第二章作业

Student name: Francisrk

Due date: February 6th, 2022

1　第 1 题

已阅。

2　第 2 题

2.1　在什么条件下，x 有解且唯一？

设增广矩阵为 $\bar{A}$，未知数个数为 n，则当系数矩阵 A 的秩和增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩相等，且等于 n 时，方程组有唯一解，即

$$r(A) = r(\bar{A}) = n$$

2.2　高斯消元法的原理是什么？

高斯消元法的原理是线性方程组进行下列初等变换后，方程组的解不变：

1. 用一个非零常数乘以方程的两边;
2. 把某方程的 k 被加到另一方程上;
3. 互换两个方程的位置。

将方程组中的一一个方程的未知数用含有另一未知数的代数式表示, 并将其带入到另一方程中，这就小区了一未知数，得到一解; 或将方程组中的一方程倍乘某个常数加到另外一方程中去，也可达到消去一未知数的目的。

2.3 QR 分解的原理是什么？

QR 矩阵分解定义如下：设 A 为 n 阶复矩阵，则存在酉矩阵 Q 以及上三角矩阵 R，使得式 (1) 成立

$$A = QR \tag{1}$$

使用 QR 分解的原因是 [1]：当数据量大时，使用正规方程组求解会存在不稳定的现象，原因是需要对 A^TA 求逆，解决的方法是使用 QR 分解，QR 分解要求如下：

一个矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geqslant n$ 可以被分解成 $A = QR$，其中：

1. $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是正交矩阵
2. $R \equiv \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$
3. $\hat{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是上三角矩阵

计算 QR 分解一共有 3 种方法：

1. Gram-Schmidt Orthogonalization (施密特正交化)
2. Householder Triangularization
3. Givens Rotations

以施密特正交化为例来说明 QR 分解的过程。施密特正交化如式 (2) 所示：

$$\beta_j = \alpha_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(\alpha_j, \beta_k)}{(\beta_k, \beta_k)} \beta_k \tag{2}$$

对施密特正交化做简单的推导 [2]：

在三维空间存在直角坐标系，其中任意一点都可以由 (x,y,z) 坐标唯一确定，在这个坐标系中，X、Y、Z 三轴都是相互正交 (垂直) 的。那么推广

到 n 维欧式空间，就是 n 个线性无关的基向量组成的一组基，n 维欧式空间中任意一位置，都可以由这组基线性表示。而施密特正交化就是得到这种基的方法。

设 $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，我们希望由此得到 $\beta_1, \beta_2 ... \beta_n$ 这组正交基，先令 $\beta_1 = \alpha_1$，为了得到 β_2，可将 α_2 做如图所示的 2.1 分解：

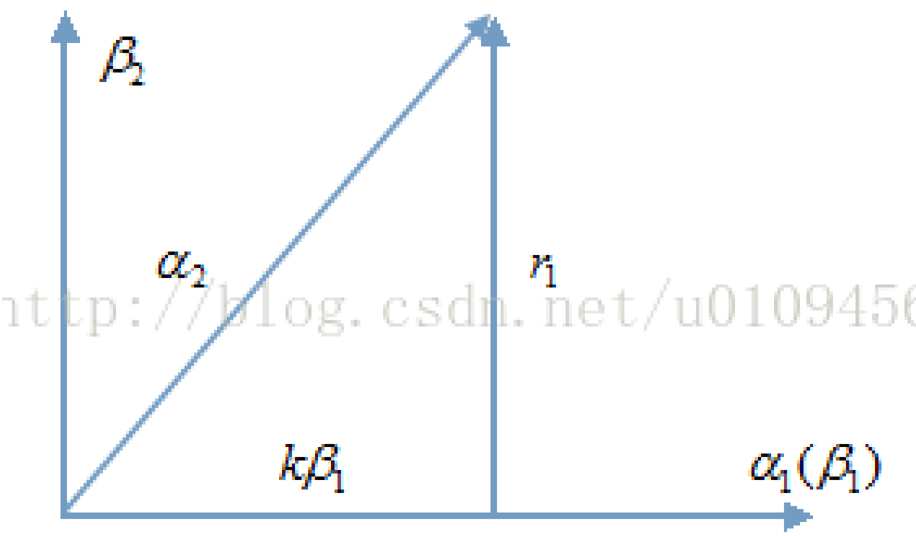


图 2.1 β_2 的分解

α_2 被正交分解为

$$\alpha_2 = k\beta_1 + r_1 \tag{3}$$

有 $r_1 = \alpha_2 - k\beta_1$，又 r_1 与 β_1 正交，有 $(r_1, \beta_1) = 0$，带入 r_1 得

$$(\alpha_2 - k\beta_1, \beta_1) = 0 \tag{4}$$

展开得

$$(\alpha_2, \beta_1) - k(\beta_1, \beta_1) = 0 \tag{5}$$

故

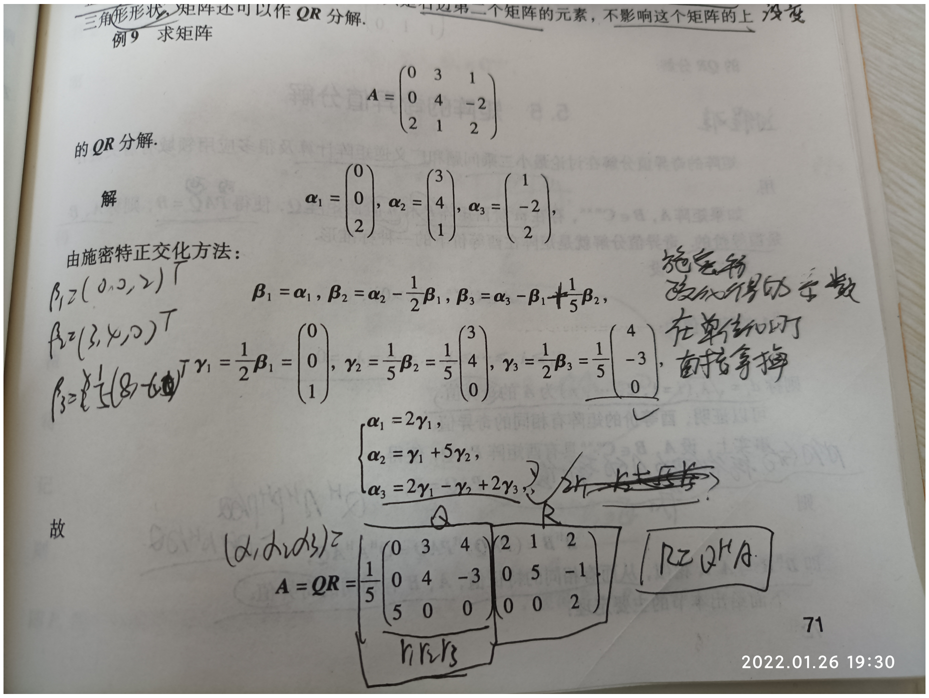
$$k = \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \tag{6}$$

将 (6) 带入 (3) 得

$$\beta_2 = r_1 = \alpha_2 - k\beta_1 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \tag{7}$$

β_3... 同理可推，最终得到式 (2)。

图 2.2 为摘自 [3] 的例子，用于说明 QR 分解的过程：


例 9 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&3&1\\0&4&-2\\2&1&2\end{pmatrix}$$

的 QR 分解.

解 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$,

由施密特正交化方法：

$\beta_1=(0,0,2)^T$

$\beta_2=(3,4,0)^T$

$$\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_1,\ \beta_3=\alpha_3-\beta_1+\frac{1}{5}\beta_2,$$

$$\gamma_1=\frac{1}{2}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \gamma_2=\frac{1}{5}\beta_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},\ \gamma_3=\frac{1}{2}\beta_3=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}\alpha_1=2\gamma_1,\\ \alpha_2=\gamma_1+5\gamma_2,\\ \alpha_3=2\gamma_1-\gamma_2+2\gamma_3,\end{cases}$$

故

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$

$$A=QR=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&3&4\\0&4&-3\\5&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

$R=Q^HA$

$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$

71

2022.01.26 19:30

图 2.2 QR 分解实例

求出 Q 之后，求 R 可以用 $R = Q^H A$ 来求（Q^H 是 Q 的共轭转置）。QR 分解可以迭代求解特征值和求解线性方程组。书中的“舒尔定理”没看懂，不知道如何与 QR 分解联系起来。

2.4 Cholesky 分解的原理是什么？

Cholesky 分解属于矩阵的三角分解，三角分解的原因是：当一个矩阵呈三角形时，求逆，求行列式，求解线性方程组都很方便，要理解 Cholesky 分解需要先说明三角分解，然后引入 Doolittle 分解，Crout 分解和 LDR 分解，最后解释 Cholesky 分解。

首先，三角分解的定义是对矩阵 $A \in C^{n\times n}$，若存在上三角矩阵 $L \in C^{n\times n}$ 和下三角矩阵 $R \in C^{n\times n}$，使得 $A = LR$，则称 A 可以作三角分解。

其次，有定理表明：可逆矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 可以作三角分解的充要条件是 A 的所有顺序主子式不为 0。可以证明三角分解不是唯一的，为了得到唯一的三角分解，引入 Doolittle 分解和 Crout 分解。

如果 $A = LR$ 中 L 为对角线元素为 1 的下三角矩阵（单位下三角矩阵），R 为上三角矩阵，则 A= LR 被称为 Doolttle 分解; 如果 $A = LR$ 中 R 为对角线元素为 1 的上三角矩阵（单位上三角矩阵），L 为下三角矩阵，则 A= LR 被称为 Crout 分解; 如果 A 可以分阶乘 $A = LDR$，其中 L，D，R 分别为单位下下三角矩阵，对角矩阵，单位上三角矩阵，则称 $A = LDR$ 为 A 的 LDR 分解。可以证明，矩阵的 LDR 分解是唯一的。

