

Kryterium Koła i Popova		
Dominik Wróbel	24 IV 2018	Wt 09:30

Spis treści

1 Cel ćwiczenia	1
2 Przebieg ćwiczenia	1
2.1 Zadanie 5.1	1
2.1.1 Kryterium koła - podstawowe założenia	2
2.1.2 Kryterium koła - wyznaczenie obszaru dopuszczalnego	2
2.1.3 Twierdzenie Popova - podstawowe założenia	6
2.1.4 Twierdzenie Popova - wyznaczenie sektora Popova	7
2.2 Zadanie 5.2	10
2.2.1 Twierdzenie Popova - podstawowe założenia	11
2.2.2 Twierdzenie Popova - wyznaczenie sektora Popova	11
2.2.3 Wyznaczenie maksymalnej wartości M	13
2.2.4 Eksperyment symulacyjny w Simulinku	14
3 Wnioski końcowe	15

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z działaniem i stosowaniem dwóch twierdzeń - kryterium koła oraz twierdzenia Popova. Oba te twierdzenia mogą być stosowane do układów z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym w celu określenia stabilności tych systemów pod warunkiem spełnienia pewnych dodatkowych założeń.

2. Przebieg ćwiczenia

2.1. Zadanie 5.1

W zadaniu rozważany jest system dynamiczny opisany transmitancją:

$$G(s) = \frac{4(1 - 5s)}{(1 + 3s)(1 + 2s)} = \frac{-20s + 4}{6s^2 + 5s + 1} \quad (1)$$

W zadaniu zostaną wykonane następujące punkty :

- Wyznaczenie jak największego sektora dopuszczalnego na podstawie kryterium koła
- Wyznaczenie sektora Popova

2.1.1. Kryterium koła - podstawowe założenia

System opisany transmitancją (1) spełnia założenia :

- Jest systemem liniowym, stacjonarnym, skończenie wymiarowym,
- Jest systemem SISO,
- System objęty jest sprzężeniem zwrotnym $u(t) = f(t, y(t))$,
- Macierz stanu A nie posiada wartości własnych na osi urojonej

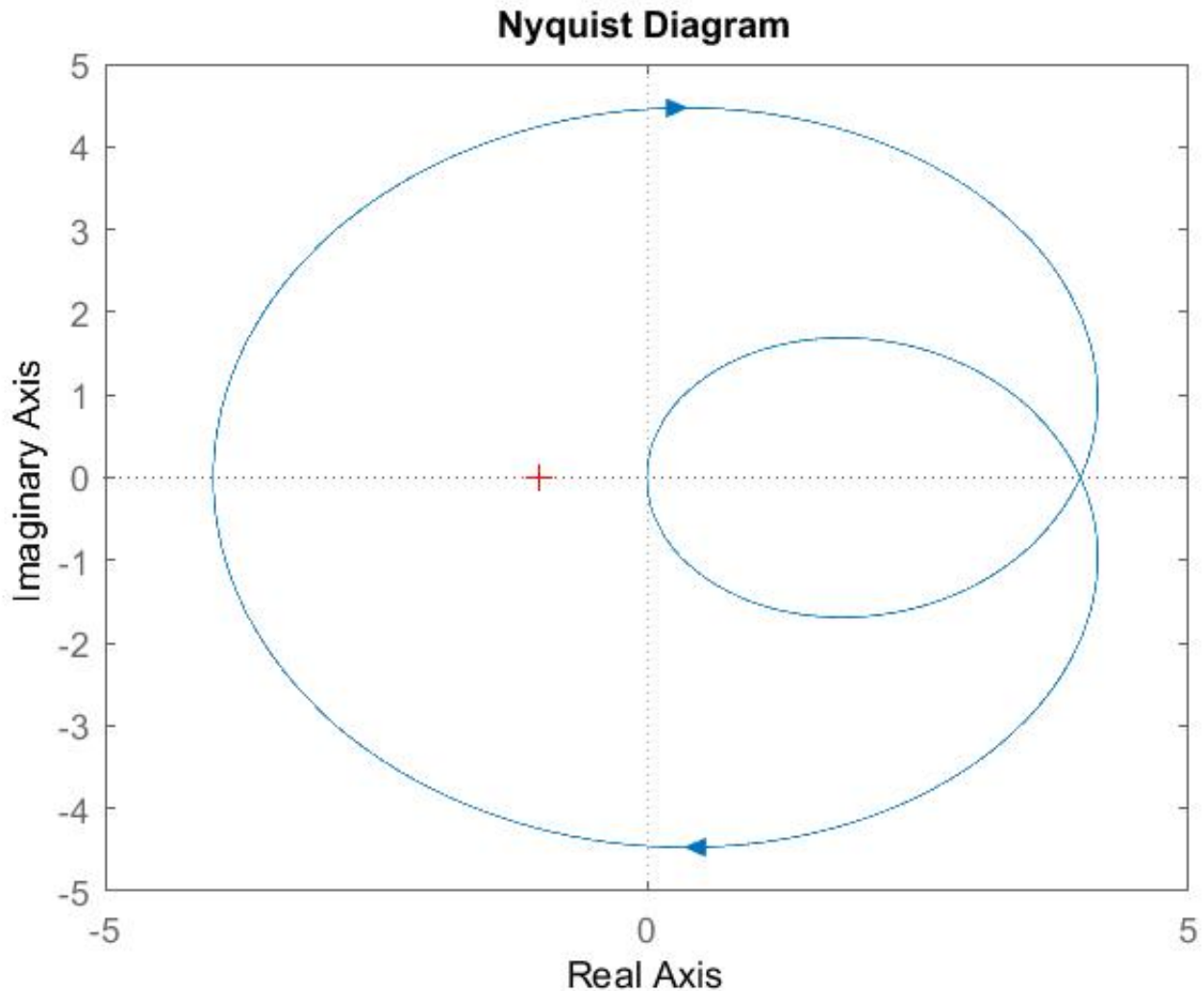
Ostatnie ze stwierdzeń można łatwo uzasadnić na podstawie obliczenia pierwiastków wielomianu charakterystycznego rozważanego systemu. Pierwiastki obliczono korzystając z polecenia *roots* w programie matlab i otrzymano następujące wyniki:

$$s_1 = -0.5000 \quad s_2 = -0.3333$$

Dodatkowo zakładamy, że sprzężenie zwrotne opisane jest funkcją f taką, że równanie $\dot{x}(t) = Ax(t) + bf(t, c^T x(t))$ ma jednoznaczne rozwiązanie.

2.1.2. Kryterium koła - wyznaczenie obszaru dopuszczalnego

W celu wyznaczania obszaru dopuszczalnego w pierwszym kroku zmodyfikowano transmitancję tak aby była odpowiednia dla rozważań z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, poprzez pomnożenie jej przez -1 . Wykonano charakterystykę Nyquista, którą przedstawia Rysunek 1.



Rysunek 1: Charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu z zadania 5.1

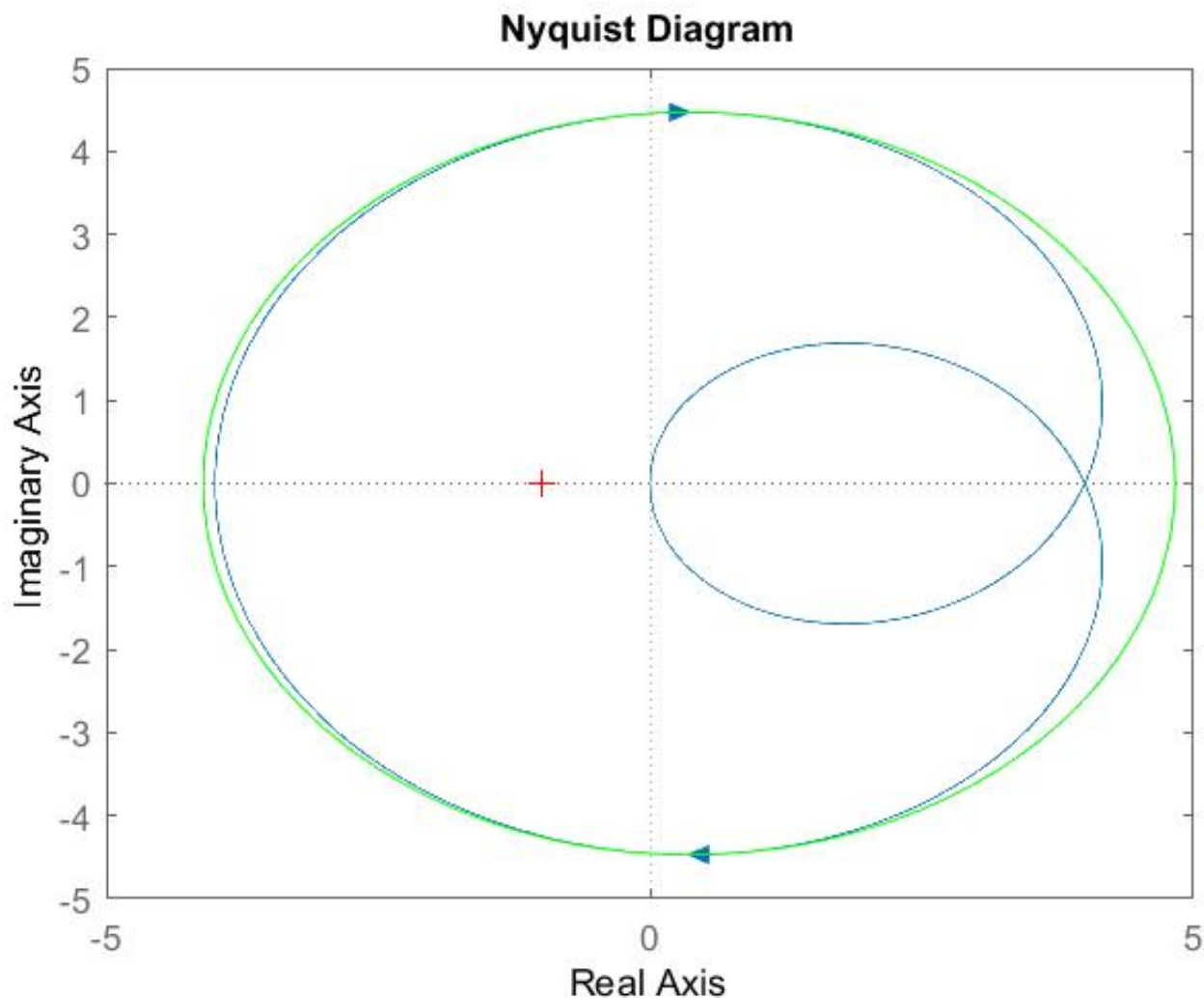
Postać charakterystyki sugeruje, że dla wyznaczenia największego możliwego obszaru należy stworzyć koło w którym będzie zawierać się charakterystyka.

Zadanie rozpoczęto od wyznaczenia maksymalnej co do modułu wartości osiąganej na osi urojonej. W tym celu posłużono się wektorem wartości zwracanych przez funkcję *Nyquist* matlaba. Maksymalna wartość osiągnięta na osi urojonej wynosi

$$Q(\omega) = 4.4699, \quad \text{dla} \quad P(\omega) = 0.3619$$

Aby móc objąć kołem tą wartość potrzebne jest koło o promieniu $r = 4.4699$ oraz środka w punkcie $(0.3619, 0)$. Stworzenie takiego koła daje gwarancje, że punkty najbardziej wysunięte na osi urojonej będą mieć dokładnie jeden punkt wspólny z tym kołem, jest to równoważne stwierdzeniu, że nie można stworzyć mniejszego koła, które zawierałoby te punkty. Charakterystykę

wraz z kołem przedstawia Rysunek 2



Rysunek 2: Charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu z zadania 5.1 wraz z wyznaczonym kołem

Kolejnym krokiem będzie pokazanie, że tak stworzone koło zawiera w sobie wszystkie pozostałe punkty charakterystyki.

Aby to udowodnić przesunięto wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej wzdłuż osi rzeczywistej tak aby środek wyznaczonego koła znajdował się w środku układu współrzędnych dzięki czemu możliwe będzie określenie odległość dowolnego punktu charakterystyki od punktu $(0.3619, 0)$ na podstawie wartości modułu nowej charakterystyki. Wykonano podstawienie $P_1(\omega) = P(\omega) - 0.3619$. Dla tak określonej charakterystyki obliczono jej moduł z równania

$$|G_1(j\omega)| = \sqrt{P_1(\omega)^2 + Q(\omega)^2}.$$

Wykonanie takiego podstawienia i obliczenie modułu pozwala na określenie odległości każdego punktu charakterystyki amplitudowo-fazowej od środka wyznaczonego okręgu $(0.3619, 0)$.

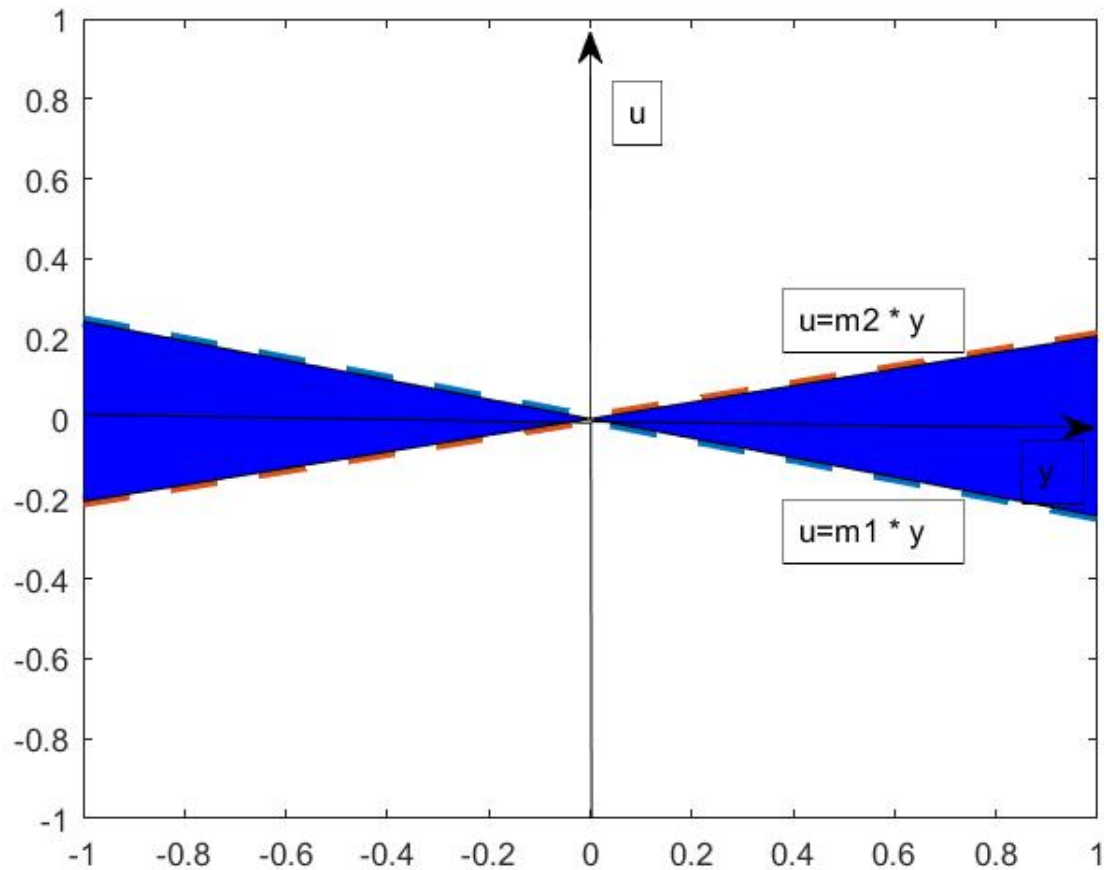
Z obliczonych przy pomocy programu matlab modułów wybrano moduł maksymalny, którego wartość wynosi 4.4699, jest więc równa wyznaczonemu promieniowi koła, co dowodzi, że wszystkie punkty charakterystyki amplitudowo-fazowej leżą wewnątrz lub na krawędzi wyznaczonego koła.

Twierdzenie zakłada, że każdy punkt charakterystyki musi znajdować się w całości we wnętrzu okręgu więc ostatecznie współczynniki m_1 oraz m_2 muszą spełniać nierówności :

$$\frac{1}{m_1} < 0.3619 - 4.4699 = -4.1080 \quad \frac{1}{m_2} > 0.3619 + 4.4699 = 4.8318$$

$$m_1 > -0,2434 \quad m_2 < 0,2070$$

Uzyskany obszar dopuszczalny przedstawia Rysunek 3.



Rysunek 3: Maksymalny obszar dopuszczalny zaznaczony kolorem niebieskim - twierdzenie koła, $m_1 = -0,2434$, $m_2 = 0,2070$

Jeżeli funkcja $f(t, y(t))$ zawiera się w wyznaczonym obszarze, to zerowe rozwiązanie układu zamkniętego jest globalnie jednostajnie wykładniczo stabilne.

2.1.3. Twierdzenie Popova - podstawowe założenia

System opisany transmitancją (1) spełnia założenia :

- Jest systemem liniowym, stacjonarnym, skończenie wymiarowym,
- Jest systemem SISO,
- System objęty jest sprzężeniem zwrotnym $u(t) = f(y(t))$,
- Macierz stanu A jest wykładniczo asymptotycznie stabilna,

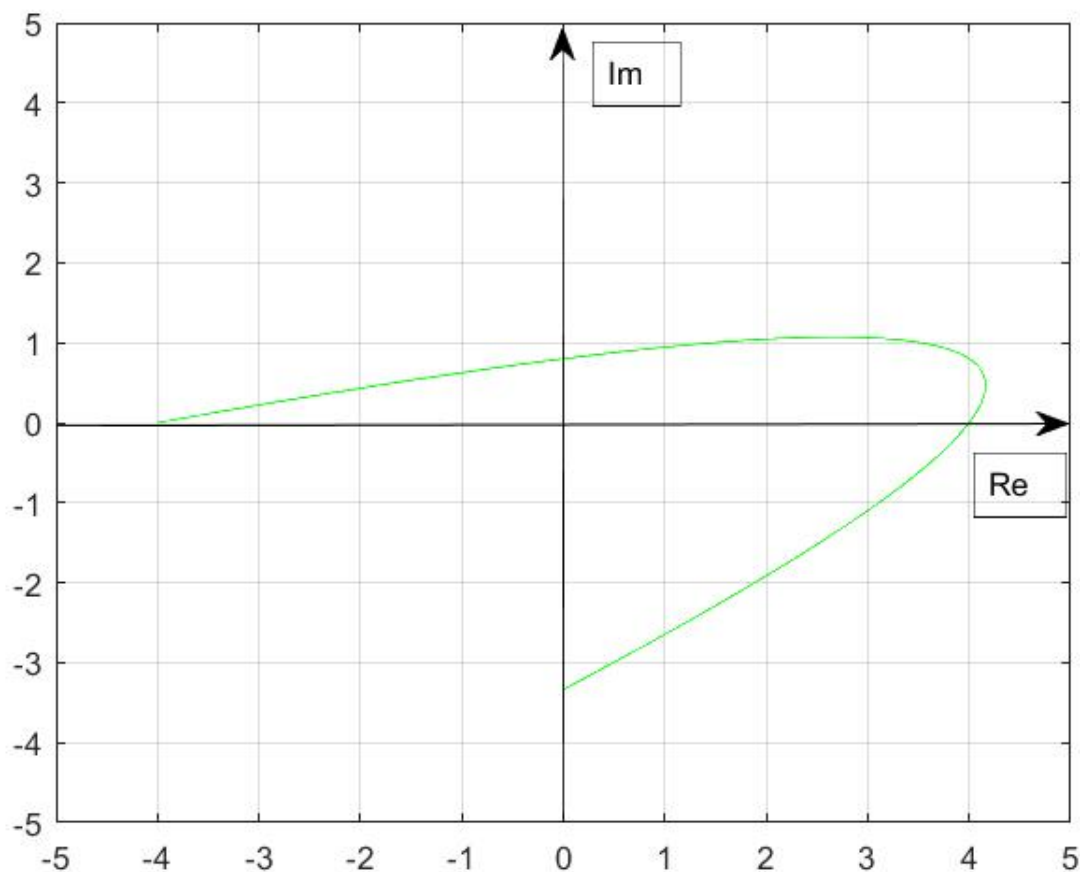
Ostatnie ze stwierdzeń można łatwo uzasadnić na podstawie obliczenia pierwiastków wielomianu charakterystycznego rozważanego systemu. Pierwiastki obliczono korzystając z polecenia *roots* w programie matlab i otrzymano następujące wyniki:

$$s_1 = -0.5000 \quad s_2 = -0.3333$$

Oba pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie więc macierz stanu A jest wykładniczo asymptotycznie stabilna.

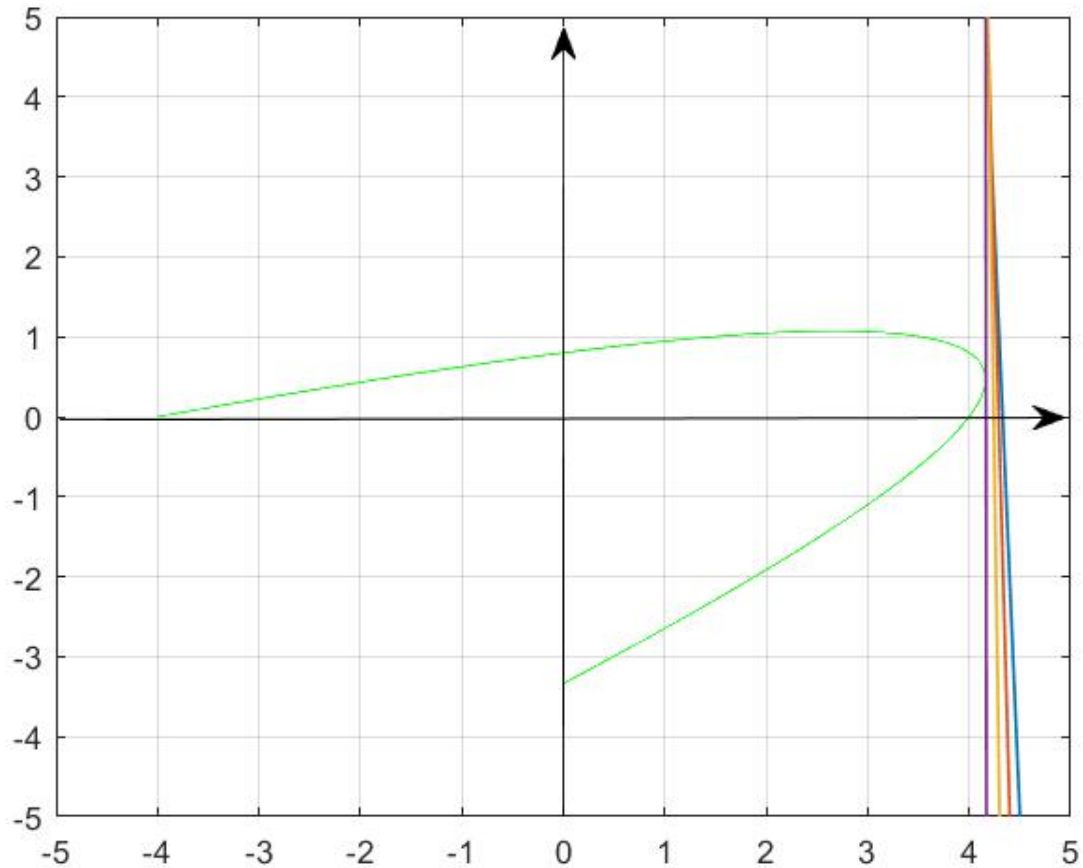
2.1.4. Twierdzenie Popova - wyznaczenie sektora Popova

W celu wyznaczenia obszaru dopuszczalnego w pierwszym kroku zmodyfikowano transmitancję tak aby była odpowiednia dla rozważań z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, poprzez pomnożenie jej przez -1 . Kolejną czynnością było wyznaczenie transmitancji widmowej i zmodyfikowanej transmitancji widmowej, czyli zmiana $Q(\omega)$ na $\omega Q(\omega)$ w nowej transmitancji. Charakterystykę amplitudowo-fazową transmitancji zmodyfikowanej dla dodatnich wartości ω przedstawia Rysunek 4.



Rysunek 4: Charakterystyka amplitudowo-fazowa transmitancji zmodyfikowanej

Aby spełniona była nierówność częstotliwościowa konieczne jest znalezienie prostej, której miejsce zerowe równe $\frac{1}{m}$ będzie leżeć jak najbliżej punktu $(0, 0)$. Wyznaczona na rysunku część charakterystyki musi leżeć w całości na lewo od tej prostej, przykładowe proste przedstawia Rysunek 5



Rysunek 5: Przykładowe proste spełniające warunki zadania

Żadna z tych prostych nie może mieć punktu wspólnego z wyznaczoną charakterystyką. Aby wyznaczyć wartość m najpierw wyznaczono największą osiąganą wartość $P(\omega)$. W tym celu z wektora wartości w programie matlab została wybrana największa wartość równa

$P_{max}(\omega) = 4.1602$, co odpowiada $Q_{max}(\omega) = 0.4674$

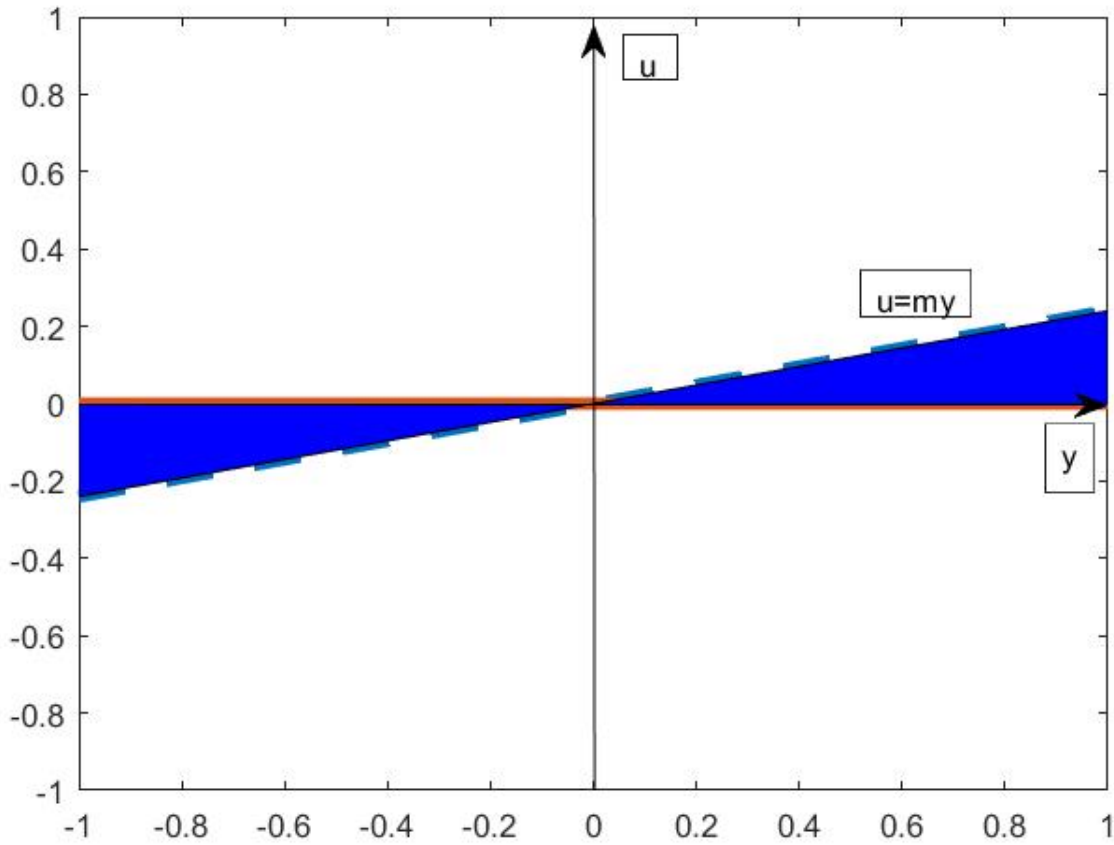
Każde możliwe m musi spełniać warunek

$$\frac{1}{m} > 4.1602 = P_{max}(\omega)$$

Uzasadnienie : Jeżeli miejsce zerowe prostej będzie większe od wyznaczonej wartości granicznej $P_{max}(\omega)$, a dla $P_{max}(\omega) = 4.1602$ wartość na prostej będzie większa od $Q_{max}(\omega) = 0.4674$, to prosta ta będzie spełniać wszystkie konieczne założenia twierdzenia i nierówność częstotliwościowa będzie spełniona więc ostatecznie:

$$m < 0.2404$$

Sektor Popova przedstawia Rysunek 6



Rysunek 6: Maksymalny sektor Popowa zaznaczono kolorem niebieskim, $m = 0,2404$

2.2. Zadanie 5.2

W zadaniu rozważany jest liniowy układ dynamiczny opisany macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c^T = [1 \quad 0 \quad 0] \quad (2)$$

System objęty jest dodatnim sprzężeniem zwrotnym za pomocą nieliniowego, statycznego, stacjonarnego elementu o charakterystyce :

$$u(t) = M \arctan y(t), \quad M > 0$$

W zadaniu zostaną wykonane następujące punkty :

- Określenie sektora Popova,
- Określenie maksymalnej możliwej wartości parametru M dla którego charakterystyka elementu nieliniowego mieści się jeszcze w sektorze Popova,
- Eksperyment symulacyjny w Simulinku

2.2.1. Twierdzenie Popova - podstawowe założenia

System opisany macierzami (2) spełnia założenia :

- Jest systemem liniowym, stacjonarnym, skończenie wymiarowym,
- Jest systemem SISO,
- System objęty jest sprzężeniem zwrotnym $u(t) = f(y(t))$,
- Macierz stanu A jest wykładniczo asymptotycznie stabilna,

Ostatnie ze stwierdzeń można łatwo uzasadnić na podstawie obliczenia wartości własnych macierzy A przy pomocy polecenia $\text{eig}(A)$ matlaba. Otrzymano następujące wartości :

$$\lambda_1 = -1.7549 + 0.0000i \quad \lambda_2 = -0.1226 + 0.7449i \quad \lambda_3 = -0.1226 - 0.7449i$$

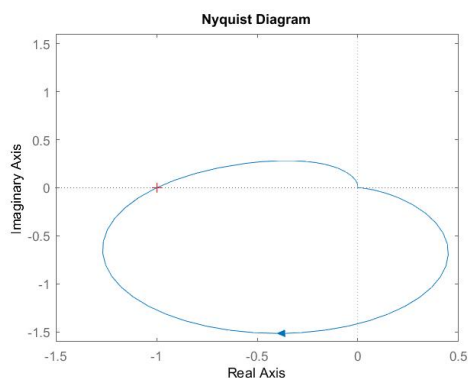
Wszystkie wartości własne leżą w lewej półpłaszczyźnie, co uzasadnia ostatnie z wypisanych powyżej założeń.

2.2.2. Twierdzenie Popova - wyznaczenie sektora Popova

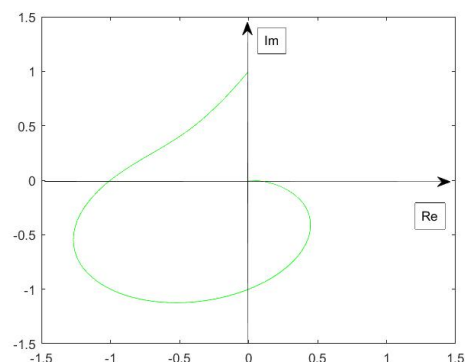
Wyznaczenie sektora Popova rozpoczęto od wyznaczenia transmitancji z równania :

$$G(s) = \frac{-s^2}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Następnie wyznaczono charakterystykę amplitudowo - fazową dla tej transmitancji oraz dla transmitancji zmodyfikowanej. Charakterystyki te przedstawia Rysunek 7 i 8.

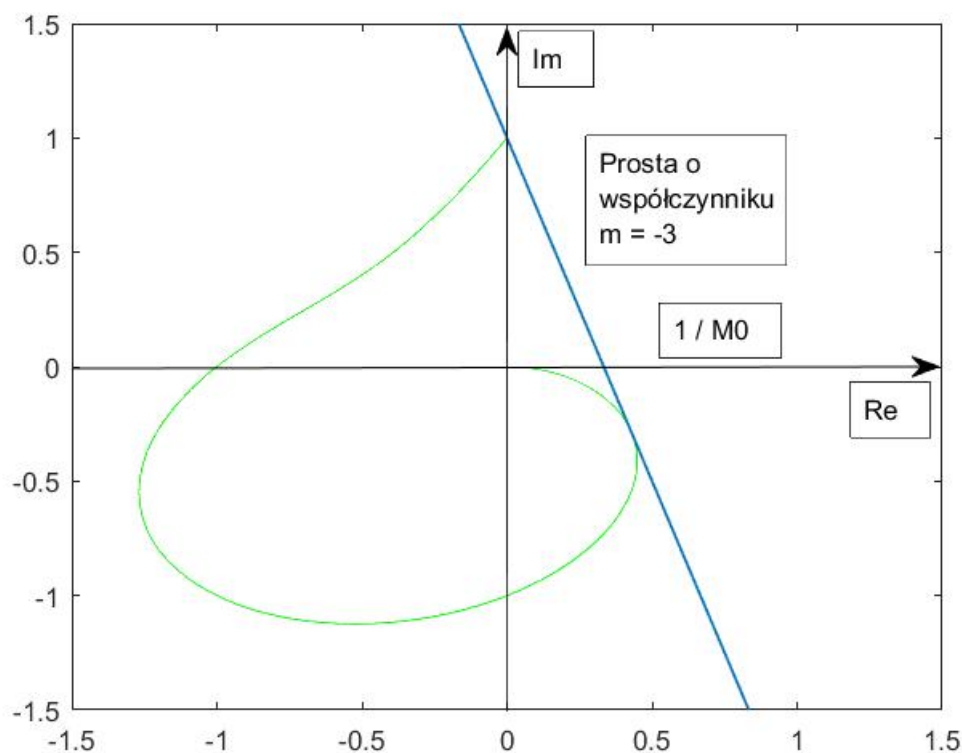


Rysunek 7: Charakterystyka transmitancji przed modyfikacją



Rysunek 8: Charakterystyka transmitancji po modyfikacji

Aby wyznaczyć sektor Popowa poprowadzono prostą styczną do otrzymanego wykresu charakterystyki amplitudowo-fazowej. Prosta ta przechodzi przez punkt $(0, j)$ oraz przecina oś rzeczywistą w punkcie $\frac{1}{M_0}$. Graficznie tą prostą przedstawia Rysunek 9.



Rysunek 9: Prosta styczna do zmodyfikowanej charakterystyki amplitudowo-fazowej.

Najpierw wyznaczono wartość M_0 . Bezpośrednio z wykresu z Rysunku 9 widać, że wartość M_0 można wyznaczyć z równania (Kudrewicz 1970, s. 178) :

$$\frac{1}{M_0} = \max_{0 < \omega < \frac{1}{m}} \frac{\operatorname{Re} \bar{G}(\omega)}{1 - \operatorname{Im} \bar{G}(\omega)}$$

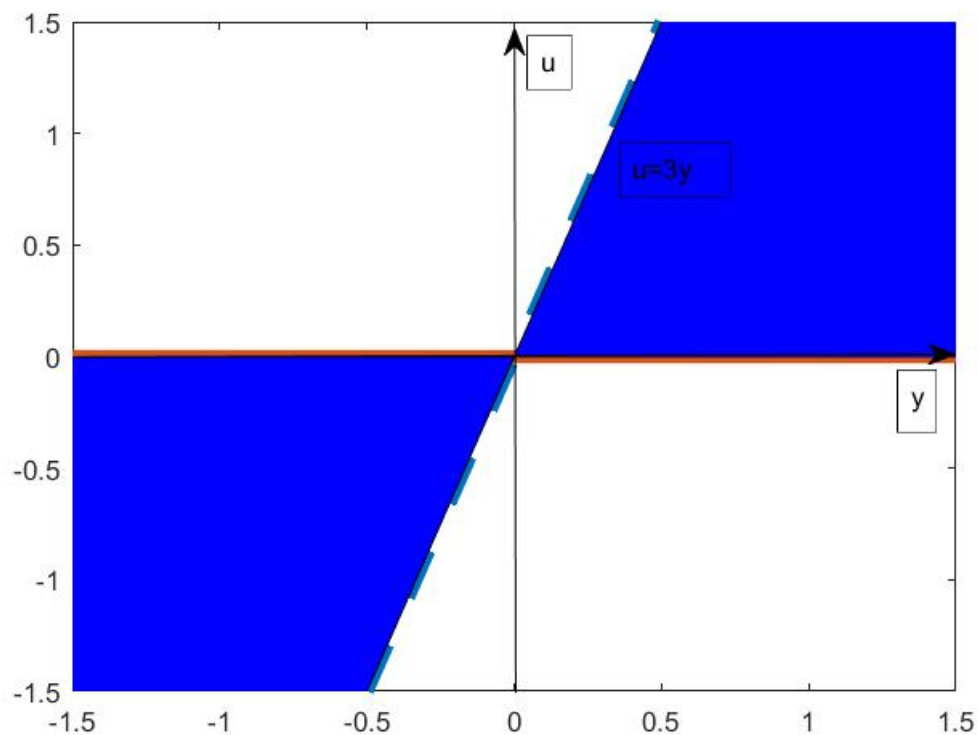
co po przekształceniach prowadzi do wyniku

