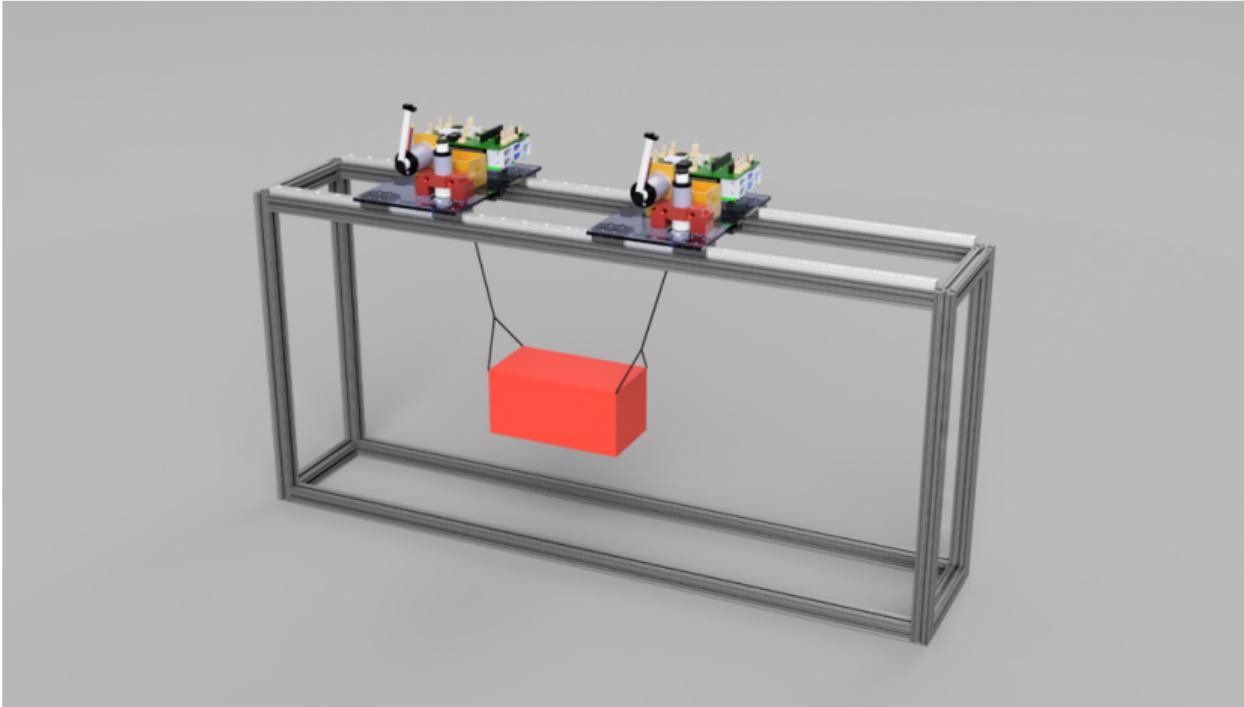
- System- und Problembeschreibung
- Analytische Modellbildung
- Flachheitsanalyse
- Steuerungs- und Regelungsentwurf
- Zusammenfassung und Ausblick

# Gliederung

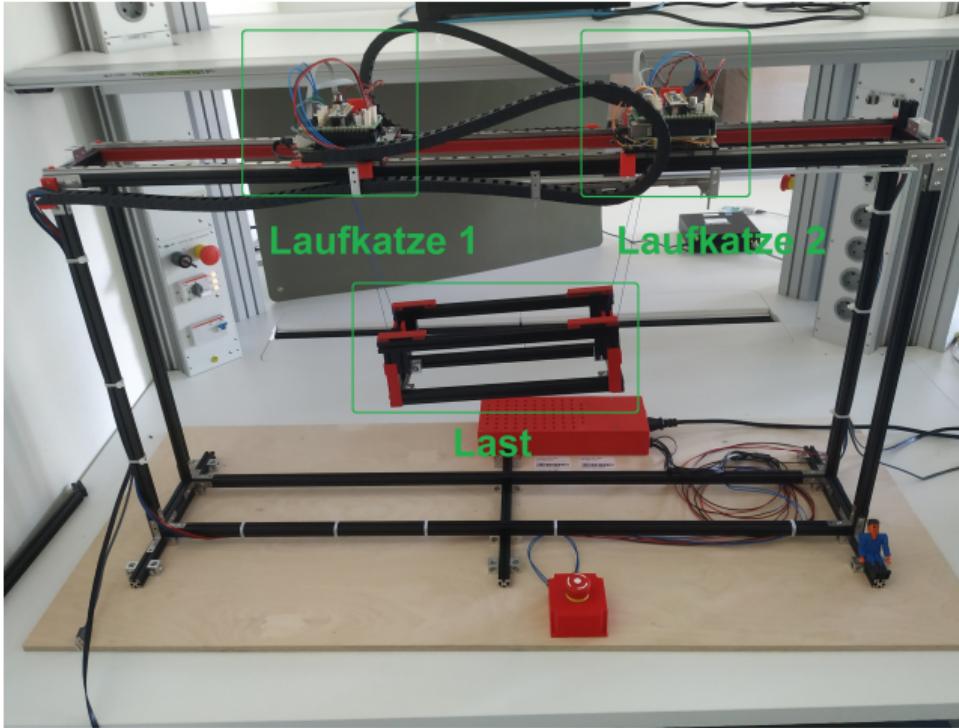
## → System- und Problembeschreibung

- Analytische Modellbildung
- Flachheitsanalyse
- Steuerungs- und Regelungsentwurf
- Zusammenfassung und Ausblick

# System- und Problembeschreibung



# System- und Problembeschreibung



# System- und Problembeschreibung

## Zielsetzung:

- Ruckarme Überführung der Last zwischen Ruhelagen in der vertikalen Aufhängungsebene

# System- und Problembeschreibung

## Zielsetzung:

- Ruckarme Überführung der Last zwischen Ruhelagen in der vertikalen Aufhängungsebene
- Zentrale Trajektorienplanung und Referenzregelstrategie unter Vorgabe von Sollposen der Last

# System- und Problembeschreibung

## Zielsetzung:

- Ruckarme Überführung der Last zwischen Ruhelagen in der vertikalen Aufhängungsebene
- Zentrale Trajektorienplanung und Referenzregelstrategie unter Vorgabe von Sollposen der Last
- Regelungsentwurf auf Basis von Modellierung des Versuchsstands als Mehrkörpersystem

# System- und Problembeschreibung

## Zielsetzung:

- Ruckarme Überführung der Last zwischen Ruhelagen in der vertikalen Aufhängungsebene
- Zentrale Trajektorienplanung und Referenzregelstrategie unter Vorgabe von Sollposen der Last
- Regelungsentwurf auf Basis von Modellierung des Versuchsstands als Mehrkörpersystem
- Perspektivisch Vergleich der zentralen Regelung mit verteilten Regelungsansätzen und Grundlage für maschinelles Lernen

# Gliederung

System- und Problembeschreibung

→ **Analytische Modellbildung**

Flachheitsanalyse

Steuerungs- und Regelungsentwurf

Zusammenfassung und Ausblick

# Analytische Modellbildung

## Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt

# Analytische Modellbildung

## Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last

# Analytische Modellbildung

## Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert

# Analytische Modellbildung

## Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert
- Vernachlässigung dissipativer Kräfte

# Analytische Modellbildung

## Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert
- Vernachlässigung dissipativer Kräfte

## Vorgehen bei der Modellierung:

- Modellierung Einzelkran mit Lagrange-Gleichungen zweiter Art (LG2)

# Analytische Modellbildung

## Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert
- Vernachlässigung dissipativer Kräfte

## Vorgehen bei der Modellierung:

- Modellierung Einzelkran mit Lagrange-Gleichungen zweiter Art (LG2)
- Modellierung Doppelkran mit LG2

# Analytische Modellbildung

## Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert
- Vernachlässigung dissipativer Kräfte

## Vorgehen bei der Modellierung:

- Modellierung Einzelkran mit Lagrange-Gleichungen zweiter Art (LG2)
  - Modellierung Doppelkran mit LG2
- ODE-System: gut geeignet für Flachheitsnachweis, Simulation

# Analytische Modellbildung

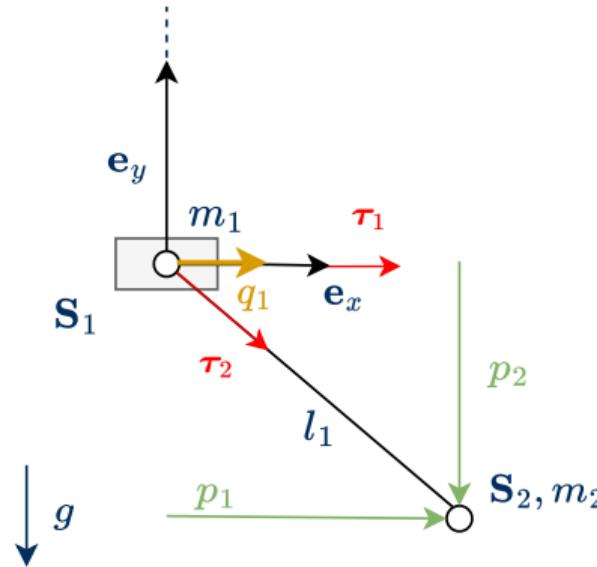
## Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert
- Vernachlässigung dissipativer Kräfte

## Vorgehen bei der Modellierung:

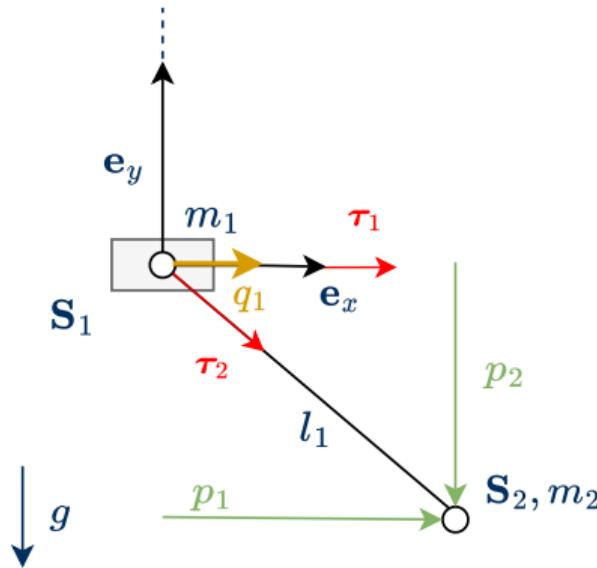
- Modellierung Einzelkran mit Lagrange-Gleichungen zweiter Art (LG2)
  - Modellierung Doppelkran mit LG2
- ODE-System: gut geeignet für Flachheitsnachweis, Simulation
- (Modellierung Doppelkran mit Lagrange-Gleichungen erster Art)
- (DAE-System: intuitive Zwangsbedingungen)

# Analytisches Modell Einzelkran



- Massen bei  $S_1 = (q_1, 0)^T$ ,  $S_2 = (p_1, p_2)^T$
- variable Seillänge  $l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2}$

# Analytisches Modell Einzelkran



Systemgleichungen aus LG2:

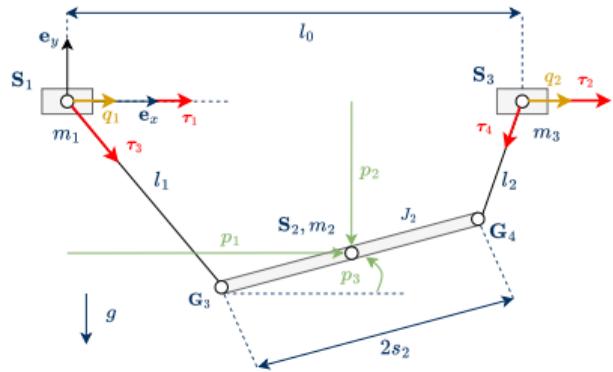
$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

- Massen bei  $S_1 = (q_1, 0)^T$ ,  $S_2 = (p_1, p_2)^T$
- variable Seillänge  $l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2}$

