深蓝学院
shenlanxueyuan.com

从零手写VIO-第九期
第六章作业 思路讲解

主讲人 常鑫

作业

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

基础题

1. 证明式(15)中，取 $\mathbf{y} = \mathbf{u}_4$ 是该问题的最优解。提示：设 $\mathbf{y}\prime = \mathbf{u}_4 + \mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 正交于 $\mathbf{u}_4$，证明

$$\mathbf{y}\prime^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}\prime \geq \mathbf{y}^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}$$

   该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。
2. 请依据本节课公式，完成特征点三角化代码，并通过仿真测试

提升题

1. 请对测量值加上不同噪声（增大测量噪声方差），观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。
2. 固定噪声方差参数，将观测图像帧扩成多帧（如 3，4，5 帧等），观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。

基础题

三角化的数学描述

- 由于 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{2n\times 4}$，在观测次于大于等于两次时，很可能 $\mathbf{D}$ 满秩，无零空间。
- 寻找最小二乘解：

$$\min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{D}\mathbf{y}\|_2^2, \quad s.t. \|\mathbf{y}\| = 1 \tag{14}$$

解法：对 $\mathbf{D}^\top\mathbf{D}$ 进行 SVD：

$$\mathbf{D}^\top\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{4} \sigma_i^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j^\top \tag{15}$$

其中 σ_i 为奇异值，且由大到小排列，$\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ 正交。

基础题

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

方法一：奇异值分解

$$D^\top D = U\Sigma U^\top = [u_1, u_2, u_3, u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top\\ u_2^\top\\ u_3^\top\\ u_4^\top\end{bmatrix}$$

$$y'^\top D^\top D y' - y^\top D^\top D y = (u_4+v)^\top D^\top D(u_4+v) - u_4^\top D^\top D u_4$$

$$= u_4^\top D^\top D v + v^\top D^\top D u_4 + v^\top D^\top D v$$

$$= u_4^\top [u_1, u_2, u_3, u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top\\ u_2^\top\\ u_3^\top\\ u_4^\top\end{bmatrix} v + v^\top [u_1, u_2, u_3, u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top\\ u_2^\top\\ u_3^\top\\ u_4^\top\end{bmatrix} u_4 + v^\top [u_1, u_2, u_3, u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top\\ u_2^\top\\ u_3^\top\\ u_4^\top\end{bmatrix} v$$

$$= [0\ 0\ 0\ \mathrm{u}_4^\top \mathrm{u}_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top v\\ u_2^\top v\\ u_3^\top v\\ 0\end{bmatrix} + [0,0,0,v^\top u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ u_4^\top u_4\end{bmatrix} + [v^\top u_1, v^\top u_2, v^\top u_3, 0]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top v\\ u_2^\top v\\ u_3^\top v\\ 0\end{bmatrix}$$

基础题

方法一：奇异值分解

$$= [0\ 0\ 0\ u_4^\top u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top v\\ u_2^\top v\\ u_3^\top v\\ 0\end{bmatrix} + [0,0,0,v^\top u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ u_4^\top u_4\end{bmatrix} + [v^\top u_1, v^\top u_2, v^\top u_3, 0]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top v\\ u_2^\top v\\ u_3^\top v\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= [v^\top u_1, v^\top u_2, v^\top u_3, 0]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top v\\ u_2^\top v\\ u_3^\top v\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sigma_i (v^\top u_i u_i^\top v) \geq 0$$

因此

$$y'^\top D^\top D y' \geq y^\top D^\top D y$$

基础题

方法二：线性组合

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{y}} \quad & \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}\| \\ s.t. \quad & \|\boldsymbol{y}\| = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

目标函数 $\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}\| = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ 是实对称矩阵，由谱定理 (Spectral theorem) 可知，

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D} = \boldsymbol{Q}\Sigma\boldsymbol{Q}^\top \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n]$ 是正交矩阵，$\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{q}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应的特征值 σ_i 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_i = \sigma_i \boldsymbol{q}_i$. 一般的，令 σ_i 由大到小排列，即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$，那么，

$$\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \ldots & \boldsymbol{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^\top \\ \boldsymbol{q}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^\top \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i^\top \tag{4}$$

(5)

