| **Metody gradientowe** | | |
|---|---|---|
| Dominik Wróbel | **09 IV 2018** | **Pon 08:00, s. 111** |
| Numery zadań | | 1, 2, 5 |

# 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami gradientowymi poszukiwania minimum funkcji. Analiza działania różnych metod dla różnych funkcji pozwoli na określenie słabych i mocnych stron tych metod. Porównanie metod pozwoli na wybranie najlepszej dla danego problemu.

# 2 Przebieg ćwiczenia

## 2.1. Zadanie 1 - obserwacja zjawiska zygzakowania

W zadaniu poszukiwane jest minimum funkcji celu danej wzorem:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + ax_2^2$$

W tym celu wykorzystywana jest metoda najszybszego spadku. Rozważane są różne postacie funkcji celu dla parametru $a$:

- $a = 1$,
- $a = 0.5$,
- $a = 0.3$

Zmiana parametru $a$ powoduje zmianę kształtu poziomic funkcji celu. Dzięki temu możliwe jest obserwowanie wpływu wydłużania zbiorów poziomicowych i punktów startowych na działanie metody najszybszego spadku.

W funkcjach wprowadzono modyfikacje w celu dostosowania działania metody do zadania. Zmieniono funkcję kosztu tak aby obliczała wartość funkcji celu zgodnie ze wzorem podanym na początku zadania:

```
function [q,x]=KOSZT(x,z,d)

% KOSZT wylicza wskaźnik jakości dla wektora zmiennych
% decyzyjnych x+z*d.

if nargin==2, x=x+z;
elseif nargin==3, x=x+z*d;
end
q=x(1)^2+a*x(2)^2;
```

Rysunek 1: Funkcja obliczająca wartość funkcji celu w danym punkcie

Zmodyfikowano także plik obliczający gradient podstawiając wzór na gradient funkcji z zadania:

```
function g=gradie(x)
% GRADIE Wyznacza analitycznie gradient funkcji kosztu w punkcie X.
a=1;
g=[2*x(1) 2*a*x(2)];
```

Rysunek 2: Funkcja obliczająca gradient w danym punkcie

Napisano skrypt umożliwiający wywoływanie funkcji granad oraz rysowanie znalezionych rozwiązań wraz z kierunkami gradientów:

```
% a = 1
figure();
[ zm1 ,zm2 ] = meshgrid( -25:0.1:25, -25:0.1:25 );
a = 1;
rys_war = zm1.^2 +a*zm2.^2;
contour(zm1,zm2,rys_war,[10,25,50,100,150,200,250,300],'ShowText','on');

granad;

hold on;
x_ax=found(1,:);
y_ax=found(2,:);
plot(x_ax, y_ax, 'o-');
axis([-20 20 -20 20]);
```

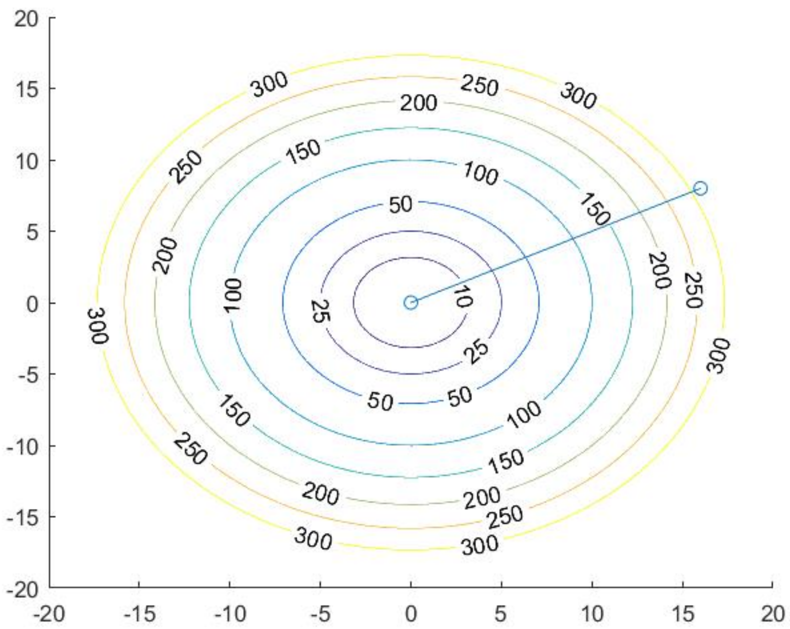
Rysunek 3: Funkcja rysująca działanie metody

