Spis treści

Na podstawie:

- Różne...

1 Od dr Krystiana Jobczyka wskazówki przed egzaminem...

CHUJ WIE JAK SIĘ PISZE TE NAZWISKA!!!

egzamin w formie testowej - wielokrotnego wyboru

- sformułowania twierdzeń - te, które mają swoje nazwy:
  - tw. Churcha, Churcha-Rosela, teza Churcha
  - tw. Mayera-Richiego
  - lambda reprezentowalne, ale nie w drugą stronę - dokładne treści
- przykład języka - trzeba rozstrzygnąć - np. język pusty, albo każdej maszyny Turinga
- nierekurencyjność przy tw. Reice'a
- rachunek lambda - operacje dodawania, mnożenia, potęgowanie itd.
- sformułowanie tw. Reice'a
- sposoby podejść do rekurencyjnej przeliczalności (odnosić do problemu lub jezyka, do dowolnego zbioru)
- które maszyny - akceptują jakie typy jezyków
- czy dana f. jest rekurencyjna
- podana lista funkcji - która z nich zawiera rekurencyjne albo w której zawiera się nierekurencyjna
- funkcja Akermana - rekurencyjna, ale nie jest pierwotnie rekurencyjna
- definicje: co to f. rekurencyjna, 3 funkcje inicjalne czy coś - na jakie własności domykamy
- przykłady relacji rekurencyjnych - mniejszosci, równości
- f. rekurencyjna, jak definiuje sięf. rek. - pytanie o przykład i definicje

- 3 część - ktoś inny układa
- lemat przekątniowy, tw. Goedla
- konsekwencja logiczna - modele zdań, jak interpretować termy
- co to teoria, teoria niesprzeczna, zupełna, aksjomatywozalna

chyba bez aksjomatyki arytmetyki Peano

jobczyk@agh.edu.pl
do mnie

Drogi Panie Adamie,

zgodnie z moją obietnicą - parę ukierunkowujących uwag dla was:
1) Nie uczymy się dowodów, bo będą zupełnie zbędne (choć kroki dowodowe bywają uczące;)), ale

2) Uczymy się WŁAŚCIWEGO SFORMUOWANIA ważniejszych twierdzeń i faktów. Ważnych twierdzeń jest w istocie kilka (ok.10-15 w toku całego wykładu). Te najznaczniejsze, to oczywiście: tw. Churcha o \lambda-definiowalności, Twierdzenie Churcha-Rossera, Twierdzenie Goedla, teza Churcha, lemat diagonalny. Ale warto zwrócić uwagę na nieco pomniejsze, jak np. tw. Mayer-Richy'ego.
Ważne, by być pewnym, co twierdzenie głosi: np. wiedzieć, że tw. Churcha-Rossera głosi, że klasa funkcji rekurencyjnych jest \lambda-rekurencyjna, a nie np. na odwrót, czyli: że klasa funkcji \lambda-rekurencyjnych jest rekurencyjna.

UWAGA: Pewnym wyjątkiem jest tw. Rice'a, którego nie trzeba, jak sądzę, perfekcyjnie wysławiać, ale wiedzieć, do czego służy, w dowodzie jakiej własności się używa.

3) Trzeba DOBRZE znać definicje istotnych pojęć. Najważniejsze z nich to:

a)funkcje rekurencyjne,
b) pierwotnie rekurencyjne + elementarnie rekurencyjne,
c) relacje rekurencyjne i pierwotnie rekurencyjne (+ pamiętać ze 3 podręczne przykłady),
d) maszyny Turinga, maszyny Turinga z własnością stopu,
e) zbioru/języka rekurencyjnego/rekurencyjnie przeliczalnego,
f) teorii/ teorii zupełnej/teorii niesprzecznej,
g) arytmetyki liczb naturalnych (może opatrzyć się z jej aksjomatami...).

UWAGA1: Warto zwrócić uwagę na funkcję Ackermanna (niekoniecznie znać dokładną definicję), ale pamiętać, czego stanowi przykład!

UWAGA1: Warto zwrócić uwagę na funkcję Ackermanna (niekoniecznie znać dokładną definicję), ale pamiętać, czego stanowi przykład!

4) Warto wiedzieć, że pewne pojęcia, zwłaszcza rekurencyjność i rekurencyjna przeliczalność dają się wyrazić na różne sposoby. Np. można mówić o nich w kontekście języków r/r.e. (wtedy wygodnie mówi się o nich w terminach maszyn Turinga (wiedzieć-jakich!)) albo np. zbiorów r/r.e. (wtedy wygodniej mówi się o nich w terminach relacji rekurencyjnych lub własności problemów, które definiują).
Przykład: A jest r.e iff a problem 'x\in A' jest semirozstrzygalny iff funkcja charakterystyczna jest zdefiniowana tylko dla x\in A i nieokreślona dla x\not\in A.

5). Rzućcie wreszcie okiem, proszę, na przykłady z rozstrzyganiem własności języków, zwłaszcza te, które okazywały się (nie)rekurencyjne i na sposób ich rozwiązywania.

Na koniec - chciałem dodać, że żywo w Was wierzę!
Serdecznie pozdrawiam,
Krystian Jobczyk

2 Twierdzenia i lematy

2.1. Twierdzenie Churcha o λ definiowalności

Pytanie

O czym mówi twierdzenie Churcha o λ definiowalności ?

Twierdzenie 8: Churcha

Każda funkcja λ-definiowalna jest rekurencyjna (klasy REK).

2.2. Teza Churcha

Pytanie

O czym mówi teza Churcha ?

Tzw. *teza Churcha* głosi, że na MT obliczymy tylko funkcje rekurencyjne.

2.3. Twierdzenie Churcha-Rossera

Pytanie

O czym mówi twierdzenie Churcha-Rossera (diamond property) ?

Twierdzenie 5: Church-Rosser (Diamond property)

Jeżeli term T da się rozłożyć na termy S i K, to S i K dadzą się sprowadzić do termu P.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\alpha\beta"] \arrow[dr, "\alpha\beta"] & \\ S \arrow[dr, "\alpha\beta"] & & K \arrow[dl, "\alpha\beta"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Sens twierdzenia: S, K są syntaktycznie różne, a semantycznie równe. Dowód później.

Pytanie

O czym mówi twierdzenie Churcha-Rossera ?

(c) $(\lambda yz.z)u \xrightarrow{\beta} \lambda z.z$

(d) $(\lambda x.xy)(\lambda x.x) \xrightarrow{\beta} (\lambda x.x)y \xrightarrow{\beta} y$

(e) $(\lambda x.xy)((\lambda yz.z)u) \xrightarrow{\beta} ((\lambda yz.z)u)y \xrightarrow{\beta} (\lambda z.z)y \xrightarrow{\beta} y$

(f) $(\lambda x.xy)((\lambda yz.z)u) \xrightarrow{\beta} (\lambda x.xy)(\lambda z.z) \xrightarrow{\beta} (\lambda z.z)y \xrightarrow{\beta} y$

UWAGA. *Proszę zwrócić uwagę, że β-redukcja nie jest deterministyczna, tzn. może przebiegać różnymi ścieżkami (zob. punkt (e) i (f) z powyższego przykładu), choć prowadzi do jednego wyniku. Ta własność jest treścią przedstawionego dalej Twierdzenia 5 (Churcha-Rossera).*

Jeżeli istnieją dwie redukcje lub sekwencje redukcji, które można zastosować do tego samego termu, wówczas istnieje term, który można osiągnąć z obu wyników, stosując (możliwie puste) sekwencje dodatkowych redukcji.

Bardziej formalnie: Jeżeli term M poprzez pewne ciągi β-redukcji redukuje się do termów $N1$ i $N2$, to istnieje term M' taki, że zarówno $N1$, jak i $N2$ można zredukować do M' (poprzez ciągi β-redukcji).

