深蓝学院
shenlanxueyuan.com

vio第9期第八章作业讲解

主讲人 常鑫

作业内容

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

作业

1. 基础：请仿照 Eq.(12)-(14)，推导当 vins 中对特征采用逆深度参数时，基于特征匀速模型的重投影误差计算形式。
2. 提升：阅读论文[a]，总结基于 B 样条的时间戳估计算法流程，梳理论文公式。
3. 兴趣（不强求）：请推导初始化时旋转误差 Eq.(17) 对时间戳延迟 t_d 的雅克比，参考论文[b]附录 D。

[a] Paul Furgale, Joern Rehder, and Roland Siegwart. "Unified temporal and spatial calibration for multi-sensor systems". In: *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE. 2013, pp. 1280–1286.

[b] Weibo Huang, Hong Liu, and Weiwei Wan. "Online initialization and extrinsic spatial-temporal calibration for monocular visual-inertial odometry". In: *arXiv preprint arXiv:2004.05534* (2020).

基础-特征匀速模型重投影残差

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

推导当 vins 中对特征采用逆深度参数时，基于特征匀速模型的重投影残差计算形式

基于特征匀速模型的重投影误差：对于第 i 帧中的特征点，把它投影到第 j 帧相机坐标系下的值为：

$$\begin{bmatrix} x_{cj} \\ y_{cj} \\ z_{cj} \\ 1 \end{bmatrix} = T_{bc}^{-1} T_{wb_j}^{-1} T_{wb_i} T_{bc} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} u_{ci} \\ \frac{1}{\lambda} v_{ci} \\ \frac{1}{\lambda} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

考虑时间戳延迟时，对 i 帧特征坐标以及第 j 帧观测特征坐标进行补偿：

$$z_i(t_{td}) = \begin{bmatrix} u_{ci} \\ v_{ci} \end{bmatrix} + t_{td} V_i \tag{2}$$

$$z_j(t_{td}) = \begin{bmatrix} u_{cj} \\ v_{cj} \end{bmatrix} + t_{td} V_j \tag{3}$$

$$V_k = \left(\begin{bmatrix} u_{c_{k+1}} \\ v_{c_{k+1}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{c_k} \\ v_{c_k} \end{bmatrix} \right) / (t_{k+1} - t_k) \tag{4}$$

拆成三维坐标形式：

$$\begin{aligned} f_{cj} = \begin{bmatrix} x_{cj} \\ y_{cj} \\ z_{cj} \end{bmatrix} &= R_{bc}^T R_{wb_j}^T T_{wb_i} R_{bc} \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} z_i(t_{td}) \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ R_{bc}^T (R_{wb_j}^T ((R_{wb_i} p_{bc} + p_{wbi}) - p_{wbj}) - p_{bc}) \end{aligned} \tag{5}$$

重投影视觉残差为：

$$r_c = \begin{bmatrix} \frac{x_{cj}}{z_{cj}} \\ \frac{y_{cj}}{z_{cj}} \end{bmatrix} - z_j(t_{td}) \tag{6}$$

提升-基于 B 样条的时间戳估计

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

阅读论文，总结基于B-样条的时间戳估计算法流程，梳理论文公式

论文研究目的：在不支持硬件或者软件上时间戳同步的多传感器上实现较高精度的时间戳同步

他这里的软件时间戳同步指的是使用别人开发好的软件和特定的受支持的sensor才能使用

论文研究成果分成四部分：

1. 提出一种统一的使用批量、连续时间下的最大似然估计方法，估计多传感器之间的固定时间戳延迟。
2. 提出一个可以同时校准相机和IMU之间位姿和时间戳延迟的估计模型。
3. 这个估计模型应用在仿真数据和真实数据上，都有足够的灵敏度估算出时间戳延迟。
4. 证明时间戳延迟估计明显受益于在加速度测量中所包含的附加信息。

提升-基于 B 样条的时间戳估计

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

论文主要理论：

1. 使用 B-样条基函数估算时间戳延迟 (对应上述成果 1)：

构建残差：

$$\mathbf{e}_j := \mathbf{y}_j - \mathbf{h}\big(\mathbf{x}(t_j + d)\big), \qquad (2)$$

