第三节课习题

高翔

2021 年 9 月 8 日

1 习题说明

- 第 i 节课习题所有材料打包在 Li.zip 中，$\forall i = 1 \dots 8$。
- 习题分为若干种：**计算类**习题，需要读者编程计算一个实际问题，我们会附有参考答案以供自测。**操作类**习题，会指导读者做一个具体的实验，给出中间步骤截图或结果。**简述类**习题则提供阅读材料，需要读者阅读材料后，回答若干问题。
- 每个习题会有一定的分值。每次习题分值加和为 10 分。你需要获得 8 分以上才能得到“通过”的评价。带 $*$ 的习题为附加题，会在总分之外再提供一定的分值，所以总和可能超过 10 分。换句话说，你也可以选择一道附加题，跳过一道正常题。
- 每道习题的给分由助教评判，简述类习题可能存在一定开放性，所以评分也存在主观因素。
- 请利用深蓝学院系统提交习题。每次习题我们会记通过与否。提交形式为 word 或 pdf 格式报告，如有编程习题请提交可编译的源码。
- 为方便读者，我通常会准备一些阅读材料，放在 books/或 papers/目录下。请读者按个人需求使用这些材料。它们多数是从网络下载的，如果侵犯到你的权利，请及时告诉我。
- 每个习题会标注大致用时，但视同学个人水平可能会有出入。
- 习题的完成情况会影响你对本课程内容的掌握程度，请认真、独立完成。**习题总得分较高的同学将获得推荐资格**。

备注：

- 本习题内容更新于 2021 年 9 月。考虑到大家的知识水平增加，本次更新增加了一些作业内容和难度。

2 群的性质（1 分，约 1 小时）

课上我们讲解了什么是群。请根据群定义，求解以下问题：

1. $\{\mathbb{Z}, +\}$ 是否为群？若是，验证其满足群定义；若不是，说明理由。整数加法和有理数加法
2. $\{\mathbb{N}, +\}$ 是否为群？若是，验证其满足群定义；若不是，说明理由。
3. 解释什么是阿贝尔群。并说明矩阵及乘法构成的群是否为阿贝尔群。

其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集，$\mathbb{N}$ 为自然数集。

3 验证向量叉乘的李代数性质 (2 分，约 1 小时)

我们说向量和叉乘运算构成了李代数，现在请你验证它。书中对李代数的定义为：李代数由一个集合 $\mathbb{V}$，一个数域 $\mathbb{F}$ 和一个二元运算 $[,]$ 组成。如果它们满足以下几条性质，称 $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, [,])$ 为一个李代数，记作 $\mathfrak{g}$。

1. 封闭性 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \in \mathbb{V}.$
2. 双线性 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$, 有：

$$[a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}] = a[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}] + b[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}], \quad [\boldsymbol{Z}, a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}] = a[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}] + b[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}].$$

3. 自反性[1] $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}.$
4. 雅可比等价 $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]] + [\boldsymbol{Y}, [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}]] + [\boldsymbol{Z}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]] = \boldsymbol{0}.$

其中二元运算被称为**李括号**。

现取集合 $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$，数域 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，李括号为：

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{1}$$

请验证 $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \times)$ 构成李代数。

[1] 自反性是指自己与自己的运算为零。

4 推导 SE(3) 的指数映射（1 分，约 1 小时）

课上给出了 SO(3) 的指数映射推导，但对于 SE(3)，仅介绍了结论，没有给出详细推导。请你完成 SE(3) 指数映射部分，有关左雅可比的详细推导。

设 $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}]^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{se}(3)$，它的指数映射为：

$$\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

令 $\boldsymbol{\phi} = \theta \boldsymbol{a}$，那么：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n = \frac{\sin\theta}{\theta} I + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^{\wedge} \triangleq \boldsymbol{J}. \tag{3}$$

这也正是课件里提到的左雅可比。

提示：类比于 SO(3) 的泰勒展开，然后合并奇偶数项级数即得。

5 伴随（2 分，约 1 小时）

在 SO(3) 和 SE(3) 上，有一个东西称为伴随（Adjoint）。下面请你证明 SO(3) 伴随的性质。

对于 SO(3)，有：

$$\boldsymbol{R}\exp\left(\boldsymbol{p}^\wedge\right)\boldsymbol{R}^\mathrm{T} = \exp\left((\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^\wedge\right). \tag{4}$$

此时称 $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}$。

提示：首先你需要证明 $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{R}^\mathrm{T} = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^\wedge$，页面 `https://math.stackexchange.com/questions/2190603/derivation-of-adjoint-for-so3` 提示了一种简洁的途径。

对于 SE(3)，有：

$$\boldsymbol{T}\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{T}^{-1} = \exp\left((\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{\xi})^\wedge\right) \tag{5}$$

其中 $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})$ 定义为：

$$\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t}^\wedge\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

这个性质将在后文的 Pose Graph 优化中用到。但是 SE(3) 的证明较为复杂，不作要求。

完整的 SO(3) 和 SE(3) 性质见1和2。

表 1: $SO(3)$ 性质与其近似形式

李代数	李群	（左）雅可比
$\boldsymbol{u}^\wedge = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{C} = \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n$ $\equiv \cos\phi\mathbf{1} + (1-\cos\phi)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \sin\phi\boldsymbol{a}^\wedge$ $\approx \mathbf{1} + \boldsymbol{\phi}^\wedge$	$\boldsymbol{J} = \int_0^1 \boldsymbol{C}^\alpha \mathrm{d}\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n$ $\equiv \frac{\sin\phi}{\phi}\mathbf{1} + (1-\frac{\sin\phi}{\phi})\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \frac{1-\cos\phi}{\phi}\boldsymbol{a}^\wedge$ $\approx \mathbf{1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^\wedge$
$(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})^\wedge \equiv \alpha\boldsymbol{u}^\wedge + \beta\boldsymbol{v}^\wedge$	$\boldsymbol{C}^{-1} \equiv \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n \approx \mathbf{1} - \boldsymbol{\phi}^\wedge$	$\boldsymbol{J}^{-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n$ $\equiv \frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\mathbf{1} + (1-\frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2})\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - \frac{\phi}{2}\boldsymbol{a}^\wedge$ $\approx \mathbf{1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^\wedge$
$\boldsymbol{u}^{\wedge\mathrm{T}} \equiv -\boldsymbol{u}^\wedge$ $\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{v} \equiv -\boldsymbol{v}^\wedge\boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{u} \equiv \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{W}\boldsymbol{u})^\wedge \equiv \boldsymbol{u}^\wedge(\mathrm{tr}(\boldsymbol{W})\mathbf{1} - \boldsymbol{W}) - \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^\wedge$ $\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{v}^\wedge \equiv -(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})\mathbf{1} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{W}\boldsymbol{v}^\wedge \equiv -(-\mathrm{tr}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\mathbf{1} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})$ $\times(-\mathrm{tr}(\boldsymbol{W})\mathbf{1} + \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\mathbf{1} - \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{v}^\wedge\boldsymbol{u}^\wedge \equiv \boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{v}^\wedge + \boldsymbol{v}^\wedge\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{u}^\wedge + (\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}^\wedge$ $(\boldsymbol{u}^\wedge)^3 + (\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^\wedge \equiv 0$ $\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{v}^\wedge\boldsymbol{v}^\wedge - \boldsymbol{v}^\wedge\boldsymbol{v}^\wedge\boldsymbol{u}^\wedge \equiv (\boldsymbol{v}^\wedge\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{v})^\wedge$ $[\boldsymbol{u}^\wedge, \boldsymbol{v}^\wedge] \equiv \boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{v}^\wedge - \boldsymbol{v}^\wedge\boldsymbol{u}^\wedge \equiv (\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{v})^\wedge$ $\underbrace{[\boldsymbol{u}^\wedge, [\boldsymbol{u}^\wedge, \ldots [\boldsymbol{u}^\wedge,}_{n} \boldsymbol{v}^\wedge] \ldots]] \equiv ((\boldsymbol{u}^\wedge)^n\boldsymbol{v})^\wedge$	$\boldsymbol{\phi} = \phi\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} \equiv 1$ $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \equiv \mathbf{1} \equiv \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}) \equiv 2\cos\phi + 1$ $\det(\boldsymbol{C}) \equiv 1$ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}$ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}^\wedge \equiv \boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{C}$ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}^\wedge \equiv \boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{C}$ $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{u})^\wedge \equiv \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}^\wedge\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ $\exp((\boldsymbol{C}\boldsymbol{u})^\wedge) \equiv \boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{u}^\wedge)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$	$\exp((\boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\phi})^\wedge) \approx \exp((\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\phi})^\wedge)\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)$ $\boldsymbol{C} \equiv \mathbf{1} + \boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{J}$ $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\phi}) \equiv \boldsymbol{C}\boldsymbol{J}(-\boldsymbol{\phi})$ $(\exp(\delta\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{C})^\alpha \approx (\mathbf{1} + (\boldsymbol{A}(\alpha, \boldsymbol{\phi})\delta\boldsymbol{\phi})^\wedge)\boldsymbol{C}^\alpha$ $\boldsymbol{A}(\alpha, \boldsymbol{\phi}) = \alpha\boldsymbol{J}(\alpha\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\phi})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\alpha)}{n!}(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{W}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^{3\times3},\ \boldsymbol{C} \in SO(3)$

表 2: $SE(3)$ 性质与其近似形式

李代数

$$\boldsymbol{x}^\wedge = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}^\wedge & \boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}^\curlywedge = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}^\curlywedge = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}^\wedge & \boldsymbol{u}^\wedge\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{v}^\wedge\end{bmatrix}$$
$$(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})^\wedge \equiv \alpha\boldsymbol{x}^\wedge + \beta\boldsymbol{y}^\wedge$$
$$(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})^\curlywedge \equiv \alpha\boldsymbol{x}^\curlywedge + \beta\boldsymbol{y}^\curlywedge$$
$$\boldsymbol{x}^\curlywedge\boldsymbol{y} \equiv -\boldsymbol{y}^\curlywedge\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x}^\curlywedge\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{0}$$
$$(\boldsymbol{x}^\wedge)^4 + (\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}^\wedge)^2 \equiv \boldsymbol{0}$$
$$(\boldsymbol{x}^\curlywedge)^5 + 2(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}^\curlywedge)^3 + (\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})^2(\boldsymbol{x}^\curlywedge) \equiv \boldsymbol{0}$$
$$[\boldsymbol{x}^\wedge, \boldsymbol{y}^\wedge] \equiv \boldsymbol{x}^\wedge\boldsymbol{y}^\wedge - \boldsymbol{y}^\wedge\boldsymbol{x}^\wedge \equiv (\boldsymbol{x}^\curlywedge\boldsymbol{y})^\wedge$$
$$[\boldsymbol{x}^\curlywedge, \boldsymbol{y}^\curlywedge] \equiv \boldsymbol{x}^\curlywedge\boldsymbol{y}^\curlywedge - \boldsymbol{y}^\curlywedge\boldsymbol{x}^\curlywedge \equiv (\boldsymbol{x}^\curlywedge\boldsymbol{y})^\curlywedge$$
$$\underbrace{[\boldsymbol{x}^\wedge, [\boldsymbol{x}^\wedge, \ldots [\boldsymbol{x}^\wedge}_{n}, \boldsymbol{y}^\wedge]\ldots]] \equiv ((\boldsymbol{x}^\curlywedge)^n\boldsymbol{y})^\wedge$$
$$\underbrace{[\boldsymbol{x}^\curlywedge, [\boldsymbol{x}^\curlywedge, \ldots [\boldsymbol{x}^\curlywedge}_{n}, \boldsymbol{y}^\curlywedge]\ldots]] \equiv ((\boldsymbol{x}^\curlywedge)^n\boldsymbol{y})^\curlywedge$$
$$\boldsymbol{p}^\odot = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \eta\end{bmatrix}^\odot = \begin{bmatrix}\eta\boldsymbol{1} & -\boldsymbol{\varepsilon}^\wedge\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{p}^\circledcirc = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \eta\end{bmatrix}^\circledcirc = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{\varepsilon}\\ -\boldsymbol{\varepsilon}^\wedge & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}^\wedge\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}^\odot\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^\wedge \equiv \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^\circledcirc$$

李群

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}\\ \boldsymbol{\phi}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{T} = \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n$$
$$\equiv \boldsymbol{1} + \boldsymbol{\xi}^\wedge + \left(\frac{1-\cos\phi}{\phi^2}\right)(\boldsymbol{\xi}^\wedge)^2 + \left(\frac{\phi-\sin\phi}{\phi^3}\right)(\boldsymbol{\xi}^\wedge)^3$$
$$\approx \boldsymbol{1} + \boldsymbol{\xi}^\wedge$$
$$\boldsymbol{T} \equiv \begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\xi}^\curlywedge \equiv \mathrm{ad}(\boldsymbol{\xi}^\wedge)$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \exp(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^n$$
$$\equiv \boldsymbol{1} + \left(\frac{3\sin\phi-\phi\cos\phi}{2\phi}\right)\boldsymbol{\xi}^\curlywedge + \left(\frac{4-\phi\sin\phi-4\cos\phi}{2\phi^2}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^2$$
$$+ \left(\frac{\sin\phi-\phi\cos\phi}{2\phi^3}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^3 + \left(\frac{2-\phi\sin\phi-2\cos\phi}{2\phi^4}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^4$$
$$\approx \boldsymbol{1} + \boldsymbol{\xi}^\curlywedge$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}) \equiv \begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho})^\wedge\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}$$
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) \equiv 2\cos\phi + 2, \quad \det(\boldsymbol{T}) \equiv 1$$
$$\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2) = \mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}_1)\,\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}_2)$$
$$\boldsymbol{T}^{-1} \equiv \exp(-\boldsymbol{\xi}^\wedge) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n \approx \boldsymbol{1} - \boldsymbol{\xi}^\wedge$$
$$\boldsymbol{T}^{-1} \equiv \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1} \equiv \exp(-\boldsymbol{\xi}^\curlywedge) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^n \approx \boldsymbol{1} - \boldsymbol{\xi}^\curlywedge$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1} \equiv \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho})^\wedge\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{\xi}$$
$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi}^\wedge \equiv \boldsymbol{\xi}^\wedge\boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{\xi}^\curlywedge \equiv \boldsymbol{\xi}^\curlywedge\boldsymbol{\mathcal{T}}$$
$$(\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{x})^\wedge \equiv \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}^\wedge\boldsymbol{T}^{-1}, \quad (\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{x})^\curlywedge \equiv \boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{x}^\curlywedge\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1}$$
$$\exp\left((\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{x})^\wedge\right) \equiv \boldsymbol{T}\exp(\boldsymbol{x}^\wedge)\boldsymbol{T}^{-1}$$
$$\exp\left((\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{x})^\curlywedge\right) \equiv \boldsymbol{\mathcal{T}}\exp(\boldsymbol{x}^\curlywedge)\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1}$$
$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})^\odot \equiv \boldsymbol{T}\boldsymbol{p}^\odot\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1}$$
$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})^{\odot\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})^\odot \equiv \boldsymbol{\mathcal{T}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^{\odot\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^\odot\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1}$$