# Analytisches Modell Doppelkran

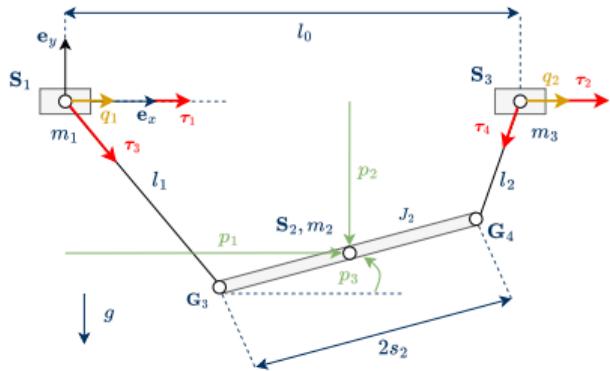


**variable Seillängen:**

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

# Analytisches Modell Doppelkran



**variable Seillängen:**

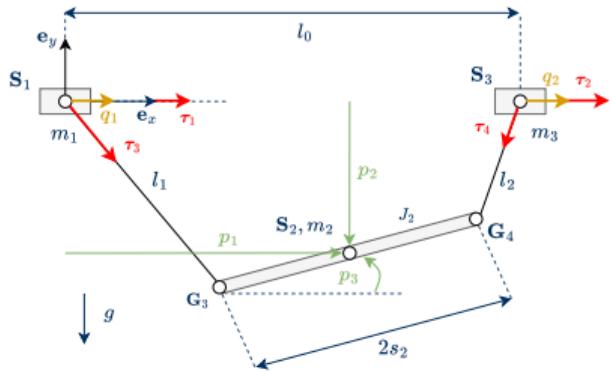
$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

**Systemgleichungen aus LG2:**

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_4 (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos p_3)}{l_2} - \frac{\tau_3 (p_1 - q_1 - s_2 \cos p_3)}{l_1} &= 0 \\ g m_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{\tau_4 (p_2 + s_2 \sin p_3)}{l_2} - \frac{\tau_3 (p_2 s_2 \sin p_3)}{l_1} &= 0 \\ J_2 \ddot{p}_3 - \frac{s_2 \tau_4 (p_2 + s_2 \sin p_3) \cos p_3 + s_2 \tau_4 (p_1 - q_2 + s_2 \cos p_3 - l_0)}{l_2} \\ + \frac{s_2 \tau_3 (p_2 - s_2 \sin p_3) \cos p_3}{l_1} - \frac{s_2 \tau_3 (p_1 - q_1 - s_2 \cos p_3) \sin p_3}{l_1} &= 0 \\ m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_3 (p_1 - q_1 - s_2 \cos p_3)}{l_1} &= 0 \\ m_3 \ddot{q}_2 - \tau_2 + \frac{\tau_4 (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos p_3)}{l_2} &= 0 \end{aligned}$$

# Analytisches Modell Doppelkran



**variable Seillängen:**

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

**Eingangsaffines Zustandsraummodell:**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\tau \text{ mit}$$

$$\mathbf{x} = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, 0, -g, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

wobei  $* \neq 0$

# Gliederung

System- und Problembeschreibung

Analytische Modellbildung

→ **Flachheitsanalyse**

Steuerungs- und Regelungsentwurf

Zusammenfassung und Ausblick

# Flachheitsanalyse

## Differenzielle Flachheit

Ein System der Form  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  mit  $\mathbf{F}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  heißt (differenziell) flach, falls ein  $m$ -Tupel  $y := (y_1, \dots, y_m)^T$  sowie glatte Funktionen  $\Psi, \theta$  existieren, so dass

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \Psi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_x)}) \text{ mit } n_x < \infty \text{ und} \\ \mathbf{u} &= \theta(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_u)}) \text{ mit } n_u < \infty \text{ gilt.}\end{aligned}$$

# Flachheitsanalyse

## Differenzielle Flachheit

Ein System der Form  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  mit  $\mathbf{F}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  heißt (differenziell) flach, falls ein  $m$ -Tupel  $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_m)^T$  sowie glatte Funktionen  $\Psi, \theta$  existieren, so dass

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \Psi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_x)}) \text{ mit } n_x < \infty \text{ und} \\ \mathbf{u} &= \theta(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_u)}) \text{ mit } n_u < \infty \text{ gilt.}\end{aligned}$$

## Erläuterungen:

- Systemzustand  $\mathbf{x}$ , Systemeingang  $\mathbf{u}$
- **flacher Ausgang  $\mathbf{y}$**

→ Parametrisierung aller Systemgrößen durch  $\mathbf{y}$  und endlich viele Ableitungen ohne Lösung von DGL/Integration möglich

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Prinzipielles Vorgehen:

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Prinzipielles Vorgehen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$  und Eingang  $u \in \mathbb{R}^m$

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Prinzipielles Vorgehen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$  und Eingang  $u \in \mathbb{R}^m$
- sukzessive Elimination der  $m$  Komponenten von  $u$  durch je eine der  $n$  Systemgleichungen

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Prinzipielles Vorgehen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$  und Eingang  $u \in \mathbb{R}^m$
- sukzessive Elimination der  $m$  Komponenten von  $u$  durch je eine der  $n$  Systemgleichungen  
→ anschließend analog Elimination von  $n - m$  Komponenten von  $x$

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Prinzipielles Vorgehen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$  und Eingang  $u \in \mathbb{R}^m$
- sukzessive Elimination der  $m$  Komponenten von  $u$  durch je eine der  $n$  Systemgleichungen
  - anschließend analog Elimination von  $n - m$  Komponenten von  $x$
  - übrig bleiben  $n - (n - m) = m$  Zustandskomponenten als **flacher Ausgang y**

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Prinzipielles Vorgehen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$  und Eingang  $u \in \mathbb{R}^m$
- sukzessive Elimination der  $m$  Komponenten von  $u$  durch je eine der  $n$  Systemgleichungen
  - anschließend analog Elimination von  $n - m$  Komponenten von  $x$
  - übrig bleiben  $n - (n - m) = m$  Zustandskomponenten als **flacher Ausgang**  $y$

## Parametrisierung der Systemgrößen durch den flachen Ausgang:

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Prinzipielles Vorgehen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$  und Eingang  $u \in \mathbb{R}^m$
- sukzessive Elimination der  $m$  Komponenten von  $u$  durch je eine der  $n$  Systemgleichungen
  - anschließend analog Elimination von  $n - m$  Komponenten von  $x$
  - übrig bleiben  $n - (n - m) = m$  Zustandskomponenten als **flacher Ausgang**  $y$

## Parametrisierung der Systemgrößen durch den flachen Ausgang:

- Systemgleichungen in Umgekehrter Reihenfolge zur Elimination nach Systemgrößen auflösen

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Prinzipielles Vorgehen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$  und Eingang  $u \in \mathbb{R}^m$
- sukzessive Elimination der  $m$  Komponenten von  $u$  durch je eine der  $n$  Systemgleichungen
  - anschließend analog Elimination von  $n - m$  Komponenten von  $x$
  - übrig bleiben  $n - (n - m) = m$  Zustandskomponenten als **flacher Ausgang**  $y$

## Parametrisierung der Systemgrößen durch den flachen Ausgang:

- Systemgleichungen in Umgekehrter Reihenfolge zur Elimination nach Systemgrößen auflösen
- Parametrisierungen vorheriger Größen oder deren Zeitableitungen ggf. in folgende Parametrisierungen einsetzen

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

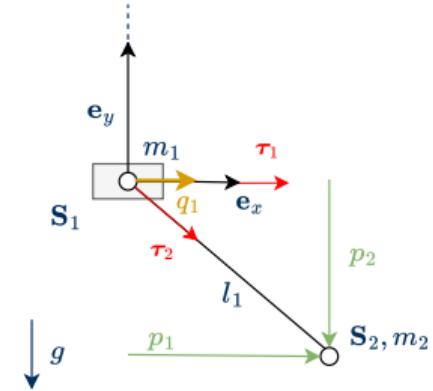
## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination der Eingangskomponenten von  $\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$ :

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$



# Flachheitsanalyse am Einzelkran

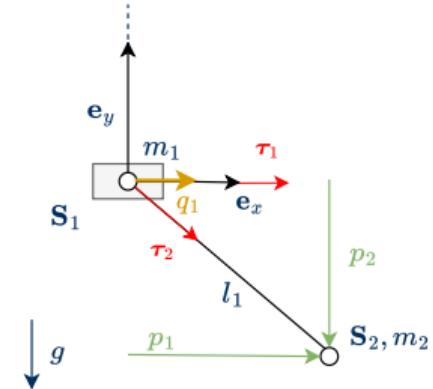
## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination der Eingangskomponenten von  $\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$ :

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$



→ Elimination von  $\tau_1$  und 3. Gleichung

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

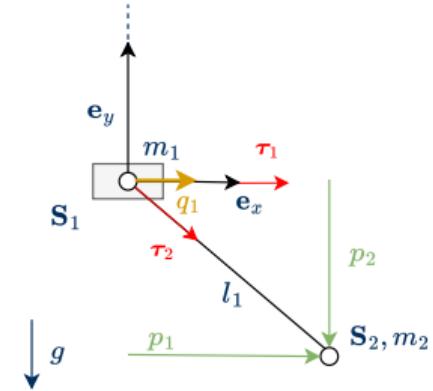
## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination der Eingangskomponenten von  $\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$ :

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$



- Elimination von  $\tau_1$  und 3. Gleichung
- Elimination von  $\tau_2$  und 1. Gleichung

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

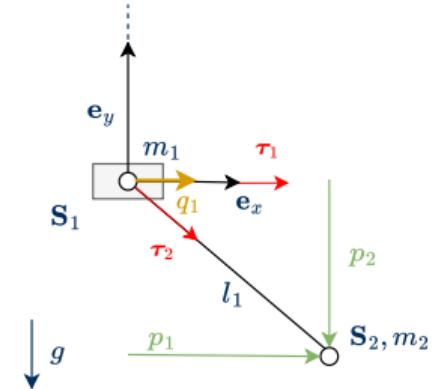
## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination der Eingangskomponenten von  $\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$ :

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$



- Elimination von  $\tau_1$  und 3. Gleichung
- Elimination von  $\tau_2$  und 1. Gleichung
- Einsetzen von  $\tau_2$  aus 1. Gleichung in 2. Gleichung:

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{m_2 p_2 \ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$

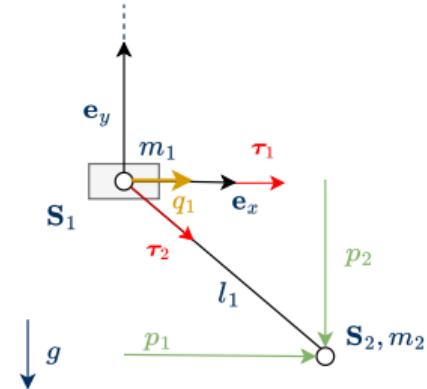
# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

→ Einsetzen von  $\tau_2$  aus 1. Gleichung in 2. Gleichung:

$$gm_2 + m_2\ddot{p}_2 - \frac{m_2p_2\ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$

→ folgende Menge an Systemgrößen  $\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$



# Flachheitsanalyse am Einzelkran

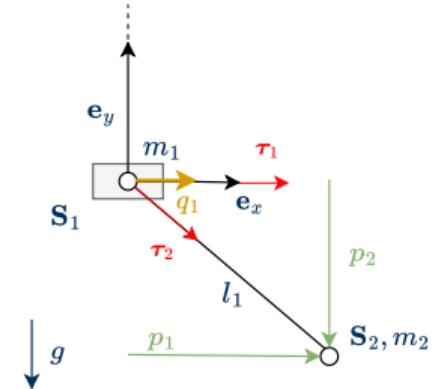
## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

→ Einsetzen von  $\tau_2$  aus 1. Gleichung in 2. Gleichung:

$$gm_2 + m_2\ddot{p}_2 - \frac{m_2p_2\ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$

→ folgende Menge an Systemgrößen  $\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$

→ Elimination von  $q_1$ , da rein algebraisch →  $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$



# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

→ Einsetzen von  $\tau_2$  aus 1. Gleichung in 2. Gleichung:

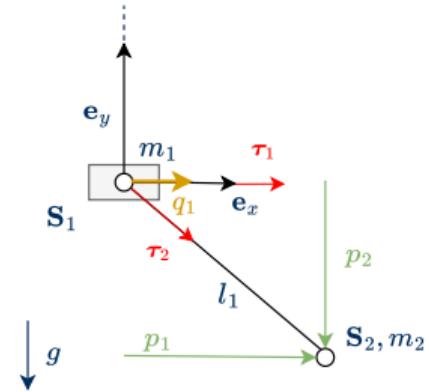
$$gm_2 + m_2\ddot{p}_2 - \frac{m_2p_2\ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$

→ folgende Menge an Systemgrößen  $\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$

→ Elimination von  $q_1$ , da rein algebraisch →  $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$

**Parametrisierung der Systemgrößen durch  $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$ :**

- aus 2. substituierter Gleichung:  $q_1 = \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}$



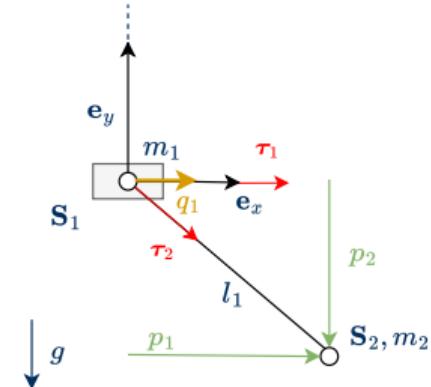
# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

→ Einsetzen von  $\tau_2$  aus 1. Gleichung in 2. Gleichung:

$$gm_2 + m_2\ddot{p}_2 - \frac{m_2p_2\ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$

→ folgende Menge an Systemgrößen  $\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$   
→ Elimination von  $q_1$ , da rein algebraisch →  $y = (p_1, p_2)^T$



Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :

- aus 2. substituierter Gleichung:  $q_1 = \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}$
- aus 1. Gleichung und Einsetzen von  $q_1(y, \dot{y})$ :

$$m_2\ddot{p}_1 - \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{m_2\ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + \left(p_1 - \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}\right)^2}}{p_1 - \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}}$$

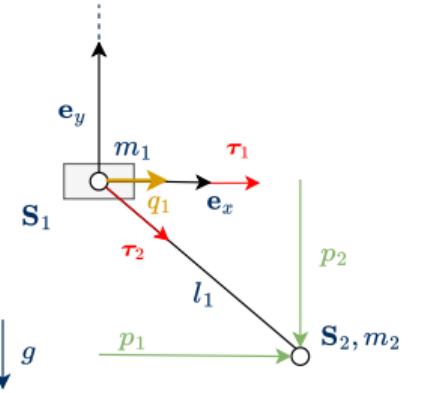
# Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :

- aus 3. Gleichung und Einsetzen von  $q_1, \ddot{q}_1, \tau_2$ :

$$0 = m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - \ddot{q}_1)}{l_1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_1 &= \frac{1}{g^3 + 3g^2\ddot{p}_2 + 3g\ddot{p}_2^2 + \ddot{p}_2^3} (g^3 m_1 \ddot{p}_1 + g^3 m_2 \ddot{p}_1 - g^2 m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \\ &\quad - 2g^2 m_1 \ddot{\ddot{p}}_1 \dot{p}_2 + 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 3g^2 m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 - 2gm_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \dot{p}_2 + gm_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \dot{p}_1 \\ &\quad + 2gm_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 - 4gm_1 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + 2gm_1 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + gm_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 + 3gm_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 - m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2^2 \\ &\quad + m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 - 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2^2 \dot{p}_1 - 2m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_2 + 2m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 \dot{p}_2 + m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^3) \end{aligned}$$



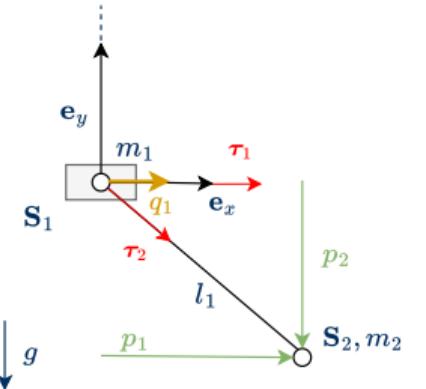
# Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :

- aus 3. Gleichung und Einsetzen von  $q_1, \ddot{q}_1, \tau_2$ :

$$0 = m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - \ddot{q}_1)}{l_1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_1 &= \frac{1}{g^3 + 3g^2\ddot{p}_2 + 3g\ddot{p}_2^2 + \ddot{p}_2^3} (g^3 m_1 \ddot{p}_1 + g^3 m_2 \ddot{p}_1 - g^2 m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \\ &\quad - 2g^2 m_1 \ddot{\ddot{p}}_1 \dot{p}_2 + 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 3g^2 m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 - 2gm_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \dot{p}_2 + gm_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \dot{p}_1 \\ &\quad + 2gm_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 - 4gm_1 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + 2gm_1 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + gm_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 + 3gm_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 - m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2^2 \\ &\quad + m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 - 2m_1 p_2 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_1 - 2m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_2 + 2m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 \dot{p}_2 + m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^3) \end{aligned}$$



→ alle Systemgrößen durch flachen Ausgang  $y = (p_1, p_2)^T$  parametrisiert

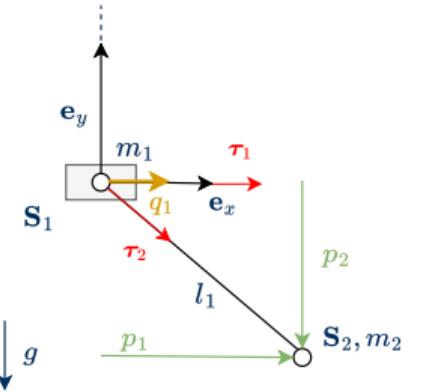
# Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :

- aus 3. Gleichung und Einsetzen von  $q_1, \ddot{q}_1, \tau_2$ :

$$0 = m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - \ddot{q}_1)}{l_1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_1 &= \frac{1}{g^3 + 3g^2\ddot{p}_2 + 3g\ddot{p}_2^2 + \ddot{p}_2^3} (g^3 m_1 \ddot{p}_1 + g^3 m_2 \ddot{p}_1 - g^2 m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \\ &\quad - 2g^2 m_1 \ddot{\ddot{p}}_1 \dot{p}_2 + 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 3g^2 m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 - 2gm_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \dot{p}_2 + gm_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \dot{p}_1 \\ &\quad + 2gm_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 - 4gm_1 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + 2gm_1 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + gm_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 + 3gm_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 - m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2^2 \\ &\quad + m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 - 2m_1 p_2 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_1 - 2m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_2 + 2m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 \dot{p}_2 + m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^3) \end{aligned}$$



→ alle Systemgrößen durch flachen Ausgang  $y = (p_1, p_2)^T$  parametrisiert  
→ konstruktiver Flachheitsnachweis erbracht □

# Flachheitsanalyse am Doppelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran

# Flachheitsanalyse am Doppelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran

→ unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS *SymPy* durchgeführt

# Flachheitsanalyse am Doppelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran  
→ unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS SymPy durchgeführt
- $n = 10$  Zustandskomponenten und -gleichungen,  $m = 4$  Eingangskomponenten

# Flachheitsanalyse am Doppelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran  
→ unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS SymPy durchgeführt
- $n = 10$  Zustandskomponenten und -gleichungen,  $m = 4$  Eingangskomponenten  
→ Elimination des Eingangs, autonomes System aus  $p = n - m = 6$  Gleichungen

# Flachheitsanalyse am Doppelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran
- unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS SymPy durchgeführt
- $n = 10$  Zustandskomponenten und -gleichungen,  $m = 4$  Eingangskomponenten
- Elimination des Eingangs, autonomes System aus  $p = n - m = 6$  Gleichungen
- Elimination von  $p$  Zuständen zu flachem Ausgang aus  $m = 4$  Komponenten

# Flachheitsanalyse am Doppelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran
- unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS SymPy durchgeführt
- $n = 10$  Zustandskomponenten und -gleichungen,  $m = 4$  Eingangskomponenten  
→ Elimination des Eingangs, autonomes System aus  $p = n - m = 6$  Gleichungen  
→ Elimination von  $p$  Zuständen zu flachem Ausgang aus  $m = 4$  Komponenten
- letzte übrige Gleichung enthält folgende Menge an Systemgrößen:

$$\mathcal{M} = \{p_1, p_2, p_3, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2, \ddot{p}_3, q_1, q_2\}$$

# Flachheitsanalyse am Doppelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran
- unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS SymPy durchgeführt
- $n = 10$  Zustandskomponenten und -gleichungen,  $m = 4$  Eingangskomponenten  
→ Elimination des Eingangs, autonomes System aus  $p = n - m = 6$  Gleichungen  
→ Elimination von  $p$  Zuständen zu flachem Ausgang aus  $m = 4$  Komponenten
- letzte übrige Gleichung enthält folgende Menge an Systemgrößen:

$$\mathcal{M} = \{p_1, p_2, p_3, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2, \ddot{p}_3, q_1, q_2\}$$

→ algebraisches Auftreten von  $q_1, q_2$  führt o. B. d. A. zur Wahl von  $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$

# Flachheitsanalyse am Doppelkran

**Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$  :**

- funktionale Zusammenhänge der Parametrisierungen:

$$\tau_1 = \theta_1(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1, \ddot{q}_1)$$

$$\tau_2 = \theta_2\left(p_1, \dot{p}_1, \ddot{p}_1, p_1^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_2, p_2^{(3)}, p_2^{(4)}, p_3, \dot{p}_3, \ddot{p}_3, p_3^{(3)}, p_3^{(4)}, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1\right)$$

$$\tau_3 = \theta_3(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

$$\tau_4 = \theta_4(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

$$q_2 = \Psi_1(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

# Flachheitsanalyse am Doppelkran

**Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$  :**

- funktionale Zusammenhänge der Parametrisierungen:

$$\tau_1 = \theta_1(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1, \ddot{q}_1)$$

$$\tau_2 = \theta_2\left(p_1, \dot{p}_1, \ddot{p}_1, p_1^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_2, p_2^{(3)}, p_2^{(4)}, p_3, \dot{p}_3, \ddot{p}_3, p_3^{(3)}, p_3^{(4)}, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1\right)$$

$$\tau_3 = \theta_3(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

$$\tau_4 = \theta_4(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

$$q_2 = \Psi_1(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

→ alle Systemgrößen durch flachen Ausgang  $y = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$  parametrisiert  $\square$

# Gliederung

- System- und Problembeschreibung
- Analytische Modellbildung
- Flachheitsanalyse
- **Steuerungs- und Regelungsentwurf**
- Zusammenfassung und Ausblick

# Steuerungs- und Regelungsentwurf

## Allgemeines Vorgehen:

- Planung polynom basierter Referenztrajektorien für den flachen Ausgang  $y$

# Steuerungs- und Regelungsentwurf

## Allgemeines Vorgehen:

- Planung polynom basierter Referenztrajektorien für den flachen Ausgang  $y$
- Trajektorien der Systemeingänge  $\tau(t)$  folgen aus  $y(t)$

# Steuerungs- und Regelungsentwurf

## Allgemeines Vorgehen:

- Planung polynom basierter Referenztrajektorien für den flachen Ausgang  $y$
  - Trajektorien der Systemeingänge  $\tau(t)$  folgen aus  $y(t)$
- **Vorsteuerung** durch Parametrisierung aus Flachheitsnachweis möglich

# Steuerungs- und Regelungsentwurf

## Allgemeines Vorgehen:

- Planung polynom basierter Referenztrajektorien für den flachen Ausgang  $y$
  - Trajektorien der Systemeingänge  $\tau(t)$  folgen aus  $y(t)$
- **Vorsteuerung** durch Parametrisierung aus Flachheitsnachweis möglich
- Entwurf einer **Folgeregelung** um diese Trajektorien

# Trajektorienplanung

## Anforderungen:

# Trajektorienplanung

## Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen zwei Ruhelagen

# Trajektorienplanung

## Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen zwei Ruhelagen
- stetiger Verlauf von Eingangs- bzw. Stellgrößen

# Trajektorienplanung

## Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen zwei Ruhelagen
- stetiger Verlauf von Eingangs- bzw. Stellgrößen
- bisher keine formal spezifizierten Grenzwerte für Beschleunigungen etc.

# Trajektorienplanung

## Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen zwei Ruhelagen
- stetiger Verlauf von Eingangs- bzw. Stellgrößen
- bisher keine formal spezifizierten Grenzwerte für Beschleunigungen etc.

## Vorgabe von Randbedingungen:

# Trajektorienplanung

## Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen zwei Ruhelagen
- stetiger Verlauf von Eingangs- bzw. Stellgrößen
- bisher keine formal spezifizierten Grenzwerte für Beschleunigungen etc.

## Vorgabe von Randbedingungen:

- Differenzierbarkeitsbedingungen an  $y(t)$  folgen aus  $\tau(y(t), \dot{y}(t), \dots)$

# Trajektorienplanung

## Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen zwei Ruhelagen
- stetiger Verlauf von Eingangs- bzw. Stellgrößen
- bisher keine formal spezifizierten Grenzwerte für Beschleunigungen etc.

## Vorgabe von Randbedingungen:

- Differenzierbarkeitsbedingungen an  $y(t)$  folgen aus  $\tau(y(t), \dot{y}(t), \dots)$
- höchste Ableitungen von  $y(t)$  in  $\tau_2 = \theta_2 \left( y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots \right)$

# Trajektorienplanung

## Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen zwei Ruhelagen
- stetiger Verlauf von Eingangs- bzw. Stellgrößen
- bisher keine formal spezifizierten Grenzwerte für Beschleunigungen etc.

