

Konstantin Wrede

TU Dresden, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie; Fraunhofer IIS/EAS

Verteidigung der Studienarbeit: Modellbildung und Reglerentwurf für ein Brückenkransystem

Dresden, 22. November 2022

Gliederung

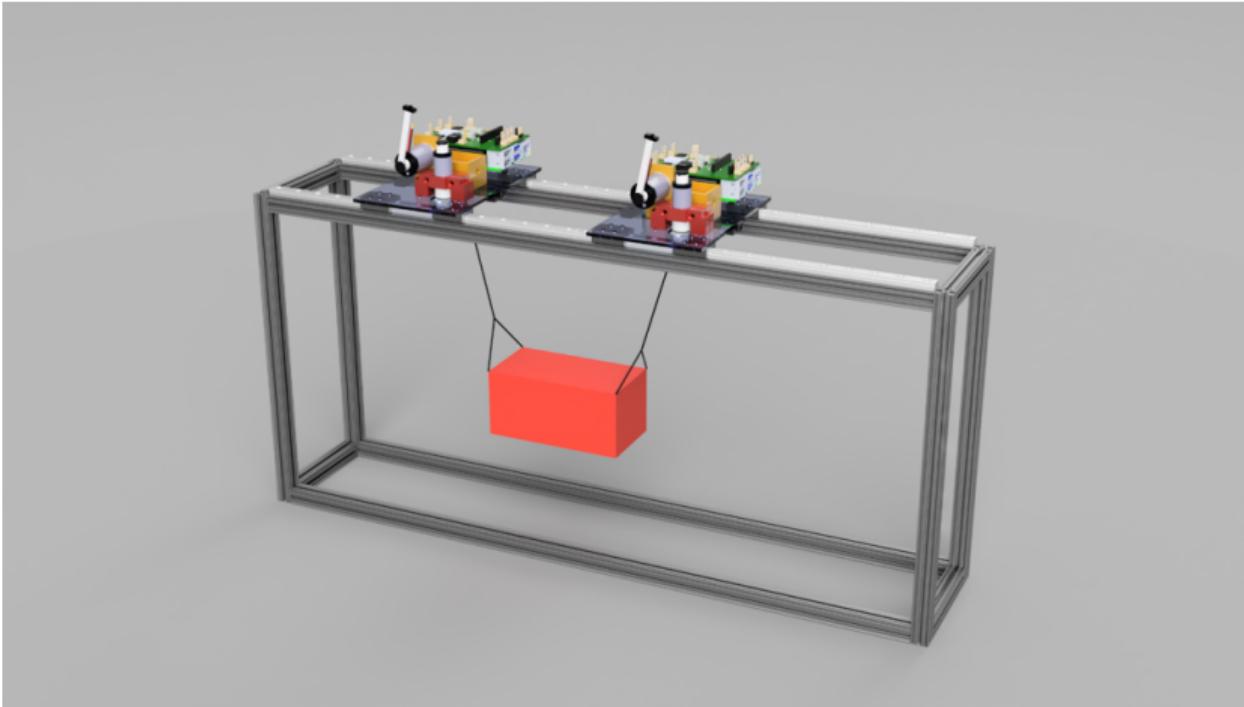
- System- und Problembeschreibung
- Analytische Modellbildung
- Flachheitsanalyse
- Steuerungs- und Regelungsentwurf
- Zusammenfassung und Ausblick

Gliederung

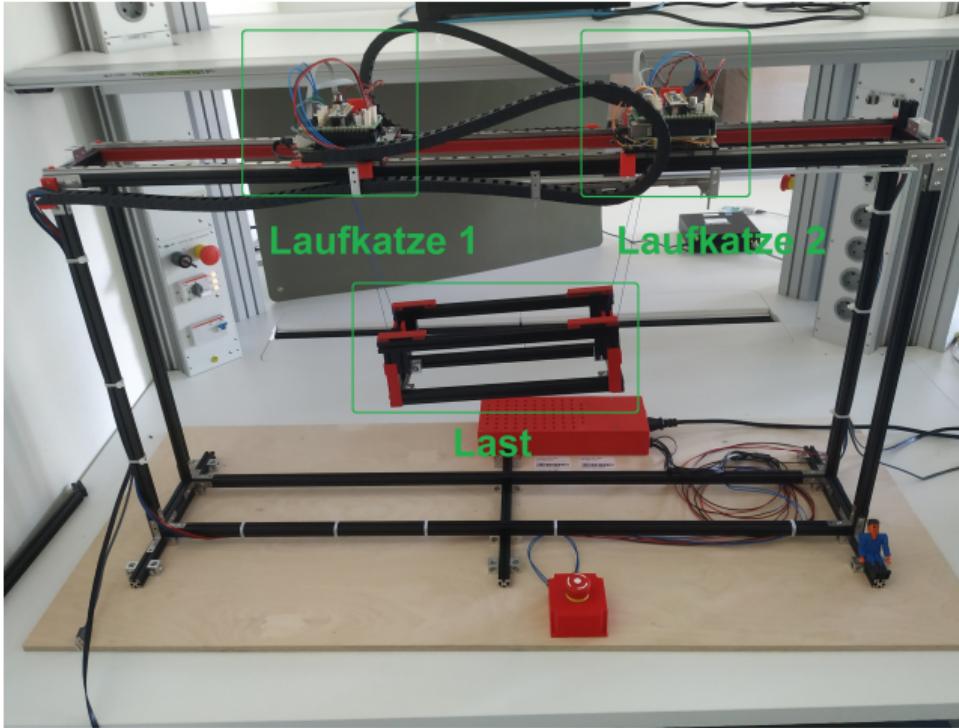
→ System- und Problembeschreibung

- Analytische Modellbildung
- Flachheitsanalyse
- Steuerungs- und Regelungsentwurf
- Zusammenfassung und Ausblick

System- und Problembeschreibung



System- und Problembeschreibung



System- und Problembeschreibung

Zielsetzung:

- Überführung der Last zwischen Ruhelagen in der vertikalen Aufhängungsebene

System- und Problembeschreibung

Zielsetzung:

- Überführung der Last zwischen Ruhelagen in der vertikalen Aufhängungsebene
- zentrale Trajektorienplanung unter Vorgabe von Sollposen der Last

System- und Problembeschreibung

Zielsetzung:

- Überführung der Last zwischen Ruhelagen in der vertikalen Aufhängungsebene
- zentrale Trajektorienplanung unter Vorgabe von Sollposen der Last
- Reglerentwurf auf Basis eines Mehrkörpermodells

Gliederung

System- und Problembeschreibung

→ **Analytische Modellbildung**

Flachheitsanalyse

Steuerungs- und Regelungsentwurf

Zusammenfassung und Ausblick

Analytische Modellbildung

Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt

Analytische Modellbildung

Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last

Analytische Modellbildung

Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert

Analytische Modellbildung

Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert
- Vernachlässigung dissipativer Kräfte

Analytische Modellbildung

Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert
- Vernachlässigung dissipativer Kräfte

Vorgehen bei der Modellierung:

- Modellierung Einzelkran mit Lagrange-Gleichungen zweiter Art (LG2)

Analytische Modellbildung

Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert
- Vernachlässigung dissipativer Kräfte

Vorgehen bei der Modellierung:

- Modellierung Einzelkran mit Lagrange-Gleichungen zweiter Art (LG2)
- Modellierung Doppelkran mit LG2

Analytische Modellbildung

Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert
- Vernachlässigung dissipativer Kräfte

Vorgehen bei der Modellierung:

- Modellierung Einzelkran mit Lagrange-Gleichungen zweiter Art (LG2)
 - Modellierung Doppelkran mit LG2
- ODE-System: gut geeignet für Flachheitsnachweis, Simulation

Analytische Modellbildung

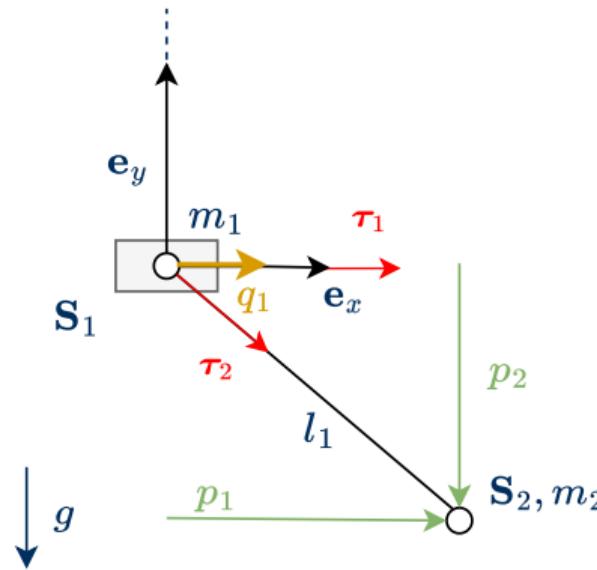
Allgemeine Modellannahmen:

- Bewegung des Systems auf vertikale Ebene beschränkt
- Seile mit vernachlässigbarer Masse gegenüber Laufkatzen, Last
- Last trotz Aussparungen mit homogener Masseverteilung modelliert
- Vernachlässigung dissipativer Kräfte

Vorgehen bei der Modellierung:

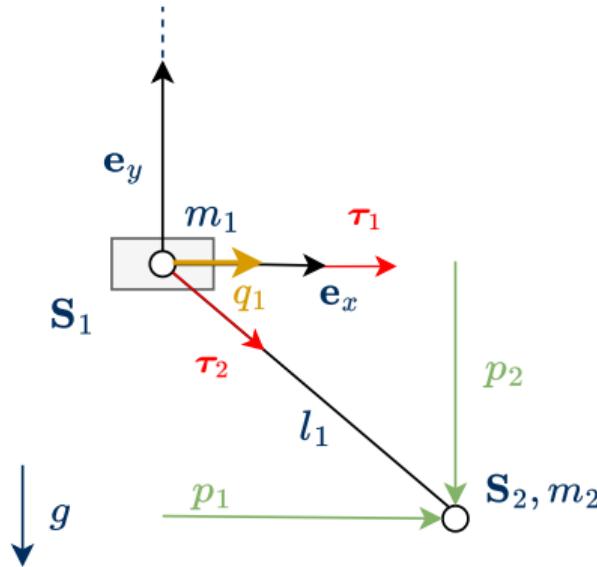
- Modellierung Einzelkran mit Lagrange-Gleichungen zweiter Art (LG2)
 - Modellierung Doppelkran mit LG2
- ODE-System: gut geeignet für Flachheitsnachweis, Simulation
- (Modellierung Doppelkran mit Lagrange-Gleichungen erster Art)
- (DAE-System: intuitive Zwangsbedingungen)

Analytisches Modell Einzelkran



- Massen bei $S_1 = (q_1, 0)^T$, $S_2 = (p_1, p_2)^T$
- variable Seillänge $l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2}$

Analytisches Modell Einzelkran



- Massen bei $S_1 = (q_1, 0)^T$, $S_2 = (p_1, p_2)^T$
- variable Seillänge $l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2}$

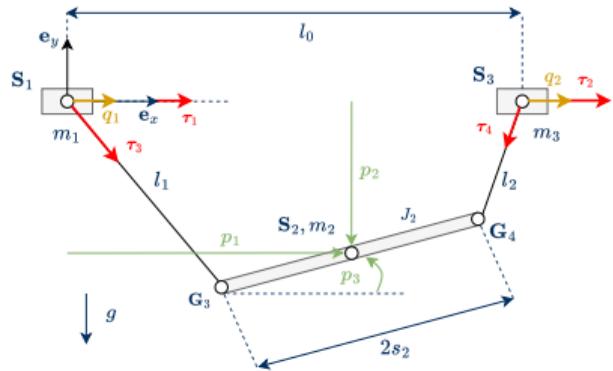
Systemgleichungen aus LG2:

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

Analytisches Modell Doppelkran

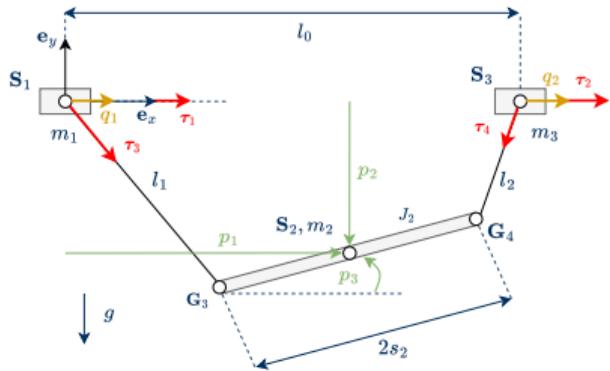


variable Seillängen:

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

Analytisches Modell Doppelkran



variable Seillängen:

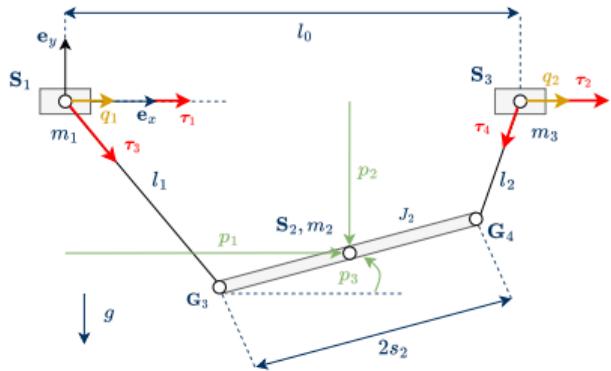
$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

Systemgleichungen aus LG2:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_4 (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos p_3)}{l_2} - \frac{\tau_3 (p_1 - q_1 - s_2 \cos p_3)}{l_1} &= 0 \\ g m_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{\tau_4 (p_2 + s_2 \sin p_3)}{l_2} - \frac{\tau_3 (p_2 s_2 \sin p_3)}{l_1} &= 0 \\ J_2 \ddot{p}_3 - \frac{s_2 \tau_4 (p_2 + s_2 \sin p_3) \cos p_3 + s_2 \tau_4 (p_1 - q_2 + s_2 \cos p_3 - l_0)}{l_2} \\ + \frac{s_2 \tau_3 (p_2 - s_2 \sin p_3) \cos p_3}{l_1} - \frac{s_2 \tau_3 (p_1 - q_1 - s_2 \cos p_3) \sin p_3}{l_1} &= 0 \\ m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_3 (p_1 - q_1 - s_2 \cos p_3)}{l_1} &= 0 \\ m_3 \ddot{q}_2 - \tau_2 + \frac{\tau_4 (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos p_3)}{l_2} &= 0 \end{aligned}$$

Analytisches Modell Doppelkran



variable Seillängen:

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

Eingangsaffines Zustandsraummodell:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} \text{ mit}$$

$$\mathbf{x} = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, 0, -g, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

wobei $* \neq 0$

Gliederung

System- und Problembeschreibung

Analytische Modellbildung

→ **Flachheitsanalyse**

Steuerungs- und Regelungsentwurf

Zusammenfassung und Ausblick

Flachheitsanalyse

Differenzielle Flachheit

Ein System der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ mit $\mathbf{F}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ heißt (differenziell) flach, falls ein m -Tupel $y := (y_1, \dots, y_m)^T$ sowie glatte Funktionen Ψ, θ existieren, so dass