$$M_0 = \min_{0 < \xi < \frac{1}{m}} \frac{1 + 2\xi}{\xi} + \frac{1 - \xi}{1 - 2\xi} = 1 + 2\sqrt{2 - 1} = 3$$

Kontynuując obliczenia można wyznaczyć zakres wartości m :

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow m < 3$$

Uzyskany sektor Popova przedstawia Rysunek 10



Rysunek 10: Sektor Popova

2.2.3. Wyznaczenie maksymalnej wartości M

Aby wyznaczyć maksymalną wartość stałej M należy znaleźć takie M dla których funkcja $u = M \arctan y$ w całości zawiera się w obszarze Popova wyznaczonym na Rysunku 10. Aby

było to spełnione musi zachodzić:

$$M \arctan y < 3y \quad \forall y > 0 \quad \wedge \quad M \arctan y \geq 0 \quad \forall y \geq 0 \quad (3)$$

$$\arctan y < \frac{3}{M}y \quad \forall y > 0 \quad \wedge \quad M \arctan y \geq 0 \quad \forall y \geq 0$$

$$y < \tan \frac{3}{M}y \quad \forall y > 0 \quad \wedge \quad M \arctan y \geq 0 \quad \forall y \geq 0$$

Z drugiego warunku powyższej koniunkcji wynika, że $M \geq 0$, z założeń zadania wiadomo, że $M > 0$.

$$x = \tan cx$$

ma dla $x = 1$ jedno zerowe rozwiązanie, a dla $c > 1$ nie ma rozwiązań, stąd nierówność (3) będzie spełniona dla

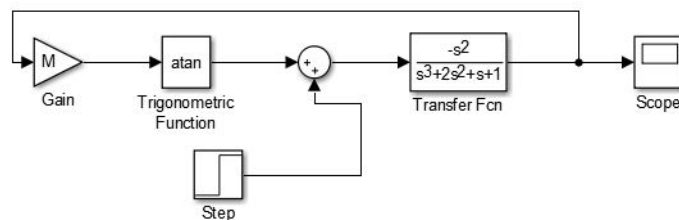
$$\frac{3}{M} \geq 1$$

i ostatecznie

$$0 < M \leq 3$$

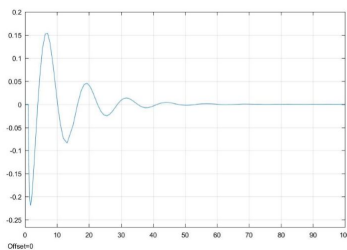
2.2.4. Eksperyment symulacyjny w Simulinku

W celu przeprowadzenia eksperymentu zbudowano model przedstawiony na Rysunku 11.

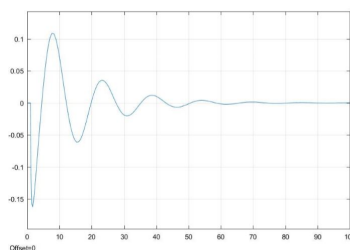


Rysunek 11: Model systemu

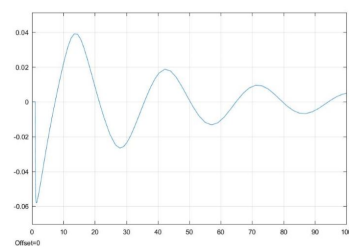
Uzyskane wyniki dla różnych parametrów M przedstawiają Rysunki 12, 13 i 14.



Rysunek 12: $M=2$



Rysunek 13: $M=4$



Rysunek 14: $M=10$

3. Wnioski końcowe

Z obliczeń i rysunków w zadaniu 5.2 wynika, że system pozostaje stabilny nawet dla większych M niż wynikałoby to z twierdzenia Popova. Powodem takiego zachowania może być fakt, że twierdzenie Popova formułuje jedynie warunki dostateczne, a nie konieczne, a zatem gdy nie są spełnione założenia tego twierdzenia, to nie można wnioskować o stabilności systemu.

Kryterium koła jest w wielu przypadkach łatwiejsze w zastosowaniu, ale często kryterium Popova daje lepsze rezultaty niż kryterium koła. Można to zaobserwować w zadaniu 5.1 gdzie pochylenie prostej w kryterium Popova umożliwiło wyznaczenie wartości m większej od m_2 .