## Vorgabe von Randbedingungen:

- Differenzierbarkeitsbedingungen an  $y(t)$  folgen aus  $\tau(y(t), \dot{y}(t), \dots)$ 
  - höchste Ableitungen von  $y(t)$  in  $\tau_2 = \theta_2 \left( y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots \right)$
  - stetig differenzierbarer Verlauf von  $\tau(t)$  für Überführung von  $(t_0, y_{i,0})$  in  $(t_e, y_{i,e})$

# Trajektorienplanung

**Vorgabe von Randbedingungen an  $y(t)$  für  $\tau_2 = \theta_2 \left( y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots \right)$ :**

$$y_i(t_0) = y_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_i(t_e) = y_{i,e} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\dot{y}_i(t_0) = \ddot{y}_i(t_0) = y_i^{(3)}(t_0) = y_i^{(4)}(t_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_i(t_e) = \ddot{y}_i(t_e) = y_i^{(3)}(t_e) = y_i^{(4)}(t_e) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_4(t_0) = \ddot{y}_4(t_0) = \dot{y}_4(t_e) = \ddot{y}_4(t_e) = 0$$

# Trajektorienplanung

**Vorgabe von Randbedingungen an  $y(t)$  für  $\tau_2 = \theta_2(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots)$ :**

$$y_i(t_0) = y_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_i(t_e) = y_{i,e} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\dot{y}_i(t_0) = \ddot{y}_i(t_0) = y_i^{(3)}(t_0) = y_i^{(4)}(t_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_i(t_e) = \ddot{y}_i(t_e) = y_i^{(3)}(t_e) = y_i^{(4)}(t_e) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_4(t_0) = \ddot{y}_4(t_0) = \dot{y}_4(t_e) = \ddot{y}_4(t_e) = 0$$

→ Polynomansatz für  $y_i(t)$  mit Ordnung  $N_i - 1$  mit  $N_i$  Anzahl der Randbedingungen:

# Trajektorienplanung

**Vorgabe von Randbedingungen an  $y(t)$  für  $\tau_2 = \theta_2 \left( y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots \right)$ :**

$$y_i(t_0) = y_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_i(t_e) = y_{i,e} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\dot{y}_i(t_0) = \ddot{y}_i(t_0) = y_i^{(3)}(t_0) = y_i^{(4)}(t_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_i(t_e) = \ddot{y}_i(t_e) = y_i^{(3)}(t_e) = y_i^{(4)}(t_e) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_4(t_0) = \ddot{y}_4(t_0) = \dot{y}_4(t_e) = \ddot{y}_4(t_e) = 0$$

→ Polynomansatz für  $y_i(t)$  mit Ordnung  $N_i - 1$  mit  $N_i$  Anzahl der Randbedingungen:

$$y_i(t) = a_{i,9}t^9 + a_{i,8}t^8 + \dots + a_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3; t_0 < t < t_e$$

$$y_4(t) = a_{4,5}t^5 + a_{4,4}t^4 + \dots + a_{4,0} \quad \text{für } t_0 < t < t_e.$$

# Trajektorienplanung

**Vorgabe von Randbedingungen an  $y(t)$  für  $\tau_2 = \theta_2 \left( y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots \right)$ :**

$$y_i(t_0) = y_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_i(t_e) = y_{i,e} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\dot{y}_i(t_0) = \ddot{y}_i(t_0) = y_i^{(3)}(t_0) = y_i^{(4)}(t_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_i(t_e) = \ddot{y}_i(t_e) = y_i^{(3)}(t_e) = y_i^{(4)}(t_e) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_4(t_0) = \ddot{y}_4(t_0) = \dot{y}_4(t_e) = \ddot{y}_4(t_e) = 0$$

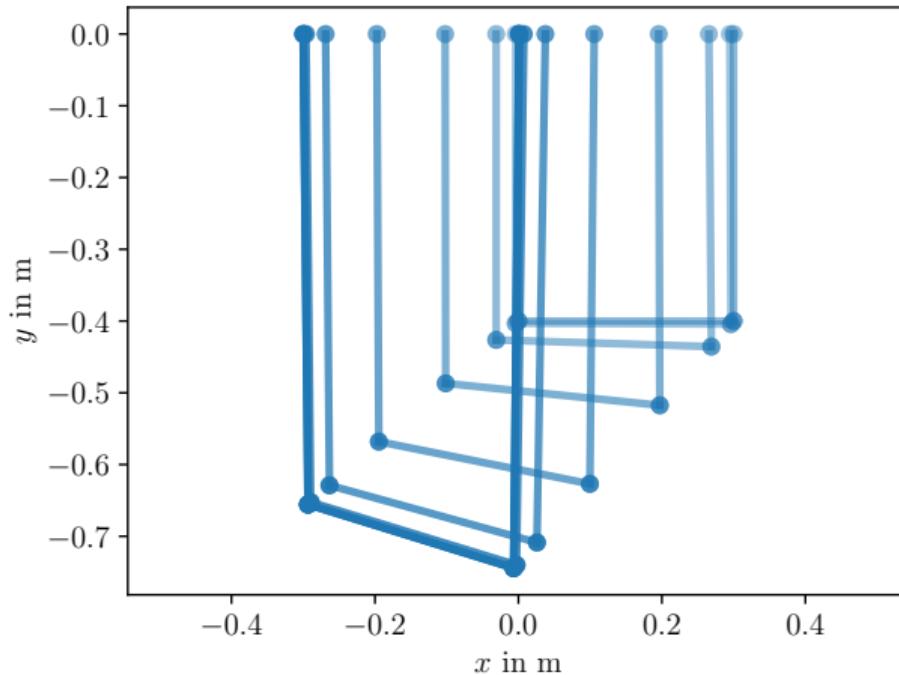
→ Polynomansatz für  $y_i(t)$  mit Ordnung  $N_i - 1$  mit  $N_i$  Anzahl der Randbedingungen:

$$y_i(t) = a_{i,9}t^9 + a_{i,8}t^8 + \dots + a_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3; t_0 < t < t_e$$

$$y_4(t) = a_{4,5}t^5 + a_{4,4}t^4 + \dots + a_{4,0} \quad \text{für } t_0 < t < t_e.$$

→ Bestimmung der  $a_{i,j}$  aus linearem Gleichungssystem der Randbedingungen

# Prototypische Referenztrajektorie



# Trajektorienfolgeregelung

- Bestimmung der Komponenten  $r_i$  des **vektoriellen relativen Grades r**:

# Trajektorienfolgeregelung

- Bestimmung der Komponenten  $r_i$  des **vektoriellen relativen Grades r**:

$$y_i = h_i(\mathbf{x})$$

$$\dot{y}_i = L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x})$$

$$\vdots$$

$$y_i^{(r_i-1)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x})$$

$$y_i^{(r_i)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i} h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \dots + L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_m$$

Lie-Ableitung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow L_{\mathbf{f}} h_i = dh_i^T \cdot \mathbf{f}$$

# Trajektorienfolgeregelung

- Bestimmung der Komponenten  $r_i$  des **vektoriellen relativen Grades r**:

$$y_i = h_i(\mathbf{x})$$

$$\dot{y}_i = L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x})$$

⋮

$$y_i^{(r_i-1)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x})$$

$$y_i^{(r_i)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i} h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \dots + L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_m$$

Lie-Ableitung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow L_{\mathbf{f}} h_i = d h_i^T \cdot \mathbf{f}$$

Index $i$	1	2	3	4
Komponente des vektoriellen relativen Grades $r_i$	2	2	2	2
explizites Auftreten von $\tau_j$ bei $y_i^{(r_i)}$	$\tau_3, \tau_4$	$\tau_3, \tau_4$	$\tau_3, \tau_4$	$\tau_1, \tau_3$
$y_j^{(k)}$ mit minimalem $k$ , bei dem $\tau_i$ zuerst auftritt	$y_4^{(2)}$	$y_{1,2,3}^{(4)}$	$y_{1,2,3,4}^{(2)}$	$y_{1,2,3}^{(2)}$

# Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- System mit Eingangs-Ausgangs-Verhalten der Form

$$\mathbf{y}^{(r)} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) = (L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}), \dots, L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}))^T$$

Ausgangableitungen

$$y_i^{(r_i)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i} h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \dots + L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_m$$

Entkopplungsmatrix  $\boldsymbol{\Lambda}$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

# Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- System mit Eingangs-Ausgangs-Verhalten der Form

$$\mathbf{y}^{(r)} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) = (L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}), \dots, L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}))^T$$

- Virtueller Eingang  $\mathbf{v} \stackrel{!}{=} \mathbf{y}^{(r)}$  und Auflösen nach  $\mathbf{u}$  (falls  $r$  wohldefiniert!)

# Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- System mit Eingangs-Ausgangs-Verhalten der Form

$$\mathbf{y}^{(r)} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) = (L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}), \dots, L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}))^T$$

- Virtueller Eingang  $\mathbf{v} \stackrel{!}{=} \mathbf{y}^{(r)}$  und Auflösen nach  $\mathbf{u}$  (falls  $r$  wohldefiniert!)  
 $\Rightarrow \mathbf{u} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x})) \quad (\text{statische Rückführung})$
- Wahl von  $\mathbf{v}$  nach stabilisierender Fehlerdynamik von  $e_i := y_i - y_{i,\text{ref}}$

$$e_i^{(r_i)} + c_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)} + \dots + c_{i,1} \dot{e}_i + c_{i,0} e_i = 0$$
$$\Leftrightarrow v_i = y_i^{(r_i)} = y_{i,\text{ref}}^{(r_i)} - c_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)} - \dots - c_{i,1} \dot{e}_i - c_{i,0} e_i$$

# Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Entkopplungsmatrix  $\Lambda$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

# Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- Nullspalte in  $\Lambda$  wegen „Defekt“ in Auftreten von  $\tau_2$   
→  $\Lambda$  nicht regulär,  $r$  nicht wohldefiniert, statische Rückführung also nicht anwendbar

# Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- Nullspalte in  $\Lambda$  wegen „Defekt“ in Auftreten von  $\tau_2$   
→  $\Lambda$  nicht regulär,  $r$  nicht wohldefiniert, statische Rückführung also nicht anwendbar  
→  $\Lambda$  Modifikation des Systems, so dass  $r$  wohldefiniert

# Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- Nullspalte in  $\Lambda$  wegen „Defekt“ in Auftreten von  $\tau_2$   
→  $\Lambda$  nicht regulär,  $r$  nicht wohldefiniert, statische Rückführung also nicht anwendbar
- $\Lambda$  Modifikation des Systems, so dass  $r$  wohldefiniert
- **dynamische Erweiterung**

# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung

- Vorschalten von Integratoren vor  $\tau$ :

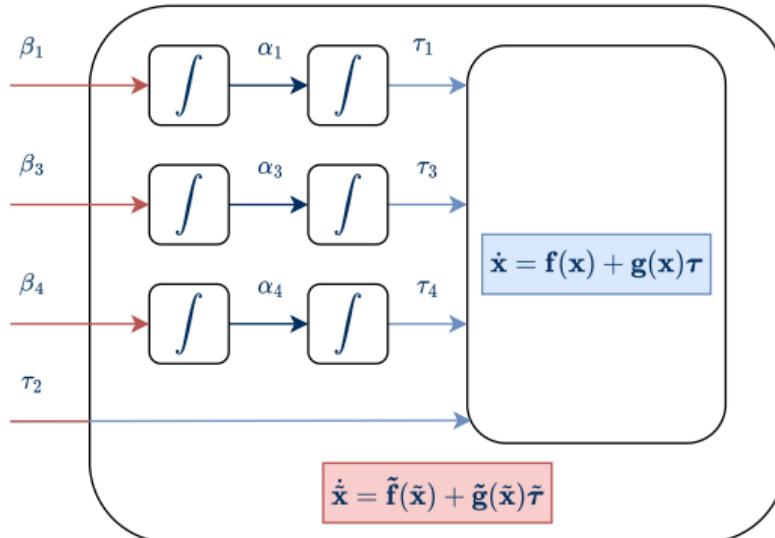
$$\beta_1 := \dot{\alpha}_1 \quad \alpha_1 := \dot{\tau}_1$$

$$\beta_3 := \dot{\alpha}_3 \quad \alpha_3 := \dot{\tau}_3$$

$$\beta_4 := \dot{\alpha}_4 \quad \alpha_4 := \dot{\tau}_4$$

Index $i$	1	2	3	4
Komponente des vektoriellen relativen Grades $r_i$	2	2	2	2
explizites Auftreten von $\tau_j$ bei $y_i^{(r_i)}$	$\tau_3, \tau_4$	$\tau_3, \tau_4$	$\tau_3, \tau_4$	$\tau_1, \tau_3$
$y_j^{(k)}$ mit minimalem $k$ , bei dem $\tau_i$ zuerst auftritt	$y_4^{(2)}$	$y_{1,2,3}^{(4)}$	$y_{1,2,3,4}^{(2)}$	$y_{1,2,3}^{(2)}$

# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung



$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)^T$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = (\beta_1, \beta_3, \beta_4, \tau_2)^T$$

$$\tilde{\mathbf{x}} := (\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)^T$$

- Vorschalten von Integratoren vor  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\beta_1 := \dot{\alpha}_1 \quad \alpha_1 := \dot{\tau}_1$$

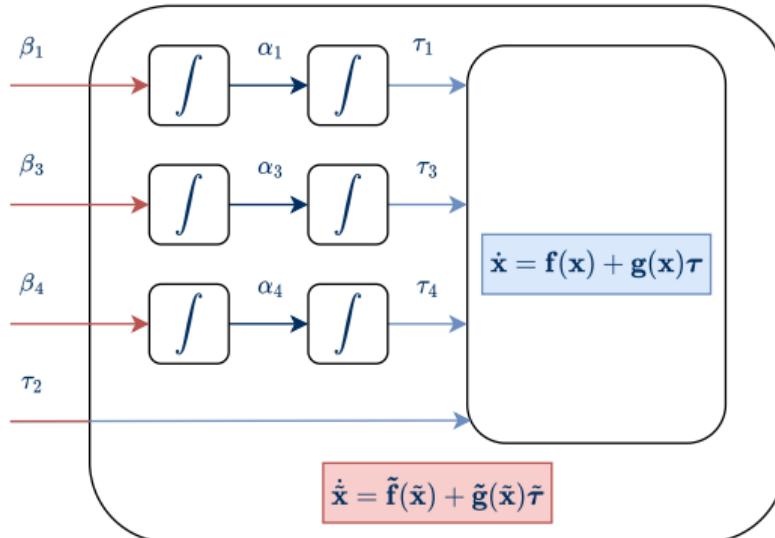
$$\beta_3 := \dot{\alpha}_3 \quad \alpha_3 := \dot{\tau}_3$$

$$\beta_4 := \dot{\alpha}_4 \quad \alpha_4 := \dot{\tau}_4$$

→ Erweiterung des ZRM  $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}$  mit  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\mathbf{x}}$

→  $r_i = 4$  für  $i = 1, \dots, 4$

# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung



- Vorschalten von Integratoren vor  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\beta_1 := \dot{\alpha}_1 \quad \alpha_1 := \dot{\tau}_1$$

$$\beta_3 := \dot{\alpha}_3 \quad \alpha_3 := \dot{\tau}_3$$

$$\beta_4 := \dot{\alpha}_4 \quad \alpha_4 := \dot{\tau}_4$$

→ Erweiterung des ZRM  $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}$  mit  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\mathbf{x}}$

→  $r_i = 4$  für  $i = 1, \dots, 4$

→ neue Entkopplungsmatrix ( $* \neq 0$ ):

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{regulär!}$$

# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

- mit  $\tilde{\bullet}$ -Größen nun Entkopplung und Stabilisierung analog statischer Rückführung:

$$\tilde{\tau} = \mathbf{u} = \tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}))$$

# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

- mit  $\tilde{\tau}$ -Größen nun Entkopplung und Stabilisierung analog statischer Rückführung:

$$\tilde{\tau} = \mathbf{u} = \tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}))$$

- funktionale Zusammenhänge der Folgeregelung:

$$\beta_1 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_3 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_4 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\tau_2 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

## Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

- mit  $\tilde{\bullet}$ -Größen nun Entkopplung und Stabilisierung analog statischer Rückführung:

$$\tilde{\tau} = \mathbf{u} = \tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}))$$

- funktionale Zusammenhänge der Folgeregelung:

$$\beta_1 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_3 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_4 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\tau_2 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

- Anpassung der Trajektorienplanung, da Vorgabe von  $\beta_i$  (Doppelintegratoren)

## Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

- mit  $\tilde{\bullet}$ -Größen nun Entkopplung und Stabilisierung analog statischer Rückführung:

$$\tilde{\tau} = \mathbf{u} = \tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}))$$

- funktionale Zusammenhänge der Folgeregelung:

$$\beta_1 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_3 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

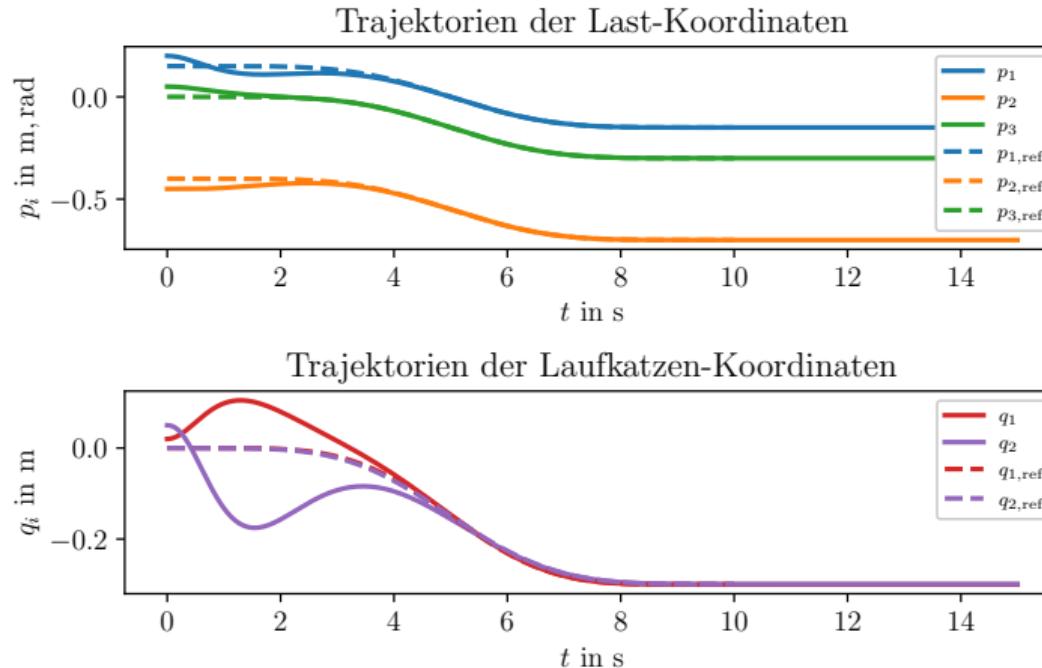
$$\beta_4 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\tau_2 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

- Anpassung der Trajektorienplanung, da Vorgabe von  $\beta_i$  (Doppelintegratoren)  
→ für alle  $y_i$  nun 5 Bedingungen je Rand  
→ Ansatz von Polynomen der Ordnung 9

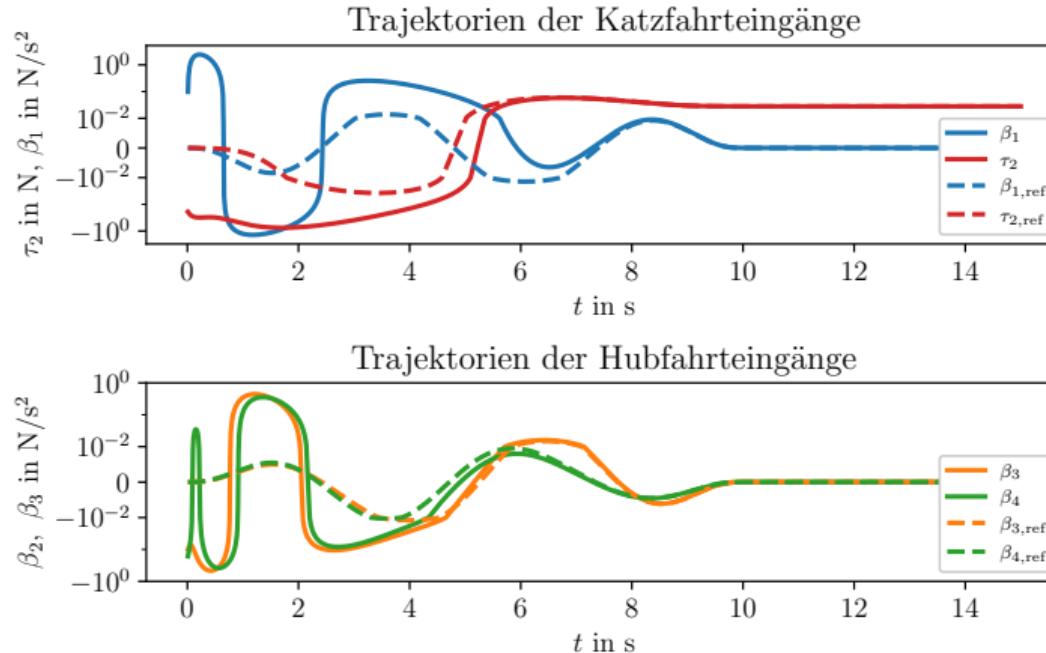
# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

## Simulation:



# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

## Simulation:



# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

## Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern

# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

## Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern
- hohe „Trägheit“ des Systems beim Ausregeln von Folgefehlern wegen Integratoren  
→ Pole der Fehlerdynamik weiter in LHE platzieren

# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

## Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern
- hohe „Trägheit“ des Systems beim Ausregeln von Folgefehlern wegen Integratoren  
→ Pole der Fehlerdynamik weiter in LHE platzieren
- relativ komplexes Stellgesetz mit >20 000 Operationen je Eingangsgröße  
→ lange Simulationszeiten, hohe Ressourcenanforderungen bei Implementierungen

# Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

## Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern
- hohe „Trägheit“ des Systems beim Ausregeln von Folgefehlern wegen Integratoren  
→ Pole der Fehlerdynamik weiter in LHE platzieren
- relativ komplexes Stellgesetz mit >20 000 Operationen je Eingangsgröße  
→ lange Simulationszeiten, hohe Ressourcenanforderungen bei Implementierungen  
→ vereinfachter heuristischer Ansatz mit **exact feedforward linearization**

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

- aus ZRM  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$  mit  $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T$ :

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}$$

Brückenkransystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\dot{\boldsymbol{\theta}}, 0, -g, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

- aus ZRM  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$  mit  $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T$ :

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}$$

→ **Heuristik:** Entkopplungsmatrix  $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}}) = \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})$

Brückenkransystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\dot{\boldsymbol{\theta}}, 0, -g, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- **Heuristik:** Annahme der Dynamik der Ordnung 2 des Fehlers  $e := \theta - \theta_{\text{ref}}$  für **alle** Komponenten des Koordinatenvektors  $\theta = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2)^T$ :

$$v := \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_{\text{ref}} - c_1^T \dot{e} - c_0^T e$$

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- **Heuristik:** Annahme der Dynamik der Ordnung 2 des Fehlers  $e := \theta - \theta_{\text{ref}}$  für **alle** Komponenten des Koordinatenvektors  $\theta = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2)^T$ :

$$\mathbf{v} := \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}$$

- Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$  und neuer virtueller Eingang  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$  mit verschiedener Dimension
- Inversenbildung von  $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$  nicht direkt möglich

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- **Heuristik:** Annahme der Dynamik der Ordnung 2 des Fehlers  $e := \theta - \theta_{\text{ref}}$  für **alle** Komponenten des Koordinatenvektors  $\theta = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2)^T$ :

$$\mathbf{v} := \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}$$

→ Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$  und neuer virtueller Eingang  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$  mit verschiedener Dimension  
→ Inversenbildung von  $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$  nicht direkt möglich

⇒ **Bildung einer Pseudoinversen (PI):**

1. Methode: Moore-Penrose-PI     $\mathbf{g}_{[6,10]}^+ = (\mathbf{g}_{[6,10]}^T \mathbf{g}_{[6,10]})^{-1} \mathbf{g}_{[6,10]}^T$

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- **Heuristik:** Annahme der Dynamik der Ordnung 2 des Fehlers  $e := \theta - \theta_{\text{ref}}$  für **alle** Komponenten des Koordinatenvektors  $\theta = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2)^T$ :

$$\mathbf{v} := \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}$$

→ Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$  und neuer virtueller Eingang  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$  mit verschiedener Dimension  
→ Inversenbildung von  $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$  nicht direkt möglich

⇒ **Bildung einer Pseudoinversen (PI):**

1. Methode: Moore-Penrose-PI  $\mathbf{g}_{[6,10]}^+ = (\mathbf{g}_{[6,10]}^T \mathbf{g}_{[6,10]})^{-1} \mathbf{g}_{[6,10]}^T$
2. Methode: Selektion der letzten 4 Gleichungen des ZRM:

$$\mathbf{S} \cdot \ddot{\theta} = \mathbf{S} \cdot (\ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{f}_{[6,10]}(\theta) + \mathbf{S} \cdot \mathbf{g}_{[6,10]}(\theta) \mathbf{u}, \quad \mathbf{S} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{g}_{[7,10]} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{g}_{[6,10]}$$

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

## Stellgesetze:

### 1. Methode Moore-Penrose-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

## Stellgesetze:

1. Methode Moore-Penrose-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

2. Methode Selektions-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[7,10]}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

## Stellgesetze:

### 1. Methode Moore-Penrose-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

### 2. Methode Selektions-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[7,10]}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

→ keine Stabilität per Konstruktion und durch  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}} = \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}(t)$  **zeitvariantes** System

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

## Stellgesetze:

1. Methode Moore-Penrose-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

2. Methode Selektions-PI:

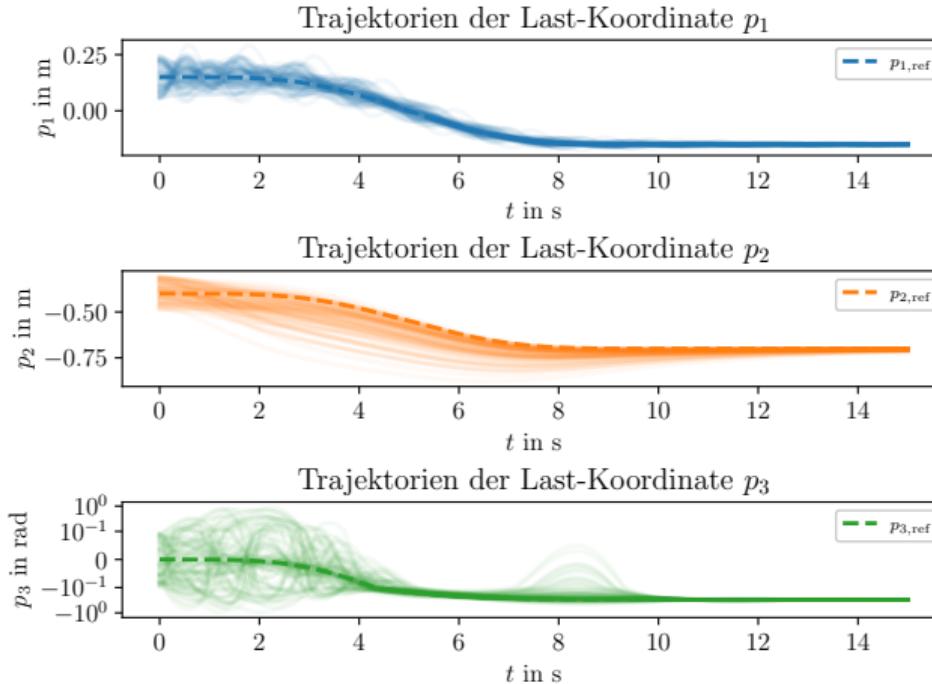
$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[7,10]}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

→ keine Stabilität per Konstruktion und durch  $\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}} = \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}(t)$  **zeitvariantes** System

→ Ensemble-Simulationen (alternativ: zeitvarianter Stabilitätsnachweis)

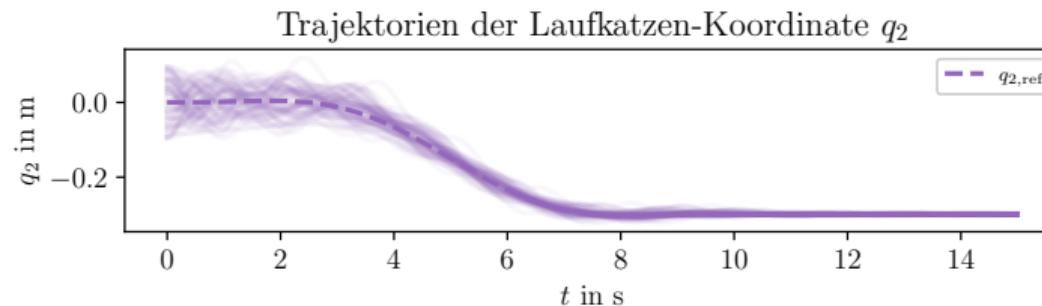
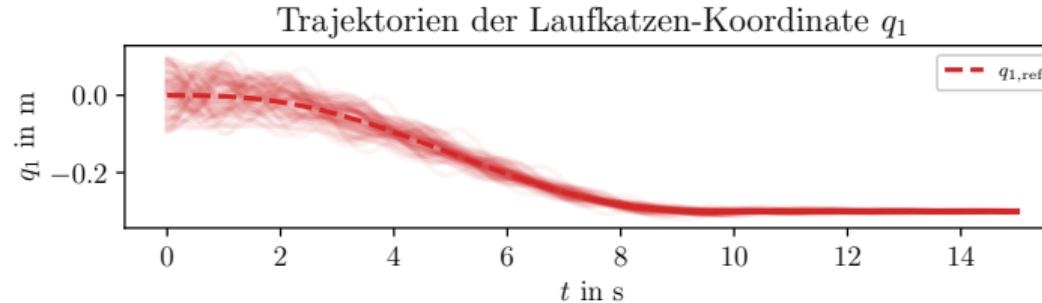
# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

## Simulation:



# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

## Simulation:



# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

## Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

## Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern
- kein formaler Stabilitätsnachweis, auch kein Gegenbeispiel aus Simulationen

# Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

## Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern
- kein formaler Stabilitätsnachweis, auch kein Gegenbeispiel aus Simulationen
- Stellgesetz mit Moore-Penrose-PI mit etwa 2 000 Operationen je Eingangskomponente, für Selektions-PI weniger als 140  
→ viel kürzere Simulationszeiten, geringere Ressourcenanforderungen für Implementierung

# Gliederung

- System- und Problembeschreibung
  - Analytische Modellbildung
  - Flachheitsanalyse
  - Steuerungs- und Regelungsentwurf
- **Zusammenfassung und Ausblick**

# Zusammenfassung und Ausblick

- Modellierung des Brückenkrans als nichtlineares Mehrgrößensystem in ODE-Form durch LG2  
→ gute Eignung für Simulation und Flachheitsanalyse

# Zusammenfassung und Ausblick

- Modellierung des Brückenkrans als nichtlineares Mehrgrößensystem in ODE-Form durch LG2  
→ gute Eignung für Simulation und Flachheitsanalyse
- Flachheitsanalyse und Ermittlung eines flachen Ausgangs  $y$  für das Doppelkransystem mit CAS SymPy

# Zusammenfassung und Ausblick

- Modellierung des Brückenkrans als nichtlineares Mehrgrößensystem in ODE-Form durch LG2  
→ gute Eignung für Simulation und Flachheitsanalyse
- Flachheitsanalyse und Ermittlung eines flachen Ausgangs  $y$  für das Doppelkransystem mit CAS SymPy
- Planung polynombasierter Trajektorien für  $y$  zur Ruhelagenüberführung  
→ Steuerung aus Parametrisierung des Eingangs  $\tau(y, \dot{y})$

# Zusammenfassung und Ausblick

- Regelung durch statische Rückführung nicht möglich  
→ Entkopplungsmatrix  $\Lambda$  nicht invertierbar

# Zusammenfassung und Ausblick

- Regelung durch statische Rückführung nicht möglich  
→ Entkopplungsmatrix  $\Lambda$  nicht invertierbar
- dynamische Erweiterung mit linearer Fehlerdynamik  
→ per Konstruktion stabil, allerdings relativ komplexes Stellgesetz

# Zusammenfassung und Ausblick

- Regelung durch statische Rückführung nicht möglich  
→ Entkopplungsmatrix  $\Lambda$  nicht invertierbar
- dynamische Erweiterung mit linearer Fehlerdynamik  
→ per Konstruktion stabil, allerdings relativ komplexes Stellgesetz  
→ weiterer heuristischer Ansatz zur Vereinfachung

# Zusammenfassung und Ausblick

- Regelung durch statische Rückführung nicht möglich  
→ Entkopplungsmatrix  $\Lambda$  nicht invertierbar
- dynamische Erweiterung mit linearer Fehlerdynamik  
→ per Konstruktion stabil, allerdings relativ komplexes Stellgesetz
- weiterer heuristischer Ansatz zur Vereinfachung
- exact feedforward linearization mit Fehlerdynamik 2ter Ordnung in allen Koordinaten  
→ relativ kompaktes Stellgesetz, Stabilität nur durch Ensemble-Simulationen untersucht

# Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierung auf Demonstratorssystem unter realen Echtzeitanforderungen

# Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierung auf Demonstratorssystem unter realen Echtzeitanforderungen
- Test reiner Vorsteuerung und Abschätzung der Größe der Modellabweichung

# Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierung auf Demonstratorssystem unter realen Echtzeitanforderungen
  - Test reiner Vorsteuerung und Abschätzung der Größe der Modellabweichung
- danach Regelungsansätze unter Stellgrößenbeschränkung und Überwachung der Stabilität

# Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierung auf Demonstratorssystem unter realen Echtzeitanforderungen
- Test reiner Vorsteuerung und Abschätzung der Größe der Modellabweichung  
→ danach Regelungsansätze unter Stellgrößenbeschränkung und Überwachung der Stabilität
- Stabilitätsuntersuchung der exact feedforward linearization als zeitvariantes System

# Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierung auf Demonstratorssystem unter realen Echtzeitanforderungen
- Test reiner Vorsteuerung und Abschätzung der Größe der Modellabweichung  
→ danach Regelungsansätze unter Stellgrößenbeschränkung und Überwachung der Stabilität
- Stabilitätsuntersuchung der exact feedforward linearization als zeitvariantes System
- bestärkendes Lernen als weiterer Ansatz ggf. mit Referenzlernen auf Basis bisheriger Regelungen

# Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierung auf Demonstratorssystem unter realen Echtzeitanforderungen
- Test reiner Vorsteuerung und Abschätzung der Größe der Modellabweichung  
→ danach Regelungsansätze unter Stellgrößenbeschränkung und Überwachung der Stabilität
- Stabilitätsuntersuchung der exact feedforward linearization als zeitvariantes System
- bestärkendes Lernen als weiterer Ansatz ggf. mit Referenzlernen auf Basis bisheriger Regelungen
- Untersuchung der Robustheit gegenüber Modellabweichungen, Störeingriffen

# Ergänzungsfolien

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten  $q$ , nicht direkt aktivierte Koordinaten  $p$

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten  $q$ , nicht direkt aktivierte Koordinaten  $p$
- kinetische Energie  $T(\theta, \dot{\theta})$ , potentielle Energie  $V(\theta)$

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten  $q$ , nicht direkt aktivierte Koordinaten  $p$
- kinetische Energie  $T(\theta, \dot{\theta})$ , potentielle Energie  $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten  $q$ , nicht direkt aktivierte Koordinaten  $p$
- kinetische Energie  $T(\theta, \dot{\theta})$ , potentielle Energie  $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft  $Q = f - D$

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten  $q$ , nicht direkt aktivierte Koordinaten  $p$
- kinetische Energie  $T(\theta, \dot{\theta})$ , potentielle Energie  $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft  $Q = f - D$
- äußere Stellkraft  $f$ , interne Reibungskraft  $D$

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten  $q$ , nicht direkt aktivierte Koordinaten  $p$
- kinetische Energie  $T(\theta, \dot{\theta})$ , potentielle Energie  $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft  $Q = f - D$
- äußere Stellkraft  $f$ , interne Reibungskraft  $D$

## Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten  $q$ , nicht direkt aktivierte Koordinaten  $p$
- kinetische Energie  $T(\theta, \dot{\theta})$ , potentielle Energie  $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft  $Q = f - D$
- äußere Stellkraft  $f$ , interne Reibungskraft  $D$

## Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

- $\theta$  sind unabhängig (ohne Zwangsbedingung verkoppelt)

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten  $q$ , nicht direkt aktivierte Koordinaten  $p$
- kinetische Energie  $T(\theta, \dot{\theta})$ , potentielle Energie  $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft  $Q = f - D$
- äußere Stellkraft  $f$ , interne Reibungskraft  $D$

## Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

- $\theta$  sind unabhängig (ohne Zwangsbedingung verkoppelt)
- Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n$$

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten  $q$ , nicht direkt aktivierte Koordinaten  $p$
- kinetische Energie  $T(\theta, \dot{\theta})$ , potentielle Energie  $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft  $Q = f - D$
- äußere Stellkraft  $f$ , interne Reibungskraft  $D$

## Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

- $\theta$  sind unabhängig (ohne Zwangsbedingung verkoppelt)
- Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n$$

- Woher  $Q_i$ ?

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- verallgemeinerte Kraft  $Q = f - D$

# Lagrange-Formalismus

## Symbole:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- verallgemeinerte Kraft  $Q = f - D$
- Richtungsvektor zu  $k$ -tem massebehaftetem Partikel  $r_k$ , Stellkraft  $F_k$  entlang  $r_k$

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- verallgemeinerte Kraft  $Q = f - D$
- Richtungsvektor zu  $k$ -tem massebehaftetem Partikel  $r_k$ , Stellkraft  $F_k$  entlang  $r_k$
- virtuelle Arbeit  $\delta W$ , virtuelle Verschiebung von Partikel  $\delta r_k$  und Koordinate  $\theta_i$

# Lagrange-Formalismus

## Symbole:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (q, p)^T$
- verallgemeinerte Kraft  $Q = f - D$
- Richtungsvektor zu  $k$ -tem massebehaftetem Partikel  $r_k$ , Stellkraft  $F_k$  entlang  $r_k$
- virtuelle Arbeit  $\delta W$ , virtuelle Verschiebung von Partikel  $\delta r_k$  und Koordinate  $\theta_i$

## Prinzip der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der $Q_i$ :

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$
- verallgemeinerte Kraft  $\mathbf{Q} = \mathbf{f} - \mathbf{D}$
- Richtungsvektor zu  $k$ -tem massebehaftetem Partikel  $\mathbf{r}_k$ , Stellkraft  $\mathbf{F}_k$  entlang  $\mathbf{r}_k$
- virtuelle Arbeit  $\delta W$ , virtuelle Verschiebung von Partikel  $\delta \mathbf{r}_k$  und Koordinate  $\theta_i$

## Prinzip der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der $Q_i$ :

- $\delta W = \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots + \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_n} \delta \theta_n$

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$
- verallgemeinerte Kraft  $\mathbf{Q} = \mathbf{f} - \mathbf{D}$
- Richtungsvektor zu  $k$ -tem massebehaftetem Partikel  $\mathbf{r}_k$ , Stellkraft  $\mathbf{F}_k$  entlang  $\mathbf{r}_k$
- virtuelle Arbeit  $\delta W$ , virtuelle Verschiebung von Partikel  $\delta \mathbf{r}_k$  und Koordinate  $\theta_i$

## Prinzip der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der $Q_i$ :

- $\delta W = \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots + \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_n} \delta \theta_n$
- $\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \delta \theta_i$

# Lagrange-Formalismus

## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$
- verallgemeinerte Kraft  $\mathbf{Q} = \mathbf{f} - \mathbf{D}$
- Richtungsvektor zu  $k$ -tem massebehaftetem Partikel  $\mathbf{r}_k$ , Stellkraft  $\mathbf{F}_k$  entlang  $\mathbf{r}_k$
- virtuelle Arbeit  $\delta W$ , virtuelle Verschiebung von Partikel  $\delta \mathbf{r}_k$  und Koordinate  $\theta_i$

## Prinzip der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der $Q_i$ :

- $\delta W = \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots + \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_n} \delta \theta_n$
- $\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \delta \theta_i$
- $\delta W = \sum_{k=1}^l \delta \mathbf{r}_k^T \mathbf{F}_k = Q_1 \delta \theta_1 + \dots + Q_n \delta \theta_n$

# Lagrange-Formalismus

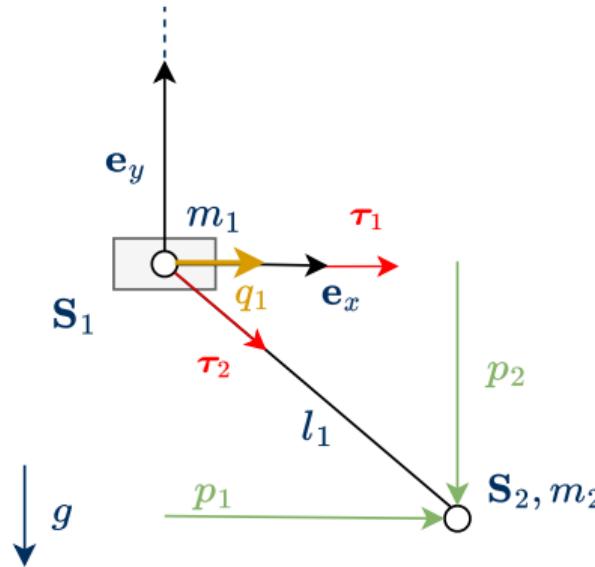
## Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten  $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$
- verallgemeinerte Kraft  $\mathbf{Q} = \mathbf{f} - \mathbf{D}$
- Richtungsvektor zu  $k$ -tem massebehaftetem Partikel  $\mathbf{r}_k$ , Stellkraft  $\mathbf{F}_k$  entlang  $\mathbf{r}_k$
- virtuelle Arbeit  $\delta W$ , virtuelle Verschiebung von Partikel  $\delta \mathbf{r}_k$  und Koordinate  $\theta_i$

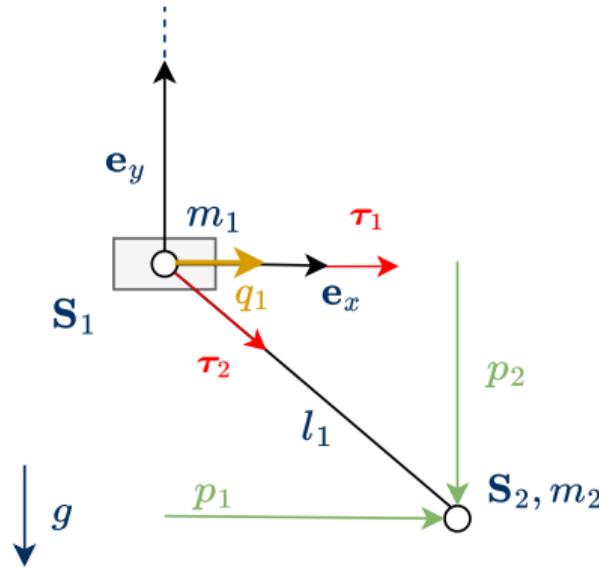
## Prinzip der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der $Q_i$ :

- $\delta W = \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots + \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_n} \delta \theta_n$
  - $\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \delta \theta_i$
  - $\delta W = \sum_{k=1}^l \delta \mathbf{r}_k^T \mathbf{F}_k = Q_1 \delta \theta_1 + \dots + Q_n \delta \theta_n$
- $$\rightarrow Q_i = \sum_{k=1}^l \left( \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \right)^T \mathbf{F}_k = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

# Analytisches Modell Einzelkran

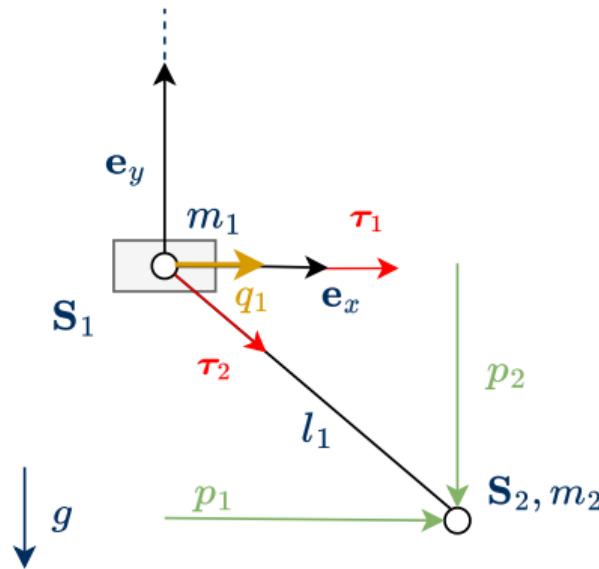


# Analytisches Modell Einzelkran



- Massen bei  $\mathbf{S}_1 = (q_1, 0)^T$ ,  $\mathbf{S}_2 = (p_1, p_2)^T$
- variable Seillänge  $l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2}$

# Analytisches Modell Einzelkran

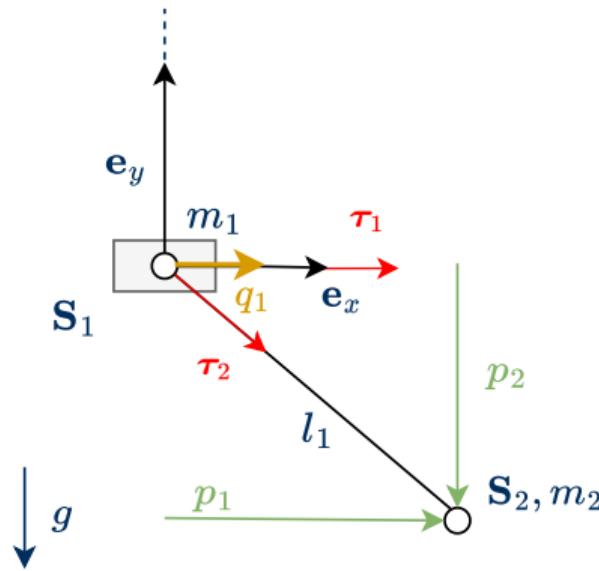


## Energien:

- $T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{S}}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{S}}_2^T \dot{\mathbf{S}}_2 = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2}$
- $V = m_2 g \mathbf{S}_2^T \mathbf{e}_y = m_2 g p_2$

- Massen bei  $\mathbf{S}_1 = (q_1, 0)^T$ ,  $\mathbf{S}_2 = (p_1, p_2)^T$
- variable Seillänge  $l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2}$

# Analytisches Modell Einzelkran



## Energien:

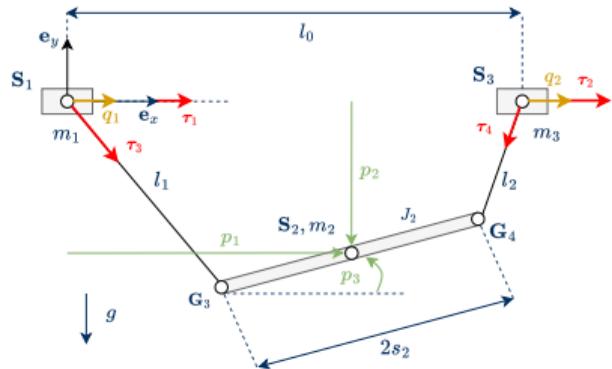
- $T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{S}}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{S}}_2^T \dot{\mathbf{S}}_2 = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2}$
- $V = m_2 g \mathbf{S}_2^T \mathbf{e}_y = m_2 g p_2$

## Verallgemeinerte Kraft aus virtueller Arbeit:

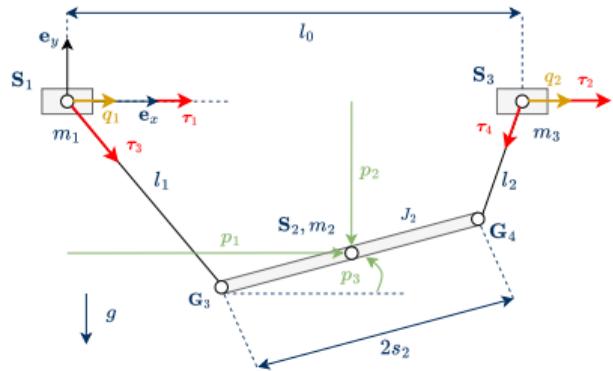
- $\mathbf{F}_1 = (\tau_1, 0)^T, \mathbf{F}_2 = \left( \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1}, \frac{p_2 \tau_2}{l_1} \right)^T$   
 $\rightarrow \mathbf{Q} = \left( \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1}, \frac{p_2 \tau_2}{l_1}, \tau_1 - \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} \right)^T$

- Massen bei  $\mathbf{S}_1 = (q_1, 0)^T, \mathbf{S}_2 = (p_1, p_2)^T$
- variable Seillänge  $l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2}$

# Analytisches Modell Doppelkran



# Analytisches Modell Doppelkran

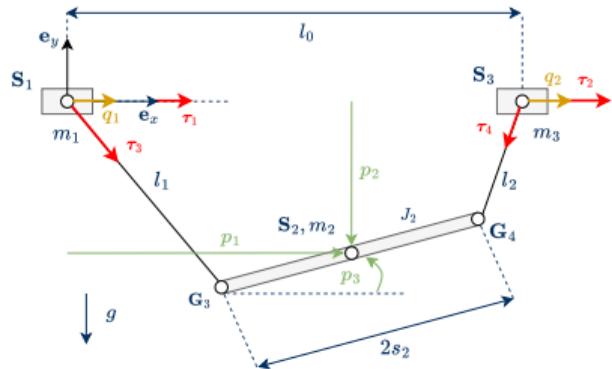


**variable Seillängen:**

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

# Analytisches Modell Doppelkran



## Energien:

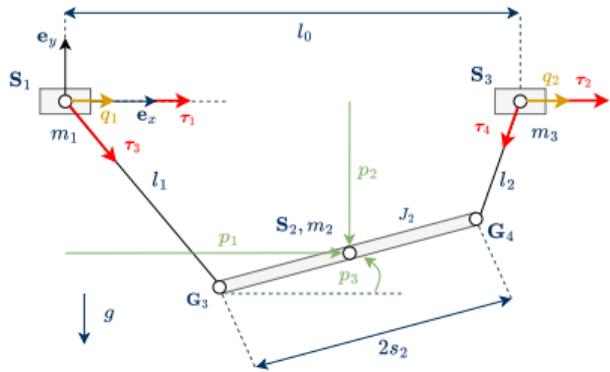
- $T = \frac{J_2 \dot{p}_3^2}{2} + \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{q}_2^2}{2}$
- $V = m_2 g p_2$