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \Psi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_x)}) \text{ mit } n_x < \infty \text{ und} \\ \mathbf{u} &= \theta(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_u)}) \text{ mit } n_u < \infty \text{ gilt.}\end{aligned}$$

Flachheitsanalyse

Differenzielle Flachheit

Ein System der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ mit $\mathbf{F}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ heißt (differenziell) flach, falls ein m -Tupel $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_m)^T$ sowie glatte Funktionen Ψ, θ existieren, so dass

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \Psi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_x)}) \text{ mit } n_x < \infty \text{ und} \\ \mathbf{u} &= \theta(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n_u)}) \text{ mit } n_u < \infty \text{ gilt.}\end{aligned}$$

Erläuterungen:

- Systemzustand \mathbf{x} , Systemeingang \mathbf{u}
- **flacher Ausgang \mathbf{y}**

→ Parametrisierung aller Systemgrößen durch \mathbf{y} und endlich viele Ableitungen ohne Lösung von DGL/Integration möglich

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

1. Schritt - Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

1. Schritt - Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ und Eingang $u \in \mathbb{R}^m$

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

1. Schritt - Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ und Eingang $u \in \mathbb{R}^m$
- sukzessive Elimination der m Komponenten von u und je einer der n Systemgleichungen

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

1. Schritt - Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ und Eingang $u \in \mathbb{R}^m$
- sukzessive Elimination der m Komponenten von u und je einer der n Systemgleichungen
- anschließend analog Elimination von $n - m$ Komponenten von x

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

1. Schritt - Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ und Eingang $u \in \mathbb{R}^m$
 - sukzessive Elimination der m Komponenten von u und je einer der n Systemgleichungen
 - anschließend analog Elimination von $n - m$ Komponenten von x
- übrig bleiben $n - (n - m) = m$ Zustandskomponenten als **flacher Ausgang y**

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

1. Schritt - Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ und Eingang $u \in \mathbb{R}^m$
 - sukzessive Elimination der m Komponenten von u und je einer der n Systemgleichungen
 - anschließend analog Elimination von $n - m$ Komponenten von x
- übrig bleiben $n - (n - m) = m$ Zustandskomponenten als **flacher Ausgang** y
- beliebige Trajektorien von y sind kompatibel mit Systemdynamik

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

1. Schritt - Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ und Eingang $u \in \mathbb{R}^m$
 - sukzessive Elimination der m Komponenten von u und je einer der n Systemgleichungen
 - anschließend analog Elimination von $n - m$ Komponenten von x
- übrig bleiben $n - (n - m) = m$ Zustandskomponenten als **flacher Ausgang** y
- beliebige Trajektorien von y sind kompatibel mit Systemdynamik

2. Schritt - Parametrisierung der Systemgrößen durch den flachen Ausgang:

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

1. Schritt - Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- nichtlineares MIMO-System mit Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ und Eingang $u \in \mathbb{R}^m$
 - sukzessive Elimination der m Komponenten von u und je einer der n Systemgleichungen
 - anschließend analog Elimination von $n - m$ Komponenten von x
- übrig bleiben $n - (n - m) = m$ Zustandskomponenten als **flacher Ausgang** y
- beliebige Trajektorien von y sind kompatibel mit Systemdynamik

2. Schritt - Parametrisierung der Systemgrößen durch den flachen Ausgang:

- sukzessives Einsetzen von y in eliminierte Systemgleichungen

Flachheitsanalyse am Einzelkran

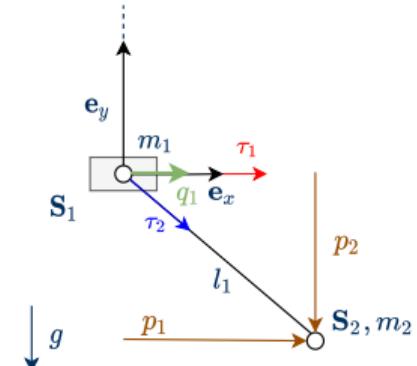
1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination der Eingangskomponenten von $\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$:

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$



$$\mathbf{x} = (p_1, p_2, q_1)^T$$

$$\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

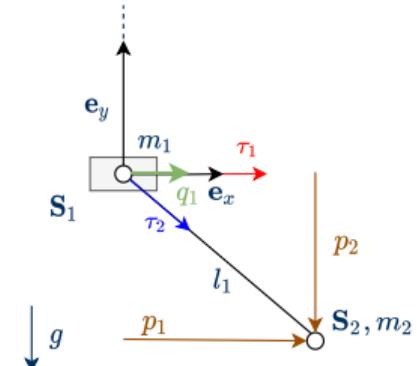
1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination der Eingangskomponenten von $\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$:

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$



$$\mathbf{x} = (p_1, p_2, q_1)^T$$

$$\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$$

→ Elimination von τ_1 und 3. Gleichung

Flachheitsanalyse am Einzelkran

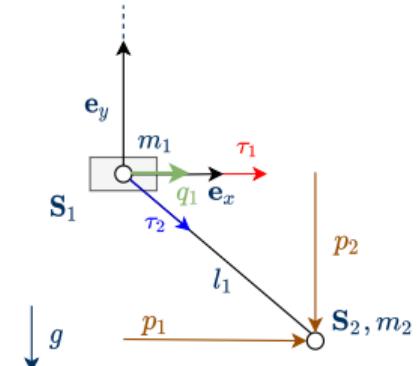
1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination der Eingangskomponenten von $\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$:

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$



$$\mathbf{x} = (p_1, p_2, q_1)^T$$

$$\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$$

- Elimination von τ_1 und 3. Gleichung
→ Elimination von τ_2 und 1. Gleichung

Flachheitsanalyse am Einzelkran

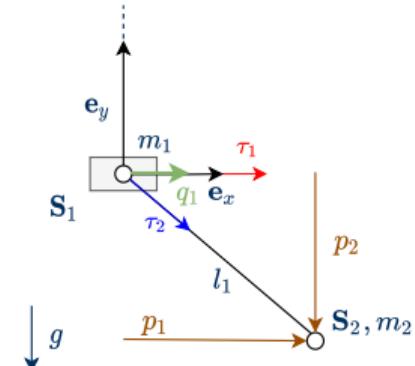
1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination der Eingangskomponenten von $\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$:

$$m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$

$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} = 0$$



$$\mathbf{x} = (p_1, p_2, q_1)^T$$

$$\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$$

- Elimination von τ_1 und 3. Gleichung
- Elimination von τ_2 und 1. Gleichung
- Elimination 2. Gleichung, dazu Einsetzen von τ_2 aus 1. Gl.:

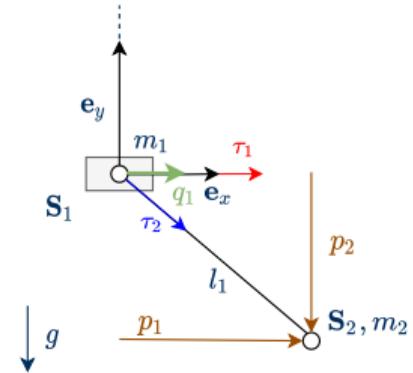
$$gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{m_2 p_2 \ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination 2. Gleichung, dazu Einsetzen von τ_2 aus 1. Gl.:

$$gm_2 + m_2\ddot{p}_2 - \frac{m_2p_2\ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$



$$\mathbf{x} = (p_1, p_2, q_1)^T$$

$$\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$$

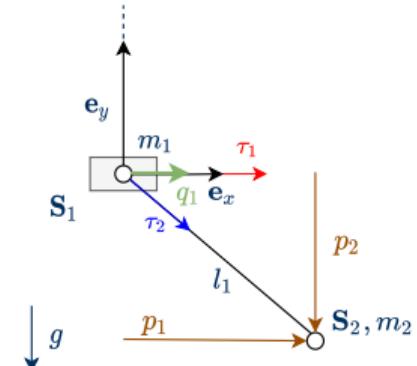
Flachheitsanalyse am Einzelkran

1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination 2. Gleichung, dazu Einsetzen von τ_2 aus 1. Gl.:

$$gm_2 + m_2\ddot{p}_2 - \frac{m_2p_2\ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$

→ folgende Menge an Systemgrößen $\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$



$$\mathbf{x} = (p_1, p_2, q_1)^T$$

$$\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

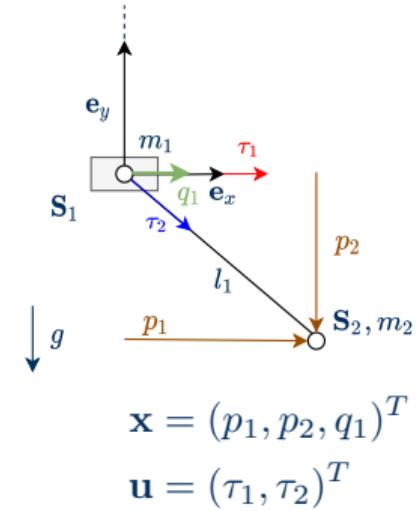
1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination 2. Gleichung, dazu Einsetzen von τ_2 aus 1. Gl.:

$$gm_2 + m_2\ddot{p}_2 - \frac{m_2p_2\ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$

→ folgende Menge an Systemgrößen $\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$

→ Elimination von q_1 , da rein algebraisch → $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$



Flachheitsanalyse am Einzelkran

1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination 2. Gleichung, dazu Einsetzen von τ_2 aus 1. Gl.:

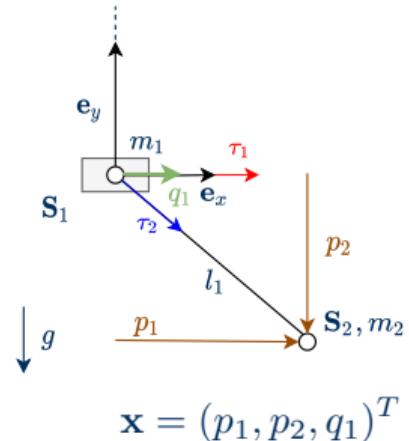
$$gm_2 + m_2\ddot{p}_2 - \frac{m_2p_2\ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$

→ folgende Menge an Systemgrößen $\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$

→ Elimination von q_1 , da rein algebraisch → $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$

2. Parametrisierung der Systemgrößen durch $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$:

- aus 2. substituierter Gleichung: $q_1 = \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2} = q_1(\mathbf{y}, \ddot{\mathbf{y}})$



$$\mathbf{x} = (p_1, p_2, q_1)^T$$

$$\mathbf{u} = (\tau_1, \tau_2)^T$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Elimination 2. Gleichung, dazu Einsetzen von τ_2 aus 1. Gl.:

$$gm_2 + m_2\ddot{p}_2 - \frac{m_2p_2\ddot{p}_1}{p_1 - q_1} = 0$$

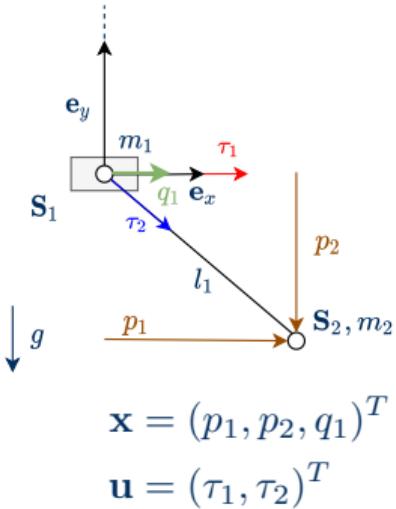
→ folgende Menge an Systemgrößen $\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$

→ Elimination von q_1 , da rein algebraisch → $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$

2. Parametrisierung der Systemgrößen durch $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$:

- aus 2. substituierter Gleichung: $q_1 = \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2} = q_1(\mathbf{y}, \ddot{\mathbf{y}})$
- aus 1. Gleichung und Einsetzen von $q_1(\mathbf{y}, \ddot{\mathbf{y}})$:

$$m_2\ddot{p}_1 - \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{m_2\ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + \left(p_1 - \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}\right)^2}}{p_1 - \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}} = \tau_2(\mathbf{y}, \ddot{\mathbf{y}})$$

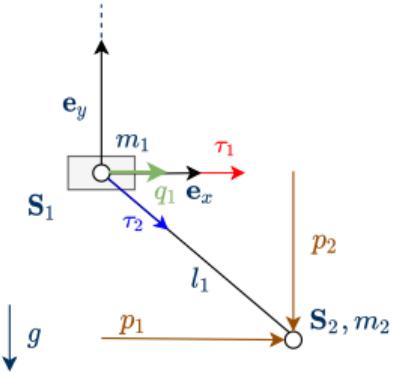


Flachheitsanalyse am Einzelkran

2. Parametrisierung der Systemgrößen durch $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$:

- aus 3. Gleichung und Einsetzen von q_1, \ddot{q}_1, τ_2 :

$$0 = m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - \ddot{q}_1)}{l_1}$$
$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{1}{g^3 + 3g^2\ddot{p}_2 + 3g\ddot{p}_2^2 + \ddot{p}_2^3} (g^3 m_1 \ddot{p}_1 + g^3 m_2 \ddot{p}_1 - g^2 m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 - 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 3g^2 m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 - 2g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 + g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 + 2g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 - 4g m_1 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + 2g m_1 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + g m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 + 3g m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 - m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2^2 + m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_2 - 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 - 2m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_2 + 2m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^3) = \tau_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}^{(3)}, \mathbf{y}^{(4)})$$



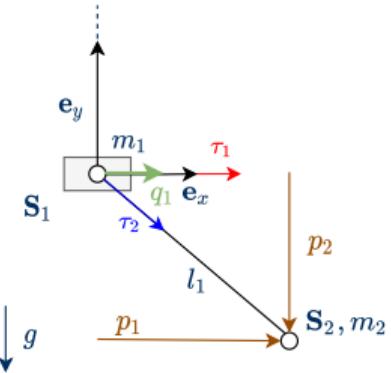
Flachheitsanalyse am Einzelkran

2. Parametrisierung der Systemgrößen durch $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$:

- aus 3. Gleichung und Einsetzen von q_1, \ddot{q}_1, τ_2 :

$$0 = m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - \ddot{q}_1)}{l_1}$$
$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{1}{g^3 + 3g^2 \ddot{p}_2 + 3g \ddot{p}_2^2 + \ddot{p}_2^3} (g^3 m_1 \ddot{p}_1 + g^3 m_2 \ddot{p}_1 - g^2 m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 - 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 3g^2 m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 - 2g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 + g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 + 2g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{\ddot{p}}_2 - 4g m_1 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + 2g m_1 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + g m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 + 3g m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 - m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2^2 + m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_2 - 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 - 2m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_2 + 2m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^3) = \tau_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}^{(3)}, \mathbf{y}^{(4)})$$

→ alle Systemgrößen $(\tau_1, \tau_2, p_1, p_2, q_1)$ durch $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$ parametrisiert