最后，引入矩阵的 Cholesky 分解。如果 $A \in C^{n\times n}$ 的正定[1]厄米特矩阵[2]，则存在下三角矩阵 G 使得 $A = GG^H$，称此分解为 A 的 Cholesky 分解。且有结论：如果矩阵 A 为 n 阶对称正定阵，则存在一个对角元素为正数的下三角实数阵 G，使得：当限定 G 的对角元素为正时，这种分解是唯一的。

最后附上 Doolittle 分解，Crout 分解和 Cholesky 分解的求解例题，如图 2.3-2.6 所示

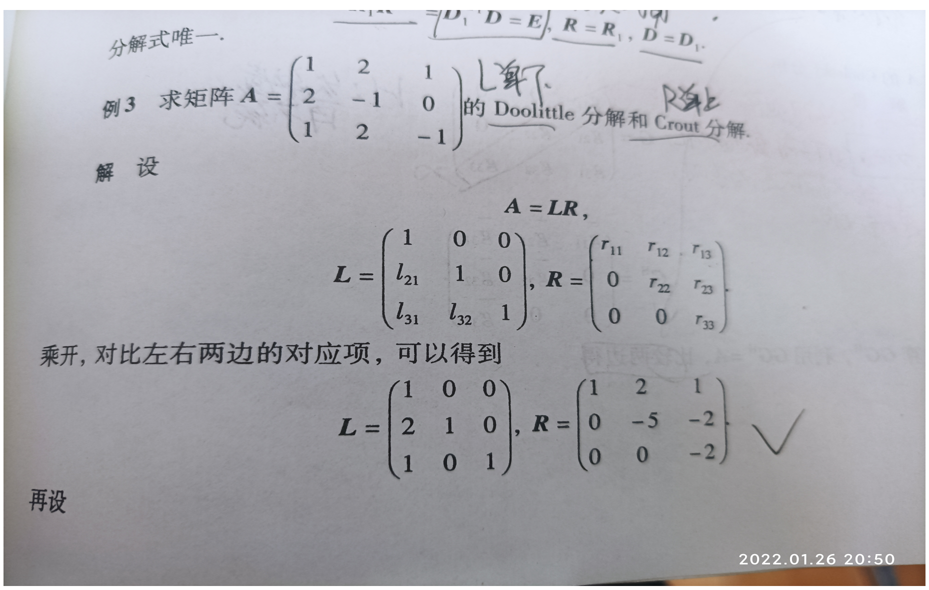
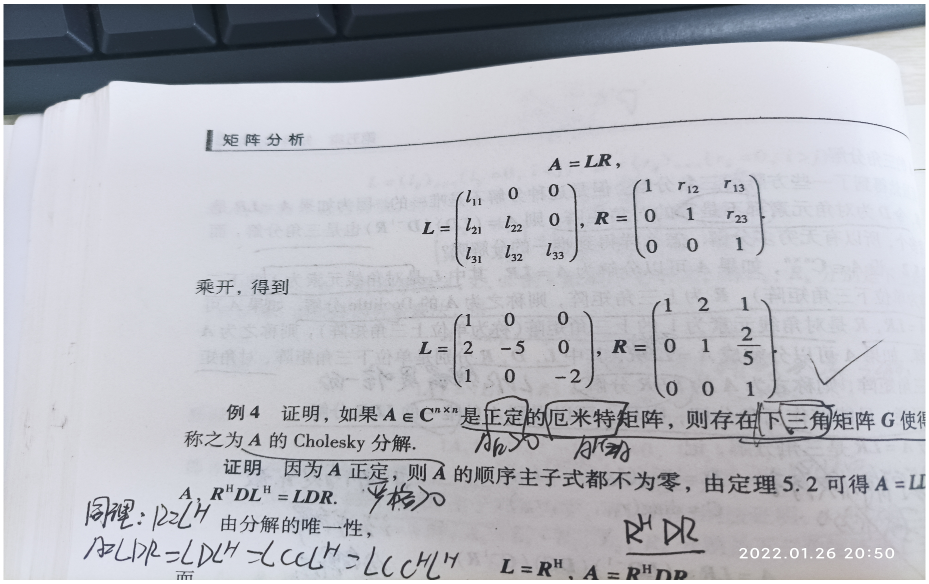


图 2.3 例题 _1

[1]正定：所有的顺序主子式大于 0, 所有特征值大于 0, 见线性代数 P157

[2]厄米特矩阵：$A^H = A$



矩阵分析

$$A = LR,$$

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

乘开，得到

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 4 证明，如果 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是正定的厄米特矩阵，则存在下三角矩阵 G 使得

称之为 A 的 Cholesky 分解.

证明 因为 A 正定，则 A 的顺序主子式都不为零，由定理 5.2 可得 $A = LD$

A，$R^H DL^H = LDR$.

由分解的唯一性，

$$L = R^H,\quad A = R^H DR$$

而

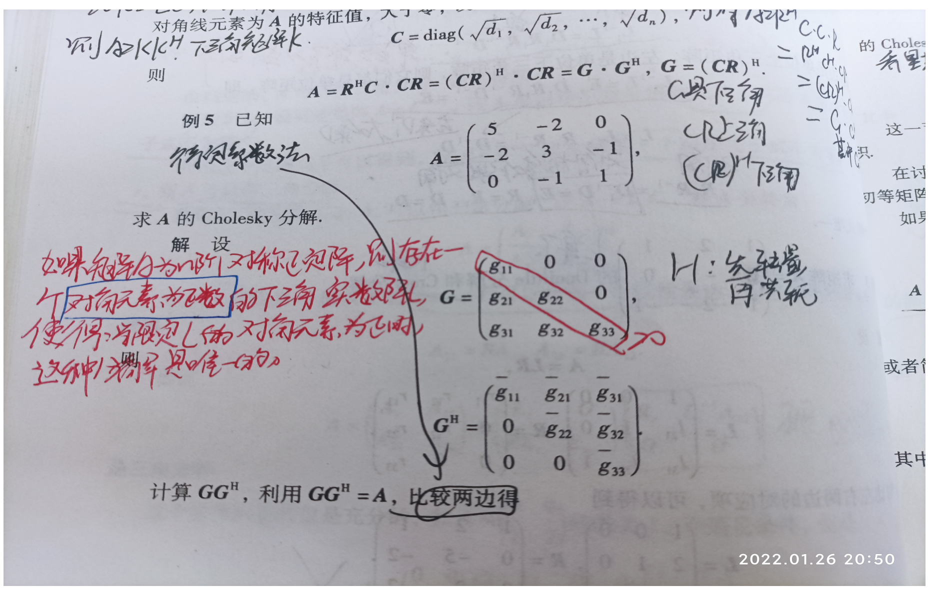
同理：$R=L^H$

$A=LDR=LDL^H=LCCL^H=LCC^HL^H$

$R^H DR$

2022.01.26 20:50

图 2.4 例题 _2



对角线元素为 A 的特征值，大于零，$C = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n})$，

则 $A=LL^H$ 下三角分解

则

$$A = R^H C \cdot CR = (CR)^H \cdot CR = G \cdot G^H,\quad G = (CR)^H.$$

C是对角

CR上三角

$(CR)^H$ 下三角

例 5 已知

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

待定系数法

求 A 的 Cholesky 分解.

解 设

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix},$$

如果矩阵A为n阶对称正定矩阵，则存在一个对角元素为正数的下三角实数矩阵L，使得A=LL^T，当限定L的对角元素为正时，这种分解是唯一的。

H：共轭转置

则

$$G^H=\begin{pmatrix} \bar g_{11} & \bar g_{21} & \bar g_{31} \\ 0 & \bar g_{22} & \bar g_{32} \\ 0 & 0 & \bar g_{33} \end{pmatrix}.$$

计算 GG^H，利用 $GG^H = A$，比较两边得

2022.01.26 20:50

图 2.5 例题 _3

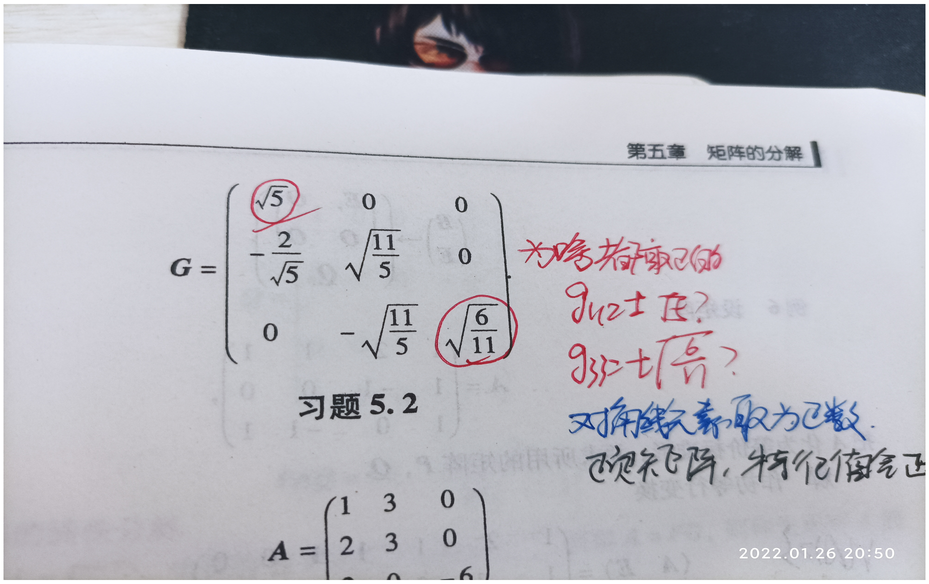


图 2.6 例题 _4

2.5 编程实现 QR 和 Cholesky 分解

测试结果如图 2.7 所示，分别用 QR 分解和 Cholesky 分解求解 100×100 的线性方程组，显然，Cholesky 分解求解的速度更快。

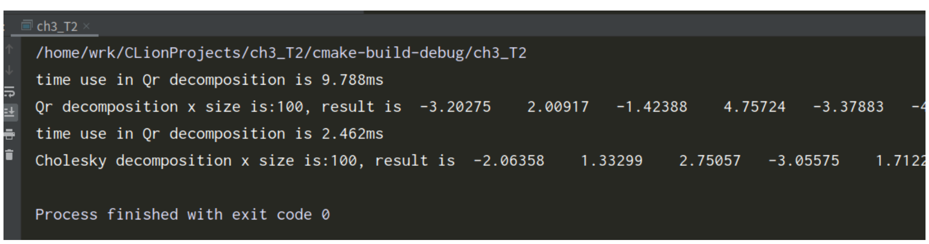


图 2.7 例题 _4

工程代码如下所示：

```
#include <iostream>
using namespace std;
#include <ctime>
// Eigen 部分
#include <Eigen/Core>
```

```cpp
// 稠密矩阵的代数运算（逆，特征值等）
#include <Eigen/Dense>

#define MATRIX_SIZE 100

int main() {

    //解方程
    // 我们求解 matrix_NN * x = v_Nd 这个方程
    // N的大小在前边的宏里定义，它由随机数生成

    // 如果不确定矩阵大小，可以使用动态大小的矩阵，大于100,所以用动态的
    Eigen::Matrix< double, Eigen::Dynamic, Eigen::Dynamic > matrix_NN;

    matrix_NN = Eigen::MatrixXd::Random( MATRIX_SIZE, MATRIX_SIZE );
    Eigen::Matrix< double, MATRIX_SIZE,  1> v_Nd= Eigen::MatrixXd::Random( MATRIX_SIZE,1 ); //非齐次项随机初始化
    Eigen::Matrix<double,MATRIX_SIZE,1> x = Eigen::MatrixXd::Random( MATRIX_SIZE, 1 );  //结果随机初始化

    // 通常用矩阵分解来求，例如QR分解，速度会快很多
    clock_t time_stt = clock(); // 计时
    x = matrix_NN.colPivHouseholderQr().solve(v_Nd);
    cout <<"time use in Qr decomposition is " <<1000*  (clock() - time_stt)/(double)CLOCKS_PER_SEC <<"ms" << endl;
    cout <<"Qr decomposition x size is:"<<x.size()<<", result is"<<x.transpose()<<endl;

    time_stt = clock(); // 计时
    x = matrix_NN.ldlt().solve(v_Nd);
    cout <<"time use in Qr decomposition is " <<1000*  (clock() - time_stt)/(double)CLOCKS_PER_SEC <<"ms" << endl;
    cout <<"Cholesky decomposition x size is:"<<x.size()<<", result is"<<x.transpose()<<endl;

    return 0;
}
```

Listing 1: main.cpp

```cmake
cmake_minimum_required(VERSION 2.8)
project(ch3_T2)
set(CMAKE_CXX_STANDARD 11)
include_directories( "/usr/local/include/eigen3" )
add_executable(ch3_T2 main.cpp)
```

Listing 2: 工程/CMakeLists.txt

3 第 3 题

3.1 什么是正定矩阵和半正定矩阵？

正定矩阵：对于二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，如果对任何 $\boldsymbol{x} \neq 0$，恒有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$，则称二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。

半正定矩阵：半正定矩阵是正定矩阵的推广，对于二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，如果对任何 $\boldsymbol{x} \neq 0$，恒有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$，则实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵。

3.2 方阵 A 的特征值，特征向量，是否实数？如何计算特征值？

特征值和特征向量的定义：对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个数 λ 及非零的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$ 成立，则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，称非零向量 α 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 α 的一个特征向量。

实矩阵的特征值不一定是实数，但是实对称矩阵的特征值一定是实数，证明如下：

设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 厄米特矩阵，设 $(\lambda, \boldsymbol{\alpha})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征对，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} \tag{8}$$

两边同左乘 $\boldsymbol{x}^H$ 得

$$\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x} \tag{9}$$

由于 $\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 均为实数，则有

$$\lambda = \tfrac{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}} \tag{10}$$

也是实数。

计算特征值：对于一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，列出其特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$，求解此特征方程即可得到 A 的特征值（共 n 个）。

3.3 什么是矩阵的相似性？相似性反映了什么几何意义？

相似性：设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B} \tag{11}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。

几何意义：相似的矩阵是同一个线性变换在不同基/坐标系下的的不同描述。线性变换若粗略看成一个刚体的特定运动。刚体的特定运动是同一个，但坐标系改变的话这个运动的描述函数就会不一样，如果这个函数可用矩阵等价替代的话，一个坐标系就对应着一个矩阵，因此这些矩阵就不同，但这些矩阵必有关系，这个关系就是相似 [4]。

3.4 矩阵一定能对角化吗？什么样的矩阵能保证对角化？不能对角化的矩阵能够形成什么样的形式（Jordan 标准形）？

矩阵$\boldsymbol{A}$ 不一定能对角化，只有当矩阵$\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵相似，则称$\boldsymbol{A}$ 可对角化。

对角化条件：n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\bigwedge \iff \boldsymbol{A}$ 有 n 个无关的特征向量。

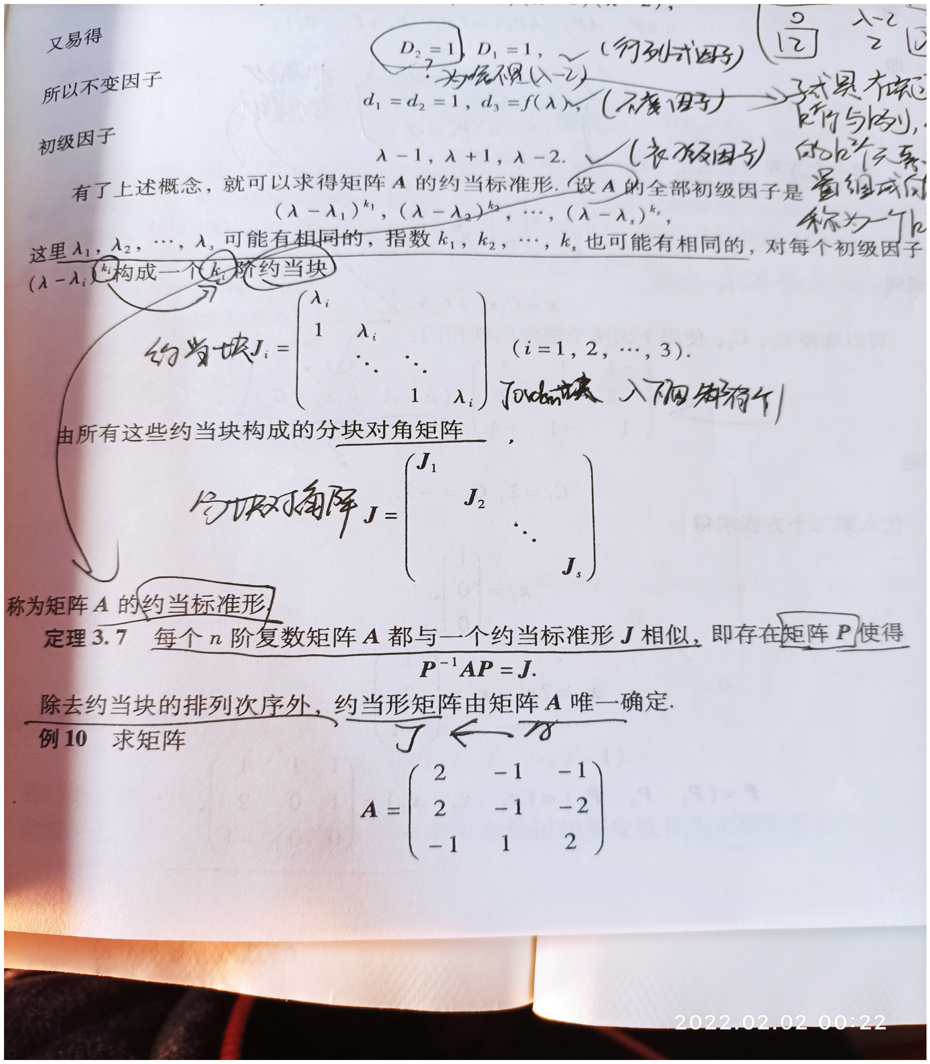
而 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个无关的特征向量的充分条件如下：

1. $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值；
2. $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵；
3. λ_i 是 n_i 重特征值，即 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_i$

以上三个条件满足任意一个时，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 即可对角化。

对角化的作用之一是可以解多元微分方程，见 [3]P31。

当矩阵无法对角化时，为了将矩阵简化，矩阵还能够简化成 Jordan 标准型。分别求出矩阵的各阶行列式因子，不变因子，初级因子，由初级因子可以构成 Jordan 块，进而可以求出 Jordan 标准型，如下例所示：



又易得 $D_2=1$, $D_1=1$, （行列式因子）

所以不变因子 $d_1=d_2=1$, $d_3=f(\lambda)$, （不变因子）

初级因子

$$\lambda-1,\ \lambda+1,\ \lambda-2.$$ （初级因子）

有了上述概念，就可以求得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准形. 设 $\boldsymbol{A}$ 的全部初级因子是

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{k_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 可能有相同的，指数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 也可能有相同的，对每个初级因子 $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$ 构成一个 k_i 阶约当块

$$\text{约当块}\ \boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{pmatrix}\quad (i=1,2,\cdots,3).$$

Jordan块

由所有这些约当块构成的分块对角矩阵

$$\text{分块对角阵}\ \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准形.

定理 3.7 每个 n 阶复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与一个约当标准形 $\boldsymbol{J}$ 相似，即存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}.$$

除去约当块的排列次序外，约当形矩阵由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定.

$J \leftarrow$

例 10 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

2022.02.02 00:22

图 3.1 Jordan 标准型例题 _1

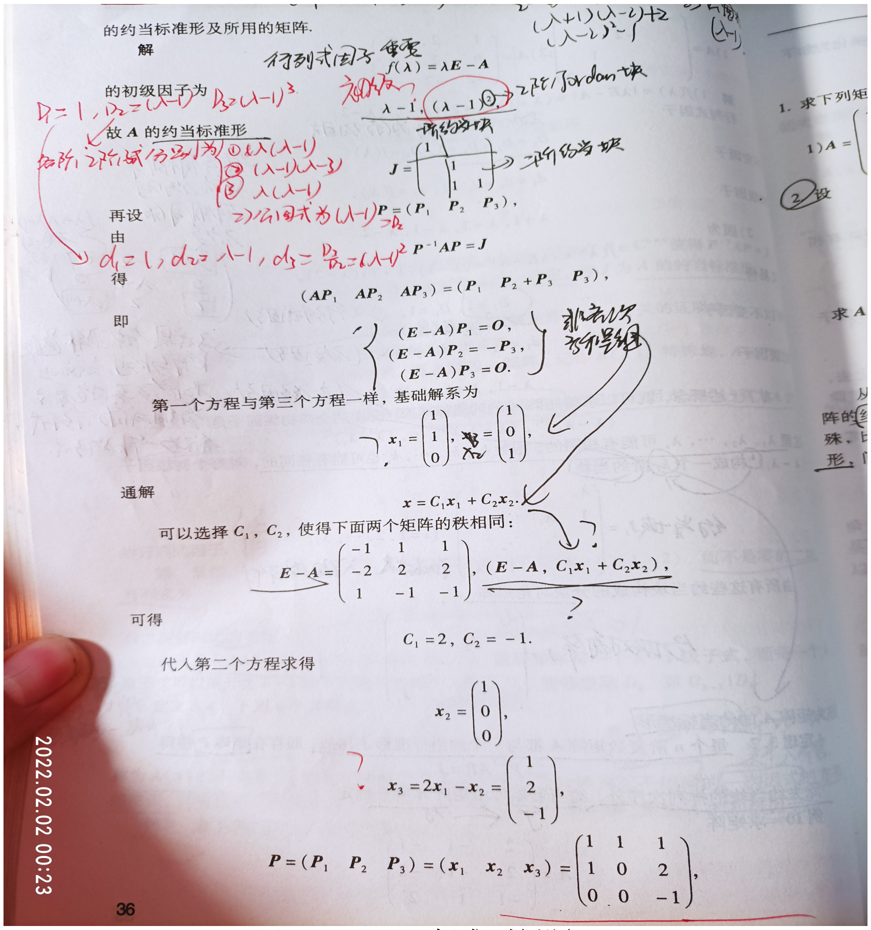
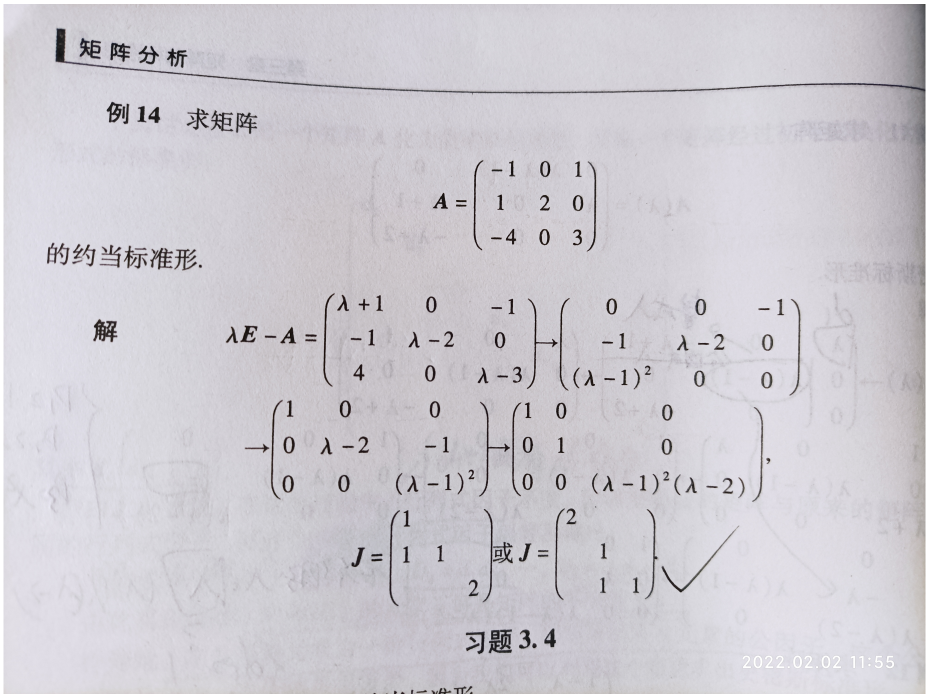


图 3.2 Jordan 标准型例题 _2

每个 n 阶复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与一个 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}$ 相似，即存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$，除去 Jordan 块的排列次序外，Jordan 型矩阵由矩阵 A 唯一确定。

当矩阵阶数较高时，求行列式因子较麻烦，可以考虑先把矩阵化为对角型，且在化为相似对角形时，矩阵的行列式因子不改变。且有结论：任一个非零多项式矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以经过初等变换化为史密斯标准形。而史密斯标准型的对角线上的元素正好是矩阵的不变因子，由不变因子即可得初级因子，进而可得 Jordan 标准型，如图 3.3 的例题所示，先将 λ 矩阵化为史密斯标准型，求得初级因子分别为 $(\lambda-1)^2$,$(\lambda-2)$


矩阵分析

例 14 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{pmatrix}$$

的约当标准形.

解

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+1&0&-1\\-1&\lambda-2&0\\4&0&\lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&\lambda-2&0\\(\lambda-1)^2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&(\lambda-1)^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{pmatrix},$$

$$J=\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&&2\end{pmatrix}\text{或}J=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&1&1\end{pmatrix}.$$

习题 3.4

2022.02.02 11:55

图 3.3 通过史密斯标准型化 Jordan 标准型例题

3.5 奇异值分解（SVD）是什么意思？

矩阵的 SVD 在讨论最小二乘问题和广义逆矩阵计算等有关键作用 [3]。

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，存在 m 阶酉矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是酉等价的，奇异值分解 (SVD) 就是在矩阵酉等价下的一种标准型。

设

$$A\in C_r^{m\times n}(r>0) \tag{12}$$

A^HA 的特征值为

$$\lambda_1\geq\lambda_2\cdots\geq\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0 \tag{13}$$

则称

$$d_i=\sqrt{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,n) \tag{14}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值。可以证明，酉等价的矩阵具有相同的奇异值。

SVD 定义：设 $\boldsymbol{A} \in C_r^{m\times n}$，则存在酉矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{15}$$

这里

$$\boldsymbol{D} = diag(d_1, d_2, \cdots, d_r) \tag{16}$$

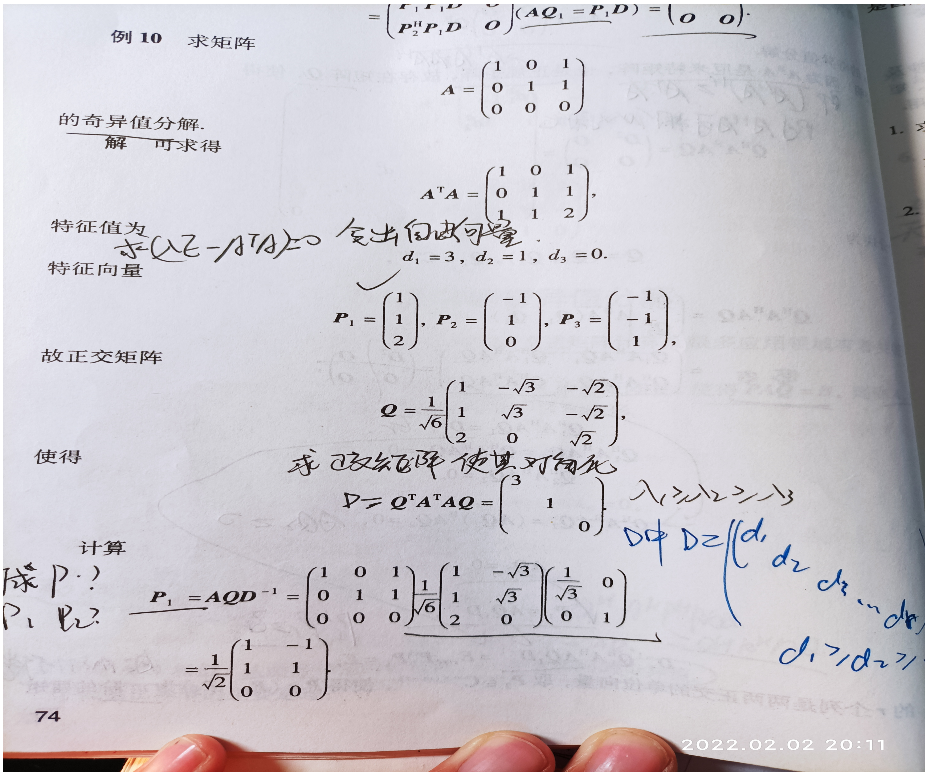
且

$$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_r > 0 \tag{17}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值，而

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^H \tag{18}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分，例题见图 3.4-3.5 所示。



例 10 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

的奇异值分解.

解 可求得

$$A^{T}A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

特征值为 求$|\lambda E-A^TA|=0$ 求出向的向量.

$$d_1=3,\ d_2=1,\ d_3=0.$$

特征向量

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

故正交矩阵

$$Q=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1&-\sqrt3&-\sqrt2\\1&\sqrt3&-\sqrt2\\2&0&\sqrt2\end{pmatrix},$$

使得 求正交矩阵 使其对角化

$$D=Q^{T}A^{T}AQ=\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}.\quad \lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$$

D中 $D=\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&d_3&\\&&&\ddots\ d_n\end{pmatrix}$ $d_1>d_2>\cdots$

计算

求P_1? P_1 是?

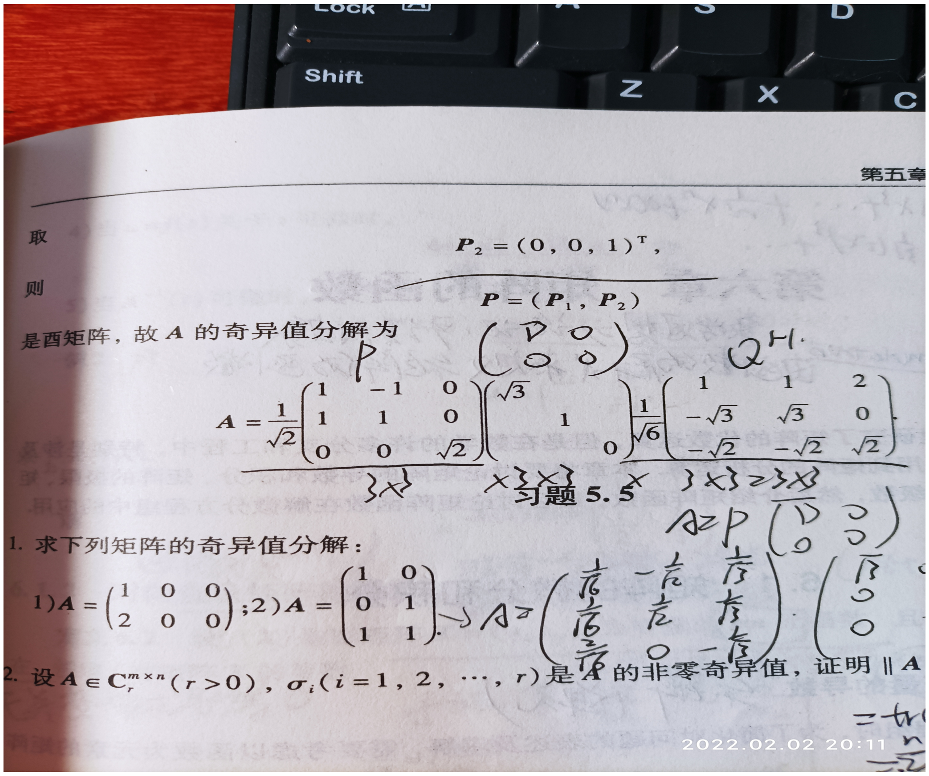
$$P_1=AQD^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1&-\sqrt3\\1&\sqrt3\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

74

2022.02.02 20:11

图 3.3 SVD 分解例题 _1



第五章

取 $P_2=(0,0,1)^T$,

则 $P=(P_1,P_2)$

是酉矩阵，故 A 的奇异值分解为

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&2\\-\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

习题 5.5

1. 求下列矩阵的奇异值分解：

1) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$.

2. 设 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$, $\sigma_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是 A 的非零奇异值，证明 $\|A$

2022.02.02 20:11

图 3.4 SVD 分解例题 _2

3.6 矩阵的伪逆是什么意思（Pseudo inverse）？莫尔——彭多斯逆是如何定义的？怎么计算一个矩阵的伪逆？

1. 矩阵的逆和伪逆的概念：

(1) 矩阵的逆：对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为与 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同维数的单位阵，称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵（或者称 A 可逆），并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$

(2) 矩阵的伪逆：奇异矩阵和方阵没有逆矩阵，但可以有伪逆矩阵。对于阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，满足 $\boldsymbol{A}^L\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，但不满足 $\boldsymbol{AA}^L=\boldsymbol{E}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}^L$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左逆矩阵。类似的，满足 $\boldsymbol{AA}^R=\boldsymbol{E}$，但不满足 $\boldsymbol{A}^R\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}^R$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右逆矩阵。

仅当 $m \geq n$ 时,列满秩,矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 可能有左逆矩阵,$\boldsymbol{A}^L = (\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^H$,且这种左逆矩阵是唯一的，称为左逆伪矩阵。

仅当 $m \leq n$ 时,行满秩,矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 可能有右逆矩阵,$\boldsymbol{A}^R = \boldsymbol{A}^H(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})^{-1}$,且这种有你伪矩阵也是唯一的，称为右逆伪矩阵。

显然，当一个方阵的左逆矩阵和右逆矩阵相等时，这一矩阵是非奇异的，因此，逆矩阵是既满足左逆矩阵，又满足右拟矩阵，并且左和右逆矩阵相等的特殊矩阵。左伪逆矩阵与超定方程的最小二乘解密切相关，而右拟伪矩阵则与欠定方程的最小二乘最小范数密切联系在一起。

当 $n = m$ 时，$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 $r \leq m = n$，对 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 进行 SVD 分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDQ}^T$，$\boldsymbol{A}$ 的伪逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{PD}^+\boldsymbol{Q}^T$。

2. 莫尔——彭多斯逆的定义

首先定义广义逆矩阵: 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ 为一致方程[3], $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，若 $m = n$，且 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，则线性方程组的解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$；当 $m \neq n$ 和 $\boldsymbol{A}$ 为秩亏缺的情况下，当存在矩阵 $\boldsymbol{G}$ 使得 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Gy}$ 时，称 $\boldsymbol{G}$ 是 A 的广义逆矩阵。

且有定理：当且仅当 $\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}$ 时，一致方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ 对 $\boldsymbol{y} \neq 0$ 有解。

接下来引入莫尔——彭多斯逆：当需要得到非一致方程的唯一解时，需要将广义逆矩阵的定义再作推广，增加其他条件（莫尔——彭多斯逆条件），得到另一种含义更加广泛的广义逆矩阵。

令 $\boldsymbol{A}$ 是任意 $m \times n$ 矩阵，称矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵，有以下四个条件（莫尔——彭多斯逆条件）：

(1) $\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}$

(2) $\boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}$

(3) $\boldsymbol{AG}$ 为厄米特矩阵，即 $\boldsymbol{AG}^H = \boldsymbol{AG}$

[3]一致方程：两个方程相矛盾或非一致的方程称为非一致方程，如这样的两个方程：

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$3x_1 = 3x_2 = 9$$

(4) $\boldsymbol{GA}$ 为厄米特矩阵，即 $\boldsymbol{GA}^H = \boldsymbol{GA}$

1. 满足条件 (1) 和 (2) 的矩阵 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^+$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵。
2. 满足条件 (1,2,3) 的矩阵 $\boldsymbol{A}^+$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的正规化广义逆矩阵。
3. 满足条件 (1,2,4) 的矩阵 $\boldsymbol{A}^+$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的弱广义逆矩阵。
4. 4 个条件全满足的矩阵 $\boldsymbol{A}^+$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的莫尔——彭多斯逆矩阵。

3. 矩阵伪逆的计算

首先引入矩阵的满秩分解，对于秩为 r 的矩阵 $\boldsymbol{A_{m\times n}}$ 步骤 1：利用行初等变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯型，即

$$\boldsymbol{A} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{r\times n} \\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times n} \end{bmatrix}$$

步骤 2：对单位矩阵执行逆行初等变换，得到逆矩阵 $\boldsymbol{I} \rightarrow \boldsymbol{P^{-1}}$
步骤 3：利用逆矩阵 $\boldsymbol{P^{-1}}$ 的前 r 列构造矩阵 $\boldsymbol{F}$
步骤 4：书写满秩分解结果 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{FG}$

接下来介绍伪逆矩阵的计算方法：

步骤 1：计算矩阵 $\boldsymbol{A_{m\times n}}$ 的满秩分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{FG}$
步骤 2：求伪逆矩阵 $\boldsymbol{A^- = G^T(F^T A G^T)^{-1} F^T}$

3.7 超定方程相关问题

(a) 因为 A 不可逆, 当 $\boldsymbol{b} \neq 0$ 时，$rank([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) \neq rank(\boldsymbol{A})$, 方程组没有解析解, 所以可以计算最小二乘解，使得方程两边的误差平方和为最小的解，此时最小二乘解的形式 $\boldsymbol{x = (A^T A)^{-1} A^T b}$[6], 可以用奇异值分解来求解最小二乘解，也可以用广义逆法，对原超定方程进行 householder 变换求解，速度比奇异值分解快，但可靠性不如奇异值分解 [5]。

$\boldsymbol{A}$ 的奇异值 (见式 (14)) 是 $\boldsymbol{A^T A}$ 的特征值 (见式 (13)) 的平方根。

(b) 当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，问题转化为求超定齐次方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=0(m>n)$ 的解，其最小二乘解就是 $\boldsymbol{A}$ 的 SVD 分解后的 $\boldsymbol{V}$ 的最后一个列向量，还等于 $\boldsymbol{A^T A}$ 的最小特征值对应的特征向量，具体参考 [6] 中的证明。

(c) 关于最小二乘法的几何意义 [7]，首先需要确定，对于任何超定的线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，都是有最小二乘解的，如下例：

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1+2x_2=2 \\ 2x_1+3x_2=3 \end{cases} \tag{19}$$

由于 $2=rank(\boldsymbol{A})<rank(\boldsymbol{A,b})=3$，因此他是无解析解的，可求最小二乘解。而矩阵与向量的乘法，本质上是矩阵列向量的线性组合，而向量的每个元素都是系数。因此，$(1,1,2)^T,(1,2,3)^T$ 这两个列向量将长成一个二位列空间 $\boldsymbol{S}$，而向量 $(0,2,3)^T$ 不在这个空间上，如图 3.5 所示，虽然 b 不在矩阵 A 的列空间 $\boldsymbol{S}$ 上，也就是说找不到一组系数 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，但是可以在列空间 $\boldsymbol{S}$ 上找到一个向量 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 并且满足线性组合 $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{b}}$，使得向量 $\boldsymbol{b}-\hat{\boldsymbol{b}}$ 的长度最小，这个线性组合的系数 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 就是最小二乘解，从图 3.5 可以看出，当 $\boldsymbol{b}-\hat{\boldsymbol{b}}$ 垂直与 $\boldsymbol{S}$ 时，将得到最小二乘解。

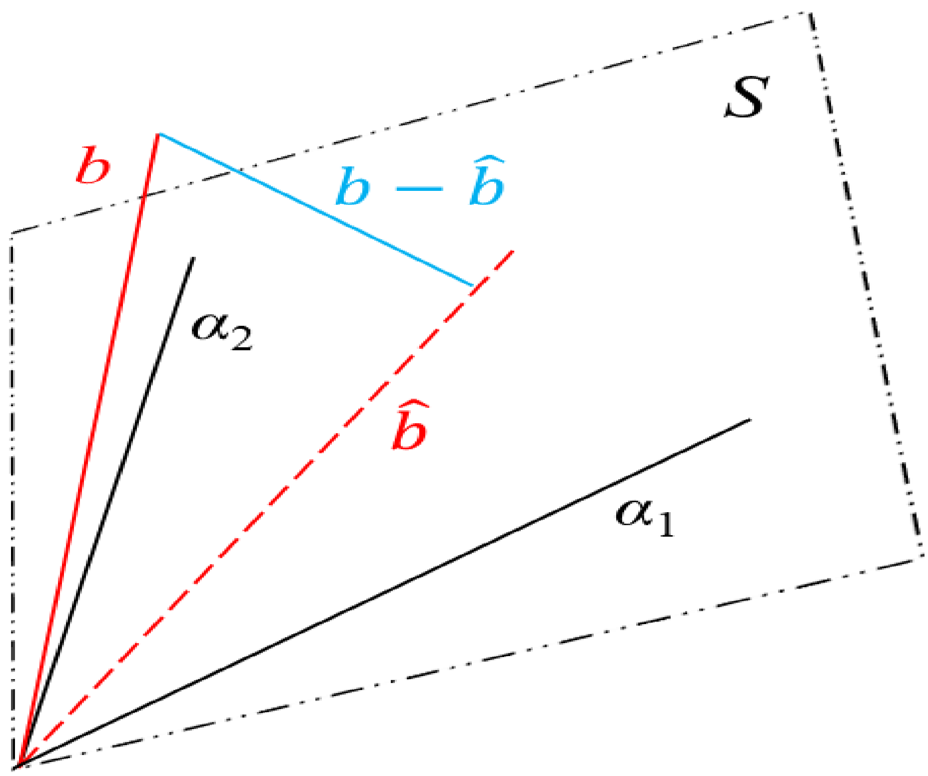


图 3.5 最小二乘法的几何意义

因此得到了最小二乘解的几何意义：线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘法，实际上就是在矩阵的列空间上寻找一个向量 $\hat{\boldsymbol{b}}$，使得 $\boldsymbol{b}-\hat{\boldsymbol{b}}$ 的模最小。向量 $\hat{\boldsymbol{b}}$，就是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的列空间上的投影，最小二乘解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 满足 $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{b}}$。

比较有趣的现象是，如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的列空间 $\boldsymbol{S}$ 垂直，那么最小二乘解就是 n 维 $\boldsymbol{0}$ 向量。

从最小二乘的几何意义也可知，超定线性方程组的最小二乘解是必然存在的。

4 第 4 题

4.1 说明一个激光传感器下的看到的点应该如何计算它的世界坐标。

1. 题给的激光传感器四元数 $\boldsymbol{q}_{BL}$ 和平移向量 $\boldsymbol{t}_{BL}$ 求得旋转矩阵 $\boldsymbol{T}_{BL}$ 表示从激光坐标系到机器人坐标系的旋转矩阵，其它旋转矩阵的求取以此类推。激光传感器若要计算其世界坐标，根据所给条件，需要先转换到 B 系，再到 R 系，最后再到 W 系。设激光传感器系 L 中的坐标为 $\boldsymbol{P}_L$，其世界坐标为 $\boldsymbol{P}_W$，则有

$$\boldsymbol{P}_W = \boldsymbol{T}_{WR}\boldsymbol{T}_{RB}\boldsymbol{T}_{BL}\boldsymbol{P}_L$$

2.
   (a) 由第 1 问的计算方法可得，C 系点在 L 系下的坐标为

$$\boldsymbol{P}_L = \boldsymbol{T}_{BL}^{-1}\boldsymbol{T}_{BC}\boldsymbol{P}_C$$

   (b) 由第 1 问的计算方法可得，C 系点在 W 系下的坐标为

$$\boldsymbol{P}_W = \boldsymbol{T}_{WR}\boldsymbol{T}_{RB}\boldsymbol{T}_{BC}\boldsymbol{P}_C$$

(a,b) 两问使用 Eigen/Geometry 计算代码如 Listing3 所示，结果如图 4.1 所示。

```
#include <iostream>
#include <Eigen/Core>
#include <Eigen/Geometry>
using namespace std;
using namespace Eigen;

int main(int argc, char ** argv)
{
    //创建视觉传感器和激光传感器的四元数（构造函数顺序是wxyz，而存储的系数默认是xyzw）
    Quaterniond q_BL(0.3, 0.5,0, 20.1 ), q_BC(0.8, 0.2, 0.1,0.1);
    //四元数归一化
    q_BC.normalize();  //如果将四元数表示为旋转的话，如果四元数没有归一化的话，那么旋转是未定义的行为
    q_BL.normalize();
```

```cpp

    //平移向量t_BL和t_BC
    Vector3d t_BL(0.4, 0, 0.5), t_BC(0.5, 0.1, 0.5);
    //p_C坐标
    Vector3d p_C(0.3, 0.2, 1.2);

    //构造变换矩阵Tc1w和Tc2w
    Isometry3d T_BL(q_BL), T_BC(q_BC);
    T_BL.pretranslate(t_BL);
    T_BC.pretranslate(t_BC);

    //计算p_L
    Vector3d p_L = T_BL.inverse() * T_BC * p_C;
    cout << "这个点在激光系下的坐标: " << p_L.transpose() << endl;

    //计算在世界坐标系下的坐标
    //创建世界系和机器人本体的四元数
    Quaterniond q_WR(0.55, 0.3, 0.2,0.2), q_RB(0.99, 0, 0,0.01);
    //四元数归一化
    q_WR.normalize();
    q_RB.normalize();

    //平移向量t_WR, t_RB
    Vector3d t_WR(0.1, 0.2, 0.3), t_RB(0.05, 0, 0.5);

    //构造变换矩阵T_WR和T_RB
    Isometry3d T_WR(q_WR), T_RB(q_RB);
    T_WR.pretranslate(t_WR);
    T_RB.pretranslate(t_RB);

    //计算p_W
    Vector3d p_W = T_WR * T_RB * T_BC * p_C;
    cout << "这个点在世界系下的坐标" << p_W.transpose() << endl;
    return 0;
}
```

Listing 3: main.cpp

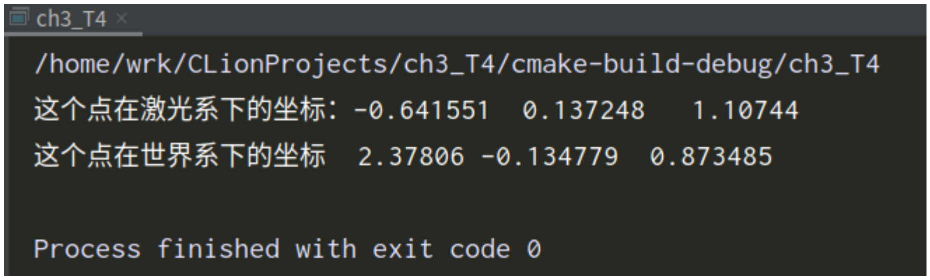


图 4.1 坐标计算结果

5 第 5 题

5.1 设有旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$，证明 $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ 且 $\det \mathrm{R} = +1$

考虑一次旋转，坐标系 $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ 发生了旋转，变成 $(\boldsymbol{e_1'}, \boldsymbol{e_2'}, \boldsymbol{e_3'})$，向量 a 的坐标发生了如下的变化：

$$[\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e_1'}, \boldsymbol{e_2'}, \boldsymbol{e_3'}]\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \tag{20}$$

即

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e_1^T} \\ \boldsymbol{e_2^T} \\ \boldsymbol{e_3^T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e_1'} & \boldsymbol{e_2'} & \boldsymbol{e_3'} \end{bmatrix}\boldsymbol{a'} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e_1^T e_1'} & \boldsymbol{e_1^T e_2'} & \boldsymbol{e_1^T e_3'} \\ \boldsymbol{e_2^T e_1'} & \boldsymbol{e_2^T e_2'} & \boldsymbol{e_2^T e_3'} \\ \boldsymbol{e_3^T e_1'} & \boldsymbol{e_3^T e_2'} & \boldsymbol{e_3^T e_3'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} = \boldsymbol{R a'} \tag{21}$$

其中

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e_1^T e_1'} & \boldsymbol{e_1^T e_2'} & \boldsymbol{e_1^T e_3'} \\ \boldsymbol{e_2^T e_1'} & \boldsymbol{e_2^T e_2'} & \boldsymbol{e_2^T e_3'} \\ \boldsymbol{e_3^T e_1'} & \boldsymbol{e_3^T e_2'} & \boldsymbol{e_3^T e_3'} \end{bmatrix} \tag{22}$$

为旋转矩阵，同理 $\boldsymbol{a'} = \boldsymbol{R^{-1} a}$，其中

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e_1'^T} \\ \boldsymbol{e_2'^T} \\ \boldsymbol{e_3'^T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e_1'^T e_1} & \boldsymbol{e_1'^T e_2} & \boldsymbol{e_1'^T e_3} \\ \boldsymbol{e_2'^T e_1} & \boldsymbol{e_2'^T e_2} & \boldsymbol{e_2'^T e_3} \\ \boldsymbol{e_3'^T e_1} & \boldsymbol{e_3'^T e_2} & \boldsymbol{e_3'^T e_3} \end{bmatrix} \tag{23}$$

由 (22) 得

$$\boldsymbol{R}^T=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e_1^T e_1'} & \boldsymbol{e_2^T e_1'} & \boldsymbol{e_3^T e_1'}\\ \boldsymbol{e_1^T e_2'} & \boldsymbol{e_2^T e_2'} & \boldsymbol{e_3^T e_2'}\\ \boldsymbol{e_1^T e_3'} & \boldsymbol{e_2^T e_3'} & \boldsymbol{e_3^T e_3'}\end{bmatrix} \tag{24}$$

因为单位正交基转置不影响向量间的点积值,即 $\boldsymbol{R}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{R}_{ij}^T(i,j\in[1,3],i,j\in Z^+)$ 故,$\boldsymbol{R}^{-1}=\boldsymbol{R}^T$，所以 $\boldsymbol{R}$ 是正交矩阵，$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$ 得证。

由上可得

$$det(\boldsymbol{I})=det(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R})=det(\boldsymbol{R}^T)*det(\boldsymbol{R})=(det(\boldsymbol{R}))^2=1 \tag{25}$$

故 $det(\boldsymbol{R})=\pm1$，由定义给出，$det(\boldsymbol{R})=+1$，证毕。

5.2 请说明 ε 和 η 的维度

ε 维度为 3，η 维度为 1。

5.3 证明四元数可写成矩阵乘法

$\boldsymbol{q}_1=[\boldsymbol{\varepsilon_1},\eta_1]^T$, $\boldsymbol{q}_2=[\boldsymbol{\varepsilon_2},\eta_2]^T$ 有

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2=[\eta_2\boldsymbol{\varepsilon_1}+\eta_1\boldsymbol{\varepsilon_2}+\boldsymbol{\varepsilon_1}\times\boldsymbol{\varepsilon_2},\quad \eta_1\eta_2-\boldsymbol{\varepsilon_1^T\varepsilon_2}]^T \tag{26}$$

且根据题意有

$$\boldsymbol{q}_1^+\boldsymbol{q}_2=\begin{bmatrix}\eta_1\boldsymbol{E}+\varepsilon_1^{\hat{}} & \varepsilon_1\\ -\boldsymbol{\varepsilon_1^T} & \eta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon_2}\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_2\boldsymbol{\varepsilon_1}+\eta_1\boldsymbol{\varepsilon_2}+\boldsymbol{\varepsilon_1}\times\boldsymbol{\varepsilon_2}\\ \eta_1\eta_2-\boldsymbol{\varepsilon_1^T\varepsilon_2}\end{bmatrix} \tag{27}$$

由 (26),(27) 可得 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{q}_1^+\boldsymbol{q}_2$

同时，由题可得:

$$\boldsymbol{q_2}^{\oplus}\boldsymbol{q_1}=\begin{bmatrix}\eta_2\boldsymbol{E}-\varepsilon_2^{\hat{}} & \varepsilon_2\\ -\boldsymbol{\varepsilon_2^T} & \eta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon_1}\\ \eta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_2\boldsymbol{\varepsilon_1}+\eta_1\boldsymbol{\varepsilon_2}+\boldsymbol{\varepsilon_1}\times\boldsymbol{\varepsilon_2}\\ \eta_1\eta_2-\boldsymbol{\varepsilon_1\varepsilon_2^T}\end{bmatrix} \tag{28}$$

由 (26)(28) 可得 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{q_2}^{\oplus}\boldsymbol{q_1}$，证毕。

6 第 6 题

6.1 罗德里格斯公式的证明

证明如图 6.1-图 6.2 所示。

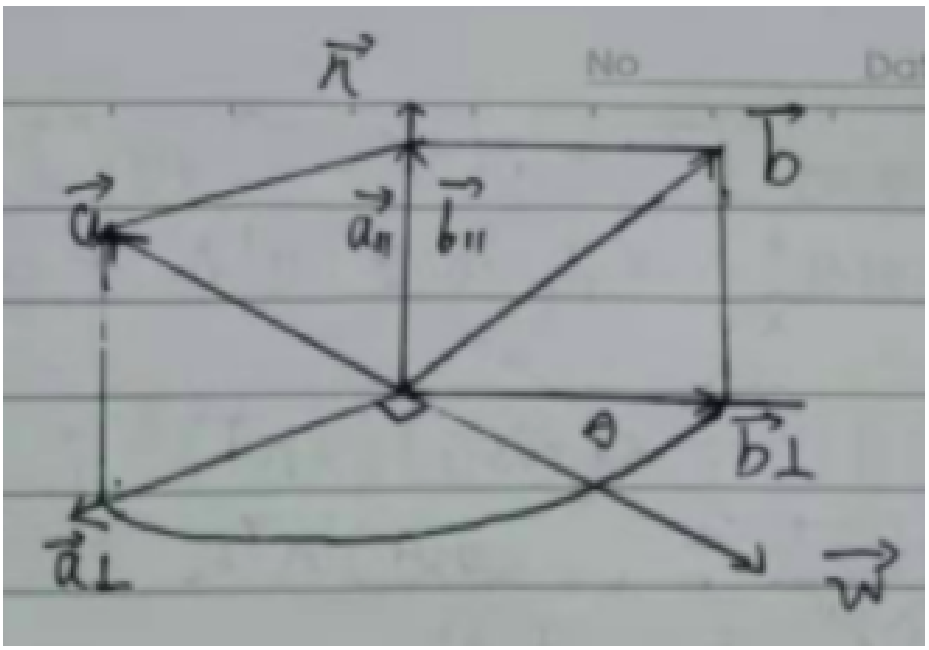


图 6.1 罗德里格斯公式证明 _1

$\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$

$\vec{w} = \vec{n} \times \vec{a}$

$\vec{a}_\perp = -\vec{n}\times\vec{w} = -\vec{n}\times\vec{n}\times\vec{a}$

$\vec{a}_\parallel = \vec{a} - \vec{a}_\perp = \vec{a} + \vec{n}\times\vec{n}\times\vec{a}$

$\vec{b}_\parallel = \vec{a}_\parallel$

$\vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp\cos\theta + \vec{w}\sin\theta$

$\cancel{= -\vec{n}\times\vec{n}\times\cos\theta}$

$= -\vec{n}\times\vec{n}\times\vec{a}\cos\theta + \vec{n}\times\vec{a}\sin\theta$

$\vec{b} = \vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel = -\vec{n}\times\vec{n}\times\vec{a}\cos\theta + \vec{n}\times\vec{a}\sin\theta + \vec{a} + \vec{n}\times\vec{n}\times$

$\cancel{= -n^\wedge n^\wedge \times \vec{a}\cos\theta + n^\wedge}$

$\cancel{= -\vec{n}}$

$= -n^\wedge n^\wedge \cdot \vec{a}\cos\theta + n^\wedge\vec{a}\sin\theta + \vec{a}\cdot I + n^\wedge n^\wedge\vec{a}$

$= [(1-\cos\theta)n^\wedge n^\wedge + \sin\theta\cdot n^\wedge + I]\vec{a}$

又∵对反对称矩阵有 $n^\wedge n^\wedge = \vec{n}\vec{n}^T - I$

∴ $\vec{b} = [(1-\cos\theta)(\vec{n}\vec{n}^T - I) + \sin\theta\cdot n^\wedge + I]\vec{a}$

$= [\cos\theta\cdot I + (1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T + \sin\theta\cdot n^\wedge]\vec{a}$

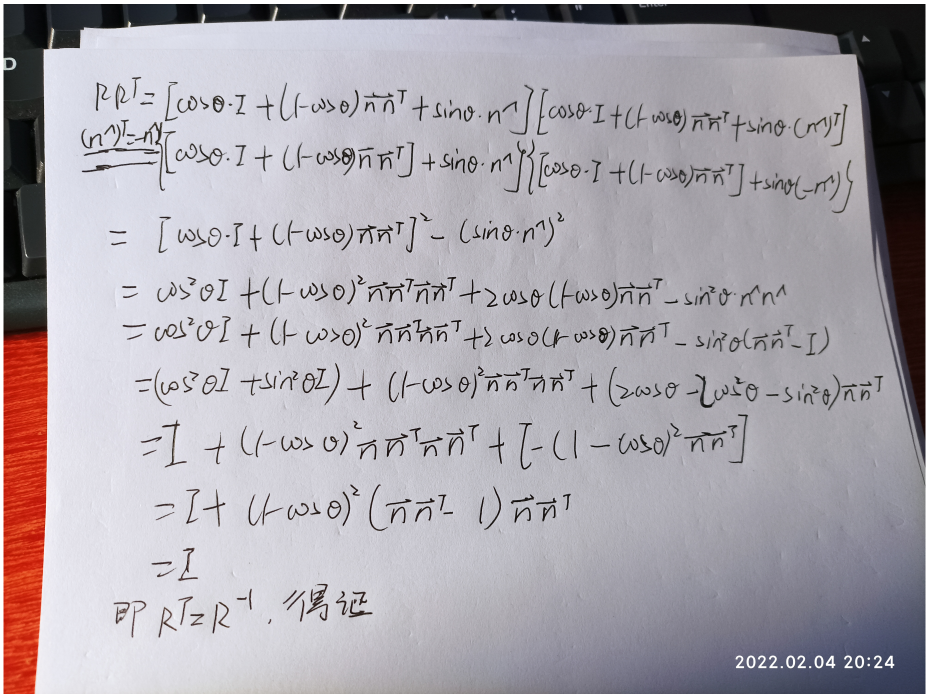
$= R\vec{a}$

故 $R = \cos\theta\cdot I + (1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T + \sin\theta\cdot n^\wedge$，得证。

2022.02.03 23:37

图 6.2 罗德里格斯公式证明 _2

6.2 证明 $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^T$



$$RR^T = [\cos\theta \cdot I + (1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T + \sin\theta \cdot n^\wedge][\cos\theta \cdot I + (1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T + \sin\theta \cdot (n^\wedge)^T]$$

$$\xlongequal{(n^\wedge)^T = -n^\wedge} \{[\cos\theta \cdot I + (1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T] + \sin\theta \cdot n^\wedge\}\{[\cos\theta \cdot I + (1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T] + \sin\theta(-n^\wedge)\}$$

$$= [\cos\theta \cdot I + (1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T]^2 - (\sin\theta \cdot n^\wedge)^2$$

$$= \cos^2\theta I + (1-\cos\theta)^2\vec{n}\vec{n}^T\vec{n}\vec{n}^T + 2\cos\theta(1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T - \sin^2\theta \cdot n^\wedge n^\wedge$$

$$= \cos^2\theta I + (1-\cos\theta)^2\vec{n}\vec{n}^T\vec{n}\vec{n}^T + 2\cos\theta(1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T - \sin^2\theta(\vec{n}\vec{n}^T - I)$$

$$= (\cos^2\theta I + \sin^2\theta I) + (1-\cos\theta)^2\vec{n}\vec{n}^T\vec{n}\vec{n}^T + (2\cos\theta - 2\cos^2\theta - \sin^2\theta)\vec{n}\vec{n}^T$$

$$= I + (1-\cos\theta)^2\vec{n}\vec{n}^T\vec{n}\vec{n}^T + [-(1-\cos\theta)^2\vec{n}\vec{n}^T]$$

$$= I + (1-\cos\theta)^2(\vec{n}\vec{n}^T - 1)\vec{n}\vec{n}^T$$

$$= I$$

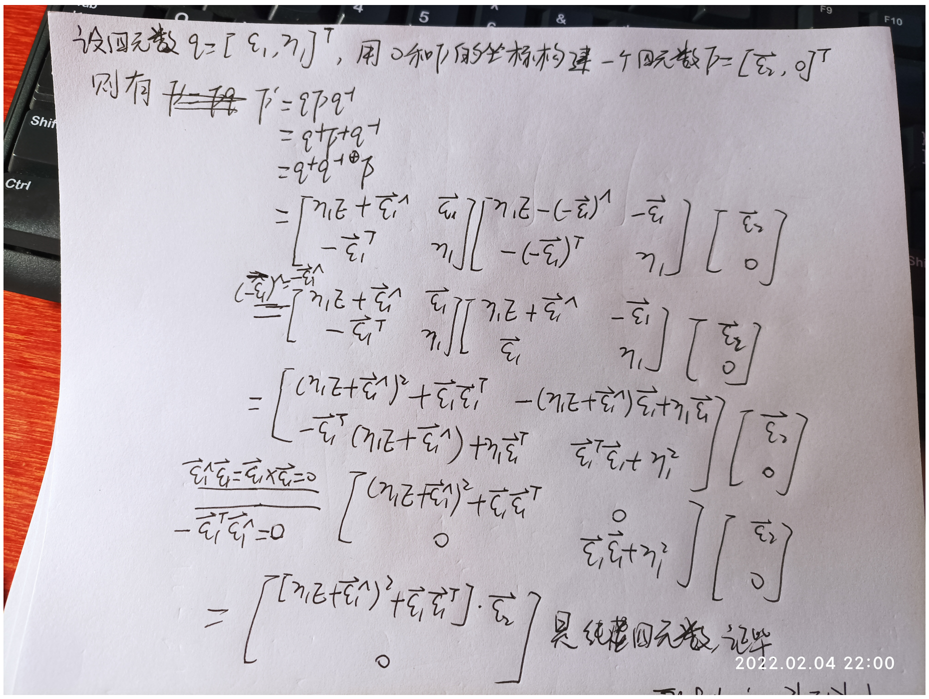
即 $R^T = R^{-1}$，得证

2022.02.04 20:24

图 6.3 证明 $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^T$

7 第 7 题

7.1 验证 $p\prime$ 是纯虚四元数



设四元数 $q=[\vec{\xi}_1,\eta_1]^T$，用0和p的坐标构建一个四元数 $p=[\vec{\xi}_2,0]^T$

则有 ~~$p'=pq$~~ $p'=qpq^{-1}$

$$= q^+ p^+ q^{-1}$$

$$= q^+ q^{-1^\oplus} p$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_1 E+\vec{\xi}_1^\wedge & \vec{\xi}_1 \\ -\vec{\xi}_1^T & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 E-(-\vec{\xi}_1)^\wedge & -\vec{\xi}_1 \\ -(-\vec{\xi}_1)^T & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\xi}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-\vec{\xi}_1)^\wedge=-\vec{\xi}_1^\wedge}{=} \begin{bmatrix} \eta_1 E+\vec{\xi}_1^\wedge & \vec{\xi}_1 \\ -\vec{\xi}_1^T & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 E+\vec{\xi}_1^\wedge & -\vec{\xi}_1 \\ \vec{\xi}_1^T & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\xi}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\eta_1 E+\vec{\xi}_1^\wedge)^2+\vec{\xi}_1\vec{\xi}_1^T & -(\eta_1 E+\vec{\xi}_1^\wedge)\vec{\xi}_1+\eta_1\vec{\xi}_1 \\ -\vec{\xi}_1^T(\eta_1 E+\vec{\xi}_1^\wedge)+\eta_1\vec{\xi}_1^T & \vec{\xi}_1^T\vec{\xi}_1+\eta_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\xi}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\vec{\xi}_1^\wedge\vec{\xi}_1=\vec{\xi}_1\times\vec{\xi}_1=0}{\underset{-\vec{\xi}_1^T\vec{\xi}_1^\wedge=0}{=}} \begin{bmatrix} (\eta_1 E+\vec{\xi}_1^\wedge)^2+\vec{\xi}_1\vec{\xi}_1^T & 0 \\ 0 & \vec{\xi}_1^T\vec{\xi}_1+\eta_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\xi}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(\eta_1 E+\vec{\xi}_1^\wedge)^2+\vec{\xi}_1\vec{\xi}_1^T]\cdot\vec{\xi}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 是纯虚四元数，证毕

2022.02.04 22:00

图 7.1 验证 $p\prime$ 是纯虚四元数

7.2 求出矩阵 $\boldsymbol{Q}$

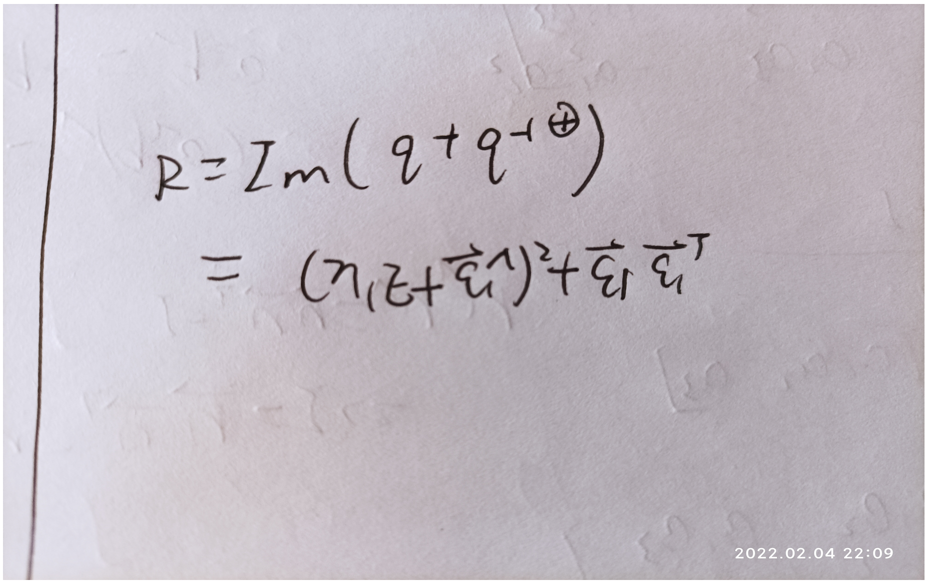


图 7.2 求出矩阵 $\boldsymbol{Q}$

8 第 8 题

8.1 熟悉 C++11

1. 下列代码使用了列表初始化

```
A a1(3), a2(5), a3(9);
```

Listing 4: 使用了列表初始化

2. 下列代码使用了 vector 对象及 vector 对象的列表初始化

```
#include <vector>
vector<A> avec{a1, a2, a3};
```

Listing 5: 使用了 vector 对象及 vector 对象的列表初始化

3. 下列代码使用了 lambda 表达式

```
std::sort(avec.begin(), avec.end(), [](const A&a1, const A&a2) {return
    a1.index<a2.index;});
```

Listing 6: 使用了 lambda 表达式

4. 下列代码使用了范围 for 循环和自动类型推导 auto

```
for ( auto& a: avec ) cout<<a.index<<" ";
```

Listing 7: 使用了范围 for 循环和自动类型推导 auto

参考文献

[1] https://zhuanlan.zhihu.com/p/84415000

[2] https://blog.csdn.net/u010945683/article/details/45972819

[3] 韩志涛. 矩阵分析 [M]. 沈阳：东北大学出版社，2016：68-72.

[4] https://www.zhihu.com/question/25352258

[5] https://zhidao.baidu.com/question/585320537.html

[6] https://blog.csdn.net/qq_41035283/article/details/121605035

[7] https://blog.csdn.net/qq_41035283/article/details/121537684