证明过程参考VIO第八期优秀学员airbot作业

基础题

$\{\boldsymbol{q}_i, 1 \le i \le n\}$ 是空间中的一组正交基，任给模为 1 的向量 $\boldsymbol{y}$ 可以写作 $\boldsymbol{q}_i$ 的线性组合：$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{q}_i$，其中系数 α_i 满足 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$，目标函数为：

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}\| &= \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} \\ &= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{q}_i^\top)(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i^\top)(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{q}_i)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{q}_i$ 是正交单位向量，有 $\boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_j^\top = 0, (i \neq j)$，$\boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i^\top = 1$，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}\| &= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{q}_i^\top)(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i^\top)(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{q}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\sigma_i \alpha_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(\sigma_i \alpha_i^2) + \sigma_n \alpha_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(\sigma_i \alpha_i^2) + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2)\sigma_n \\ &= \sigma_n + \sum_{i=1}^{n-1}((\sigma_i - \sigma_n)\alpha_i^2)\end{aligned}$$

然后…… 什么情况下取得最小值呢？

基础题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

方法三：拉格朗日算子

$$\min f(y) = y^\top D^\top D y \quad s.t. \, ||y|| = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min y^\top D^\top D y \; s.t. \, ||y|| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min_y \max_\lambda y^\top D^\top D y + \lambda(1 - y^\top y), s.t. \, \lambda \geq 0$$

$$\min_y \max_\lambda y^\top D^\top D y + \lambda(1 - y^\top y) = \max_\lambda \min_y y^\top D^\top D y + \lambda(1 - y^\top y)$$

拉格朗日对偶性：https://zhuanlan.zhihu.com/p/38182879

提升题

实验预期现象：
增大噪声时，倒数第二小奇异值和最小奇异值比例差距减小。
观测增多时，将会减小噪声的影响，倒数第二小奇异值和最小奇异值比例差距减小。

实验建议：
可以通过多次重复实验来增强数据代表性

提升题

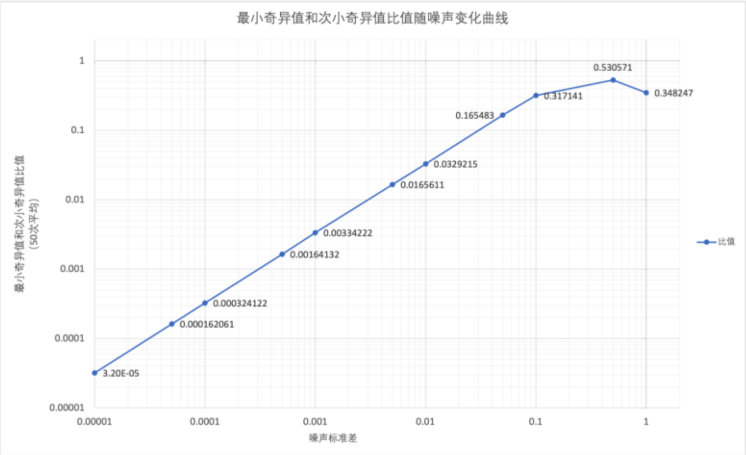

图 3: 最小奇异值和次小奇异值比值随噪声变化曲线

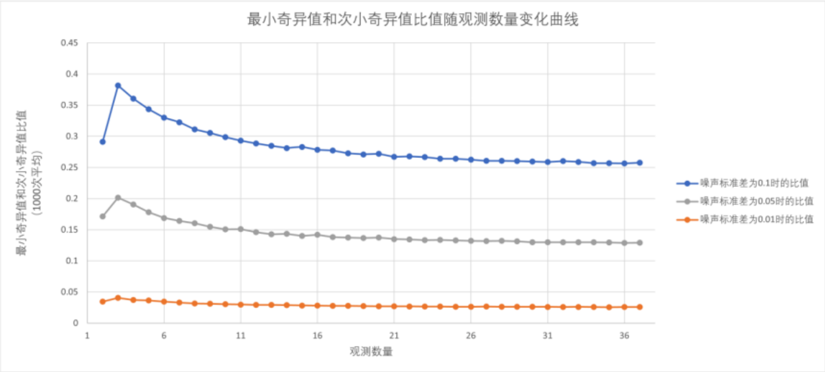

图 4: 最小奇异值和次小奇异值比值随观测数量变化曲线

图片来自VIO第八期优秀学员airbot作业

感谢各位聆听！

Thanks for Listening