其中 $\mathbf{y}_j$ 是测量值，$\mathbf{h}()$ 是预测值，d 为未知的时间戳延迟，$\mathbf{x}(t_j + d)$ 是存在时间戳延迟的状态量。

$\mathbf{x}(t_j + d)$ 用基函数 $\mathbf{\Phi}(t)$ 表示，$\mathbf{\Phi}(t)$ 是固定的，因此估算 $\mathbf{x}(t_j + d)$ 时，只需估算包含 $B \times 1$ 系数的参数 $\mathbf{c}$，：

$$\mathbf{\Phi}(t) := \begin{bmatrix}\phi_1(t) & \dots & \phi_B(t)\end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) := \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}, \qquad (1)$$

把用基函数表示的状态量代入残差方程：

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{y}_j - \mathbf{h}\big(\mathbf{\Phi}(t_j + d)\mathbf{c}\big), \qquad (3)$$

对残差方程进行一阶泰勒展开，求雅克比：

$$\mathbf{e}_j \approx \mathbf{y}_j - \mathbf{h}\big(\mathbf{\Phi}(t_j + \bar{d})\mathbf{c}\big) - \mathbf{H}\dot{\mathbf{\Phi}}(t_j + \bar{d})\mathbf{c}\Delta d, \qquad (4)$$

其中 $\mathbf{H}$ 表示一阶泰勒展开的雅克比：

$$\mathbf{H} := \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}\left(\mathbf{\Phi}(t_j + \bar{d})\mathbf{c}\right)}. \qquad (5)$$

有残差和雅克比就能构建最小二乘，求出时间戳延迟 d

提升-基于 B 样条的时间戳估计

论文主要理论：

2. 相机和 IMU 的校准：

优化的变量：重力加速度 $\mathbf{g}_w$，相机与 IMU 之间的位姿 $\mathbf{T}_{c,i}$，相机与 IMU 的时间戳延迟 d(这里时间以 IMU 为准)，IMU 的位姿 $\mathbf{T}_{w,i}(t)$，加速度计的 bias $\mathbf{b}_a(t)$ 以及陀螺仪的 bias $\mathbf{b}_w(t)$。

IMU 的位姿采用 6×1 的 B 样条表示，其中 $\varphi(t) = \Phi_\varphi(t)c_\varphi$ 是旋转向量，用 (3×1) 的 B-样条表示，$\mathbf{C}()$ 函数将旋转向量转换为旋转矩阵，$\mathbf{t}(t) = \Phi_t(t)\mathbf{c}_t$ 用 (3×1) 的 B-样条表示平移：

$$\mathbf{T}_{w,i}(t) := \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\varphi(t)) & \mathbf{t}(t) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

速度和加速度通过对 $\mathbf{t}(t)$ 求一次导和二次导得到：

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{t}}(t) = \dot{\mathbf{\Phi}}_t(t)\mathbf{c}_t\,, \quad \mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{t}}(t) = \ddot{\mathbf{\Phi}}_t(t)\mathbf{c}_t\,. \tag{7}$$

角速度由旋转向量推导而来：

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{S}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}_\varphi)\dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{c}_\varphi\,, \tag{8}$$

其中 $\mathbf{S}(\varphi(t))$ 的推导如下：

(参考文献:https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/mavt/robotics-n-intelligent-systems/rsl-dam/documents/RobotDynamics2016/KinematicsSingleBody.pdf)

Time Derivative of Rotation Vector ⇔ Angular Velocity

For a rotation vector it can be shown that the following relations hold:

$${}_I\omega_{IB} = \left[\mathbb{I}_{3\times 3} + [\varphi]_\times \left(\frac{1-\cos\|\varphi\|}{\|\varphi\|^2}\right) + [\varphi]_\times^2 \left(\frac{\|\varphi\| - \sin\|\varphi\|}{\|\varphi\|^3}\right)\right]\dot{\varphi} \quad \forall \|\varphi\| \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