### 2.1.1. Zadanie 1 - Parametr a = 1

Dla parametru a = 1 poziomice są okręgami. Nie trudno zauważyć, że minimum funkcji celu jest punkt (0,0). Punkt startowy przyjęto dla różnych wartości parametru a taki sam zgodnie z numerem na liście ćwiczeniowej :

$$x_0 = \left[n, \frac{n}{2}\right] = [16, 8]$$

Uzyskane wyniki przedstawia Rysunek 4



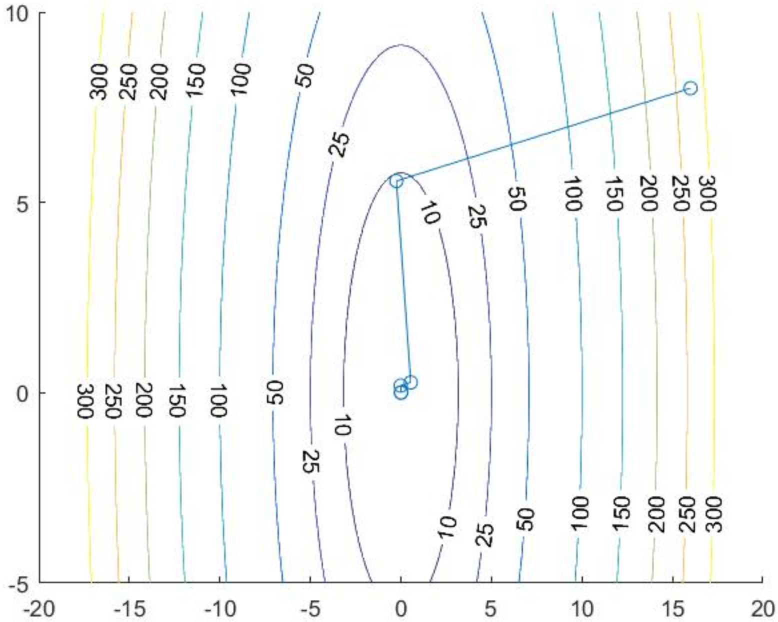

Rysunek 4: a = 1, poszukiwanie minimum dla różnych punktów początkowych

### 2.1.2. Zadanie 1 - Parametr a = 0.3

Dla parametru a = 0.3 poziomice są elipsami. Nie trudno zauważyć, że minimum funkcji celu jest punkt (0,0). Punkt startowy przyjęto dla różnych wartości parametru a taki sam zgodnie z numerem na liście ćwiczeniowej :

$$x_0 = \left[n, \frac{n}{2}\right] = [16, 8]$$

Uzyskane wyniki przedstawia Rysunek 5



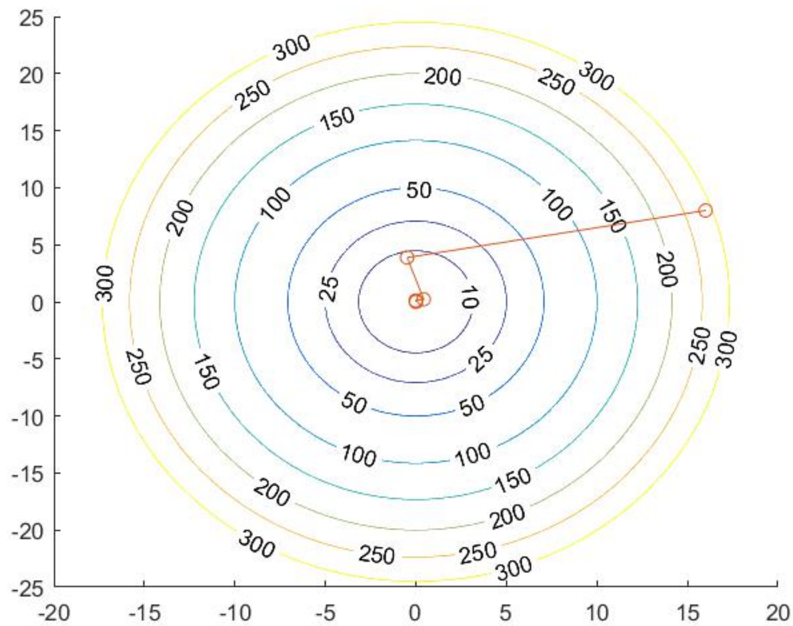

Rysunek 5: a = 0,3, poszukiwanie minimum dla różnych punktów początkowych

### 2.1.3. Zadanie 1 - Parametr a = 0.5

Dla parametru a = 0.5 poziomice są elipsami. Nie trudno zauważyć, że minimum funkcji celu jest punkt (0,0). Punkt startowy przyjęto dla różnych wartości parametru a taki sam zgodnie z numerem na liście ćwiczeniowej :

$$x_0 = \left[n, \frac{n}{2}\right] = [16, 8]$$

Uzyskane wyniki przedstawia Rysunek 6




Rysunek 6: a = 0.5, poszukiwanie minimum dla różnych punktów początkowych

## 2.2. Zadanie 2 - Porównanie gradientowych metod optymalizacji

Zadanie to polega na porównaniu gradientowych metod optymalizacji. Badana funkcja celu to :

$$Q(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 4.5(e^{x_1} - x_1 - 1) + 1.5(e^{x_2} - x_2 - 1)$$

W zadaniu tym ponownie zmodyfikowano funkcje koszt.m oraz gradie.m aby dostosować je do funkcji celu z zadania.

```
function [q,x]=koszt(x,z,d)

% KOSZT wylicza wskaźnik jakości dla wektora zmiennych
% decyzyjnych x+z*d.
if nargin==2, x=x+z;
elseif nargin==3, x=x+z*d;
end
q=6*x(1)^2+6*x(1)*x(2)+3*x(2)^2+4.5*(exp(x(1))-x(1)-1)+1.5*(exp(x(2))-x(2)-1);
```

Rysunek 7: Funkcja koszt.m dla zadania 2

```
function g=gradie(x)
% GRADIE Wyznacza analitycznie gradient funkcji kosztu w punkcie X.
g=[12*x(1)+6*x(2)+4.5*(exp(x(1))-1)     6*x(1)+6*x(2)+1.5*(exp(x(2))-1)];
```

Rysunek 8: Funkcja gradie.m dla zadania 2

W niewielkim zakresie konieczna była także modyfikacja skryptu granad, tak aby odpowiednio dopasować rozmiary mnożonych macierzy dla poprawnego działania metody. Do wykonania wykresów została wykorzystana funkcja z zadania poprzedniego.

Przeanalizowane zostaną metody:

- Metoda najszybszego spadku,
- Metoda Fletchera - Reevesa
- Metoda Polaka - Ribiere'a,
- Metoda z pełną formułą na współczynnik $\beta$

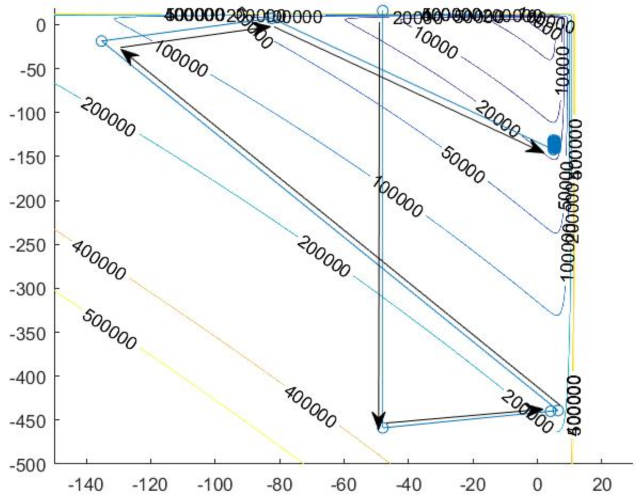
W zadaniu zostały przyjęte następujące założenia:

- Punkt startowy zgodnie z listą ćwiczeniową ( n = 16 ) to $(-48, 16)$
- Max. liczba iteracji to 20
- $x^{apr}$ - aktualne przybliżenie rozwiązania optymalnego,
- $Q^{apr} = Q(x^{apr})$
- $x^*$ - rozwiązanie optymalne ( wyznaczone analitycznie )
- $Q^* = Q(x^*)$
- Norma gradientu nie mniejsza od $0.001$

Na rysunkach wynikowych w celu lepszej widoczności działania metody kolejne kierunki zaznaczono strzałkami.

### 2.2.1. Zadanie 2 - Metoda najszybszego spadku

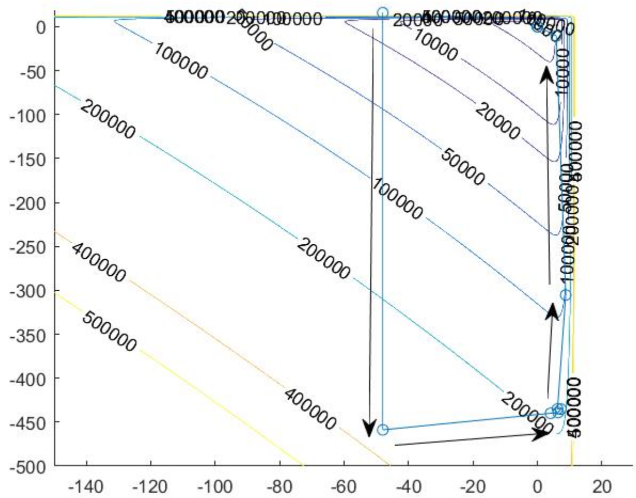
Dla punktu startowego (-48,16) działanie metody przedstawia Rysunek 9



Rysunek 9: Metoda najszybszego spadku, punkt początkowy ( -48 , 16 )

### 2.2.2. Zadanie 2 - Metoda Fletchera - Reevesa

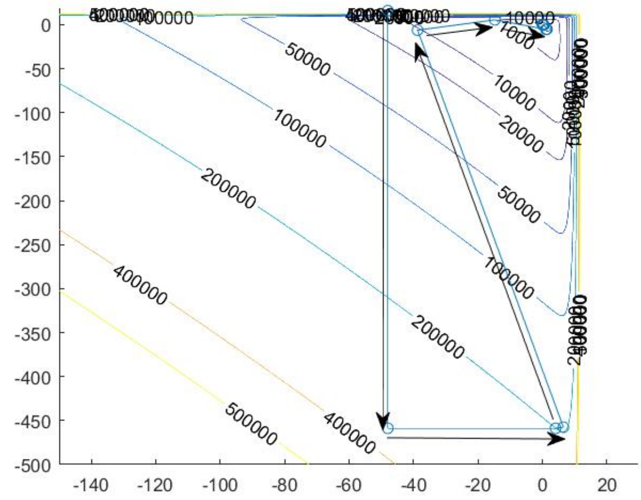
Dla punktu startowego (-48,16) działanie metody przedstawia Rysunek 10.



Rysunek 10: Metoda Fletchera - Reevesa, punkt początkowy (-48,16)

### 2.2.3. Zadanie 2 - Metoda Polaka - Ribiere'a

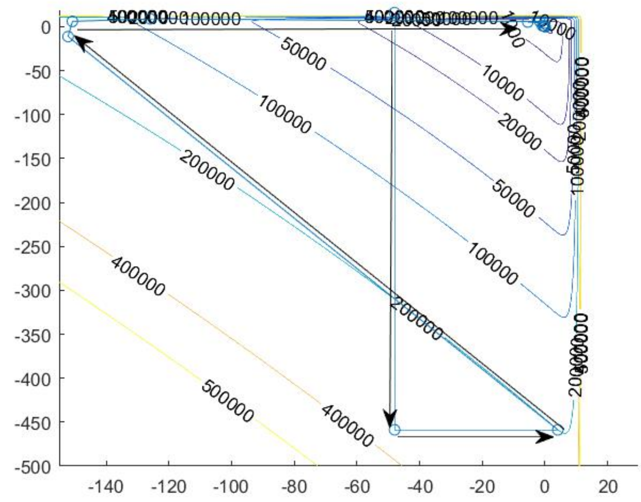
Dla punktu startowego (-48,16) działanie metody przedstawia Rysunek 11.




Rysunek 11: Metoda Polaka - Ribiere'a, punkt początkowy (-48,16)

### 2.2.4. Zadanie 2 - Metoda z pełną formułą na współczynnik beta

Dla punktu startowego (-48,16) działanie metody przedstawia Rysunek 12.




Rysunek 12: Metoda z pełną formułą na współczynnik beta, punkt początkowy (-48,16)

#### 2.2.5. Zadanie 2 - Tabelaryczne porównanie metod

Zestawienie porównawcze metod przedstawiają Tabele 1, 2, 3, 4 i 5.

| Iteracja | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Norma | 2E+14 | 12565043 | 6139247 | 787473 | 3749800 | 3540308 | 83193,97 | 293792,9 |
| Koszt_apr - Koszt_opt | 1E+07 | 357261,4 | 183722,6 | 179489,2 | 125909,1 | 39700,29 | 16951,71 | 16730,85 |
| X_apr - X_opt | -48 | -47,9827 | 4,094104 | 6,449197 | -135,299 | -82,4342 | 4,99495 | 5,637678 |
| | 16 | -458,771 | -439,912 | -439,045 | -18,5976 | 7,246896 | -142,175 | -140,939 |

Rysunek 13: Metoda najszybszego spadku

| Iteracja | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Norma | 795915 | 16425253 | 732931,4 | 8,04E+08 | 2528280 | 8,816764 | 0,029115 | 6,55E-06 |
| Koszt_apr - Koszt_opt | 179507 | 177772,9 | 176027 | 108076,5 | 1517,807 | 0,243766 | 0,011593 | 1,74E-07 |
| X_apr - X_opt | 6,4543 | 7,274755 | 6,25586 | 8,807531 | 5,865495 | 0,090694 | -0,05164 | 0,000124 |
| | -439,1 | -435,131 | -434,918 | -305,38 | -10,4726 | 0,19558 | 0,128922 | 5,58E-05 |

Rysunek 14: Metoda Fletchera - Reevesa

| Iteracja | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Norma | 316992 | 105957,6 | 117,0543 | 10,54893 | 24,53586 | 0,322252 | 0,074001 | 6,36E-06 |
| Koszt_apr - Koszt_opt | 10651 | 1269,376 | 10,45074 | 8,301181 | 0,79348 | 0,189959 | 0,002028 | 1,96E-06 |
| X_apr - X_opt | -38,74 | -14,7504 | 1,079989 | 1,430592 | 0,454569 | 0,213385 | 0,017551 | 0,000594 |
| | -6,161 | 5,504434 | -5,18311 | -5,01767 | -0,5336 | -0,58539 | -0,00539 | -1,72E-03 |

Rysunek 15: Metoda Polaka - Ribiere'a

| Iteracja | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Norma | 1E+08 | 278728,2 | 90506,72 | 11776,84 | 26,95588 | 7,716665 | 0,012313 | 5,90E-05 |
| Koszt_apr - Koszt_opt | 101849 | 513,7736 | 365,5177 | 106,5357 | 2,261609 | 1,037015 | 0,000327 | 1,65E-05 |
| X_apr - X_opt | -126 | -1,62831 | -5,48834 | -0,13593 | -0,79706 | -0,34558 | -0,00518 | 0,001679 |
| | 9,0525 | 5,86241 | 5,369425 | 4,199444 | 1,150009 | 1,029402 | -0,00293 | -4,99E-03 |

Rysunek 16: Z pełną formułą na współczynnik beta

### 2.3. Zadanie 5 - Dolina bananowa Rossenbrocka

W tym zadaniu wyznaczane jest minimum funkcji celu:

$$Q(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Zgodnie z numerem na liście ćwiczeniowej przyjęto, że punkt startowy to

$$x_0 = \left[n, \frac{n}{2}\right] = [16, 8]$$

Zmodyfikowaną funkcję koszt.m przedstawia Rysunek 18. Zmodyfikowaną funkcję gradie.m przedstawia Rysunek 17.

```
function [q,x]=koszt(x,z,d)

% KOSZT wylicza wskaźnik jakości dla wektora zmiennych
% decyzyjnych x+z*d.
if nargin==2, x=x+z;
elseif nargin==3, x=x+z*d;
end
n = 0;
x = x + 1 * n;
x1 = x(1);
x2 = x(2);
q =  100 * ( x2  - x1.^2 ).^2 + ( 1 - x1 ).^2;
```

Rysunek 17: koszt.m dla zadania 5

```
function g=gradie(x)
% GRADIE Wyznacza analitycznie gradient funkcji kosztu w punkcie X.
g=[ -400*x(1)*(x(2)-x(1)^2 )-2*(1-x(1))  200*(x(2)-x(1)^2) ];
```

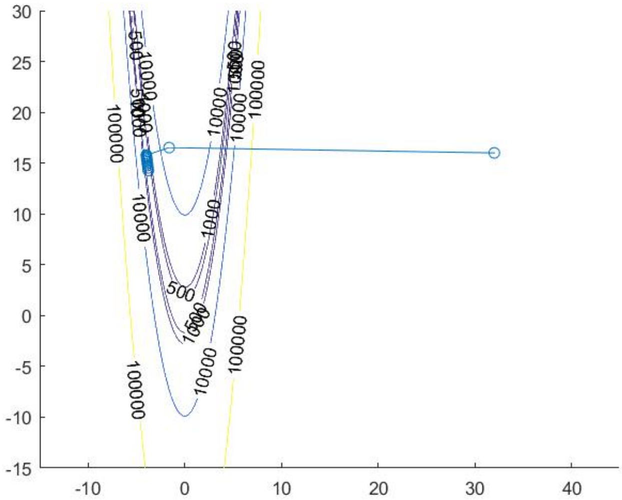
Rysunek 18: gradie.m dla zadania 5

Zbadano metody:

- Metoda najszybszego spadku,
- Metoda Fletchera - Reevesa
- Metoda Polaka - Ribiere'a,
- Metoda z pełną formułą na współczynnik $\beta$

### 2.3.1. Zadanie 5 - Metoda najszybszego spadku

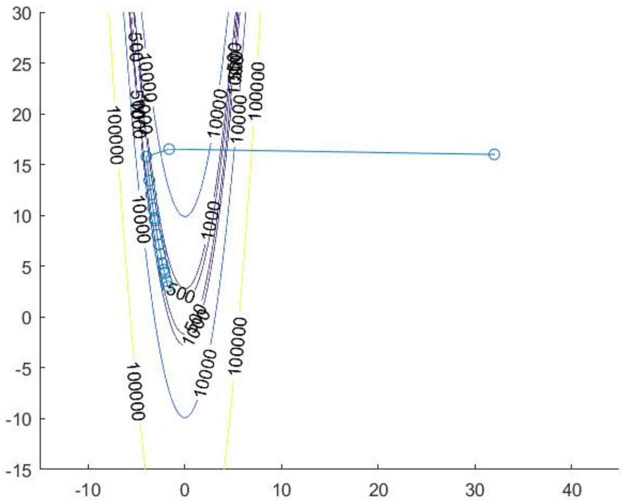
Dla punktu startowego (32,16) działanie metody przedstawia Rysunek 19



Rysunek 19: Metoda najszybszego spadku, punkt początkowy ( 32 , 16 )

### 2.3.2. Zadanie 5 - Metoda Fletchera - Reevesa

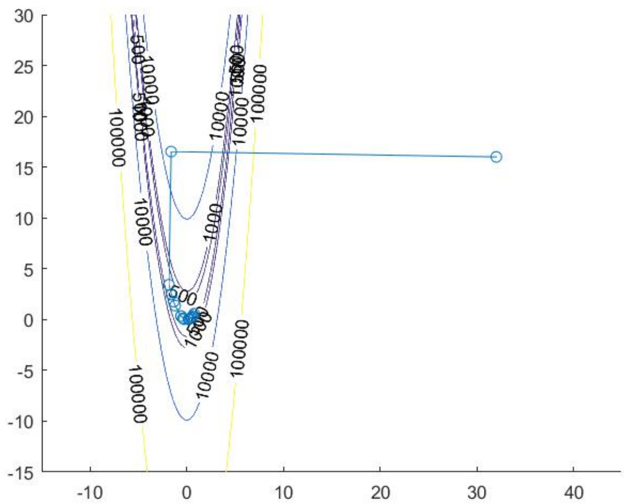
Dla punktu startowego (32,16) działanie metody przedstawia Rysunek 20.



Rysunek 20: Metoda Fletchera - Reevesa, punkt początkowy (32, 16)

### 2.3.3. Zadanie 5 - Metoda Polaka - Ribiere'a

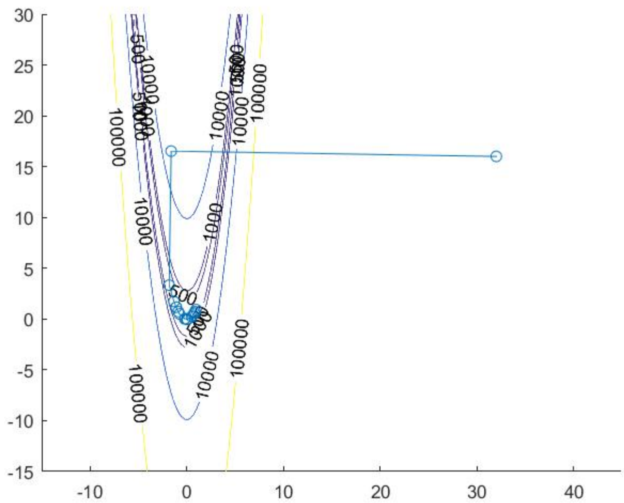
Dla punktu startowego (32,16) działanie metody przedstawia Rysunek 21.



Rysunek 21: Metoda Polaka - Ribiere'a, punkt początkowy (32,16)

### 2.3.4. Zadanie 5 - Metoda z pełną formułą na współczynnik beta

Dla punktu startowego (32,16) działanie metody przedstawia Rysunek 22.



Rysunek 22: Metoda z pełną formułą na współczynnik beta, punkt początkowy (32,16)

Zestawienie porównawcze metod przedstawia Tabela 5.

| Metoda | Liczba iteracji | X_apr - X_opt | Koszt_apr - Koszt_opt |
|---|---|---|---|
| Najszybszy spadek | 20 | -3,770043016 | 22,99 |
| | | 14,26195632 | |
| Fletchera - Reevesa | 20 | -1,763183156 | 8,58 |
| | | 3,011769961 | |
| Polaka - Ribiere'a | 20 | 0,760551018 | 0,06 |
| | | 0,578429938 | |
| Z pełną formułą beta | 20 | 0,962115678 | 0,0015 |
| | | 0,92511165 | |

Rysunek 23: Porównanie metod - Zadanie 5

# 3 Wnioski końcowe

Zadanie 1 pozwala na zaobserwowanie wad metody najszybszego spadku, dla poziomic będących okręgami metoda ta bardzo szybko znajduje minimum, wystarczy jedna iteracja, natomiast dla poziomic będących elipsami kierunki gradientów zmieniają się w sposób 'zygzakowaty', co powoduje, że metoda ta jest dość wolna w użyciu.

W zadaniu drugim zostało wykonane porównanie czterech metod gradientowych. Metoda najszybszego spadku nie znalazła minimum z określoną dokładnością przed osiągnięciem limitu iteracji ( max. 20 ). Inne metody znacznie dokładniej i szybciej były w stanie znaleźć minimum, wynika to z innego sposobu obliczania przez te metody gradientu. Zadanie 2 pokazuje również różnice pomiędzy gradientami obliczanymi przez różne metody. Zależnie od wybory metody kierunki te są inne, co prowadzi do różnych rezultatów i różnych szybkości zbieżności do punktu optymalnego.

W zadaniu 5 żadna z metod nie dała zadowalających rezultatów, pomimo, że metoda najszybszego spadku poradziła sobie najgorzej, a inne metody lepiej, to każda z nich wykorzystała maksymalną liczbę 20 iteracji.