（左）雅可比

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \int_0^1 \boldsymbol{\mathcal{T}}^\alpha \mathrm{d}\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^n$$
$$= \boldsymbol{1} + \left(\frac{4-\phi\sin\phi-4\cos\phi}{2\phi^2}\right)\boldsymbol{\xi}^\curlywedge + \left(\frac{4\phi-5\sin\phi+\phi\cos\phi}{2\phi^3}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^2$$
$$+ \left(\frac{2-\phi\sin\phi-2\cos\phi}{2\phi^4}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^3 + \left(\frac{2\phi-3\sin\phi+\phi\cos\phi}{2\phi^5}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^4$$
$$\approx \boldsymbol{1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\curlywedge$$
$$\boldsymbol{\mathcal{J}} \equiv \begin{bmatrix}\boldsymbol{J} & \boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{J}}^{-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^n \approx \boldsymbol{1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\curlywedge$$
$$\boldsymbol{\mathcal{J}}^{-1} \equiv \begin{bmatrix}\boldsymbol{J}^{-1} & -\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}^{-1}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{Q} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(n+m+2)!}(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n\boldsymbol{\rho}^\wedge(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^m$$
$$\equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}^\wedge + \left(\frac{\phi-\sin\phi}{\phi^3}\right)(\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge + \boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge + \boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge)$$
$$+ \left(\frac{\phi^2+2\cos\phi-2}{2\phi^4}\right)(\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge + \boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge - 3\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge)$$
$$+ \left(\frac{2\phi-3\sin\phi+\phi\cos\phi}{2\phi^5}\right)(\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge + \boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge)$$
$$\exp\left((\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi})^\wedge\right) \approx \exp\left((\boldsymbol{\mathcal{J}}\delta\boldsymbol{\xi})^\wedge\right)\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)$$
$$\exp\left((\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi})^\curlywedge\right) \approx \exp\left((\boldsymbol{\mathcal{J}}\delta\boldsymbol{\xi})^\curlywedge\right)\exp(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}} \equiv \boldsymbol{1} + \boldsymbol{\xi}^\curlywedge\boldsymbol{\mathcal{J}}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{J}}\boldsymbol{\xi}^\curlywedge \equiv \boldsymbol{\xi}^\curlywedge\boldsymbol{\mathcal{J}}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{\mathcal{J}}(-\boldsymbol{\xi})$$
$$(\exp(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{T})^\alpha \approx \left(\boldsymbol{1} + (\boldsymbol{\mathcal{A}}(\alpha,\boldsymbol{\xi})\delta\boldsymbol{\xi})^\wedge\right)\boldsymbol{T}^\alpha$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\alpha,\boldsymbol{\xi}) = \alpha\boldsymbol{\mathcal{J}}(\alpha\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\xi})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(\alpha)}{n!}(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^n$$

$\alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\phi},\delta\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^4,\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi},\delta\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^6,\ \boldsymbol{C} \in SO(3),\ \boldsymbol{J},\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ \boldsymbol{T},\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2 \in SE(3),\ \boldsymbol{\mathcal{T}} \in \mathrm{Ad}(SE(3)),\ \boldsymbol{\mathcal{J}},\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$

6 常见函数的求导应用 （2 分，约 2 小时）

我们使用李群李代数的原因主要是利用它们的性质，对包含 $\boldsymbol{R}$ 或者 $\boldsymbol{T}$ 的函数进行求导。事实上，掌握一些基础的函数形式之后，再复杂的函数导数也可以通过链式法则求取。下面请详细推导以下函数的求导方式：

1. 旋转点对旋转的导数。请分别通过左、右扰动的方式，计算：

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{R}}. \tag{7}$$

2. 旋转的复合。请分别通过左、右扰动的方式，计算：

对R2复合求导左乘R2一般就是使用R2进行凑

$$\frac{\partial \ln\left(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\right)^{\vee}}{\partial \boldsymbol{R}_1}. \tag{8}$$

和：

$$\frac{\partial \ln\left(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\right)^{\vee}}{\partial \boldsymbol{R}_2}. \tag{9}$$

大多数复杂的函数都可以由上述两个式子导出。

提示：你可能需要用到上题的知识。

7 轨迹的描绘（2 分，约 1 小时） 14讲P66

我们通常会记录机器人的运动轨迹，来观察它的运动是否符合预期。大部分数据集都会提供标准轨迹以供参考，如 kitti、TUM-RGBD 等。这些文件会有各自的格式，但首先你要理解它的内容。记世界坐标系为 W，机器人坐标系为 C，那么机器人的运动可以用 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 或 $\boldsymbol{T}_{CW}$ 来描述。现在，我们希望画出机器人在世界当中的运动轨迹，请回答以下问题：

1. 事实上，$\boldsymbol{T}_{WC}$ 的平移部分即构成了机器人的轨迹。它的物理意义是什么？为何画出 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的平移部分就得到了机器人的轨迹？
2. 我为你准备了一个轨迹文件（code/trajectory.txt）。该文件的每一行由若干个数据组成，格式为

$$[t, t_x, t_y, t_z, q_x, q_y, q_z, q_w],$$

其中 t 为时间，t_x, t_y, t_z 为 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的平移部分，q_x, q_y, q_z, q_w 是四元数表示的 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的旋转部分，q_w 为四元数实部。同时，我为你提供了画图程序 draw_trajectory.cpp 文件。该文件提供了画图部分的代码，请你完成数据读取部分的代码，然后书写 CMakeLists.txt 以让此程序运行起来。注意我们需要用到 Pangolin 库来画图，所以你需要事先安装 Pangolin（如果你做了第一次作业，那么现在已经安装了）。CMakeLists.txt 可以参照 ORB-SLAM2 部分。

8 * 轨迹的误差（2 分，约 1 小时） P90

本题为附加题。

除了画出真实轨迹以外，我们经常需要把 SLAM 估计的轨迹与真实轨迹相比较。下面说明比较的原理，请你完成比较部分的代码实现。

设真实轨迹（ground-truth）为 $\boldsymbol{T}_g$，估计轨迹 $\boldsymbol{T}_e$。它们都以 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的形式存储，格式同上题。现在，你需要计算估计轨迹的误差。我们假设每一个 $\boldsymbol{T}_g$ 都与给定的 $\boldsymbol{T}_e$ 对应。那么，对于任意第 i 个位姿，它的误差可定义为：

$$e_i = \| \log(\boldsymbol{T}_{gi}^{-1}\boldsymbol{T}_{ei})^{\vee} \|_2. \tag{10}$$

即两个位姿之差的李代数二范数。于是，可以定义两条轨迹的均方根（Root-Mean-Square-Error, RMSE）误差为：

$$\mathrm{RMSE}(g, e) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2}. \tag{11}$$

我为你准备了 code/ground-truth.txt 和 code/estimate.txt 两条轨迹。请你根据上面公式，实现 RMSE 的计算代码，给出最后的 RMSE 结果。作为验算，参考答案为：2.207。

注：

1. 公式 (7) 满足度量的定义：非负性、同一性、对称性、三角不等式，故形成距离函数。类似的，可以定义 SO(3) 上的距离为：
$$d\left(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2\right) = \left\| \ln\left(\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{R}_2\right)^{\vee} \right\|_2.$$
关于距离定义可以参见拓扑学或者泛函教材。
2. 实际当中的轨迹比较还要更复杂一些。通常 ground-truth 由其他传感器记录（如 vicon），它的采样频率通常高于相机的频率，所以在处理之前还需要按照时间戳对齐。另外，由于传感器坐标系不一致，还需要计算两个坐标系之间的差异。这件事也可以用 ICP 解得，我们将在后面的课程中讲到。
3. 你可以用上题的画图程序将两条轨迹画在同一个图里，看看它们相差多少。