Twierdzenie 7: Churcha-Rossera

Funkcje rekurencyjne są λ-definiowalne. (Zob. Twierdzenie 5 i Definicja 10)

Plus mały hint od dr Jobczyka ;) :

Ważne, by być pewnym, co twierdzenie głosi: np. wiedzieć, że tw. Churcha-Rossera głosi, że klasa funkcji rekurencyjnych jest \lambda-rekurencyjna, a nie np. na odwrót, czyli: że klasa funkcji \lambda-rekurencyjnych jest rekurencyjna.

2.4. Twierdzenie Goedla

Pytanie

Czym jest język arytmetyki Q ?

Arytmetyka

Dany jest zbiór symboli $\{0, s, +, *, =\}$, gdzie 0 to stała, s - następnik, będący symbolem funkcyjnym jednoargumentowym, + - "dodawanie", * - "mnożenie". Nad zbiorem tym tworzymy język arytmetyki, ozn. $\mathbb{Q}$.

Liczbie $n \in \mathbb{N}$ odpowiada w języku $\mathbb{Q}$ wyrażenie $\underline{n} = \underbrace{s(s \ldots s}_{n}(0))$.

Pytanie

Co głosi pierwsze twierdzenie Goedla ?

Z wykładu:

Twierdzenie 28: Gödla o niezupełności arytmetyki

Nie istnieje zupełne, aksjomatyzowalne i niesprzeczne rozszerzenie teorii $\mathbb{Q}$.

(Nie wprost). Przypuśćmy, że istnieje T_0, które jest zupełne i aksjomatyzowalne. A więc T_0 jest rozstrzygalne, co wynika z Twierdzenia 27. Ale T_0 jako niesprzeczne rozszerzenie teorii $\mathbb{Q}$ jest nierozstrzygalne. Co stanowi sprzeczność. □

Wnioskiem z twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki jest, to iż arytmetyka *Ar* (zob. Twierdzenie 26) jako zupełne i niesprzeczne rozszerzenie teorii $\mathbb{Q}$ **nie jest aksjomatyzowalna**.

Z wikipedii: Każdy niesprzeczny rozstrzygalny system formalny pierwszego rzędu, zawierający w sobie aksjomaty Peana, musi być niezupełny.

Inaczej formułowane z opracowania:
Nie istnieje niesprzeczny układ aksjomatów i sformalizowany system poprawnej dedukcji, w którym można udowodnić wszystkie prawdziwe zdania arytmetyki liczb naturalnych.

Pytanie

Co głosi drugie twierdzenie Goedla ?

To twierdzenie jest konsekwencją poprzedniego. Głosi ono, że w ramach żadnego rozstrzygalnego systemu formalnego pierwszego rzędu zawierającego w sobie aksjomaty Peana nie da się dowieść niesprzeczności jego samego.

Błędne interpretacje [edytuj | edytuj kod]

Potoczne rozumienie twierdzeń Gödla prowadzi zwykle do nieprawidłowych wniosków, np.:

- istnieją w matematyce twierdzenia nierozstrzygalne (częsta nadinterpretacja GI),
- nie można udowodnić spójności arytmetyki (częsta nadinterpretacja GII).

Inaczej formułowane z opracowania:
Dowodu niesprzeczności sformalizowanej teorii mat. nie można przeprowadzić na gruncie tej teorii. Jest to możliwe jedynie w teorii ogólniejszej, ale dowód niesprzeczności tej nowej teorii wymaga teorii jeszcze ogólniejszej itd.

2.5. Lemat diagonalny

Pytanie

Co głosi lemat diagonalny ?

Z wikipedii: Rozumowanie przekątniowe – klasyczny przykład rozumowania w dowodzie nie wprost. Za jego pomocą można wykazać na przykład, że moc zbioru liczb rzeczywistych z przedziału $[0, 1]$ jest większa od mocy zbioru liczb naturalnych; formułuje się to obrazowo: liczb rzeczywistych jest więcej niż liczb naturalnych.

Z opracowania:

Lemat przekątniowy
Klasyczny przykład rozumowania w dowodzie nie wprost.
Przykład:
Dowód na to, że nieskończony zbiór składający się z zer i jedynek jest nieprzeliczalny.
Tworzymy macierz składającą się z dowolnej ilości ciągów zero-jedynkowych. Bierzemy przekątną i zamieniamy wszystkie 0 na 1 i wszystkie 1 na 0, z czego wynika że ciąg końcowy różni się o co najmniej jeden znak od dowolnego wiersza.

$$
\begin{array}{ll}
s_1 & = 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \\
s_2 & = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ldots \\
s_3 & = 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots \\
s_4 & = 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_5 & = 1\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_6 & = 0\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\ldots \\
s_7 & = 1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\ldots \\
s_8 & = 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\ldots \\
s_9 & = 1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\ldots \\
s_{10} & = 1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\ldots \\
s_{11} & = 1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\ldots \\
\vdots & \quad \vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\ddots
\end{array}
$$

$$
s = 1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\ldots
$$

A tutaj fragmenty z wykładu:

Poniżej wprowadzamy definicję **diagonalizacji**, która umożliwi doprowadzenie do sprzeczności, co będzie z kolei potrzebne przy dowodzeniu własności niesprzecznych rozszerzeń teorii $\mathbb{Q}$ (a więc także arytmetyki). Metoda diagonalizacji zastosowana dalej, jest analogiczna do metody przekątniowej, używanej w dowodzeniu twierdzenia Cantora (moc zbioru $[0, 1]$ jest większa niż $\aleph_0$).

Definicja 44: Diagonalizacja formuły

Diagonalizacja formuły $A(x)$:

$$\exists x \colon (x = \ulcorner A \urcorner \wedge A(x)) \quad (A \text{ jest prawdziwa na swoim numerze Gödla}).$$

Lemat 30: Diagonalizacja jest reprezentowana w $\mathbb{Q}$ i obliczalna

Założenie: Niech $\mathrm{diag} \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ będzie taką funkcją, że $\mathrm{diag}(n)$ jest numerem diagonalizacji formuły o numerze n.
Teza: diag jest reprezentowana w teorii $\mathbb{Q}$.

Dowód. Istnieje program (maszyna Turinga) robiący to.

2.6. Twierdzenie Mayer-Ritchie

Pytanie

O czym mówi twierdzenie Mayer-Ritchie ?

Twierdzenie 11: (Meyer-Ritchie)

Wszystkie funkcje REK i tylko one są wyrażalne przez *while programy*.

Pytanie

O czym mówi twierdzenie Rice'a ?

Twierdzenie 20: Rice'a

Jeżeli własność $\mathscr{S}$ jest nietrywialna, to język $L_{\mathscr{S}}$ nie jest rekurencyjny (tzn. własność $\mathscr{S}$ jest nierozstrzygalna).

Pytanie

Przy których dowodach korzysta się z twierdzenia Rice'a ?

Przykład 16. *Rozważmy zdefiniowaną wcześniej klasę maszyn, akceptujących języki puste:*

$$L_e = \{\langle M\rangle : L(M) = \varnothing\}.$$

Konstruujemy własność $\mathscr{S}$, *taką że* $L_e = L_{\mathscr{S}}$: $\mathscr{S} = \{\varnothing\}$ *(klasa* $\mathscr{S}$ *złożona jedynie z języka pustego). Z twierdzenia Rice'a mamy, że* $L_e = L_{\mathscr{S}}$ *nie jest rekurencyjny.*
Uwaga*: założenie twierdzenia jest spełnione, ponieważ tak zdefiniowana własność* $\mathscr{S}$ *jest nietrywialna, mianowicie:* $\mathscr{S} = \{\varnothing\} \neq \varnothing$.

3 Pojęcia i definicje

3.1. Funkcje rekurencyjne

Pytanie

Czym jest klasa funkcji rekurencyjnych ?

Definicja 10: Klasa funkcji rekurencyjnych

Klasa funkcji rekurencyjnych (w skrócie REK) to najmniejsza klasa zawierająca funkcje inicjujące PREK i domknięta na

- składanie,
- rekursję prostą,
- μ-rekursję.

Twierdzenie 12

Każda funkcja rekurencyjna jest obliczalna przez pewną MT, pracującą nad alfabetem $\Gamma = \{0, 1, \Delta\}$.

3.2. Funkcje pierwotnie rekurencyjne i elementarnie rekurencyjne

Pytanie

Czym są funkcje pierwotnie rekurencyjne ? A czym są funkcje elementarnie rekurencyjnie ?

pierwotnie rekurencyjna = prymitywnie rekurencyjna

Funkcja pierwotnie rekurencyjna [edytuj | edytuj kod]

Funkcjami pierwotnie rekurencyjnymi nazywamy funkcje:

- **Funkcja zerowa**
  $Z\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, zdefiniowana jako $Z(n) = 0$
- **Funkcja następnika**
  $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, zdefiniowana jako $S(n) = n + 1$
- **Funkcja rzutowania**
  $I_n^i\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, zdefiniowana jako $I_n^i(x_1, \dots, x_n) = x_i,\ i \leqslant n$

oraz wszystkie funkcje zbudowane z funkcji pierwotnie rekurencyjnych za pomocą następujących metod kompozycji:

- **Złożenia funkcji**
  Dla danych funkcji $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ oraz $g_1, \dots, g_k\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, złożeniem nazywamy funkcję $h\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, zdefiniowaną jako $h(\overline{n}) = f(g_1(\overline{n}), \dots, g_k(\overline{n}))$
- **Rekursji prostej**
  Dla danych funkcji $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ oraz $h\colon \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$, złożeniem rekurencyjnym nazywamy funkcję $f\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ zdefiniowaną jako $\begin{cases} f(\overline{n}, 0) = g(\overline{n}) \\ f(\overline{n}, S(m)) = h(f(\overline{n}, m), \overline{n}, m) \end{cases}$

Funkcje elementarnie rekurencyjne

Klasa funkcji elementarnie rekurencyjnych to najmniejsza klasa funkcji zawierająca funkcje:

- odejmowania $\dot{-}$,
- funkcję wykładniczą,
- funkcję następnika,

oraz zamknięta ze względu na operacje:

- złożenia,
- minimum ograniczonego.

3.3. Relacje rekurencyjne i prymitywnie rekurencyjne

Pytanie

Czym jest relacja prymitywnie rekurencyjna, a czym relacja rekurencyjna ?

Definicja 7: Relacja prymitywnie rekurencyjna

Relację $R \subset \mathbb{N}^{n+1}$ nazywamy prymitywnie rekurencyjną $\iff$ funkcja charakterystyczna relacji R,

$$f_R(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } R(x) \text{ zachodzi}, \\ 0, & \text{gdy } R(x) \text{ nie zachodzi}, \end{cases}$$

jest prymitywnie rekurencyjna.

Bardziej ogólnie powiemy, że:

Relacja P jest *rekurencyjna* (*pierwotnie rekurencyjna*), jeśli jej funkcja charakterystyczna jest ogólnie rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna).

Przykłady relacji prymitywnie rekurencyjnych:

Definicja 8: Funkcje znaku

Definiujemy następujące funkcje PREK $\ni sg, \overline{sg} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$sg(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = 0, \\ 1, & \text{gdy } x > 0, \end{cases} \qquad \overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x = 0, \\ 0, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

Przykład 2. *Relacje* $=, <, \leqslant$ *są PREK.*

– $f_=(x,y) = \begin{cases} 1, & dla\ x = y \\ 0, & dla\ x \neq y \end{cases} = \overline{sg}((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)).$

– $f_<(x,y) = \overline{sg}(x \dot{-} y).$

– $f_\leqslant(x,y) =$ *(Ćwiczenie 2).*

3.4. Maszyny Turinga i maszyny Turinga z własnością stopu

Pytanie

Czym są maszyny Turinga ? Czym są maszyny Turinga z własnością stopu ?

Definicja 16: Maszyna Turinga

Maszyną Turinga (będziemy używali skrótu MT) nazywamy siódemkę $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sigma, q_0, \Delta, \mathbb{F})$, gdzie

Q - skończony zbiór stanów

Σ - skończony alfabet terminalny

Γ - skończony alfabet, taki że $\Sigma \subset \Gamma$

σ - funkcja przejścia $\sigma : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \boxed{\{L, R\}}$

$q_0 \in Q$ - stan początkowy

$\Delta \in \Gamma$ - spacja (*blank*)

$\mathbb{F}$ - zbiór stanów końcowych

ruch głowicy w lewo lub prawo

Komentarz. Funkcja przejścia, σ, jest programem.

Definicja 19: Własność stopu MT

Maszyna M ma własność stopu wtedy i tylko wtedy gdy M zatrzymuje się na każdym słowie w (to znaczy, z każdej konfiguracji początkowej $q_0 w$, dochodzimy do jakiegoś stanu końcowego $\alpha_1 q \alpha_2$, gdzie $q \in \mathbb{F}$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^*$).

3.5. Zbiór/język rekurencyjny oraz rekurencyjnie przeliczalny

Pytanie

Czym jest język rekurencyjny, a czym język rekurencyjnie przeliczalny ?

Definicja 18: Język rekurencyjnie przeliczalny

Język $L \subset \Sigma^*$ jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje maszyna M, taka że język L jest przez nią akceptowany: $L(M) = L$.

Definicja 20: Język rekurencyjny

Język $L \subset \Sigma^*$ jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy gdy $L = L(M)$, dla pewnej maszyny M z własnością stopu.

3.6. Teoria, teoria zupełna, teoria niesprzeczna

Pytanie

Czym jest teoria, teoria zupełna i teoria niesprzeczna ?

Definicja 38: Teoria

Teorią nazywamy zbiór zdań, T, zamknięty na konsekwencję:

$$T \models A \implies A \in T.$$

Definicja 39: Teoria niesprzeczna

Teoria T jest **niesprzeczna** $\iff$ (i) T ma model, (ii) $\exists \varphi \colon \varphi \notin T$.

Definicja 40: Teoria zupełna

Teoria T jest **zupełna** $\iff$ $\forall \varphi \colon \varphi \in T \vee \neg\varphi \in T$.

3.7. Arytmetyka liczb naturalnych i jej aksjomaty

Pytanie

Czym jest arytmetyka liczb naturalnych, jakie są jej aksjomaty ?

Arytmetyka

Dany jest zbiór symboli $\{0, s, +, *, =\}$, gdzie 0 to stała, s - następnik, będący symbolem funkcyjnym jednoargumentowym, $+$ - "dodawanie" , $*$ - "mnożenie". Nad zbiorem tym tworzymy język arytmetyki, ozn. $\mathbb{Q}$.

Liczbie $n \in \mathbb{N}$ odpowiada w języku $\mathbb{Q}$ wyrażenie $\underline{n} = \underbrace{s(s \dots s}_{n}(0)).$

1. $\forall x \forall y \colon (s(x) = s(y) \implies x = y)$
2. $\forall x \colon \neg(0 = s(x))$
3. $\forall x \colon (x \neq 0 \implies \exists y : x = s(y))$
4. $\forall x \colon x + 0 = x$
5. $\forall x \forall y \colon x + s(y) = s(x + y)$

6. $\forall x : x * 0 = 0$

7. $\forall x \forall y : x * s(y) = x + x * y$

3.8. Funkcja Ackermanna

Pytanie

Czym jest funkcja Ackermanna ?

Przykładem funkcji REK ale nie będącej PREK jest funkcja Ackermana

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, & m = 0 \\ A(m-1,1) & m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & m, n > 0 \end{cases}$$