## variable Seillängen:

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

# Analytisches Modell Doppelkran



**variable Seillängen:**

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

**Energien:**

- $T = \frac{J_2 \dot{p}_3^2}{2} + \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{q}_2^2}{2}$
- $V = m_2 g p_2$

**Stellkräfte entlang Massepartikel:**

$$\mathbf{F}_1 = (\tau_1, 0)^T,$$

$$\mathbf{F}_2 = (\tau_2, 0)^T,$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_3(p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))}{l_1} \\ \frac{\tau_3(p_2 - s_2 \sin(p_3))}{l_1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))}{l_2} \\ \frac{\tau_4(p_2 + s_2 \sin(p_3))}{l_2} \end{pmatrix}$$

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Jacobi-Matrix  $J_i$  der  $i$  bisher nicht eliminierte Systemgleichungen bezüglich nicht eliminierte Eingangskomponenten  $u_{m-(n-i)}$  (später analog für  $x_{i+m}$ ):

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_i$  der  $i$  bisher nicht eliminierte Systemgleichungen bezüglich nicht eliminierte Eingangskomponenten  $\mathbf{u}_{m-(n-i)}$  (später analog für  $\mathbf{x}_{i+m}$ ):

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & \varepsilon & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_i$  der  $i$  bisher nicht eliminierte Systemgleichungen bezüglich nicht eliminierte Eingangskomponenten  $\mathbf{u}_{m-(n-i)}$  (später analog für  $\mathbf{x}_{i+m}$ ):

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & \varepsilon & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

→ Identifikation einer Spalte mit nur einem nicht-Null-Eintrag

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_i$  der  $i$  bisher nicht eliminierte Systemgleichungen bezüglich nicht eliminierte Eingangskomponenten  $\mathbf{u}_{m-(n-i)}$  (später analog für  $\mathbf{x}_{i+m}$ ):

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & \varepsilon & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

- Identifikation einer Spalte mit nur einem nicht-Null-Eintrag
- Elimination der mit Spalte korrespondierenden Eingangskomponente und Zeile korrespondierender Gleichung

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Wie vorgehen, wenn keine solche Spalte auffindbar?

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Wie vorgehen, wenn keine solche Spalte auffindbar?  
→ Transformation der Systemgleichungen mit Matrix  $\mathbf{T}_i$ :

$$\mathbf{T}_i \mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-(n-i)} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times (m-(n-i))} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Wie vorgehen, wenn keine solche Spalte auffindbar?  
→ Transformation der Systemgleichungen mit Matrix  $\mathbf{T}_i$ :

$$\mathbf{T}_i \mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-(n-i)} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times (m-(n-i))} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Konstruktion von  $\mathbf{T}_i$  aus linkem Orthokomplement  $\mathbf{J}_i^{\text{L}\perp}$  und Pseudoinverser  $\mathbf{J}_i^{\text{L}+}$ :

$$\mathbf{J}_i^{\text{L}+} \mathbf{J}_i = \mathbf{I}_{m-(n-i)}, \quad \mathbf{J}_i^{\text{L}\perp} \mathbf{J}_i = \mathbf{0}_{(n-m) \times (m-(n-i))} \quad \Rightarrow \mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_i^{\text{L}+} \\ \mathbf{J}_i^{\text{L}\perp} \end{pmatrix}$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ( $i = 3$ ) Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich  $\mathbf{u}_2 = (\tau_1, \tau_2)^T$ :

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \\ gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ 0 & -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -1 & \frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix} \\ m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \end{aligned}$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ( $i = 3$ ) Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich  $\mathbf{u}_2 = (\tau_1, \tau_2)^T$ :

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \\ gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ 0 & -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -1 & \frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix} \\ m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \end{aligned}$$

→ Elimination von  $\tau_1$  und letzter Gleichung

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ( $i = 2$ ) Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich  $\mathbf{u}_1 = \tau_2$ :

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \\ gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix}$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ( $i = 2$ ) Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich  $\mathbf{u}_1 = \tau_2$ :

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \\ gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix}$$

→ keine Spalte mit nur einem nicht-Null-Eintrag, also Transformation  $\mathbf{T}_2$  nötig:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_2^{\text{L}+} &= \left( (J_{2,(1,1)})^{-1} \mathbf{0}_{1 \times 1} \right), \mathbf{J}_2^{\text{L}\perp} = (-J_{2,(2,1)} \quad J_{2,(1,1)}) \\ \Rightarrow \mathbf{T}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{p_1^2 - 2p_1q_1 + p_2^2 + q_1^2}}{-p_1 + q_1} & 0 \\ \frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} & \frac{-p_1 + q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ( $i = 2$ ) transformierte Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich  $\mathbf{u}_1 = \tau_2$ :

$$\frac{\left( -m_2 \ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + \tau_2 (p_1 - q_1) \right)}{(p_1 - q_1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$g \frac{m_2 (-gp_1 + gq_1 - p_1 \ddot{p}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + \ddot{p}_2 q_1)}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1 q_1 + p_2^2 + q_1^2}} = 0$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ( $i = 2$ ) transformierte Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich  $\mathbf{u}_1 = \tau_2$ :

$$\frac{\left( -m_2 \ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + \tau_2 (p_1 - q_1) \right)}{(p_1 - q_1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$g \frac{m_2 (-gp_1 + gq_1 - p_1 \ddot{p}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + \ddot{p}_2 q_1)}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1 q_1 + p_2^2 + q_1^2}} = 0$$

→ Elimination von  $\tau_2$  und erster transformierter Gleichung

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ( $i = 2$ ) transformierte Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich  $\mathbf{u}_1 = \tau_2$ :

$$\frac{\left( -m_2 \ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + \tau_2 (p_1 - q_1) \right)}{(p_1 - q_1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$g \frac{m_2 (-gp_1 + gq_1 - p_1 \ddot{p}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + \ddot{p}_2 q_1)}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1 q_1 + p_2^2 + q_1^2}} = 0$$

→ Elimination von  $\tau_2$  und erster transformierter Gleichung

→ letzte übrige Gleichung enthält folgende Menge an Systemgrößen:

$$\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

## Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ( $i = 2$ ) transformierte Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich  $\mathbf{u}_1 = \tau_2$ :

$$\frac{\left( -m_2 \ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + \tau_2 (p_1 - q_1) \right)}{(p_1 - q_1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$g \frac{m_2 (-gp_1 + gq_1 - p_1 \ddot{p}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + \ddot{p}_2 q_1)}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1 q_1 + p_2^2 + q_1^2}} = 0$$

→ Elimination von  $\tau_2$  und erster transformierter Gleichung

→ letzte übrige Gleichung enthält folgende Menge an Systemgrößen:

$$\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$$

- rein algebraisches Auftreten von  $q_1$  führt zu Wahl von  $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

**Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :**

- aus letzter transformierter Systemgleichung:

$$q_1 = \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

**Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :**

- aus letzter transformierter Systemgleichung:

$$q_1 = \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}$$

- aus erster transformierter Systemgleichung und Einsetzen von  $q_1(y, \dot{y})$ :

$$\tau_2 = \frac{m_2\ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + \left(p_1 - \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}\right)^2}}{p_1 - \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}}$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

**Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :**

- aus zuerst eliminiertem originaler Systemgleichung:

$$\tau_1 = \frac{m_1 \ddot{q}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + p_1 \tau_2 - q_1 \tau_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}}$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

**Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :**

- aus zuerst eliminiertem originaler Systemgleichung:

$$\tau_1 = \frac{m_1 \ddot{q}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + p_1 \tau_2 - q_1 \tau_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}}$$

→ auch Größen  $q_1, \ddot{q}_1, \tau_2 \notin y$  in dieser Parametrisierung von  $\tau_1$  enthalten

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

**Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :**

- aus zuerst eliminiertem originaler Systemgleichung:

$$\tau_1 = \frac{m_1 \ddot{q}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + p_1 \tau_2 - q_1 \tau_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}}$$

→ auch Größen  $q_1, \ddot{q}_1, \tau_2 \notin y$  in dieser Parametrisierung von  $\tau_1$  enthalten

→ Einsetzen der zweiten Ableitung von  $q_1(y, \ddot{y})$  und  $\tau_2(y, \ddot{y})$ :

$$\begin{aligned}\tau_1 = & \frac{1}{g^3 + 3g^2\ddot{p}_2 + 3g\ddot{p}_2^2 + \ddot{p}_2^3} (g^3 m_1 \ddot{p}_1 + g^3 m_2 \ddot{p}_1 - g^2 m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 - 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 \\& + 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 3g^2 m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 - 2g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 + g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 + 2g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \\& - 4g m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + 2g m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + g m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 + 3g m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 - m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2^2 + m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \\& + 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_2 - 2m_1 p_2 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_1 - 2m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_2 + 2m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^3)\end{aligned}$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

**Parametrisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :**

- Zusammenfassung der Parametrisierungen:

$$\tau_1 = \theta_1 \left( p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2, p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2^{(4)} \right)$$

$$\tau_2 = \theta_2(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

$$q_1 = \Psi_1(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

**Parametisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :**

- Zusammenfassung der Parametrisierungen:

$$\tau_1 = \theta_1 \left( p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2, p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2^{(4)} \right)$$

$$\tau_2 = \theta_2(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

$$q_1 = \Psi_1(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

→ alle Systemgrößen durch flachen Ausgang  $y = (p_1, p_2)^T$  parametrisiert

# Flachheitsanalyse am Einzelkran

**Parametisierung der Systemgrößen durch  $y = (p_1, p_2)^T$ :**

- Zusammenfassung der Parametrisierungen:

$$\tau_1 = \theta_1 \left( p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2, p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2^{(4)} \right)$$

$$\tau_2 = \theta_2(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

$$q_1 = \Psi_1(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

→ alle Systemgrößen durch flachen Ausgang  $y = (p_1, p_2)^T$  parametrisiert

→ konstruktiver Flachheitsnachweis erbracht     $\square$

# Trajektorienfolgeregelung

## Vektorieller relativer Grad

Ein Mehrgrößensystem mit  $m$  Eingangskomponenten  $u_1, \dots, u_m$  und  $m$  Ausgangskomponenten  $y_1, \dots, y_m$  der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

# Trajektorienfolgeregelung

## Vektorieller relativer Grad

Ein Mehrgrößensystem mit  $m$  Eingangskomponenten  $u_1, \dots, u_m$  und  $m$  Ausgangskomponenten  $y_1, \dots, y_m$  der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{h} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  wobei  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  hat an der Stelle  $\gamma \in \mathcal{M}$  den vektoriellen relativen Grad  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$ , falls:

# Trajektorienfolgeregelung

## Vektorieller relativer Grad

Ein Mehrgrößensystem mit  $m$  Eingangskomponenten  $u_1, \dots, u_m$  und  $m$  Ausgangskomponenten  $y_1, \dots, y_m$  der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{h} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  wobei  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  hat an der Stelle  $\gamma \in \mathcal{M}$  den vektoriellen relativen Grad  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$ , falls:

1. Die Lie-Ableitungen  $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\mathbf{x}$  aus einer Umgebung von  $\gamma$  sowie für alle  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  und  $k \in \{0, \dots, r-2\}$  und

### Lie-Ableitung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

$$L_{\mathbf{f}} h_i = d h_i^T \cdot \mathbf{f}$$

# Trajektorienfolgeregelung

## Vektorieller relativer Grad

Ein Mehrgrößensystem mit  $m$  Eingangskomponenten  $u_1, \dots, u_m$  und  $m$  Ausgangskomponenten  $y_1, \dots, y_m$  der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{h} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  wobei  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  hat an der Stelle  $\gamma \in \mathcal{M}$  den vektoriellen relativen Grad  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$ , falls:

1. Die Lie-Ableitungen  $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^{k-1} h_i(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\mathbf{x}$  aus einer Umgebung von  $\gamma$  sowie für alle  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  und  $k \in \{0, \dots, r-2\}$  und
2. die Entkopplungsmatrix  $\Lambda$  im Punkt  $\mathbf{x} = \gamma$  regulär ist:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

## Lie-Ableitung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}} h_i &= d h_i^T \cdot \mathbf{f}\end{aligned}$$