提升-基于 B 样条的时间戳估计

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

论文主要理论：

加速度、角速度和特征点的像素坐标的测量值：

$$\boldsymbol{\alpha}_k := \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\varphi}(t_k)\right)^T\left(\mathbf{a}(t_k) - \mathbf{g}_w\right) + \mathbf{b}_a(t_k) + \mathbf{n}_{a_k}, \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{\varpi}_k := \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\varphi}(t_k)\right)^T \boldsymbol{\omega}(t_k) + \mathbf{b}_\omega(t_k) + \mathbf{n}_{\omega_k}, \tag{9b}$$

$$\mathbf{y}_{mj} := \mathbf{h}\left(\mathbf{T}_{c,i}\mathbf{T}_{w,i}(t_j + d)^{-1}\mathbf{p}_w^m\right) + \mathbf{n}_{y_{mj}}, \tag{9c}$$

加速度计和陀螺仪的 bias 和 bias 随机游走：

$$\dot{\mathbf{b}}_a(t) = \mathbf{w}_a(t) \qquad \mathbf{w}_a(t) \sim \mathcal{GP}\left(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_a\delta(t - t')\right) \tag{10a}$$

$$\dot{\mathbf{b}}_\omega(t) = \mathbf{w}_\omega(t) \qquad \mathbf{w}_\omega(t) \sim \mathcal{GP}\left(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_\omega\delta(t - t')\right) \tag{10b}$$

利用马氏距离构建残差公式 J：

$$\mathbf{e}_{y_{mj}} := \mathbf{y}_{mj} - \mathbf{h}\left(\mathbf{T}_{c,i}\mathbf{T}_{w,i}(t_j + d)^{-1}\mathbf{p}_w^m\right) \tag{11a}$$

$$J_y := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{e}_{y_{mj}}^T\mathbf{R}_{y_{mj}}^{-1}\mathbf{e}_{y_{mj}} \tag{11b}$$

$$\mathbf{e}_{\alpha_k} := \boldsymbol{\alpha}_k - \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\varphi}(t_k)\right)^T\left(\mathbf{a}(t_k) - \mathbf{g}_w\right) + \mathbf{b}_a(t_k) \tag{11c}$$

$$J_\alpha := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{e}_{\alpha_k}^T\mathbf{R}_{\alpha_k}^{-1}\mathbf{e}_{\alpha_k} \tag{11d}$$

$$\mathbf{e}_{\omega_k} := \boldsymbol{\varpi}_k - \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\varphi}(t_k)\right)^T \boldsymbol{\omega}(t_k) + \mathbf{b}_\omega(t_k) \tag{11e}$$

$$J_\omega := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{e}_{\omega_k}^T\mathbf{R}_{\omega_k}^{-1}\mathbf{e}_{\omega_k} \tag{11f}$$

$$\mathbf{e}_{b_a}(t) := \dot{\mathbf{b}}_a(t) \tag{11g}$$

$$J_{b_a} := \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_K}\mathbf{e}_{b_a}(\tau)^T\mathbf{Q}_a^{-1}\mathbf{e}_{b_a}(\tau)\,d\tau \tag{11h}$$

$$\mathbf{e}_{b_\omega}(t) := \dot{\mathbf{b}}_\omega(t) \tag{11i}$$

$$J_{b_\omega} := \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_K}\mathbf{e}_{b_\omega}(\tau)^T\mathbf{Q}_\omega^{-1}\mathbf{e}_{b_\omega}(\tau)\,d\tau \tag{11j}$$

总的残差为：

$$J := J_y + J_\alpha + J_\omega + J_{b_a} + J_{b_w}$$

利用 LM 算法优化状态变量。

兴趣-时间戳延迟的雅克比

推导初始化时旋转误差 Eq.(17) 对时间戳延迟t_d的雅克比

推导过程中需要用到的一些公式：

1. First-order approximation

$$\exp(\phi^\wedge) \approx I + \phi^\wedge \tag{7}$$

2. Adjoint property

$$R\exp(\phi^\wedge)R^T = \exp((R\phi)^\wedge) \tag{8}$$

$$R^T\exp(\phi^\wedge)R = \exp((R^T\phi)^\wedge) \tag{9}$$

3. BCH linear approximation

$$Log(\exp(\phi_1^\wedge)\exp(\phi_2^\wedge))^\vee \approx \begin{cases} J_l(\phi_2)^{-1}\phi_1 + \phi_2, & if \quad \phi_1 \quad is \quad small \\ J_r(\phi_1)^{-1}\phi_2 + \phi_1, & if \quad \phi_2 \quad is \quad small \end{cases} \tag{10}$$

$$\exp((\phi + \delta\phi)^\wedge) = \exp((J_l\delta\phi)^\wedge)\exp(\phi^\wedge) = \exp(\phi^\wedge)\exp((J_r\delta\phi)^\wedge) \tag{11}$$

在系统初始化时，论文没有像 VINS-MONO 先单独利用旋转约束估计外参数旋转 R_{bc}，而是把外参数 R_{bc}、陀螺仪 bias 和时间戳延迟 t_d 一起放到旋转约束中，利用一阶泰勒展开求旋转误差对各状态量的雅克比，构建最小二乘求解。

构建旋转约束：

$$e_{rot_{i,j}} = log((\Delta\bar{R}_{i,j}\exp(J^g_{\Delta\bar{R}}\delta b_g))^T R_{bc}\cdot\exp(-w_{c_i}t_d)R_{c_iw}R_{wc_j}\exp(w_{c_j}t_d)R_{cb}) \tag{12}$$

定义要优化的状态量为 $[\delta\phi_{bc} \quad \delta b_g \quad \delta t_d]$

初始化时旋转误差对时间戳延迟 t_d 的雅克比：首先定义三个简写式子

$$R_1'' = (\Delta\bar{R}_{i,j}\exp(J^g_{\Delta R}\delta b_g))^T R_{bc}$$

$$R_2'' = R_{c_iw}R_{wc_j}$$

$$R_3'' = R_{cb}$$

那么关于时间戳延迟 t_d 的残差为：

$$e_{rot}(t_d) = R_1''\exp(-w_{c_i}t_d)R_2''\cdot\exp(w_{c_j}t_d)R_3'' \tag{13}$$

兴趣-时间戳延迟的雅克比

$$
\begin{aligned}
e_{rot}(t_d+\delta t_d) &= Log(R_1''\exp(-w_{c_i}(t_d+\delta t_d))R_2''\exp(w_{c_j}(t_d+\delta t_d))R_3'') \\
&\overset{(11)}{\approx} Log(R_1''\exp(-J_l^i w_{c_i}\delta t_d)\exp(-w_{c_i}t_d)R_2'' \\
&\quad \cdot\exp(w_{c_j}t_d)\exp(J_r^j w_{c_j}\delta t_d)R_3'') \\
&\overset{(8)}{=} Log(\exp(-R_1''J_l^i w_{c_i}\delta t_d)R_1''\exp(-w_{c_i}t_d)R_2'' \\
&\quad \cdot\exp(w_{c_j}t_d)R_3''\exp(R_3''\exp(J_r^j w_{c_j}\delta t_d)) \\
&\overset{(13)}{=} Log(\exp(-R_1''J_l^i w_{c_i}\delta t_d)\exp(e_{rot}(t_d))\exp(R_3''\exp(J_r^j w_{c_j}\delta t_d)) \\
&\overset{(9)}{=} Log(\exp(e_{rot}(t_d))\exp(-\exp(e_{rot}(t_d))^T R_1''J_l^i w_{c_i}\delta t_d) \\
&\quad \cdot\exp(R_3''^T J_r^j w_{c_j}\delta t_d)) \\
&= Log(\exp(e_{rot}(t_d)))\exp(D\cdot\delta t_d)\exp(E\cdot\delta t_d)) \\
&\overset{(7)}{\approx} Log(\exp(e_{rot}(t_d))(I+(D+E)^\wedge\delta t_d)) \\
&\overset{(7)}{\approx} Log(\exp(e_{rot}(t_d)))\exp((D+E)\delta t_d) \\
&\overset{(10)}{\approx} e_{rot}(t_d)+J_r(e_{rot}(t_d))^{-1}((D+E)\delta t_d)) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

其中：$J_l^i(-w_{ci}t_d)$，$J_r^j(w_{cj}t_d)$，$D=-\exp(e_{rot}(t_d))^T R_1''J_l^i w_{c_i}$，$E=R_3''^T J_r^j w_{c_j}$
旋转误差对时间戳延迟 t_d 的雅克比：

$$
\frac{\partial e_{rot}}{\partial\delta t_d} = J_r(e_{rot}(t_d))^{-1}(D+E) \qquad (15)
$$

对外参数 R_{bc}、陀螺仪 bias 的雅克比推导过程类似，不再阐述，具体参考论文附录 D。

在线问答

Q&A

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening