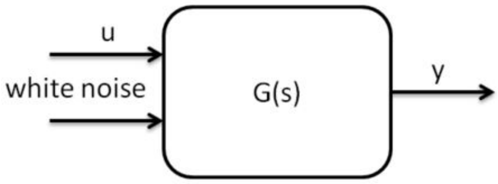
Identyfikacja procesów przemysłowych		
Dominik Wróbel	30 X 2018	Wt. 13:45, s. 111
Laboratorium 3		

1 Przebieg ćwiczenia

1.1. Zadanie 1

Zadanie polega na badaniu zachowania układu inercyjnego pierwszego rzędu z wymuszeniem losowym w postaci białego szumu, które jest dodawane do sterowania na wejściu do układu.



Rysunek 1: Układ rozważany w zadaniu

Układ taki opisany jest równaniem Ito:

$$dx = (-ax + bu)dt + \sqrt{g}dw, \quad u = \sin \omega_1 t$$
$$a = 2,\ b = 3,\ g = 0,01,\ \omega_1 = \pi$$

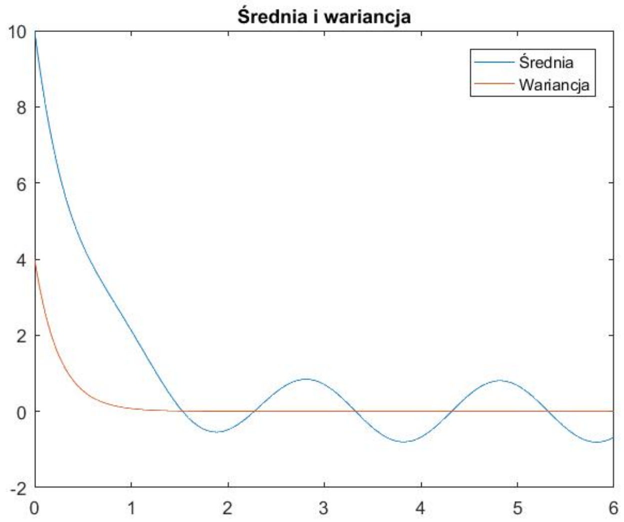
Warunek początkowy to zmienna losowa o rozkładzie $N(x_0, K_0)$, gdzie $x_0 = 10$, $K_0 = 4$.

1.1.1. Wyznaczenie średniej i wariancji procesu

Pierwszą czynnością w zadaniu było rozwiązanie numeryczne równań opisujących wartość średnią oraz wariancje procesu:

$$\dot{\mu} = -a\mu + bu,\ \mu(0) = x_0,$$
$$\dot{K} = -2Ka + g,\ K(0) = K_0$$

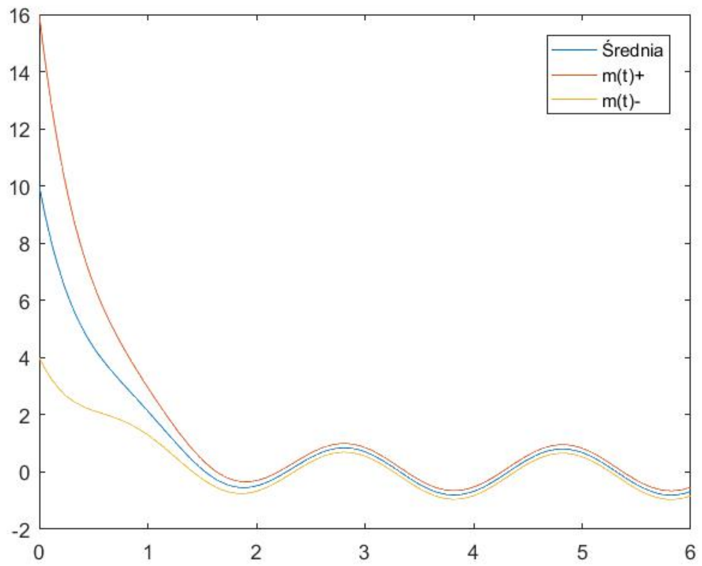
Równania zostały rozwiązane przy użyciu solvera ode45 dla czasu $t \in [0, 6]$.



Rysunek 2: Rozwiązania równań opisujących średnią i wariancję

1.1.2. Wyznaczenie odchylenie standardowego

Następnie wyznaczono odchylenie standardowe korzystając ze wzoru $\sigma(t) = \sqrt{K(t)}$. Na jednym wykresie przedstawiono średnią procesu oraz linie $m(t) = \mu(t) \pm 3\sigma(t)$, $t \in [0, 6]$. Rezultat przedstawia Rysunek 3.



Rysunek 3: Wartość średnia wraz z liniami $m(t)$.

Rozważany układ jest jednowymiarowy, wzór na rozkład prawdopodobieństwa procesu w chwili t wyraża się wzorem:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

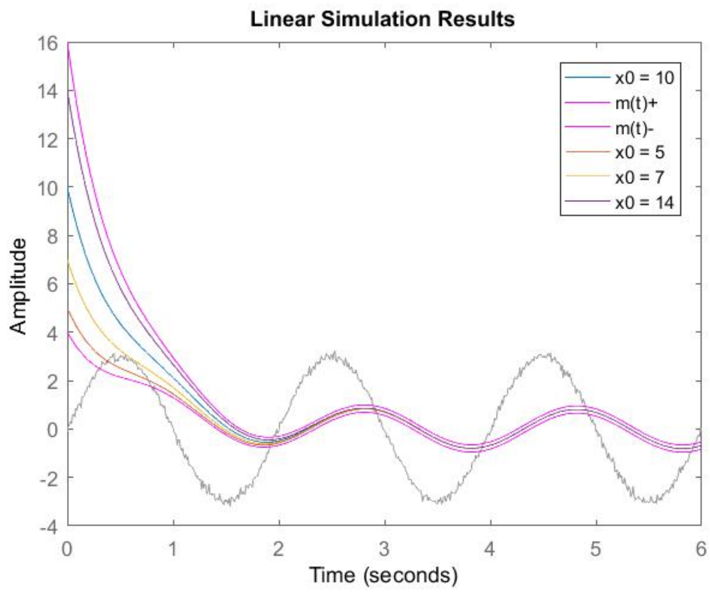
Prawdopodobieństwo, że $x(t) \in [\mu(t) - 3\sigma(t), \mu(t) + 3\sigma(t)]$ oblicza się przy pomocy dystrybuanty rozkładu normalnego:

$$P(E - 2\sigma < X < E + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 99,7\%$$

Asymptotyczne odchylenie standardowe $\lim_{t\to\infty} \sqrt{K(t)}$ można obliczyć na podstawie równania różniczkowego przy założeniu, że $\dot{K} = 0$ dla $t \to \infty$. Wtedy $K = \frac{g}{2a} = 0,0025$.

1.1.3. Badania zachowania układu dla różnych warunków początkowych

Następnie na jednym wykresie przedstawiono kilka różnych przebiegów procesu dla różnych warunków początkowych. Jak widać, wszystkie z eksperymentów zawierają się w wyznaczonych liniach $m(t)$. Wyniki przedstawia Rysunek 4. Kolorem szarym oznaczono sygnał wejściowy.



Rysunek 4: Przeprowadzone eksperymenty dla różnych warunków początkowych.

1.1.4. Kod programu

Kod programu prezentuje listing poniżej.

```
close all;
clear all;

tspan = 0:0.01:6;

a=2;
```

```
b=3;
g = 0.01;
w1 = pi;

mi0 = 10;
[t1,mi] = ode45(@(t,mi) -a*mi + b*sin(w1*t), tspan, mi0);

figure();
plot(t1,mi);

K0 = 4;
[t2,K] = ode45(@(t,K) -2*a*K + g, tspan, K0);

hold on;
plot(t2,K);


sigma = sqrt(K);
sigmaPlus = mi + 3*sigma;
sigmaMinus = mi - 3*sigma;

figure();
plot(t2,mi);
hold on;
plot(t2,sigmaPlus)
hold on;
plot(t2,sigmaMinus)

A = -a;
B = 1;
C = 1;
D = 0;

figure()
uSin = sin(w1*t1);
noise = randn(length(t1),1);

uControl = b*uSin + sqrt(g)*noise;


sys = ss(A,B,C,D);

x0 = 10;
lsim(sys,uControl,tspan,x0)

hold on;
plot(t2,sigmaPlus,'m');
hold on;
plot(t2,sigmaMinus,'m');

hold on;
x0 = 5;
lsim(sys,uControl,tspan,x0)

hold on;
```

```
x0 = 7;
lsim(sys,uControl,tspan,x0)

hold on;
x0 = 14;
lsim(sys,uControl,tspan,x0)
```

Listing 1: Zadanie 1

1.2. Zadanie 2

Zadanie jest analogiczne do zadania 1, które schematycznie przedstawia Rysunek 1, tym razem analizowanym układem jest układ II rzędu, opisany równaniem Ito:

$$dx = (Ax + Bu)dt + Gdw$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{g} \end{bmatrix} \; u = 0$$
$$\omega_0 = 1, \; \xi = 0,1, \; b = 1, \; g = 1$$

Warunkiem początkowym jest zmienna losowa o rozkładzie normalnym $N(x_0, K_0)$, przy czym $x_0 = \begin{bmatrix} 15 & 0 \end{bmatrix}$, $K_0 = 10^{-1} diag(1, 1)$.

1.2.1. Średnia i macierz kowariancji

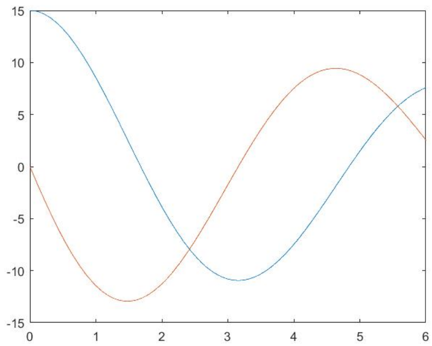
Zadanie rozpoczęto od numerycznego rozwiązania równań opisujących średnią oraz macierz kowariancji:

$$\dot{\mu} = A\mu + Bu, \; \mu(0) = x_0$$
$$\dot{K} = KA^T + AK + GG^T, \; K(0) = K_0$$

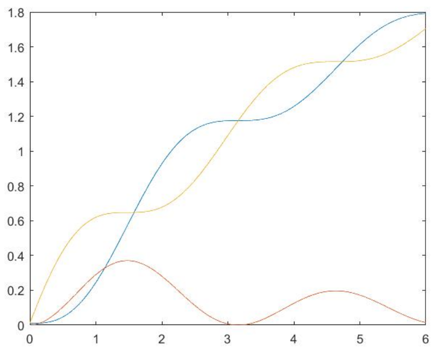
Macierz K jest symetryczna więc równanie opisujące macierz kowariancji sprowadza się do układu równań:

$$\dot{K_{11}} = 2K_{12}, \; K_{11}(0) = 10^{-3}$$
$$\dot{K_{12}} = K_{22} - 2\xi\omega_0 K_{12} - \omega_0^2 K_{12}, \; K_{12}(0) = 0$$
$$\dot{K_{22}} = -2\omega_0^2 K_{12} - 4\xi\omega_0 K_{22} + g, \; K_{22}(0) = 10^{-3}$$

Równanie opisujące średnią oraz układ równań opisujący macierz kowariancji rozwiązano numerycznie przy użyciu solvera ode45. Otrzymane rozwiązania przedstawiają Rysunki 5 oraz 6. s



Rysunek 5: Średnia



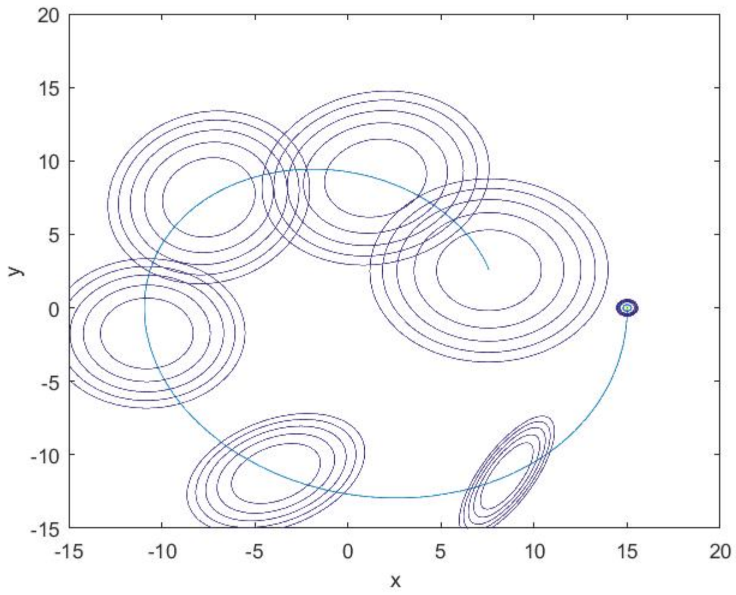
Rysunek 6: Kowariancja K_{11}, K_{12}, K_{22}

1.2.2. Portret fazowy i rozkład prawdopodobieństwa

Rozkład prawdopodobieństwa procesu w chwili t opisuje wzór:

$$p(t,x) = \frac{1}{2\pi|K(t)|} e^{0,5(x-\mu(t))^T K(t)^{-1}(x-\mu(t))}$$

Na podstawie tego wzoru można narysować poziomice rozkładu w chwilach $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ wraz z portretem fazowym średniej. Wyniki prezentuje Rysunek 7.



Rysunek 7: Portret fazowy wraz z poziomicami rozkładu prawdopodobieństwa w kolejnych chwilach czasu $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Na podstawie zadania 1 obliczono prawdopodobieństwo $P(|x_1(t) - \mu_1(t)| > 3\sqrt{K_{11}(t)}),\ t = 6$. Z zadania 1 wiadomo, że

$$P(E - 2\sigma < X < E + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 99,7\%$$

więc na tej podstawie łatwo stwierdzić, że $P(|x_1(t) - \mu_1(t)| > 3\sqrt{K_{11}(t)}) = 0,03\%,\ t = 6$

1.2.3. Asymptotyczna kowariancja i średnia procesu

Podobnie jak w zadaniu 1, zakłada się, że w nieskończoności zmiany średniej i kowariancji są równe zero, a zatem w celu obliczenia asymptotycznych wartości tych wielkości przyrównano równania je opisujące do 0.

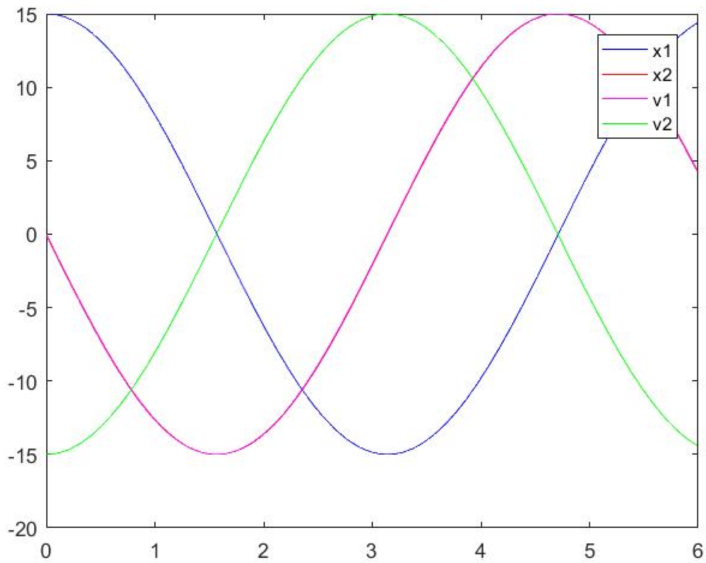
$$0 = A\mu \rightarrow \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2K_{12} \\ 0 &= K_{22} - 2\xi\omega_0 K_{12} - \omega_0^2 K_{12} \\ 0 &= -2\omega_0^2 K_{12} - 4\xi\omega_0 K_{22} + g \end{aligned}$$

$$K_{asm} = \begin{bmatrix} \frac{g}{4\xi\omega_0^3} & 0 \\ 0 & \frac{g}{4\xi\omega_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix}$$

1.2.4. Badanie układu dla $\xi = 0$.

Dla tej wartości współczynnika tłumienia narysowano przebieg średniej położenia oraz prędkości. Z wykresów widać, że wielkości te mają przebieg sinusoidalny przy czym wartości prędkości odpowiadające położeniom są sinusami różniącymi się w fazie. Takie zachowanie jest uzasadnione ponieważ układ dla $\xi = 0$ jest układem niettłumionym i wykonuje drgania o niezmieniającej się amplitudzie.



Rysunek 8: Położenie oraz prędkość w dziedzinie czasu dla $\xi = 0$.

1.3. Kod programu

Kod programu prezentuje listing poniżej.

```
clear all;
close all;

tspan = 0:0.01:6;

w0 = 1;
ksi = 0; % dla ksi = 0
b = 1;
g = 1;

A = [ 0 1 ; -w0^2 -2*ksi*w0 ];
B = [ 0 ; b ];
G = [ 0 ; sqrt(g) ];
```

```
u = 0;

x0 = [15, 0]';
K0 = (10^-1) * diag(1,1);

mi0 = x0;

[t1,miMatrix] = ode45(@(t,mi) A*mi + B*u, tspan, mi0);

for i = 1:length(t1)-1
    v(i,1) = (miMatrix(i+1,1)-miMatrix(i,1))/(t1(i+1)-t1(i)) ;
    v(i,2) = (miMatrix(i+1,2)-miMatrix(i,2))/(t1(i+1)-t1(i)) ;
end
tv = t1(1:600);

figure()
plot(t1, miMatrix(:,1));
hold on;
plot(t1, miMatrix(:,2));



[t2,kMatrix] = ode45(@vdp1,tspan,[0.01; 0; 0.01]);
figure()
plot(t2, kMatrix(:,1));
hold on;
plot(t2, kMatrix(:,2));
hold on;
plot(t2, kMatrix(:,3));


figure();
plot(t1, miMatrix(:,1), 'b');
hold on;
plot(t1, miMatrix(:,2), 'r');
hold on;
plot(tv, v(:,1), 'm');
hold on;
plot(tv, v(:,2), 'g');

hold on;
mu = [miMatrix(1,1) miMatrix(1,2)];
Sigma = [kMatrix(1,1) kMatrix(1,2); kMatrix(1,2)  kMatrix(1,3)];
x1 = -15:0.01:20; x2 = -15:.01:20;
[X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
F = mvnpdf([X1(:) X2(:)],mu,Sigma);
F = reshape(F,length(x2),length(x1));

mvncdf([0 0],[1 1],mu,Sigma);
contour(x1,x2,F,[0.000001 0.00001 0.0001 0.001 0.01 1 2 10 50 100 1000]);
xlabel('x'); ylabel('y');
```

Listing 2: Zadanie 1

2 Wnioski końcowe

Przeprowadzone eksperymenty pozwalają na uzyskanie informacji o wyjściu układu przy zakłóceniach obecnych na wejściu układu. Informacja taka pozwala stwierdzić w jakim przedziale znajdować będzie się wartość zmiennej procesowej w danej chwili czasu.