

# 第四节课习题

高翔

2021 年 9 月 9 日

## 1 习题说明

- 第  $i$  节课习题所有材料打包在  $L_i.zip$  中,  $\forall i = 1 \dots 8$ 。
- 习题分为若干种: **计算类**习题, 需要读者编程计算一个实际问题, 我们会附有参考答案以供自测。**操作类**习题, 会指导读者做一个具体的实验, 给出中间步骤截图或结果。**简述类**习题则提供阅读材料, 需要读者阅读材料后, 回答若干问题。
- 每个习题会有一定的分值。每次习题分值加和为 10 分。你需要获得 8 分以上才能得到“通过”的评价。带 \* 的习题为附加题, 会在总分之外再提供一定的分值, 所以总和可能超过 10 分。换句话说, 你也可以选择一道附加题, 跳过一道正常题。
- 每道习题的给分由助教评判, 简述类习题可能存在一定开放性, 所以评分也存在主观因素。
- 请利用深蓝学院系统提交习题。每次习题我们会记通过与否。提交形式为 word 或 pdf 格式报告, 如有编程习题请提交可编译的源码。
- 为方便读者, 我通常会准备一些阅读材料, 放在 books/或 papers/目录下。请读者按个人需求使用这些材料。它们多数是从网络下载的, 如果侵犯到你的权利, 请及时告诉我。
- 每个习题会标注大致用时, 但视同学个人水平可能会有出入。
- 习题的完成情况会影响你对本课程内容的掌握程度, 请认真、独立完成。**习题总得分较高的同学将获得推荐资格。**

备注:

- 本习题内容更新于 2021 年 9 月。考虑到大家的知识水平增加, 本次更新增加了一些作业内容和难度。

## 2 图像去畸变 (2 分, 约 1 小时)

现实生活中的图像总存在畸变。原则上来说, 针孔透视相机应该将三维世界中的直线投影成直线, 但是当我们使用广角和鱼镜头时, 由于畸变的原因, 直线在图像里看起来是扭曲的。本次作业, 你将尝试如何对一张图像去畸变, 得到畸变前的图像。



图 1: 测试图像

图 1 是本次习题的测试图像 (code/test.png), 来自 EuRoC 数据集 [1]。可以明显看到实际的柱子、箱子的直线边缘在图像中被扭曲成了曲线。这就是由相机畸变造成的。根据我们在课上的介绍, 畸变前后的坐标变换为:

$$\begin{cases} x_{\text{distorted}} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2) \\ y_{\text{distorted}} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x, y$  为去畸变后的坐标,  $x_{\text{distorted}}, y_{\text{distorted}}$  为去畸变前的坐标。现给定参数:

$$k_1 = -0.28340811, k_2 = 0.07395907, p_1 = 0.00019359, p_2 = 1.76187114e - 05.$$

以及相机内参

$$f_x = 458.654, f_y = 457.296, c_x = 367.215, c_y = 248.375.$$

请根据 undistort\_image.cpp 文件中内容, 完成对该图像的去畸变操作。

注: 本题不要使用 OpenCV 自带的去畸变函数, 你需要自己理解去畸变的过程。我给你准备的程序中已经有了基本的提示。作为验证, 去畸变后图像如图 2 所示。如你所见, 直线应该是直的。



图 2: 验证图像

### 3 鱼眼模型与去畸变 (2 分, 约 2 小时)

在很多视觉 SLAM 的应用里, 我们都会选择广角或鱼眼相机作为主要的视觉传感器。与针孔相机不同, 鱼眼相机的视野往往可以在  $150^\circ$  以上, 甚至超过  $180^\circ$ 。普通的畸变模型在鱼眼相机下工作的并不好, 幸好鱼眼相机有自己定义的畸变模型。

请参阅 OpenCV 文档 ([https://docs.opencv.org/3.4/db/d58/group\\_\\_calib3d\\_\\_fisheye.html](https://docs.opencv.org/3.4/db/d58/group__calib3d__fisheye.html)), 完成以下问题:

1. 请说明鱼眼相机相比于普通针孔相机在 SLAM 方面的优势。
2. 请整理并描述 OpenCV 中使用的鱼眼畸变模型 (等距投影) 是如何定义的, 它与上题的畸变模型有何不同。
3. 完成 fisheye.cpp 文件中的内容。针对给定的图像, 实现它的畸变校正。要求: 通过手写方式实现, 不允许调用 OpenCV 的 API。
4. 为什么在这张图像中, 我们令畸变参数  $k_1, \dots, k_4 = 0$ , 依然可以产生去畸变的效果?
5. 在鱼眼模型中, 去畸变是否带来了图像内容的损失? 如何避免这种图像内容上的损失呢?

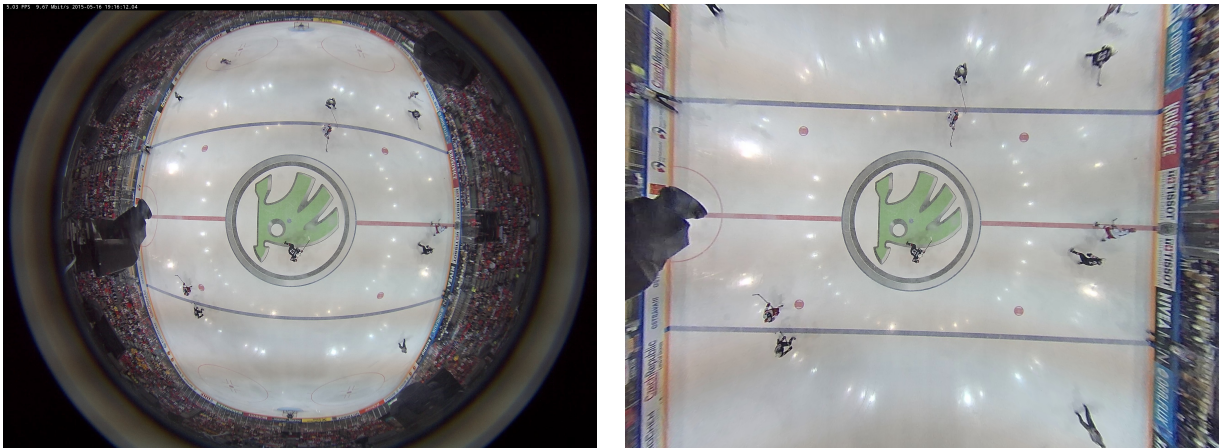


图 3: 鱼眼图像去畸变案例

## 4 双目视差的使用 (2 分, 约 1 小时)

双目相机的一大好处是可以通过左右目的视差来恢复深度。课程中我们介绍了由视差计算深度的过程。本题, 你需要根据视差计算深度, 进而生成点云数据。本题的数据来自 Kitti 数据集 [2]。

Kitti 中的相机部分使用了一个双目模型。双目采集到左图和右图, 然后我们可以通过左右视图恢复出深度。经典双目恢复深度的算法有 BM(Block Matching), SGBM(Semi-Global Block Matching)[3, 4] 等, 但本题不探讨立体视觉内容 (那是一个大问题)。我们假设双目计算的视差已经给定, 请你根据双目模型, 画出图像对应的点云, 并显示到 Pangolin 中。

### 理论部分:

1. 推导双目相机模型下, 视差与  $XYZ$  坐标的关系式。请给出由像素坐标加视差  $u, v, d$  推导  $XYZ$  与已知  $XYZ$  推导  $u, v, d$  两个关系。
2. 推导在右目相机下该模型将发生什么改变。

### 编程部分:

本题给定的左右图见 `code/left.png` 和 `code/right.png`, 视差图亦给定, 见 `code/right.png`。双目的参数如下:

$$f_x = 718.856, f_y = 718.856, c_x = 607.1928, c_y = 185.2157.$$

且双目左右间距 (即基线) 为:

$$d = 0.573 \text{ m}.$$

请根据以上参数, 计算相机数据对应的点云, 并显示到 Pangolin 中。程序请参考 `code/disparity.cpp` 文件。



图 4: 双目图像的左图、右图与视差

作为验证, 生成点云应如图 5 所示。

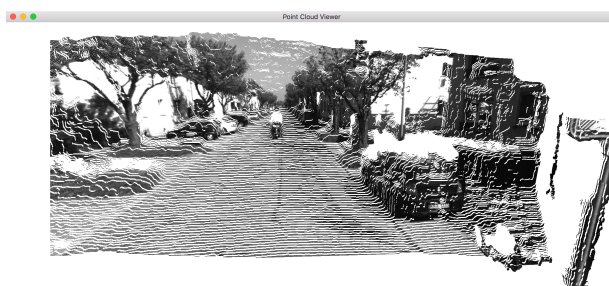


图 5: 双目生成点云结果

## 5 矩阵运算微分 (2 分, 约 1.5 小时)

在优化中经常会遇到矩阵微分的问题。例如, 当自变量为向量  $\mathbf{x}$ , 求标量函数  $u(\mathbf{x})$  对  $\mathbf{x}$  的导数时, 即为矩阵微分。通常线性代数教材不会深入探讨此事, 这往往是矩阵论的内容。我在 ppt/目录下为你准备了一份清华研究生课的矩阵论课件 (仅矩阵微分部分)。阅读此 ppt, 回答下列问题:

设变量为  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ , 那么:

这个矩阵微分不太会做, 那个结论看不懂。到时候问一下

1. 矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , 那么  $d(\mathbf{Ax})/d\mathbf{x}$  是什么<sup>1</sup>?
2. 矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , 那么  $d(\mathbf{x}^T \mathbf{Ax})/d\mathbf{x}$  是什么?
3. 证明:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} = \text{tr}(\mathbf{Axx}^T). \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>严格的写法必须对行向量求导, 所以应该写成  $d(\mathbf{Ax})/d\mathbf{x}^T$ 。但有些时候我们为了公式简洁, 也会省略这个  $^T$ 。

## 6 高斯牛顿法的曲线拟合实验 (2 分, 约 1 小时)

我们在课上演示了用 Ceres 和 g2o 进行曲线拟合的实验, 可以看到优化框架给我们带来了诸多便利。本题中你需要自己实现一遍高斯牛顿的迭代过程, 求解曲线的参数。我们将原题复述如下。设有曲线满足以下方程:

$$y = \exp(ax^2 + bx + c) + w. \quad (3)$$

其中  $a, b, c$  为曲线参数,  $w$  为噪声。现有  $N$  个数据点  $(x, y)$ , 希望通过此  $N$  个点来拟合  $a, b, c$ 。实验中取  $N = 100$ 。

那么, 定义误差为  $e_i = y_i - \exp(ax_i^2 + bx_i + c)$ , 于是  $(a, b, c)$  的最优解可通过解以下最小二乘获得:

$$\min_{a, b, c} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|y_i - \exp(ax_i^2 + bx_i + c)\|^2. \quad (4)$$

现在请你书写 Gauss-Newton 的程序以解决此问题。程序框架见 `code/gaussnewton.cpp`, 请填写程序内容以完成作业。作为验证, 按照此程序的设定, 估计得到的  $a, b, c$  应为:

$$a = 0.890912, \quad b = 2.1719, \quad c = 0.943629.$$

这和书中的结果是吻合的。

## 7 \* 批量最大似然估计 (2 分, 约 2 小时)

考虑离散时间系统:

$$\begin{aligned}x_k &= x_{k-1} + v_k + w_k, & w &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\ y_k &= x_k + n_k, & n_k &\sim \mathcal{N}(0, R)\end{aligned}$$

这可以表达一辆沿  $x$  轴前进或后退的汽车。第一个公式为运动方程,  $v_k$  为输入,  $w_k$  为噪声; 第二个公式为观测方程,  $y_k$  为路标点。取时间  $k = 1, \dots, 3$ , 现希望根据已有的  $v, y$  进行状态估计。设初始状态  $x_0$  已知。

请根据本题题设, 推导批量 (batch) 最大似然估计。首先, 令批量状态变量为  $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, x_3]^T$ , 令批量观测为  $\mathbf{z} = [v_1, v_2, v_3, y_1, y_2, y_3]^T$ , 那么:

1. 可以定义矩阵  $\mathbf{H}$ , 使得批量误差为  $\mathbf{e} = \mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}$ 。请给出此处  $\mathbf{H}$  的具体形式。
2. 据上问, 最大似然估计可转换为最小二乘问题:

$$\mathbf{x}^* = \arg \min \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}), \quad (5)$$

其中  $\mathbf{W}$  为此问题的信息矩阵, 可以从最大似然的概率定义给出。请给出此问题下  $\mathbf{W}$  的具体取值。

3. 假设所有噪声相互无关, 该问题存在唯一的解吗? 若有, 唯一解是什么? 若没有, 说明理由。

## Bibliography

- [1] M. Burri, J. Nikolic, P. Gohl, T. Schneider, J. Rehder, S. Omari, M. W. Achtelik, and R. Siegwart, “The euroc micro aerial vehicle datasets,” *The International Journal of Robotics Research*, 2016.
- [2] A. Geiger, P. Lenz, and R. Urtasun, “Are we ready for autonomous driving? the kitti vision benchmark suite,” *2012 IEEE Conference On Computer Vision And Pattern Recognition (cvpr)*, pp. 3354–3361, 2012.
- [3] H. Hirschmuller, “Accurate and efficient stereo processing by semi-global matching and mutual information,” in *Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005. IEEE Computer Society Conference on*, vol. 2, pp. 807–814, IEEE, 2005.
- [4] D. Scharstein and R. Szeliski, “A taxonomy and evaluation of dense two-frame stereo correspondence algorithms,” *International journal of computer vision*, vol. 47, no. 1-3, pp. 7–42, 2002.