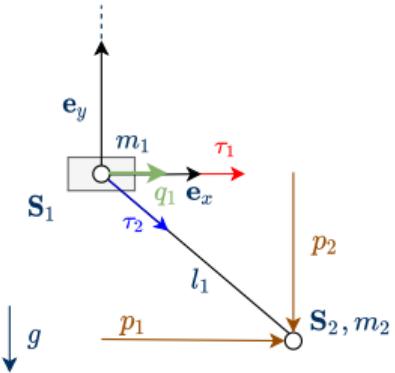
Flachheitsanalyse am Einzelkran

2. Parametrisierung der Systemgrößen durch $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$:

- aus 3. Gleichung und Einsetzen von q_1, \ddot{q}_1, τ_2 :

$$0 = m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - \ddot{q}_1)}{l_1}$$
$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{1}{g^3 + 3g^2 \ddot{p}_2 + 3g \ddot{p}_2^2 + \ddot{p}_2^3} (g^3 m_1 \ddot{p}_1 + g^3 m_2 \ddot{p}_1 - g^2 m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 - 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 3g^2 m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 - 2g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 + g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 + 2g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 - 4g m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + 2g m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + g m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 + 3g m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 - m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2^2 + m_1 p_2 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 - 2m_1 p_2 \ddot{p}_2^2 \ddot{p}_1 - 2m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_2 + 2m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^3) = \tau_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}^{(3)}, \mathbf{y}^{(4)})$$

→ alle Systemgrößen ($\tau_1, \tau_2, p_1, p_2, q_1$) durch $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$ parametrisiert
→ konstruktiver Flachheitsnachweis erbracht □



Flachheitsanalyse am Doppelkran

1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran

Flachheitsanalyse am Doppelkran

1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran

→ unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS SymPy durchgeführt

Flachheitsanalyse am Doppelkran

1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran
→ unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS SymPy durchgeführt
- $n = 10$ Zustandskomponenten und -gleichungen, $m = 4$ Eingangskomponenten

Flachheitsanalyse am Doppelkran

1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran
- unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS SymPy durchgeführt
- $n = 10$ Zustandskomponenten und -gleichungen, $m = 4$ Eingangskomponenten
- Elimination des Eingangs → autonomes System aus $n - m = 6$ Gleichungen

Flachheitsanalyse am Doppelkran

1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran
- unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS SymPy durchgeführt
- $n = 10$ Zustandskomponenten und -gleichungen, $m = 4$ Eingangskomponenten
- Elimination des Eingangs → autonomes System aus $n - m = 6$ Gleichungen
- Elimination von 6 Zustandskomponenten → $m = 4$ Komponenten von x übrig

Flachheitsanalyse am Doppelkran

1. Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Vorgehen analog zum Einzelkran
- unpraktikable Darstellung umfangreicher Terme, über CAS SymPy durchgeführt
- $n = 10$ Zustandskomponenten und -gleichungen, $m = 4$ Eingangskomponenten
- Elimination des Eingangs → autonomes System aus $n - m = 6$ Gleichungen
- Elimination von 6 Zustandskomponenten → $m = 4$ Komponenten von x übrig
- Wahl eines **flachen Ausgangs**: $y = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$

Flachheitsanalyse am Doppelkran

2. Parametrisierung der Systemgrößen durch $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$:

- funktionale Zusammenhänge der Parametrisierungen:

$$\tau_1 = \theta_1(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1, \ddot{q}_1)$$

$$\tau_2 = \theta_2\left(p_1, \dot{p}_1, \ddot{p}_1, p_1^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_2, p_2^{(3)}, p_2^{(4)}, p_3, \dot{p}_3, \ddot{p}_3, p_3^{(3)}, p_3^{(4)}, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1\right)$$

$$\tau_3 = \theta_3(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

$$\tau_4 = \theta_4(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

$$q_2 = \Psi_1(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

Flachheitsanalyse am Doppelkran

2. Parametrisierung der Systemgrößen durch $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$:

- funktionale Zusammenhänge der Parametrisierungen:

$$\tau_1 = \theta_1(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1, \ddot{q}_1)$$

$$\tau_2 = \theta_2\left(p_1, \dot{p}_1, \ddot{p}_1, p_1^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_2, p_2^{(3)}, p_2^{(4)}, p_3, \dot{p}_3, \ddot{p}_3, p_3^{(3)}, p_3^{(4)}, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1\right)$$

$$\tau_3 = \theta_3(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

$$\tau_4 = \theta_4(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

$$q_2 = \Psi_1(p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, p_3, \ddot{p}_3, q_1)$$

→ alle Systemgrößen durch flachen Ausgang $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$ parametrisiert \square

Gliederung

- System- und Problembeschreibung
- Analytische Modellbildung
- Flachheitsanalyse
- **Steuerungs- und Regelungsentwurf**
- Zusammenfassung und Ausblick

Steuerungs- und Regelungsentwurf

Allgemeines Vorgehen:

- Planung von Referenztrajektorien für den flachen Ausgang y

Steuerungs- und Regelungsentwurf

Allgemeines Vorgehen:

- Planung von Referenztrajektorien für den flachen Ausgang y
- Trajektorien der Systemeingänge $t \mapsto \tau(t)$ folgen aus $t \mapsto y(t)$

Steuerungs- und Regelungsentwurf

Allgemeines Vorgehen:

- Planung von Referenztrajektorien für den flachen Ausgang y
 - Trajektorien der Systemeingänge $t \mapsto \tau(t)$ folgen aus $t \mapsto y(t)$
- **Vorsteuerung** durch Parametrisierung aus Flachheitsnachweis möglich

Steuerungs- und Regelungsentwurf

Allgemeines Vorgehen:

- Planung von Referenztrajektorien für den flachen Ausgang y
 - Trajektorien der Systemeingänge $t \mapsto \tau(t)$ folgen aus $t \mapsto y(t)$
- **Vorsteuerung** durch Parametrisierung aus Flachheitsnachweis möglich
- Entwurf einer **Folgeregelung** um diese Trajektorien

Trajektorienplanung

Anforderungen:

Trajektorienplanung

Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen Ruhelagen $(t_0, y_{i,0})$ und $(t_e, y_{i,e})$

Trajektorienplanung

Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen Ruhelagen $(t_0, y_{i,0})$ und $(t_e, y_{i,e})$
- stetiger Verlauf von Eingangsgrößen $\tau(t)$

Trajektorienplanung

Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen Ruhelagen $(t_0, y_{i,0})$ und $(t_e, y_{i,e})$
- stetiger Verlauf von Eingangsgrößen $\tau(t)$

Vorgabe von Randbedingungen:

Trajektorienplanung

Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen Ruhelagen $(t_0, y_{i,0})$ und $(t_e, y_{i,e})$
- stetiger Verlauf von Eingangsgrößen $\tau(t)$

Vorgabe von Randbedingungen:

- Differenzierbarkeitsbedingungen an $y(t)$ folgen aus $\tau(y(t), \dot{y}(t), \dots)$

Trajektorienplanung

Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen Ruhelagen $(t_0, y_{i,0})$ und $(t_e, y_{i,e})$
- stetiger Verlauf von Eingangsgrößen $\tau(t)$

Vorgabe von Randbedingungen:

- Differenzierbarkeitsbedingungen an $y(t)$ folgen aus $\tau(y(t), \dot{y}(t), \dots)$

→ höchste Ableitungen von $y(t)$ in $\tau_2 = \theta_2 \left(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots \right)$

Trajektorienplanung

Anforderungen:

- Überführung des Doppelkransystems zwischen Ruhelagen $(t_0, y_{i,0})$ und $(t_e, y_{i,e})$
- stetiger Verlauf von Eingangsgrößen $\tau(t)$

Vorgabe von Randbedingungen:

- Differenzierbarkeitsbedingungen an $y(t)$ folgen aus $\tau(y(t), \dot{y}(t), \dots)$

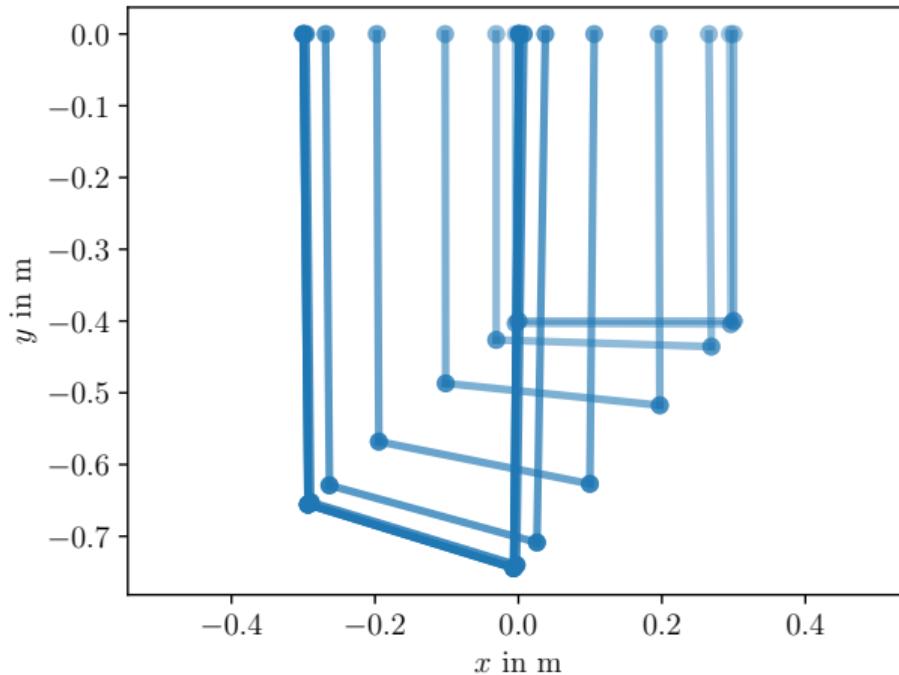
→ höchste Ableitungen von $y(t)$ in $\tau_2 = \theta_2 \left(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots \right)$

→ Wahl der Polynomansätze:

$$y_i(t) = a_{i,9}t^9 + a_{i,8}t^8 + \dots + a_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3; t_0 < t < t_e$$

$$y_4(t) = a_{4,5}t^5 + a_{4,4}t^4 + \dots + a_{4,0} \quad \text{für } t_0 < t < t_e.$$

Prototypische Referenztrajektorie



Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- System mit Eingangs-Ausgangs-Verhalten der Form

$$\mathbf{y}^{(r)} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) := (L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}), \dots, L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}))^T$$

Ausgangableitungen

$$y_i^{(r_i)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i} h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \dots + L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_m$$

Entkopplungsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- System mit Eingangs-Ausgangs-Verhalten der Form

$$\mathbf{y}^{(r)} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) := (L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}), \dots, L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}))^T$$

- Entkopplung der Nichtlinearität und Auflösen nach \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}^{(r)} - \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x})) \quad (\text{statische Rückführung})$$

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- System mit Eingangs-Ausgangs-Verhalten der Form

$$\mathbf{y}^{(r)} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) := (L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}), \dots, L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}))^T$$

- Entkopplung der Nichtlinearität und Auflösen nach \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}^{(r)} - \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x})) \quad (\text{statische Rückführung})$$

- Ansetzen stabilisierender linearer Fehlerdynamik der Ordnung r für $\mathbf{y}^{(r)}$

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Entkopplungsmatrix Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- Λ nicht regulär \rightarrow statische Rückführung mit Λ^{-1} nicht möglich

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- Λ nicht regulär \rightarrow statische Rückführung mit Λ^{-1} nicht möglich
 \rightarrow Λ Modifikation des Systems, so dass Λ invertierbar

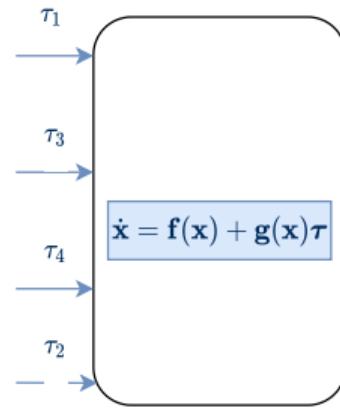
Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem:

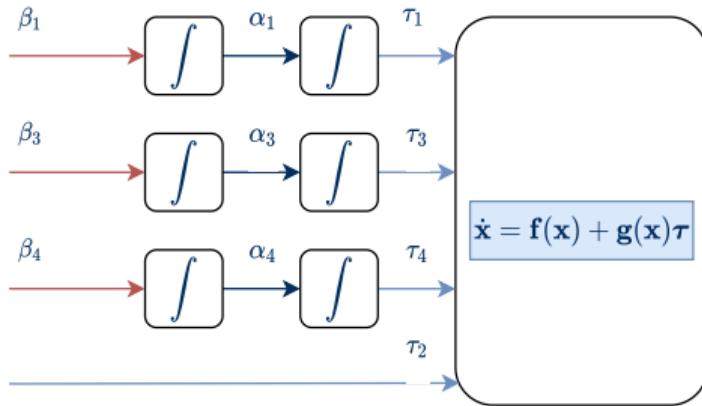
$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- Λ nicht regulär \rightarrow statische Rückführung mit Λ^{-1} nicht möglich
 \rightarrow Λ Modifikation des Systems, so dass Λ invertierbar
 \rightarrow **dynamische Erweiterung**

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung



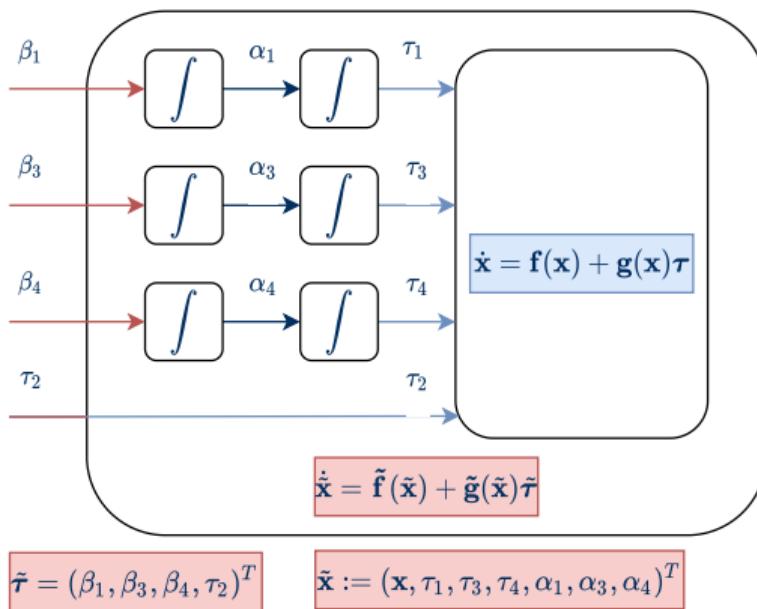
Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung



- Einführung neuer Eingänge durch Doppelintegratoren:

$$\begin{array}{ll}\beta_1 := \dot{\alpha}_1 & \alpha_1 := \dot{\tau}_1 \\ \beta_3 := \dot{\alpha}_3 & \alpha_3 := \dot{\tau}_3 \\ \beta_4 := \dot{\alpha}_4 & \alpha_4 := \dot{\tau}_4\end{array}$$

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung

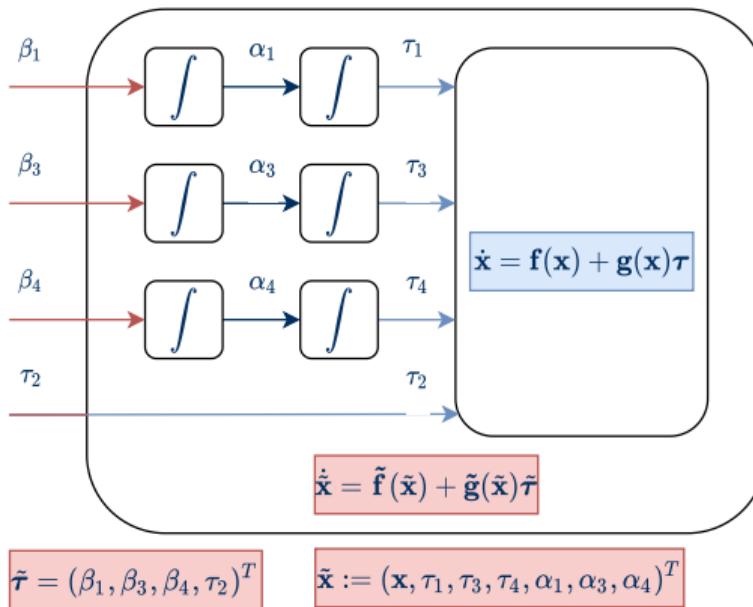


- Einführung neuer Eingänge durch Doppelintegratoren:

$$\begin{array}{ll}\beta_1 := \dot{\alpha}_1 & \alpha_1 := \dot{\tau}_1 \\ \beta_3 := \dot{\alpha}_3 & \alpha_3 := \dot{\tau}_3 \\ \beta_4 := \dot{\alpha}_4 & \alpha_4 := \dot{\tau}_4\end{array}$$

→ Erweiterung des ZRM $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}$ mit $\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\mathbf{x}}$

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung



- Einführung neuer Eingänge durch Doppelintegratoren:

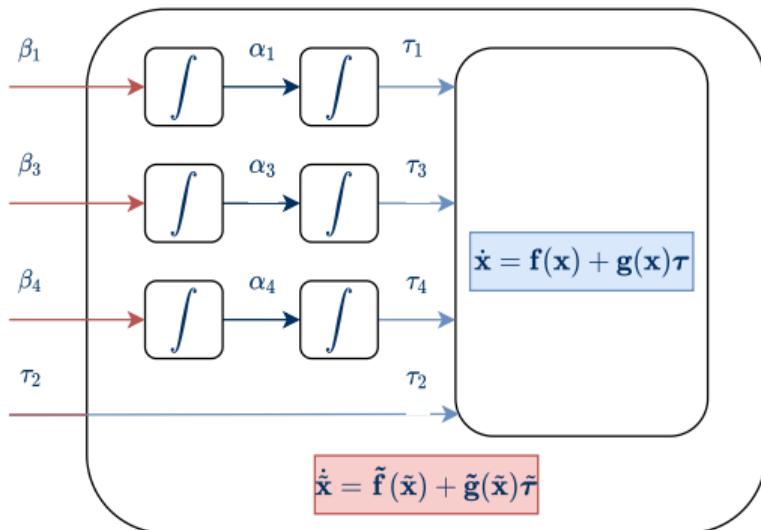
$$\begin{array}{ll}\beta_1 := \dot{\alpha}_1 & \alpha_1 := \dot{\tau}_1 \\ \beta_3 := \dot{\alpha}_3 & \alpha_3 := \dot{\tau}_3 \\ \beta_4 := \dot{\alpha}_4 & \alpha_4 := \dot{\tau}_4\end{array}$$

→ Erweiterung des ZRM $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}$ mit $\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\mathbf{x}}$

→ neue Entkopplungsmatrix ($* \neq 0$):

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{regulär!}$$

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung



$$\rightarrow \text{Stellgesetz: } \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{u} = \tilde{\Lambda}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{y}^{(r)} - \tilde{\Gamma}(\tilde{\mathbf{x}}))$$

- Einführung neuer Eingänge durch Doppelintegratoren:

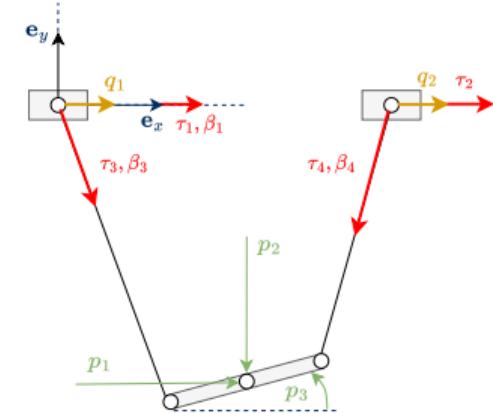
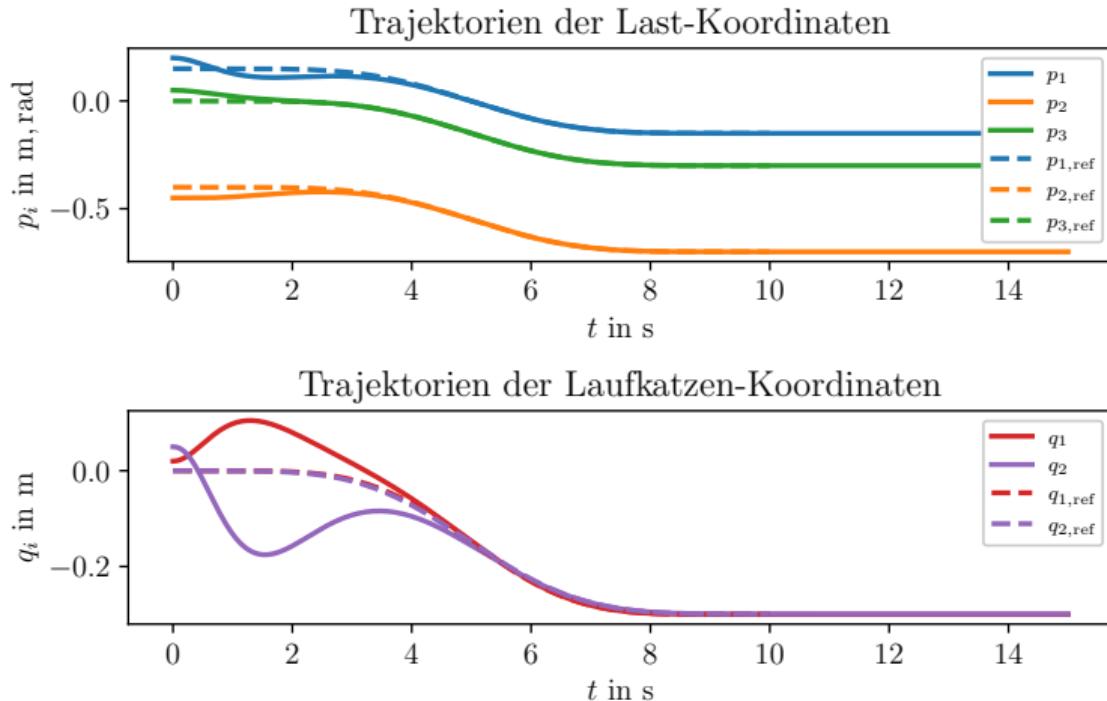
$$\begin{array}{ll} \beta_1 := \dot{\alpha}_1 & \alpha_1 := \dot{\tau}_1 \\ \beta_3 := \dot{\alpha}_3 & \alpha_3 := \dot{\tau}_3 \\ \beta_4 := \dot{\alpha}_4 & \alpha_4 := \dot{\tau}_4 \end{array}$$

- Erweiterung des ZRM $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}$ mit $\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\mathbf{x}}$
- neue Entkopplungsmatrix ($* \neq 0$):

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{regulär!}$$

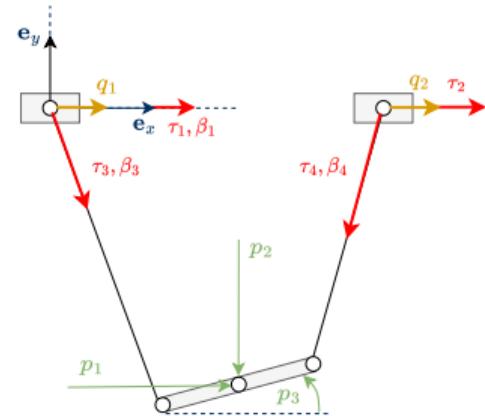
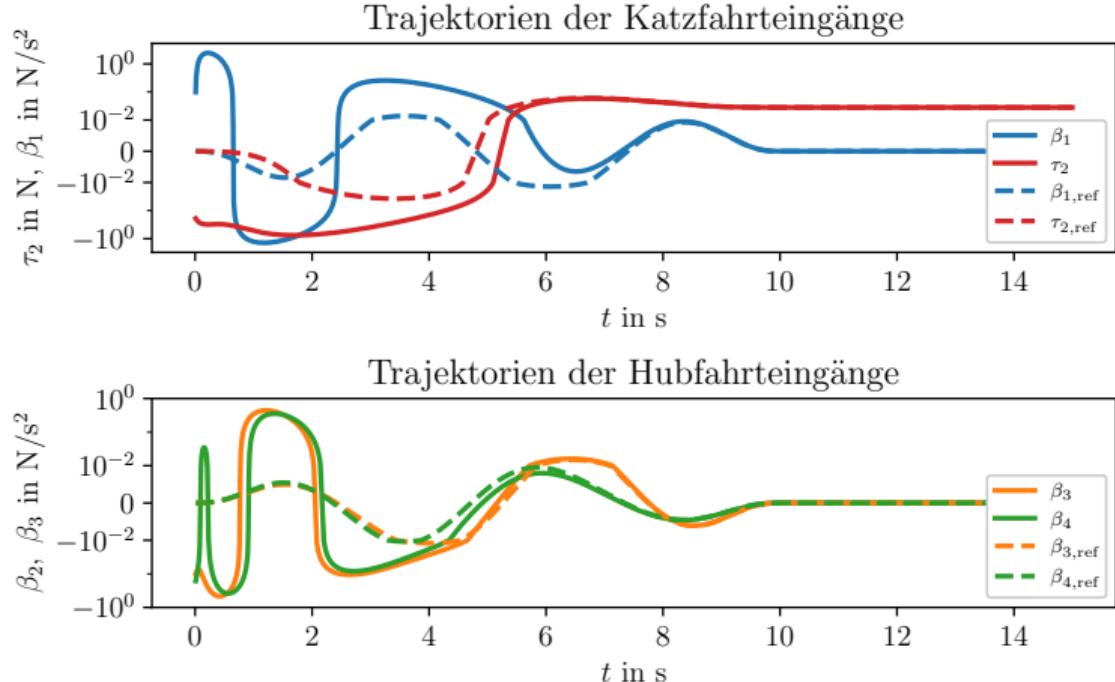
Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung

Simulation:



Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung

Simulation:



Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung

Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung

Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern
- höhere „Trägheit“ beim Ausregeln von Folgefehlern wegen Integratoren
→ Einflussmöglichkeit über Polplatzierung der Fehlerdynamik

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung

Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern
- höhere „Trägheit“ beim Ausregeln von Folgefehlern wegen Integratoren
→ Einflussmöglichkeit über Polplatzierung der Fehlerdynamik
- relativ komplexes Stellgesetz mit >20 000 Operationen je Eingangsgröße
→ lange Simulationszeiten, Umsetzbarkeit auf Versuchsstand noch offen

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung

Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern
- höhere „Trägheit“ beim Ausregeln von Folgefehlern wegen Integratoren
→ Einflussmöglichkeit über Polplatzierung der Fehlerdynamik
- relativ komplexes Stellgesetz mit >20 000 Operationen je Eingangsgröße
→ lange Simulationszeiten, Umsetzbarkeit auf Versuchsstand noch offen
→ vereinfachter heuristischer Ansatz mit **exact feedforward linearization**

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}))$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

- aus ZRM $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$ mit $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T$:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}$$

Brückenkransystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\dot{\boldsymbol{\theta}}, 0, -g, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

- aus ZRM $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$ mit $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T$:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}$$

→ **Heuristik:** Entkopplungsmatrix $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}}) = \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})$

Brückenkransystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\dot{\boldsymbol{\theta}}, 0, -g, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

- aus ZRM $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$ mit $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T$:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}$$

→ **Heuristik:** Entkopplungsmatrix $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}}) = \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})$

→ Pseudoinverse für $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}})$ nötig, da $\mathbf{g}_{[6,10]} \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$

Brückenkransystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\dot{\boldsymbol{\theta}}, 0, -g, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

- aus ZRM $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$ mit $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T$:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}$$

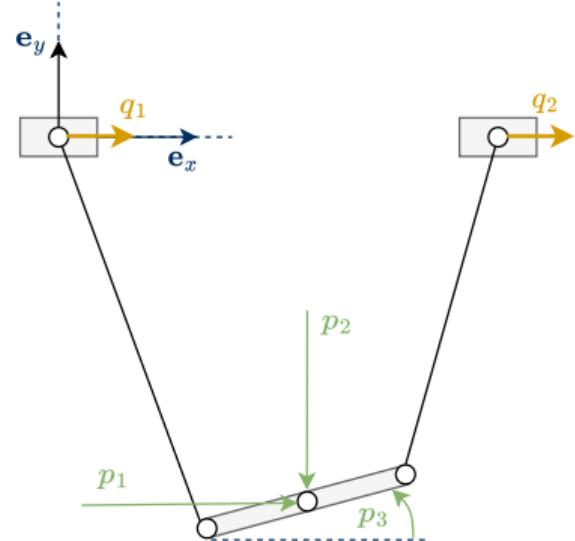
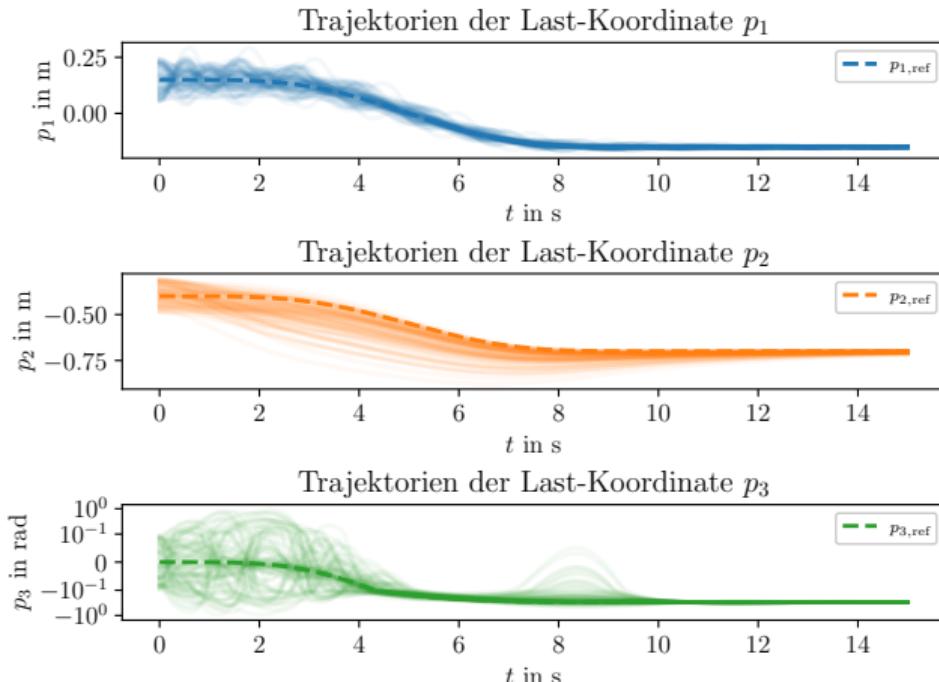
→ **Heuristik:** Entkopplungsmatrix $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}}) = \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})$

→ Pseudoinverse für $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}})$ nötig, da $\mathbf{g}_{[6,10]} \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$

→ **Heuristik:** Annahme der Dynamik der **Ordnung 2** des Fehlers $\mathbf{e} := \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}$ für alle Komponenten des Koordinatenvektors $\boldsymbol{\theta} = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2)^T$

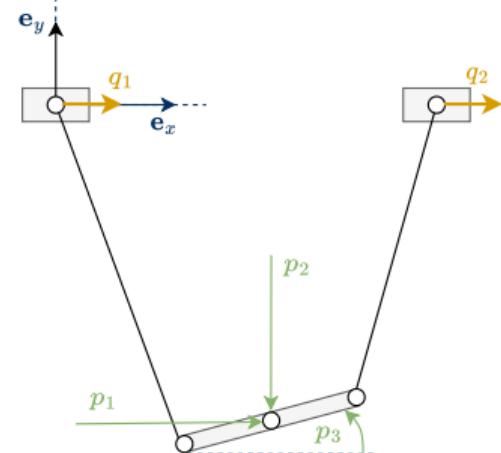
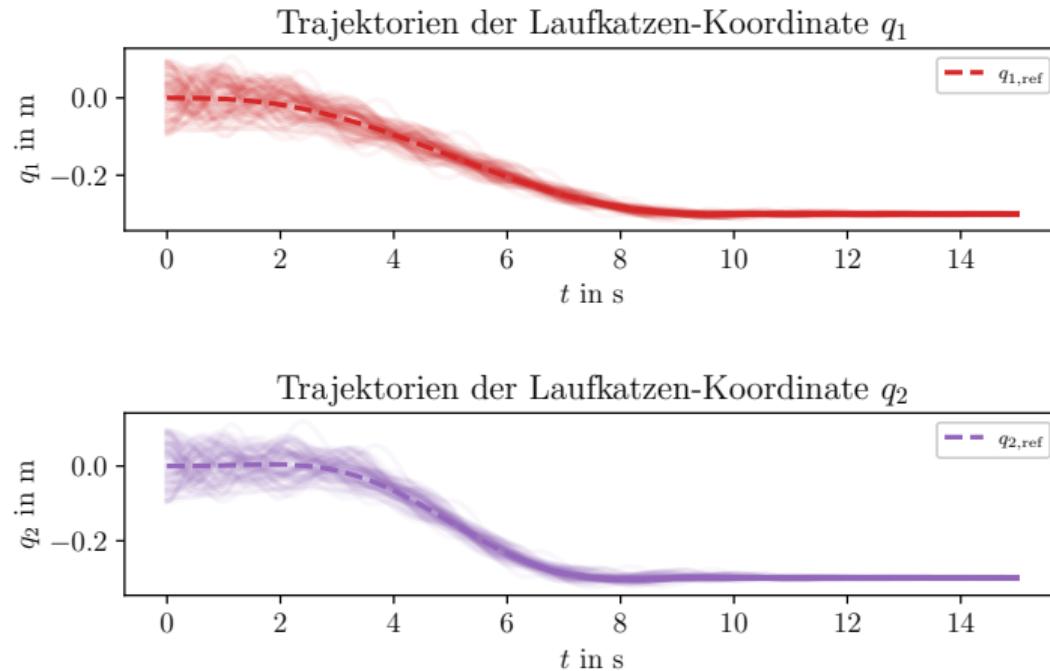
Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

Ensemble-Simulationen:



Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

Ensemble-Simulationen:



Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern
- kein Stabilitätsnachweis für zeitvariantes ($\Lambda^+(\mathbf{x}_{\text{ref}}(t)) = \Lambda^+(t)$) System, aber auch kein Gegenbeispiel aus Ensemble-Simulationen

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

Fazit:

- akkurate Trajektorienfolge und stationäre Genauigkeit auch bei Anfangsfehlern
- kein Stabilitätsnachweis für zeitvariantes ($\Lambda^+(\mathbf{x}_{\text{ref}}(t)) = \Lambda^+(t)$) System, aber auch kein Gegenbeispiel aus Ensemble-Simulationen
- Stellgesetz mit weniger als 140 Operationen je Eingangskomponente
→ viel kürzere Simulationszeiten, vermutlich geringere Hardwareanforderungen bei realer Umsetzung

Gliederung

- System- und Problembeschreibung
 - Analytische Modellbildung
 - Flachheitsanalyse
 - Steuerungs- und Regelungsentwurf
- **Zusammenfassung und Ausblick**

Zusammenfassung und Ausblick

- Modellierung des Brückenkrans in ODE-Form durch LG2
→ gute Eignung für Simulation und Flachheitsanalyse

Zusammenfassung und Ausblick

- Modellierung des Brückenkrans in ODE-Form durch LG2
→ gute Eignung für Simulation und Flachheitsanalyse
- Ermittlung eines flachen Ausgangs $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$ für das Doppelkransystem

Zusammenfassung und Ausblick

- Modellierung des Brückenkrans in ODE-Form durch LG2
→ gute Eignung für Simulation und Flachheitsanalyse
- Ermittlung eines flachen Ausgangs $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$ für das Doppelkransystem
- Planung polynombasierter Trajektorien für \mathbf{y} zur Ruhelagenüberführung
→ Steuerung aus Parametrisierung des Eingangs $\tau(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots)$

Zusammenfassung und Ausblick

- Modellierung des Brückenkrans in ODE-Form durch LG2
→ gute Eignung für Simulation und Flachheitsanalyse
- Ermittlung eines flachen Ausgangs $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$ für das Doppelkransystem
- Planung polynombasierter Trajektorien für \mathbf{y} zur Ruhelagenüberführung
→ Steuerung aus Parametrisierung des Eingangs $\tau(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots)$
- Regelung durch statische Rückführung nicht möglich

Zusammenfassung und Ausblick

- Modellierung des Brückenkrans in ODE-Form durch LG2
→ gute Eignung für Simulation und Flachheitsanalyse
- Ermittlung eines flachen Ausgangs $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$ für das Doppelkransystem
- Planung polynombasierter Trajektorien für \mathbf{y} zur Ruhelagenüberführung
→ Steuerung aus Parametrisierung des Eingangs $\tau(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots)$
- Regelung durch statische Rückführung nicht möglich
- dynamische Erweiterung mit linearer Fehlerdynamik
→ per Konstruktion stabil, allerdings relativ komplexes Stellgesetz

Zusammenfassung und Ausblick

- Modellierung des Brückenkrans in ODE-Form durch LG2
→ gute Eignung für Simulation und Flachheitsanalyse
- Ermittlung eines flachen Ausgangs $\mathbf{y} = (p_1, p_2, p_3, q_1)^T$ für das Doppelkransystem
- Planung polynombasierter Trajektorien für \mathbf{y} zur Ruhelagenüberführung
→ Steuerung aus Parametrisierung des Eingangs $\tau(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots)$
- Regelung durch statische Rückführung nicht möglich
- dynamische Erweiterung mit linearer Fehlerdynamik
→ per Konstruktion stabil, allerdings relativ komplexes Stellgesetz
- exact feedforward linearization mit Fehlerdynamiken 2. Ordnung, Pseudoinverser
→ kompaktes Stellgesetz, Stabilität nur durch Ensemble-Simulationen untersucht

Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierungen auf Versuchsstand

Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierungen auf Versuchsstand
- Test reiner Vorsteuerung und Abschätzung der Größe der Modellabweichungen

Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierungen auf Versuchsstand
- Test reiner Vorsteuerung und Abschätzung der Größe der Modellabweichungen
→ Regelungen unter Stellgrößenbeschränkung und Überwachung der Stabilität

Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierungen auf Versuchsstand
- Test reiner Vorsteuerung und Abschätzung der Größe der Modellabweichungen
→ Regelungen unter Stellgrößenbeschränkung und Überwachung der Stabilität
- zeitvariante Stabilitätsuntersuchung der exact feedforward linearization

Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierungen auf Versuchsstand
- Test reiner Vorsteuerung und Abschätzung der Größe der Modellabweichungen
→ Regelungen unter Stellgrößenbeschränkung und Überwachung der Stabilität
- zeitvariante Stabilitätsuntersuchung der exact feedforward linearization
- Untersuchung der Robustheit gegenüber Modellabweichungen, Störeingriffen

Zusammenfassung und Ausblick

- Implementierungen auf Versuchsstand
- Test reiner Vorsteuerung und Abschätzung der Größe der Modellabweichungen
→ Regelungen unter Stellgrößenbeschränkung und Überwachung der Stabilität
- zeitvariante Stabilitätsuntersuchung der exact feedforward linearization
- Untersuchung der Robustheit gegenüber Modellabweichungen, Störeingriffen
- bestärkendes (Referenz-)Lernen auf Basis bisheriger Regelungen

Ergänzungsfolien

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten q , nicht direkt aktivierte Koordinaten p

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten q , nicht direkt aktivierte Koordinaten p
- kinetische Energie $T(\theta, \dot{\theta})$, potentielle Energie $V(\theta)$

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten q , nicht direkt aktivierte Koordinaten p
- kinetische Energie $T(\theta, \dot{\theta})$, potentielle Energie $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten q , nicht direkt aktivierte Koordinaten p
- kinetische Energie $T(\theta, \dot{\theta})$, potentielle Energie $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft $Q = f - D$

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten q , nicht direkt aktivierte Koordinaten p
- kinetische Energie $T(\theta, \dot{\theta})$, potentielle Energie $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft $Q = f - D$
- äußere Stellkraft f , interne Reibungskraft D

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten q , nicht direkt aktivierte Koordinaten p
- kinetische Energie $T(\theta, \dot{\theta})$, potentielle Energie $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft $Q = f - D$
- äußere Stellkraft f , interne Reibungskraft D

Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten q , nicht direkt aktivierte Koordinaten p
- kinetische Energie $T(\theta, \dot{\theta})$, potentielle Energie $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft $Q = f - D$
- äußere Stellkraft f , interne Reibungskraft D

Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

- θ sind unabhängig (ohne Zwangsbedingung verkoppelt)

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten q , nicht direkt aktivierte Koordinaten p
- kinetische Energie $T(\theta, \dot{\theta})$, potentielle Energie $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft $Q = f - D$
- äußere Stellkraft f , interne Reibungskraft D

Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

- θ sind unabhängig (ohne Zwangsbedingung verkoppelt)
- Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- direkt aktivierte Koordinaten q , nicht direkt aktivierte Koordinaten p
- kinetische Energie $T(\theta, \dot{\theta})$, potentielle Energie $V(\theta)$
- Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta)$
- verallgemeinerte Kraft $Q = f - D$
- äußere Stellkraft f , interne Reibungskraft D

Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

- θ sind unabhängig (ohne Zwangsbedingung verkoppelt)
- Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n$$

- Woher Q_i ?

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- verallgemeinerte Kraft $Q = f - D$

Lagrange-Formalismus

Symbole:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- verallgemeinerte Kraft $Q = f - D$
- Richtungsvektor zu k -tem massebehaftetem Partikel r_k , Stellkraft F_k entlang r_k

Lagrange-Formalismus

Symbole:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- verallgemeinerte Kraft $Q = f - D$
- Richtungsvektor zu k -tem massebehaftetem Partikel r_k , Stellkraft F_k entlang r_k
- virtuelle Arbeit δW , virtuelle Verschiebung von Partikel δr_k und Koordinate θ_i

Lagrange-Formalismus

Symbole:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$
- verallgemeinerte Kraft $\mathbf{Q} = \mathbf{f} - \mathbf{D}$
- Richtungsvektor zu k -tem massebehaftetem Partikel \mathbf{r}_k , Stellkraft \mathbf{F}_k entlang \mathbf{r}_k
- virtuelle Arbeit δW , virtuelle Verschiebung von Partikel $\delta \mathbf{r}_k$ und Koordinate θ_i

Prinzip der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der Q_i :

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (q, p)^T$
- verallgemeinerte Kraft $Q = f - D$
- Richtungsvektor zu k -tem massebehaftetem Partikel r_k , Stellkraft F_k entlang r_k
- virtuelle Arbeit δW , virtuelle Verschiebung von Partikel δr_k und Koordinate θ_i

Prinzip der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der Q_i :

- $\delta W = \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots + \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_n} \delta \theta_n$

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$
- verallgemeinerte Kraft $\mathbf{Q} = \mathbf{f} - \mathbf{D}$
- Richtungsvektor zu k -tem massebehaftetem Partikel \mathbf{r}_k , Stellkraft \mathbf{F}_k entlang \mathbf{r}_k
- virtuelle Arbeit δW , virtuelle Verschiebung von Partikel $\delta \mathbf{r}_k$ und Koordinate θ_i

Prinzip der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der Q_i :

- $\delta W = \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots + \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_n} \delta \theta_n$
- $\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \delta \theta_i$

Lagrange-Formalismus

Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$
- verallgemeinerte Kraft $\mathbf{Q} = \mathbf{f} - \mathbf{D}$
- Richtungsvektor zu k -tem massebehaftetem Partikel \mathbf{r}_k , Stellkraft \mathbf{F}_k entlang \mathbf{r}_k
- virtuelle Arbeit δW , virtuelle Verschiebung von Partikel $\delta \mathbf{r}_k$ und Koordinate θ_i

Prinzip der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der Q_i :

- $\delta W = \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots + \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_n} \delta \theta_n$
- $\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \delta \theta_i$
- $\delta W = \sum_{k=1}^l \delta \mathbf{r}_k^T \mathbf{F}_k = Q_1 \delta \theta_1 + \dots + Q_n \delta \theta_n$

Lagrange-Formalismus

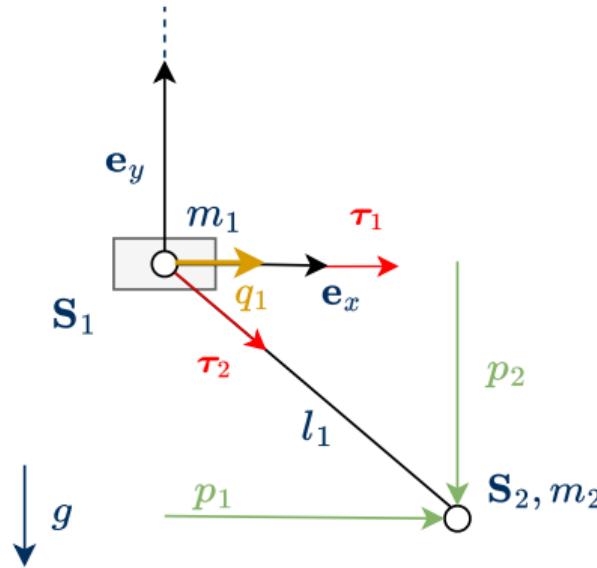
Symbolen:

- Konfigurationskoordinaten $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$
- verallgemeinerte Kraft $\mathbf{Q} = \mathbf{f} - \mathbf{D}$
- Richtungsvektor zu k -tem massebehaftetem Partikel \mathbf{r}_k , Stellkraft \mathbf{F}_k entlang \mathbf{r}_k
- virtuelle Arbeit δW , virtuelle Verschiebung von Partikel $\delta \mathbf{r}_k$ und Koordinate θ_i

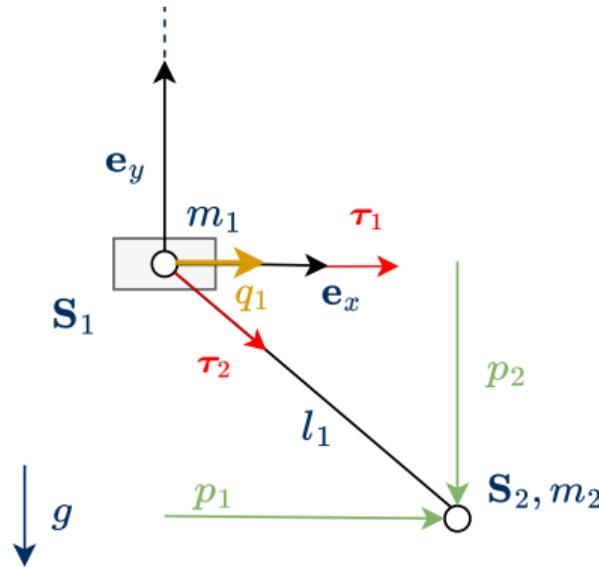
Prinzip der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der Q_i :

- $\delta W = \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots + \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_n} \delta \theta_n$
 - $\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \theta_i} \delta \theta_i$
 - $\delta W = \sum_{k=1}^l \delta \mathbf{r}_k^T \mathbf{F}_k = Q_1 \delta \theta_1 + \dots + Q_n \delta \theta_n$
- $\rightarrow Q_i = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n$

Analytisches Modell Einzelkran

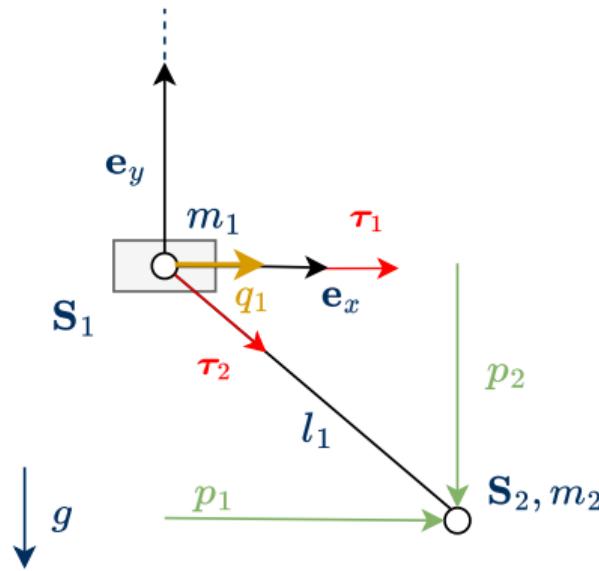


Analytisches Modell Einzelkran



- Massen bei $\mathbf{S}_1 = (q_1, 0)^T$, $\mathbf{S}_2 = (p_1, p_2)^T$
- variable Seillänge $l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2}$

Analytisches Modell Einzelkran

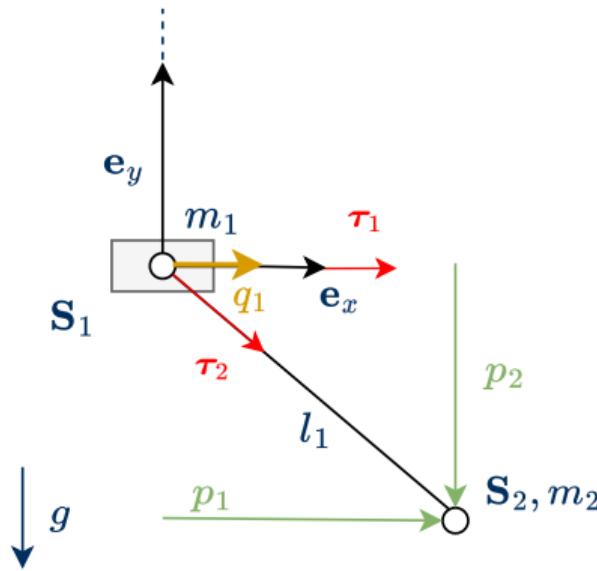


Energien:

- $T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{S}}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{S}}_2^T \dot{\mathbf{S}}_2 = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2}$
- $V = m_2 g \mathbf{S}_2^T \mathbf{e}_y = m_2 g p_2$

- Massen bei $\mathbf{S}_1 = (q_1, 0)^T$, $\mathbf{S}_2 = (p_1, p_2)^T$
- variable Seillänge $l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2}$

Analytisches Modell Einzelkran



Energien:

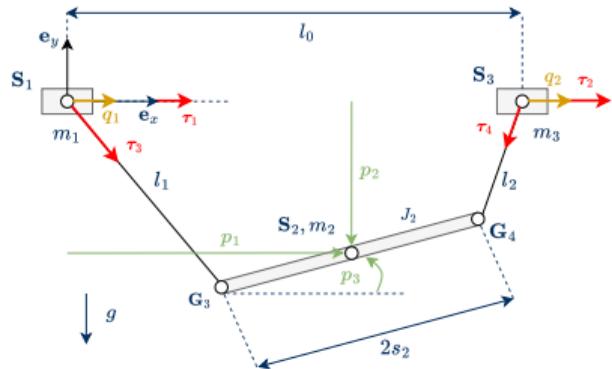
- $T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{S}}_1^T \dot{\mathbf{S}}_1 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{S}}_2^T \dot{\mathbf{S}}_2 = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2}$
- $V = m_2 g \mathbf{S}_2^T \mathbf{e}_y = m_2 g p_2$

Verallgemeinerte Kraft aus virtueller Arbeit:

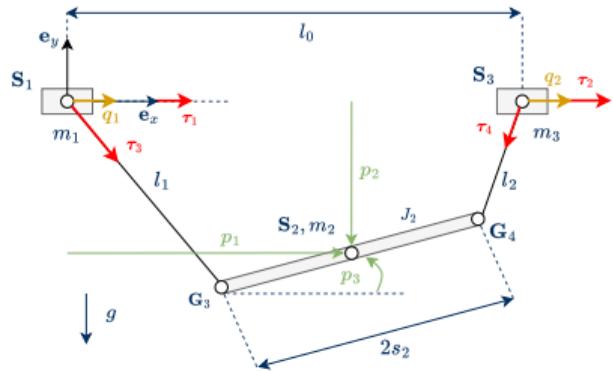
- $\mathbf{F}_1 = (\tau_1, 0)^T, \mathbf{F}_2 = \left(\frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1}, \frac{p_2 \tau_2}{l_1} \right)^T$
 $\rightarrow \mathbf{Q} = \left(\frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1}, \frac{p_2 \tau_2}{l_1}, \tau_1 - \frac{\tau_2(p_1 - q_1)}{l_1} \right)^T$

- Massen bei $\mathbf{S}_1 = (q_1, 0)^T, \mathbf{S}_2 = (p_1, p_2)^T$
- variable Seillänge $l_1 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + p_2^2}$

Analytisches Modell Doppelkran



Analytisches Modell Doppelkran

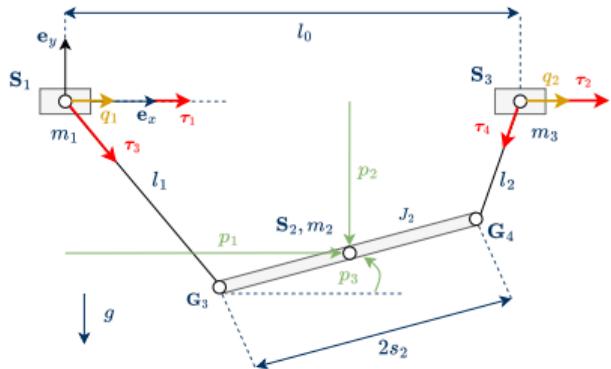


variable Seillängen:

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

Analytisches Modell Doppelkran



Energien:

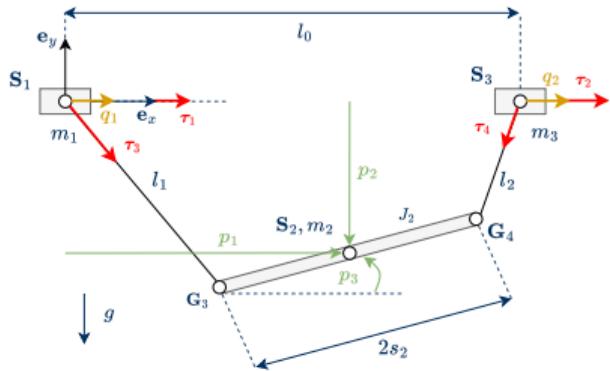
- $T = \frac{J_2 \dot{p}_3^2}{2} + \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{q}_2^2}{2}$
- $V = m_2 g p_2$

variable Seillängen:

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

Analytisches Modell Doppelkran



variable Seillängen:

$$l_1 = \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))^2}$$

Energien:

- $T = \frac{J_2 \dot{p}_3^2}{2} + \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{p}_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{q}_2^2}{2}$
- $V = m_2 g p_2$

Stellkräfte entlang Massepartikel:

$$\mathbf{F}_1 = (\tau_1, 0)^T,$$

$$\mathbf{F}_2 = (\tau_2, 0)^T,$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_3(p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3))}{l_1} \\ \frac{\tau_3(p_2 - s_2 \sin(p_3))}{l_1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_4(-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3))}{l_2} \\ \frac{\tau_4(p_2 + s_2 \sin(p_3))}{l_2} \end{pmatrix}$$

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Jacobi-Matrix J_i der i bisher nicht eliminierte Systemgleichungen bezüglich nicht eliminierte Eingangskomponenten $u_{m-(n-i)}$ (später analog für x_{i+m}):

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Jacobi-Matrix \mathbf{J}_i der i bisher nicht eliminierte Systemgleichungen bezüglich nicht eliminierte Eingangskomponenten $\mathbf{u}_{m-(n-i)}$ (später analog für \mathbf{x}_{i+m}):

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & \varepsilon & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Jacobi-Matrix \mathbf{J}_i der i bisher nicht eliminierte Systemgleichungen bezüglich nicht eliminierte Eingangskomponenten $\mathbf{u}_{m-(n-i)}$ (später analog für \mathbf{x}_{i+m}):

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & \varepsilon & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

→ Identifikation einer Spalte mit nur einem nicht-Null-Eintrag

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Jacobi-Matrix \mathbf{J}_i der i bisher nicht eliminierte Systemgleichungen bezüglich nicht eliminierte Eingangskomponenten $\mathbf{u}_{m-(n-i)}$ (später analog für \mathbf{x}_{i+m}):

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & \varepsilon & * & \cdots & * \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

- Identifikation einer Spalte mit nur einem nicht-Null-Eintrag
- Elimination der mit Spalte korrespondierenden Eingangskomponente und Zeile korrespondierender Gleichung

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Wie vorgehen, wenn keine solche Spalte auffindbar?

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Wie vorgehen, wenn keine solche Spalte auffindbar?
→ Transformation der Systemgleichungen mit Matrix \mathbf{T}_i :

$$\mathbf{T}_i \mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-(n-i)} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times (m-(n-i))} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Flachheitsanalyse von MIMO-Systemen

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- Wie vorgehen, wenn keine solche Spalte auffindbar?
→ Transformation der Systemgleichungen mit Matrix \mathbf{T}_i :

$$\mathbf{T}_i \mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-(n-i)} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times (m-(n-i))} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Konstruktion von \mathbf{T}_i aus linkem Orthokomplement $\mathbf{J}_i^{\text{L}\perp}$ und Pseudoinverser $\mathbf{J}_i^{\text{L}+}$:

$$\mathbf{J}_i^{\text{L}+} \mathbf{J}_i = \mathbf{I}_{m-(n-i)}, \quad \mathbf{J}_i^{\text{L}\perp} \mathbf{J}_i = \mathbf{0}_{(n-m) \times (m-(n-i))} \quad \Rightarrow \mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_i^{\text{L}+} \\ \mathbf{J}_i^{\text{L}\perp} \end{pmatrix}$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ($i = 3$) Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich $\mathbf{u}_2 = (\tau_1, \tau_2)^T$:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \\ gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ 0 & -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -1 & \frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix} \\ m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \end{aligned}$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ($i = 3$) Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich $\mathbf{u}_2 = (\tau_1, \tau_2)^T$:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \\ gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ 0 & -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -1 & \frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix} \\ m_1 \ddot{q}_1 - \tau_1 + \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \end{aligned}$$

→ Elimination von τ_1 und letzter Gleichung

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ($i = 2$) Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich $\mathbf{u}_1 = \tau_2$:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \\ gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix}$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ($i = 2$) Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich $\mathbf{u}_1 = \tau_2$:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{p}_1 - \frac{\tau_2 (p_1 - q_1)}{l_1} &= 0 \\ gm_2 + m_2 \ddot{p}_2 - \frac{p_2 \tau_2}{l_1} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{p_1 - q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \\ -\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix}$$

→ keine Spalte mit nur einem nicht-Null-Eintrag, also Transformation \mathbf{T}_2 nötig:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_2^{\text{L}+} &= \left((J_{2,(1,1)})^{-1} \mathbf{0}_{1 \times 1} \right), \mathbf{J}_2^{\text{L}\perp} = (-J_{2,(2,1)} \quad J_{2,(1,1)}) \\ \Rightarrow \mathbf{T}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{p_1^2 - 2p_1q_1 + p_2^2 + q_1^2}}{-p_1 + q_1} & 0 \\ \frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} & \frac{-p_1 + q_1}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ($i = 2$) transformierte Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich $\mathbf{u}_1 = \tau_2$:

$$\frac{\left(-m_2 \ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + \tau_2 (p_1 - q_1) \right)}{(p_1 - q_1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$g \frac{m_2 (-gp_1 + gq_1 - p_1 \ddot{p}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + \ddot{p}_2 q_1)}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1 q_1 + p_2^2 + q_1^2}} = 0$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ($i = 2$) transformierte Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich $\mathbf{u}_1 = \tau_2$:

$$\frac{\left(-m_2 \ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + \tau_2 (p_1 - q_1) \right)}{(p_1 - q_1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$g \frac{m_2 (-gp_1 + gq_1 - p_1 \ddot{p}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + \ddot{p}_2 q_1)}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1 q_1 + p_2^2 + q_1^2}} = 0$$

→ Elimination von τ_2 und erster transformierter Gleichung

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ($i = 2$) transformierte Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich $\mathbf{u}_1 = \tau_2$:

$$\frac{\left(-m_2 \ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + \tau_2 (p_1 - q_1) \right)}{(p_1 - q_1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$g \frac{m_2 (-gp_1 + gq_1 - p_1 \ddot{p}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + \ddot{p}_2 q_1)}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1 q_1 + p_2^2 + q_1^2}} = 0$$

→ Elimination von τ_2 und erster transformierter Gleichung

→ letzte übrige Gleichung enthält folgende Menge an Systemgrößen:

$$\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Elimination von Systemgrößen- und Gleichungen:

- ($i = 2$) transformierte Systemgleichungen und Jacobi-Matrix bezüglich $\mathbf{u}_1 = \tau_2$:

$$\frac{\left(-m_2 \ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + \tau_2 (p_1 - q_1) \right)}{(p_1 - q_1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$g \frac{m_2 (-gp_1 + gq_1 - p_1 \ddot{p}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + \ddot{p}_2 q_1)}{\sqrt{p_1^2 - 2p_1 q_1 + p_2^2 + q_1^2}} = 0$$

→ Elimination von τ_2 und erster transformierter Gleichung

→ letzte übrige Gleichung enthält folgende Menge an Systemgrößen:

$$\mathcal{M} = \{p_1, \ddot{p}_1, p_2, \ddot{p}_2, q_1\}$$

- rein algebraisches Auftreten von q_1 führt zu Wahl von $\mathbf{y} = (p_1, p_2)^T$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametrisierung der Systemgrößen durch $y = (p_1, p_2)^T$:

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametrisierung der Systemgrößen durch $y = (p_1, p_2)^T$:

- aus letzter transformierter Systemgleichung:

$$q_1 = \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \dot{p}_2}$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametrisierung der Systemgrößen durch $y = (p_1, p_2)^T$:

- aus letzter transformierter Systemgleichung:

$$q_1 = \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}$$

- aus erster transformierter Systemgleichung und Einsetzen von $q_1(y, \dot{y})$:

$$\tau_2 = \frac{m_2\ddot{p}_1 \sqrt{p_2^2 + \left(p_1 - \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}\right)^2}}{p_1 - \frac{gp_1 + p_1\ddot{p}_2 - p_2\ddot{p}_1}{g + \ddot{p}_2}}$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametrisierung der Systemgrößen durch $y = (p_1, p_2)^T$:

- aus zuerst eliminiertem originaler Systemgleichung:

$$\tau_1 = \frac{m_1 \ddot{q}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + p_1 \tau_2 - q_1 \tau_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}}$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametrisierung der Systemgrößen durch $y = (p_1, p_2)^T$:

- aus zuerst eliminiertem originaler Systemgleichung:

$$\tau_1 = \frac{m_1 \ddot{q}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + p_1 \tau_2 - q_1 \tau_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}}$$

→ auch Größen $q_1, \ddot{q}_1, \tau_2 \notin y$ in dieser Parametrisierung von τ_1 enthalten

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametrisierung der Systemgrößen durch $y = (p_1, p_2)^T$:

- aus zuerst eliminiertem originaler Systemgleichung:

$$\tau_1 = \frac{m_1 \ddot{q}_1 \sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2} + p_1 \tau_2 - q_1 \tau_2}{\sqrt{p_2^2 + (p_1 - q_1)^2}}$$

→ auch Größen $q_1, \ddot{q}_1, \tau_2 \notin y$ in dieser Parametrisierung von τ_1 enthalten
→ Einsetzen der zweiten Ableitung von $q_1(y, \ddot{y})$ und $\tau_2(y, \ddot{y})$:

$$\begin{aligned}\tau_1 = & \frac{1}{g^3 + 3g^2\ddot{p}_2 + 3g\ddot{p}_2^2 + \ddot{p}_2^3} (g^3 m_1 \ddot{p}_1 + g^3 m_2 \ddot{p}_1 - g^2 m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 - 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 \\ & + 2g^2 m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 + 3g^2 m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 - 2g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 + g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 + 2g m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \\ & - 4g m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + 2g m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \dot{p}_2 + g m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 + 3g m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 - m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2^2 + m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \\ & + 2m_1 p_2 \ddot{\ddot{p}}_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_2 - 2m_1 p_2 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_1 - 2m_1 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^2 \dot{p}_2 + 2m_1 \ddot{p}_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \dot{p}_2 + m_2 \ddot{p}_1 \ddot{p}_2^3)\end{aligned}$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametisierung der Systemgrößen durch $y = (p_1, p_2)^T$:

- Zusammenfassung der Parametrisierungen:

$$\tau_1 = \theta_1 \left(p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2, p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2^{(4)} \right)$$

$$\tau_2 = \theta_2(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

$$q_1 = \Psi_1(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametisierung der Systemgrößen durch $y = (p_1, p_2)^T$:

- Zusammenfassung der Parametrisierungen:

$$\tau_1 = \theta_1 \left(p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2, p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2^{(4)} \right)$$

$$\tau_2 = \theta_2(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

$$q_1 = \Psi_1(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

→ alle Systemgrößen durch flachen Ausgang $y = (p_1, p_2)^T$ parametrisiert

Flachheitsanalyse am Einzelkran

Parametisierung der Systemgrößen durch $y = (p_1, p_2)^T$:

- Zusammenfassung der Parametrisierungen:

$$\tau_1 = \theta_1 \left(p_2, \dot{p}_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2, p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, p_1^{(4)}, p_2^{(4)} \right)$$

$$\tau_2 = \theta_2(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

$$q_1 = \Psi_1(p_1, p_2, \ddot{p}_1, \ddot{p}_2)$$

→ alle Systemgrößen durch flachen Ausgang $y = (p_1, p_2)^T$ parametrisiert

→ konstruktiver Flachheitsnachweis erbracht \square

Trajektorienplanung

Vorgabe von Randbedingungen an $y(t)$ für $\tau_2 = \theta_2 \left(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots \right)$:

$$y_i(t_0) = y_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_i(t_e) = y_{i,e} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\dot{y}_i(t_0) = \ddot{y}_i(t_0) = y_i^{(3)}(t_0) = y_i^{(4)}(t_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_i(t_e) = \ddot{y}_i(t_e) = y_i^{(3)}(t_e) = y_i^{(4)}(t_e) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_4(t_0) = \ddot{y}_4(t_0) = \dot{y}_4(t_e) = \ddot{y}_4(t_e) = 0$$

Trajektorienplanung

Vorgabe von Randbedingungen an $y(t)$ für $\tau_2 = \theta_2(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots)$:

$$y_i(t_0) = y_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_i(t_e) = y_{i,e} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\dot{y}_i(t_0) = \ddot{y}_i(t_0) = y_i^{(3)}(t_0) = y_i^{(4)}(t_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_i(t_e) = \ddot{y}_i(t_e) = y_i^{(3)}(t_e) = y_i^{(4)}(t_e) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_4(t_0) = \ddot{y}_4(t_0) = \dot{y}_4(t_e) = \ddot{y}_4(t_e) = 0$$

→ Polynomansatz für $y_i(t)$ mit Ordnung $N_i - 1$ mit N_i Anzahl der Randbedingungen:

Trajektorienplanung

Vorgabe von Randbedingungen an $y(t)$ für $\tau_2 = \theta_2 \left(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots \right)$:

$$y_i(t_0) = y_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_i(t_e) = y_{i,e} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\dot{y}_i(t_0) = \ddot{y}_i(t_0) = y_i^{(3)}(t_0) = y_i^{(4)}(t_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_i(t_e) = \ddot{y}_i(t_e) = y_i^{(3)}(t_e) = y_i^{(4)}(t_e) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_4(t_0) = \ddot{y}_4(t_0) = \dot{y}_4(t_e) = \ddot{y}_4(t_e) = 0$$

→ Polynomansatz für $y_i(t)$ mit Ordnung $N_i - 1$ mit N_i Anzahl der Randbedingungen:

$$y_i(t) = a_{i,9}t^9 + a_{i,8}t^8 + \dots + a_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3; t_0 < t < t_e$$

$$y_4(t) = a_{4,5}t^5 + a_{4,4}t^4 + \dots + a_{4,0} \quad \text{für } t_0 < t < t_e.$$

Trajektorienplanung

Vorgabe von Randbedingungen an $y(t)$ für $\tau_2 = \theta_2 \left(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, y_3^{(4)}, \ddot{y}_4, \dots \right)$:

$$y_i(t_0) = y_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_i(t_e) = y_{i,e} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\dot{y}_i(t_0) = \ddot{y}_i(t_0) = y_i^{(3)}(t_0) = y_i^{(4)}(t_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_i(t_e) = \ddot{y}_i(t_e) = y_i^{(3)}(t_e) = y_i^{(4)}(t_e) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{y}_4(t_0) = \ddot{y}_4(t_0) = \dot{y}_4(t_e) = \ddot{y}_4(t_e) = 0$$

→ Polynomansatz für $y_i(t)$ mit Ordnung $N_i - 1$ mit N_i Anzahl der Randbedingungen:

$$y_i(t) = a_{i,9}t^9 + a_{i,8}t^8 + \dots + a_{i,0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3; t_0 < t < t_e$$

$$y_4(t) = a_{4,5}t^5 + a_{4,4}t^4 + \dots + a_{4,0} \quad \text{für } t_0 < t < t_e.$$

→ Bestimmung der $a_{i,j}$ aus linearem Gleichungssystem der Randbedingungen

Trajektorienfolgeregelung

Vektorieller relativer Grad

Ein Mehrgrößensystem mit m Eingangskomponenten u_1, \dots, u_m und m Ausgangskomponenten y_1, \dots, y_m der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

Trajektorienfolgeregelung

Vektorieller relativer Grad

Ein Mehrgrößensystem mit m Eingangskomponenten u_1, \dots, u_m und m Ausgangskomponenten y_1, \dots, y_m der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ wobei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ hat an der Stelle $\gamma \in \mathcal{M}$ den vektoriellen relativen Grad $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$, falls:

Trajektorienfolgeregelung

Vektorieller relativer Grad

Ein Mehrgrößensystem mit m Eingangskomponenten u_1, \dots, u_m und m Ausgangskomponenten y_1, \dots, y_m der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ wobei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ hat an der Stelle $\gamma \in \mathcal{M}$ den vektoriellen relativen Grad $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$, falls:

1. Die Lie-Ableitungen $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = 0$ für alle \mathbf{x} aus einer Umgebung von γ sowie für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{0, \dots, r-2\}$ und

Lie-Ableitung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

$$L_{\mathbf{f}} h_i = d h_i^T \cdot \mathbf{f}$$

Trajektorienfolgeregelung

Vektorieller relativer Grad

Ein Mehrgrößensystem mit m Eingangskomponenten u_1, \dots, u_m und m Ausgangskomponenten y_1, \dots, y_m der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ wobei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ hat an der Stelle $\gamma \in \mathcal{M}$ den vektoriellen relativen Grad $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$, falls:

1. Die Lie-Ableitungen $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^{k-1} h_i(\mathbf{x}) = 0$ für alle \mathbf{x} aus einer Umgebung von γ sowie für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{0, \dots, r-2\}$ und
2. die Entkopplungsmatrix Λ im Punkt $\mathbf{x} = \gamma$ regulär ist:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Lie-Ableitung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}} h_i &= d h_i^T \cdot \mathbf{f}\end{aligned}$$

Trajektorienfolgeregelung

- Bestimmung der Komponenten r_i des **vektoriellen relativen Grades r**:

Trajektorienfolgeregelung

- Bestimmung der Komponenten r_i des **vektoriellen relativen Grades r**:

$$y_i = h_i(\mathbf{x})$$

$$\dot{y}_i = L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x})$$

$$\vdots$$

$$y_i^{(r_i-1)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x})$$

$$y_i^{(r_i)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i} h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \dots + L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_m$$

Lie-Ableitung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow L_{\mathbf{f}} h_i = dh_i^T \cdot \mathbf{f}$$

Trajektorienfolgeregelung

- Bestimmung der Komponenten r_i des **vektoriellen relativen Grades r**:

$$y_i = h_i(\mathbf{x})$$

$$\dot{y}_i = L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x})$$

⋮

$$y_i^{(r_i-1)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x})$$

$$y_i^{(r_i)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i} h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \dots + L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_m$$

Lie-Ableitung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow L_{\mathbf{f}} h_i = d h_i^T \cdot \mathbf{f}$$

Index i	1	2	3	4
Komponente des vektoriellen relativen Grades r_i	2	2	2	2
explizites Auftreten von τ_j bei $y_i^{(r_i)}$	τ_3, τ_4	τ_3, τ_4	τ_3, τ_4	τ_1, τ_3
$y_j^{(k)}$ mit minimalem k , bei dem τ_i zuerst auftritt	$y_4^{(2)}$	$y_{1,2,3}^{(4)}$	$y_{1,2,3,4}^{(2)}$	$y_{1,2,3}^{(2)}$

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- System mit Eingangs-Ausgangs-Verhalten der Form

$$\mathbf{y}^{(r)} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) = (L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}), \dots, L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}))^T$$

Ausgangableitungen

$$y_i^{(r_i)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i} h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \dots + L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_m$$

Entkopplungsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- System mit Eingangs-Ausgangs-Verhalten der Form

$$\mathbf{y}^{(r)} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) = (L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}), \dots, L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}))^T$$

- Virtueller Eingang $\mathbf{v} \stackrel{!}{=} \mathbf{y}^{(r)}$ und Auflösen nach \mathbf{u} (falls r wohldefiniert!)

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- System mit Eingangs-Ausgangs-Verhalten der Form

$$\mathbf{y}^{(r)} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) = (L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}), \dots, L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}))^T$$

- Virtueller Eingang $\mathbf{v} \stackrel{!}{=} \mathbf{y}^{(r)}$ und Auflösen nach \mathbf{u} (falls r wohldefiniert!)
 $\Rightarrow \mathbf{u} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x})) \quad (\text{statische Rückführung})$
- Wahl von \mathbf{v} nach stabilisierender Fehlerdynamik von $e_i := y_i - y_{i,\text{ref}}$

$$e_i^{(r_i)} + c_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)} + \dots + c_{i,1} \dot{e}_i + c_{i,0} e_i = 0$$
$$\Leftrightarrow v_i = y_i^{(r_i)} = y_{i,\text{ref}}^{(r_i)} - c_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)} - \dots - c_{i,1} \dot{e}_i - c_{i,0} e_i$$

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Entkopplungsmatrix Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- Nullspalte in Λ wegen „Defekt“ in Auftreten von τ_2
→ Λ nicht regulär, r nicht wohldefiniert, statische Rückführung also nicht anwendbar

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- Nullspalte in Λ wegen „Defekt“ in Auftreten von τ_2
→ Λ nicht regulär, r nicht wohldefiniert, statische Rückführung also nicht anwendbar
→ Λ Modifikation des Systems, so dass r wohldefiniert

Trajektorienfolgeregelung - Statische Rückführung

- Entkopplungsmatrix für das Doppelkransystem

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p_1 - q_1 - s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{-l_0 + p_1 - q_2 + s_2 \cos(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{p_2 - s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{p_2 + s_2 \sin(p_3)}{m_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ 0 & 0 & \frac{s_2(p_1 \sin(p_3) - p_2 \cos(p_3) - q_1 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & \frac{s_2(l_0 \sin(p_3) - p_1 \sin(p_3) + p_2 \cos(p_3) + q_2 \sin(p_3))}{J_2 \sqrt{(p_2 + s_2 \sin(p_3))^2 + (l_0 - p_1 + q_2 - s_2 \cos(p_3))^2}} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3)}{m_1 \sqrt{(p_2 - s_2 \sin(p_3))^2 + (-p_1 + q_1 + s_2 \cos(p_3))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- Nullspalte in Λ wegen „Defekt“ in Auftreten von τ_2
→ Λ nicht regulär, r nicht wohldefiniert, statische Rückführung also nicht anwendbar
- Λ Modifikation des Systems, so dass r wohldefiniert
- **dynamische Erweiterung**

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung

- Vorschalten von Integratoren vor τ :

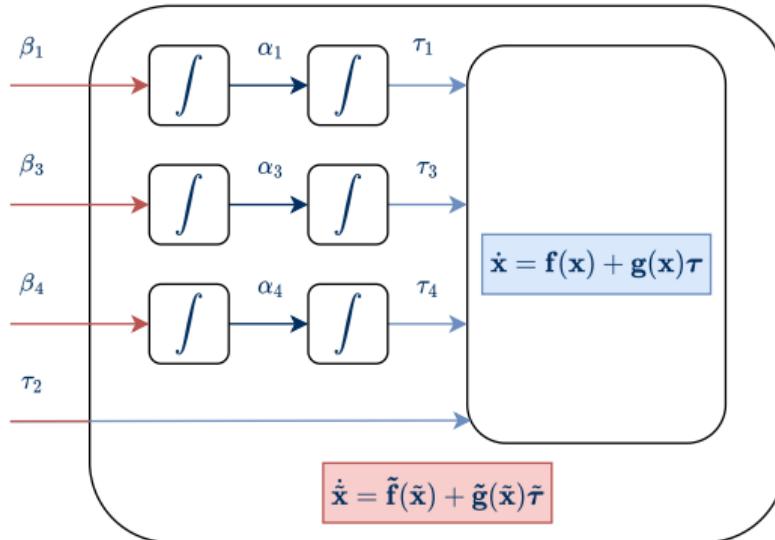
$$\beta_1 := \dot{\alpha}_1 \quad \alpha_1 := \dot{\tau}_1$$

$$\beta_3 := \dot{\alpha}_3 \quad \alpha_3 := \dot{\tau}_3$$

$$\beta_4 := \dot{\alpha}_4 \quad \alpha_4 := \dot{\tau}_4$$

Index i	1	2	3	4
Komponente des vektoriellen relativen Grades r_i	2	2	2	2
explizites Auftreten von τ_j bei $y_i^{(r_i)}$	τ_3, τ_4	τ_3, τ_4	τ_3, τ_4	τ_1, τ_3
$y_j^{(k)}$ mit minimalem k , bei dem τ_i zuerst auftritt	$y_4^{(2)}$	$y_{1,2,3}^{(4)}$	$y_{1,2,3,4}^{(2)}$	$y_{1,2,3}^{(2)}$

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung



$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)^T$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = (\beta_1, \beta_3, \beta_4, \tau_2)^T$$

$$\tilde{\mathbf{x}} := (\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)^T$$

- Vorschalten von Integratoren vor $\boldsymbol{\tau}$:

$$\beta_1 := \dot{\alpha}_1 \quad \alpha_1 := \dot{\tau}_1$$

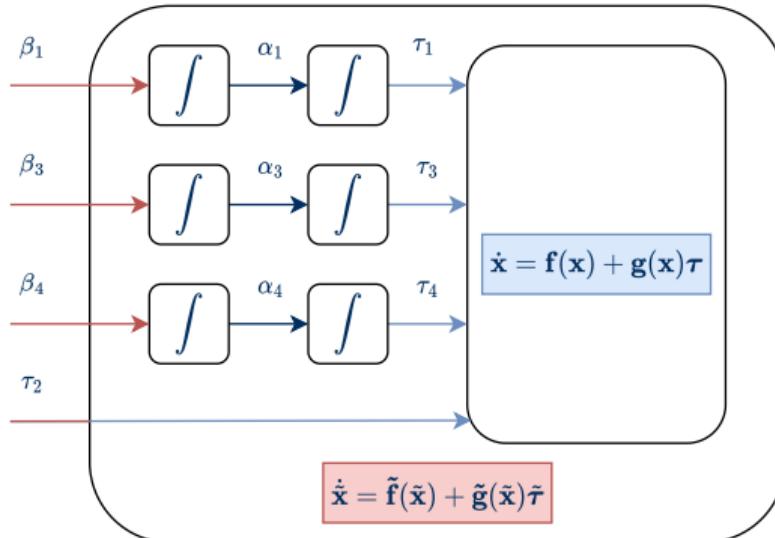
$$\beta_3 := \dot{\alpha}_3 \quad \alpha_3 := \dot{\tau}_3$$

$$\beta_4 := \dot{\alpha}_4 \quad \alpha_4 := \dot{\tau}_4$$

→ Erweiterung des ZRM $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}$ mit $\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\mathbf{x}}$

→ $r_i = 4$ für $i = 1, \dots, 4$

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Erweiterung



$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)^T$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = (\beta_1, \beta_3, \beta_4, \tau_2)^T$$

$$\tilde{\mathbf{x}} := (\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)^T$$

- Vorschalten von Integratoren vor $\boldsymbol{\tau}$:

$$\beta_1 := \dot{\alpha}_1 \quad \alpha_1 := \dot{\tau}_1$$

$$\beta_3 := \dot{\alpha}_3 \quad \alpha_3 := \dot{\tau}_3$$

$$\beta_4 := \dot{\alpha}_4 \quad \alpha_4 := \dot{\tau}_4$$

→ Erweiterung des ZRM $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}$ mit $\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\mathbf{x}}$

→ $r_i = 4$ für $i = 1, \dots, 4$

→ neue Entkopplungsmatrix (* ≠ 0):

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{regulär!}$$

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

- mit $\tilde{\bullet}$ -Größen nun Entkopplung und Stabilisierung analog statischer Rückführung:

$$\tilde{\tau} = \mathbf{u} = \tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}))$$

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

- mit $\tilde{\tau}$ -Größen nun Entkopplung und Stabilisierung analog statischer Rückführung:

$$\tilde{\tau} = \mathbf{u} = \tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}))$$

- funktionale Zusammenhänge der Folgeregelung:

$$\beta_1 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_3 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_4 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\tau_2 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

- mit $\tilde{\bullet}$ -Größen nun Entkopplung und Stabilisierung analog statischer Rückführung:

$$\tilde{\tau} = \mathbf{u} = \tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}))$$

- funktionale Zusammenhänge der Folgeregelung:

$$\beta_1 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_3 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_4 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\tau_2 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

- Anpassung der Trajektorienplanung, da Vorgabe von β_i (Doppelintegratoren)

Trajektorienfolgeregelung - Dynamische Rückführung

- mit $\tilde{\bullet}$ -Größen nun Entkopplung und Stabilisierung analog statischer Rückführung:

$$\tilde{\tau} = \mathbf{u} = \tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}))$$

- funktionale Zusammenhänge der Folgeregelung:

$$\beta_1 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_3 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\beta_4 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

$$\tau_2 = \text{func}(\mathbf{x}, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{y}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(4)})$$

- Anpassung der Trajektorienplanung, da Vorgabe von β_i (Doppelintegratoren)
→ für alle y_i nun 5 Bedingungen je Rand
→ Ansatz von Polynomen der Ordnung 9

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

- aus ZRM $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$ mit $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T$:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}$$

Brückenkransystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\dot{\boldsymbol{\theta}}, 0, -g, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- bisher Rückführung nach Prinzip der exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}))$$

→ nun exact **feedforward** linearization:

$$\mathbf{u} = \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot (\mathbf{v} - \Gamma(\mathbf{x}_{\text{ref}}))$$

- aus ZRM $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$ mit $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T$:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}$$

→ **Heuristik:** Entkopplungsmatrix $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}}) = \mathbf{g}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})$

Brückenkransystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\dot{\boldsymbol{\theta}}, 0, -g, 0, 0, 0)^T,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- **Heuristik:** Annahme der Dynamik der Ordnung 2 des Fehlers $e := \theta - \theta_{\text{ref}}$ für **alle** Komponenten des Koordinatenvektors $\theta = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2)^T$:

$$v := \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_{\text{ref}} - c_1^T \dot{e} - c_0^T e$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- **Heuristik:** Annahme der Dynamik der Ordnung 2 des Fehlers $e := \theta - \theta_{\text{ref}}$ für **alle** Komponenten des Koordinatenvektors $\theta = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2)^T$:

$$v := \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_{\text{ref}} - c_1^T \dot{e} - c_0^T e$$

→ Eingang $u \in \mathbb{R}^4$ und neuer virtueller Eingang $v \in \mathbb{R}^5$ mit verschiedener Dimension
→ Inversenbildung von $\Lambda(x_{\text{ref}}) \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$ nicht direkt möglich

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- **Heuristik:** Annahme der Dynamik der Ordnung 2 des Fehlers $e := \theta - \theta_{\text{ref}}$ für **alle** Komponenten des Koordinatenvektors $\theta = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2)^T$:

$$\mathbf{v} := \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}$$

→ Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ und neuer virtueller Eingang $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ mit verschiedener Dimension
→ Inversenbildung von $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$ nicht direkt möglich

⇒ **Bildung einer Pseudoinversen (PI):**

1. Methode: Moore-Penrose-PI $\mathbf{g}_{[6,10]}^+ = (\mathbf{g}_{[6,10]}^T \mathbf{g}_{[6,10]})^{-1} \mathbf{g}_{[6,10]}^T$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

- **Heuristik:** Annahme der Dynamik der Ordnung 2 des Fehlers $e := \theta - \theta_{\text{ref}}$ für **alle** Komponenten des Koordinatenvektors $\theta = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2)^T$:

$$\mathbf{v} := \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}$$

→ Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ und neuer virtueller Eingang $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ mit verschiedener Dimension
→ Inversenbildung von $\Lambda(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$ nicht direkt möglich

⇒ **Bildung einer Pseudoinversen (PI):**

1. Methode: Moore-Penrose-PI $\mathbf{g}_{[6,10]}^+ = (\mathbf{g}_{[6,10]}^T \mathbf{g}_{[6,10]})^{-1} \mathbf{g}_{[6,10]}^T$
2. Methode: Selektion der letzten 4 Gleichungen des ZRM:

$$\mathbf{S} \cdot \ddot{\theta} = \mathbf{S} \cdot (\ddot{\theta}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{e}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{f}_{[6,10]}(\theta) + \mathbf{S} \cdot \mathbf{g}_{[6,10]}(\theta) \mathbf{u}, \quad \mathbf{S} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{g}_{[7,10]} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{g}_{[6,10]}$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

Stellgesetze:

1. Methode Moore-Penrose-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

Stellgesetze:

1. Methode Moore-Penrose-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

2. Methode Selektions-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[7,10]}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

Stellgesetze:

1. Methode Moore-Penrose-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

2. Methode Selektions-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[7,10]}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

→ keine Stabilität per Konstruktion und durch $\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}} = \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}(t)$ **zeitvariantes** System

Trajektorienfolgeregelung - Exact feedforward linearization

Stellgesetze:

1. Methode Moore-Penrose-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[6,10]}^+(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

2. Methode Selektions-PI:

$$\tau = \mathbf{u} = \mathbf{g}_{[7,10]}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}} - \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{c}_0 \mathbf{e} - \mathbf{f}_{[6,10]}(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}})) = \mathbf{func}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ref}})$$

→ keine Stabilität per Konstruktion und durch $\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}} = \boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}(t)$ **zeitvariantes** System

→ Ensemble-Simulationen (alternativ: zeitvarianter Stabilitätsnachweis)

Implementierung - C-Code-Generierung

Generierung von C-Code aus SymPy expressions durch
sympy.utilities.autowrap mit cython Backend:

- Dynamische Erweiterung

```
In [57]: 1 %%time
2 # solve_ivp is more modern, but the signature of rhs is tailored towards odeint
3 res = sc_integrate.odeint(rhs, xx0, tt) ##:i

info(res) := "<class 'numpy.ndarray'> with shape: (2000, 16)"

---

CPU times: user 1min 21s, sys: 0 ns, total: 1min 21s
Wall time: 1min 21s
```

```
In [58]: 1 %%time
2 res_c = sc_integrate.odeint(rhs_c, xx0, tt) ##:i

info(res_c) := "<class 'numpy.ndarray'> with shape: (2000, 16)"

---

CPU times: user 32.8 s, sys: 29 ms, total: 32.9 s
Wall time: 32.9 s
```

Implementierung - C-Code-Generierung

Generierung von C-Code aus SymPy expressions durch
sympy.utilities.autowrap mit cython Backend:

- exact feedforward linearization

```
In [41]: 1 %%time
2 res_ensemble = []
3
4 for i in range(0,ensemble_size):
5     res_i = sc_integrate.odeint(rhs, xx0_ensemble[i], tt)
6     res_ensemble = [*res_ensemble, res_i]
```

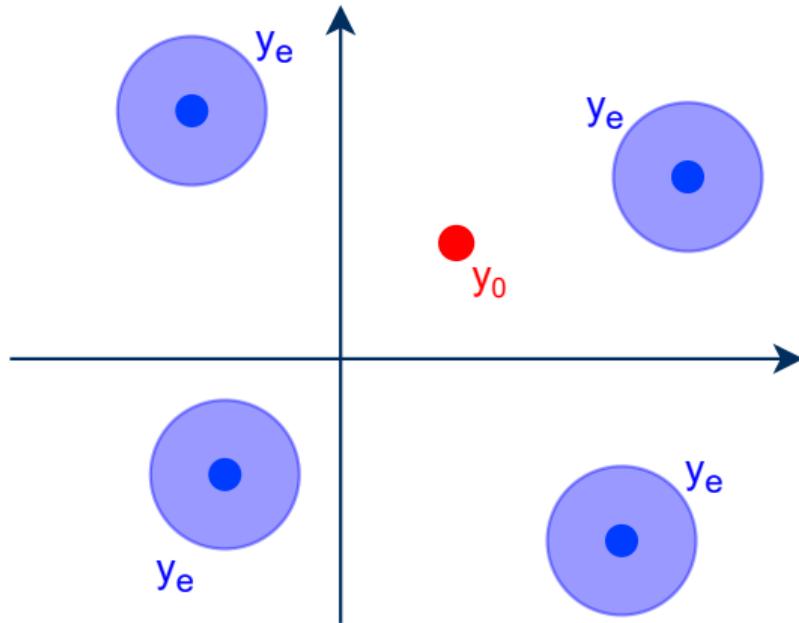
```
CPU times: user 5min 9s, sys: 720 ms, total: 5min 10s
Wall time: 5min 8s
```

```
In [47]: 1 %%time
2 res_ensemble_c = []
3
4 for i in range(0,ensemble_size):
5     res_i = sc_integrate.odeint(rhs_c, xx0_ensemble[i], tt)
6     res_ensemble = [*res_ensemble_c, res_i]
```

```
CPU times: user 52.8 s, sys: 315 ms, total: 53.1 s
Wall time: 52.2 s
```

Reinforcement Learning Ansatz

Training mit festem Startwert, variablem Endwert:



Reinforcement Learning Ansatz

Fehler bei Sollwertsprung zwischen Ruhelagen:

