

Opracowanie
Fizyka - Egzamin

Spis treści

1	Lista zagadnień	2
1.1	Zadania z zeszłego roku, które wysłał Bartek	2
1.2	Zadania z egzaminu 2018	2
1.3	Zagadnienia wybrane z wykładu według uznania	2
2	Źródła	2
3	Zadania z zeszłego roku, które wysłał Bartek	3
3.1	Zadanie 1 - Efekt fotoelektryczny	3
3.1.1	Na czym polega ?	3
3.1.2	Jakich cech efektu nie można wytłumaczyć klasycznie ?	3
3.1.3	Do jakich nowych odkryć doprowadził ?	3
3.2	Zadanie 2 - Promieniowanie ciała doskonale czarnego	4
3.2.1	Wstęp teoretyczny do zagadnienia	4
3.2.2	3 prawa rządzące tym zjawiskiem	5
3.2.3	Postulaty, wykraczające poza fizykę klasyczną...	6
3.3	Zadanie 4 - Studnia potencjału	7
3.3.1	Wstęp teoretyczny do zagadnienia	7
3.3.2	Wyprowadzenie wzorów	9
3.4	Zadanie 3 - Próg potencjału i prawdopodobieństwo	11
3.4.1	Wzór na współczynnik odbicia	11
3.4.2	Prawdopodobieństwo odbicia elektronu	13
4	Zadania z egzaminu 2018	14
4.1	Zadanie 1	14
4.1.1	Wstęp teoretyczny do zagadnienia	15
4.1.2	Rozpad α	15
4.1.3	Rozpad β	16
4.1.4	Obliczyć ile cząstek...	16
4.2	Zadanie 2	17
4.2.1	Wyjaśnij dlaczego ciepło właściwe...	17
4.2.2	Opisać temperaturową zależność...	17
5	Zadania wybrane według uznania	18
5.1	Model Bohra atomu	18
5.1.1	Nowe postulaty	18
5.1.2	Wyprowadzenie wzorów	18
5.2	Zakaz Pauliego	20
5.3	Wiązania jonowe i kowalencyjne	21

1 Lista zagadnień

1.1. Zadania z zeszłego roku, które wysłał Bartek

1. Efekt fotoelektryczny: na czym polega, jakich cech efektu nie można wytłumaczyć klasycznie, do jakich nowych odkryć doprowadził.
2. Promieniowanie ciała doskonale czarnego: opisz 3 prawa rządzące tym zjawiskiem, wyjaśnij jakie postulaty, wykraczające poza fizykę klasyczną, były konieczne do teoretycznego wyznaczenia rozkładu widmowego promieniowania.
3. Wyprowadź wzór na współczynnik odbicia progu potencjału o wysokości V_0 , oblicz prawdopodobieństwo odbicia elektronu o energii $E=1.1V_0$.
4. Znajdź poziomy energetyczne i funkcje falowe cząstki uwięzionej w nieskończonej studni potencjału o szerokości L .

1.2. Zadania z egzaminu 2018

1. Efekt fotoelektryczny: na czym polega, jakich cech efektu nie można wytłumaczyć klasycznie, do jakich nowych odkryć doprowadził.
2. Znajdź poziomy energetyczne i funkcje falowe cząstki o masie m uwięzionej w nieskończonej studni potencjału o szerokości L .
3. Napisać rozpady alfa i beta dla pierwiastka X z liczbą masową A i atomową Z . Jakie są produkty tych rozpadów. Obliczyć ile cząstek pozostanie po 10 latach z 1kg materiału, jeżeli okres rozpadu połowicznego wynosi 2 lata.
4. Wyjaśnić dlaczego ciepło właściwe gazu elektronowego jest znacznie mniejsze niż gazu klasycznego. Opisać temperaturową zależność ciepła właściwego dla całego kryształu.

1.3. Zagadnienia wybrane z wykładu według uznania

1. Model atomu Bohra, nowe postulaty, wyprowadzenie wzorów na promienie orbit oraz poziomy energetyczne elektronu w atomie wodoru.
2. Zakaz Pauliego
3. Wiązania jonowe, wiązania kowalencyjne
- 4.

2 Źródła

Opracowanie na podstawie:

- Wykłady Bartka
- Tipler - Modern Physics
- Kąkol - Elementy Fizyki Współczesnej (Open AGH)
- Kenneth Krane - Modern Physics

3 Zadania z zeszłego roku, które wysłał Bartek

3.1. Zadanie 1 - Efekt fotoelektryczny

Zagadnienie

Efekt fotoelektryczny: na czym polega, jakich cech efektu nie można wytłumaczyć klasycznie, do jakich nowych odkryć doprowadził.

3.1.1. Na czym polega ?

Zjawisko fotoelektryczne polega na wyrzucaniu elektronów z powierzchni metalu pod wpływem podającego światła. Zjawisko to jest potwierdzeniem kwantowej natury promieniowania.

Energia światła rozchodzi się w przestrzeni w postaci porcji energii zwanych fotonami (Einstein), energia pojedynczego fotonu jest dana wzorem:

$$E = h\nu$$

Gdy foton zderzy się z elektronem w metalu to może zostać przez elektron pochłonięty. Wówczas energia fotonu zostanie przekazana elektronowi, część tej energii poświęcana jest na to aby wyrwać elektron z metalu, a pozostała część przechodzi w energię kinetyczną tego elektronu.

Jeżeli do wyrwania elektronu z metalu potrzebna jest energia W , to wówczas

$$h\nu = W + E_{kmax}$$

Wielkość W charakterystyczna dla danego metalu nazywana jest pracą wyjścia.

3.1.2. Jakich cech efektu nie można wytłumaczyć klasycznie ?

- Wystąpienie zjawiska jest zupełnie niezależne od natężenia światła - zależy jedynie od częstotliwości (progowość)
- Zjawisko występuje prawie natychmiast po włączeniu źródła światła - teoria klasyczna zakłada pewne opóźnienie
- Napięcie hamowania jest niezależne od natężenia światła

3.1.3. Do jakich nowych odkryć doprowadził ?

Na jego podstawie odkryto, że światło w pewnych warunkach zachowuje się jak fala, a w innych jak cząstka, czyli foton. Tę własność światła nazywa się dualizmem korpuskularno-falowym. Odkrycie efektu fotoelektrycznego przyczyniło się także do odkrycia promieniowania X.

Oprócz tego na bazie zjawiska fotoelektrycznego powstało wiele użytecznych wynalazków:

- Baterie słoneczne
- Fotokomórki
- Fotodiody
- Noktowizory

3.2. Zadanie 2 - Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Zagadnienie

Promieniowanie ciała doskonale czarnego: opisz 3 prawa rządzące tym zjawiskiem, wyjaśnij jakie postulaty, wykraczające poza fizykę klasyczną, były konieczne do teoretycznego wyznaczenia rozkładu widmowego promieniowania.

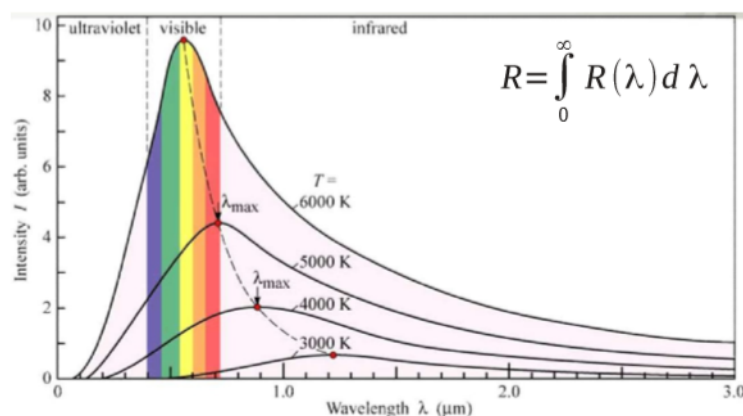
3.2.1. Wstęp teoretyczny do zagadnienia

Promieniowanie termiczne jest zjawiskiem bardzo powszechnym - żarówka wolframowa świeci, bo... ? ...bo ma wysoką temperaturę ! Wszystkie ciała jednocześnie absorbują i emitują promieniowanie termiczne. Jeżeli ciało ma wyższą temperaturę od otoczenia, to będzie się oziębiać ponieważ szybkość promieniowania przewyższa szybkość absorpcji. Gdy osiągnięta zostanie równowaga termodynamiczna wtedy te szybkości będą równe.

Za pomocą siatki dyfrakcyjnej (przyrząd do analizy widmowej światła) możemy zbadać światło emitowane przez źródła to znaczy dowiedzieć się jakie są długości fal wypromieniowywanych przez ciało i jakie jest ich natężenie.

W rozważaniach na temat promieniowania termicznego badamy widmo światła emitowanego przez ciało doskonale czarne - modelowe ciało, które służy do analizy tego zjawiska, analiza dla zwykłych ciał byłaby o wiele bardziej skomplikowana.

Widmo promieniowania ciała doskonale czarnego przedstawia rysunek:



Co my tu mamy ? Na osi poziomej długość fali, na osi pionowej wielkość nazywana zdolnością emisyjną $R(\lambda)$.

Cały problem z tym zagadnieniem był taki, że widmo to, czyli cały ten wykres był wyznaczony doświadczalnie i fizycy szukali teorii, która by pozwalała analitycznie wyznaczyć funkcję $R(\lambda)$.

Jak widać funkcja ta jest silnie zależna od temperatury, jest natomiast praktycznie niezależna od materiału.

3.2.2. 3 prawa rządzące tym zjawiskiem

1. Prawo Stefana-Boltzmann (prawo doświadczalne)

Emisja energetyczna promieniowania ciała doskonale czarnego (nie jego powierzchni) zmienia się wraz z temperaturą według prawa Stefana-Boltzmann

$$R = \sigma T^4$$

gdzie σ jest uniwersalną stałą (stała Stefana-Boltzmann) równą $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4\text{)}$.

2. Prawo przesunięć Wiena (prawo doświadczalne)

Mówi o położeniach maksimum, dla jakiej długości fali występuje maksimum w danej temperaturze

prawo przesunięć Wiena

$$\lambda_m T = \text{const}$$

$$\text{constant} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

3. Prawo Plancka

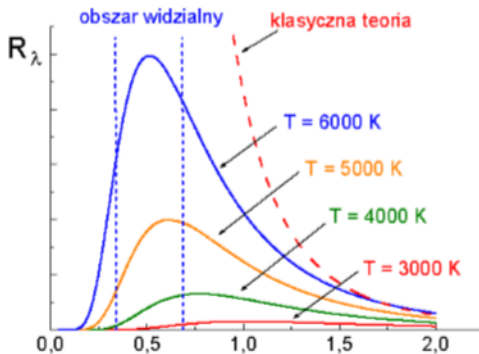
Opisuje zależność $R(\lambda)$ (wyznaczone analitycznie)

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

3.2.3. Postulaty, wykraczające poza fizykę klasyczną...

Rayleigh i Jeans chcieli wyznaczyć funkcję widmową na podstawie fizyki klasycznej stosując teorię pola elektromagnetycznego. W wyniku ich obliczeń uzyskali funkcję, która była zgodna z doświadczeniami dla dużych długości fal, ale odbiegała znacznie od doświadczeń dla krótkich długości fal, tą różnicę nazywa się Katastrofą w nadfiolecie:

„Katastrofa w nadfiolecie”



Zgodność z doświadczeniem
dla długich fal

Planck założył, że widmo energii jest dyskretne, a każdy atom zachowuje się jak oscylator elektromagnetyczny posiadający charakterystyczną częstotliwość drgań.

Oscylatory te, według Plancka, nie mogą mieć dowolnej energii, ale tylko ściśle określone wartości dane wzorem

$$E = nh\nu \quad (4)$$

gdzie ν oznacza częstotliwość drgań oscylatora, h jest stałą (zwaną obecnie stałą Plancka) równą $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js, a n - pewną liczbę całkowitą (zwaną obecnie liczbą kwantową).

Na wykładzie pojawiło się nawet wyprowadzenie tego wzorku:

$$E = nk\nu - \text{założenie}$$

Wtedy funkcja rozdziału:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n e^{-\beta nk\nu} = \sum_0^\infty (e^{-\beta k\nu})^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta k\nu}} \\ \langle E \rangle &= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -\frac{Z}{\partial \beta} \ln(1 - e^{-\beta k\nu})^{-1} = \frac{1}{1 - e^{-\beta k\nu}} e^{-\beta k\nu} h\nu = \\ &= \frac{h\nu}{e^{\beta k\nu} - 1} \\ \langle E \rangle &= E_{\text{fotonu}} \cdot \text{średnia liczba fotonów w danej } \nu \\ u(\nu) &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle \end{aligned}$$

3.3. Zadanie 4 - Studnia potencjału

Zagadnienie

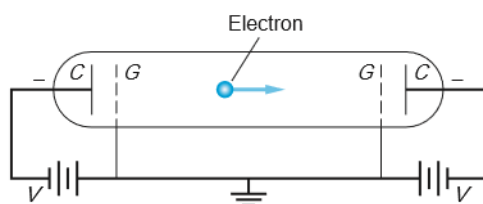
Znajdź poziomy energetyczne i funkcje falowe cząstki uwięzionej w nieskończonej studni potencjału o szerokości L

3.3.1. Wstęp teoretyczny do zagadnienia

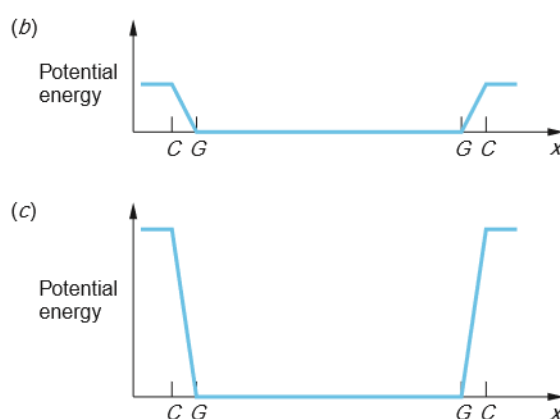
Nieskończona studnia potencjału to problem teoretyczny, który rozwiązuje się łatwo przy użyciu równania Schrödingera i ilustruje niektóre własności funkcji falowych.

E. Schrödinger sformułował mechanikę falową (jedno ze sformułowań fizyki kwantowej) zajmującą się opisem falowych własności materii. Według tej teorii, elektron w stanie stacjonarnym w atomie może być opisany za pomocą stojących fal materii, przy czym podstawę stanowi związek de Broglie'a $p = \frac{h}{\lambda}$ wiążący własności cząsteczkowe z falowymi.

Rozważany problem wziął się z analizy układu w którym mamy zamknięty w pudełku elektron. Ścianki tego pudełka stanowią siatki, które są położone w niedalekiej odległości od elektrod. W samym pudełku potencjał wynosi 0, ale pomiędzy ściankami, a elektrodami rośnie. Widok z góry na pudełko:

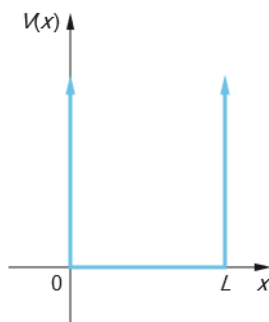


Potencjał:



Jak widać nachylenie zbocza potencjału może być dowolnie wysokie i strome i zmienia się wraz ze wzrostem amplitudy V oraz odległości elektrody od ścianki. Jeśli wyobrazimy sobie, że mamy nieskoń-

czenie dużej amplitudy V oraz przybliżamy ściankę nieskończenie blisko do elektrody, wówczas wykres potencjału będzie wyglądał tak:



Problem jest ważny ze względu na postać funkcji potencjału:

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & 0 < x < L \\ V(x) &= \infty & x < 0 \text{ and } x > L \end{aligned}$$

Taka postać funkcji pozwala na łatwe wyznaczenie dokładnego rozwiązania równania Schrödingera, a z drugiej strony jest dobrym przybliżeniem niektórych sytuacji rzeczywistych, jak np. ruch elektronu w metalu.

Wypada też wiedzieć przynajmniej ogólnie o co chodzi z równaniem Schrödingera i po co w ogóle nam funkcja falowa:

Równanie Schrödingera

Znajomość ścisłej postaci funkcji falowej jest niezbędna do określenia ruchu cząstek w konkretnych przypadkach (zjawiskach fizycznych). Przykładem może być funkcja falowa ψ , opisująca ruch cząstki swobodnej, która została przedstawiona w module [Funkcja falowa](#).

Taką ścisłą postać funkcji falowej dla dowolnego układu można znaleźć, rozwiązując równanie Schrödingera. Jest to równanie różniczkowe opisujące zachowanie się układu kwantowego w czasie i przestrzeni, które w szczególności przyjmuje postać

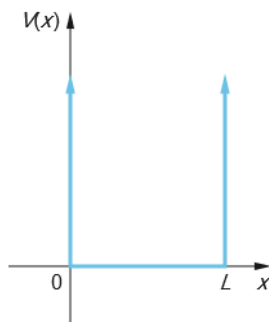
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi \quad (40)$$

gdzie E jest energią całkowitą cząstki, $U(x)$ jej energią potencjalną zależną od jej położenia, a $\hbar = h/2\pi$. Zależność (40) przedstawia najprostszą formę równania Schrödingera to jest równanie w jednym wymiarze i niezależne od czasu.

Rozwiązanie równania Schrödingera polega na znalezieniu postaci funkcji falowej ψ i wartości energii cząstki E przy znanej działającej na cząstkę sile zadanej poprzez energię potencjalną U .

3.3.2. Wyprowadzenie wzorów

Wykres zależności potencjału od położenia:



Wychodząc od równania Schrödingera

$$\frac{-\hbar}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = (E - V(x)) \Psi(x)$$

Podstawiamy za $V(x)$ wartość 0 i otrzymujemy:

$$\frac{-\hbar}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = E \Psi(x)$$

Przenosząc drugą pochodną na lewą stronę:

$$\Psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x)$$

Ponieważ $p^2 = 2mE$, to możemy zapisać, że

$$k^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Psi'' = -k^2 \Psi(x)$$

Rozwiązanie takiego równania różniczkowego ma postać:

$$\Psi(x) = A \sin kx$$

lub

$$\Psi(x) = B \cos kx$$

Podstawiając warunek graniczny: $\Psi(x) = 0$, gdy $x = 0$, otrzymujemy, że rozwiązanie z cosinusem jest niepoprawne. Podstawiając drugi warunek graniczny: $\Psi(x) = 0$, gdy $x = L$, otrzymujemy, że

$$\Psi(L) = A \sin kL = 0$$

co ogranicza wartości k do:

$$k_n = n \frac{\pi}{L}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Przyrównując teraz do siebie dwa równania na k^2 :

$$\left(n\frac{\pi}{L}\right)^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = n^2 E_1$$

Uzyskaliśmy równanie opisujące poziomy energetyczne.

Teraz chcemy wyznaczyć A z równania falowego:

$$\Psi(L) = A \sin kL = 0$$

Stałą A można obliczyć korzystając z warunku normalizacji:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^* \Psi_n dx = \int_0^L A_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1$$

Całka w przedziałach gdzie potencjał ma wartość nieskończoną wynosi 0 dlatego całkujemy tylko od 0 do L . Po scałkowaniu otrzymujemy, że $A_n = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$ (niezależne od n).

I ostatecznie funkcje falowe mają postać:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3.4. Zadanie 3 - Próg potencjału i prawdopodobieństwo

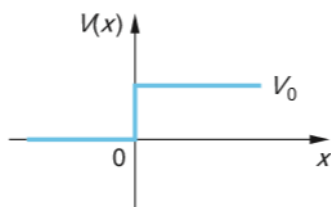
Zagadnienie

Wyprowadź wzór na współczynnik odbicia progu potencjału o wysokości V_0 , oblicz prawdopodobieństwo odbicia elektronu o energii $E=1.1V_0$.

3.4.1. Wzór na współczynnik odbicia

Rozważamy otoczenie w którym funkcja potencjału to skok o amplitudzie V_0 :

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & \text{for } x < 0 \\ V(x) &= V_0 & \text{for } x > 0 \end{aligned}$$



Analizujemy wiązkę cząstek, wszystkie o tej samej energii E , które przemieszczają się z lewej strony w prawą i napotykają skok potencjału.

Wychodząc od równania Schrödingera

$$\frac{-\hbar}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = (E - V(x)) \Psi(x)$$

zapisujemy to równanie dla dwóch regionów, przed i po przejściu przez skok potencjału (zakładając $E > V_0$):

$$(x < 0) \quad \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = -k_1^2 \Psi(x)$$

$$(x > 0) \quad \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = -k_2^2 \Psi(x)$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{and} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

Ogólne rozwiązania tych równań różniczkowych mają postać:

$$(x < 0) \quad \psi_I(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$

$$(x > 0) \quad \psi_{II}(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$$

W obszarze dla $x > 0$ brak fali odbitej stąd $D = 0$.

Żądamy aby funkcja oraz jej pierwsza pochodna była ciągła stąd:

$$\psi_I(0) = A + B = \psi_{II}(0) = C$$

or

$$A + B = C$$

Continuity of $d\psi/dx$ at $x = 0$ gives

$$k_1A - k_1B = k_2C$$

Rozwiązując powyższe równania otrzymujemy, że

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A = \frac{E^{1/2} - (E - V_0)^{1/2}}{E^{1/2} + (E - V_0)^{1/2}}A$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A = \frac{2E^{1/2}}{E^{1/2} + (E - V_0)^{1/2}}A$$

Skąd wyznaczamy współczynnik odbicia R oraz transmisji T :

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

$$T = \frac{k_2}{k_1} \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

3.4.2. Prawdopodobieństwo odbicia elektronu

Korzystając wcześniejszych obliczeń:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_2x} = Ce^{-\alpha x}$$

gdzie

$$\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar.$$

stąd

$$|\psi_{II}|^2 = |C|^2 e^{-2\alpha x}$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A = \frac{2E^{1/2}}{E^{1/2} + (E - V_0)^{1/2}} A$$

Podstawiając do powyższego wzoru $E = 1.1V_0$ i przyjmując $|A|^2 = 1$ otrzymujemy

$$|C|^2 = \left| \frac{2(1.1V_0)^{\frac{1}{2}}}{(1.1V_0)^{\frac{1}{2}} + (0.1V_0)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 = 2.6$$

stąd

$$|\Psi_{II}|^2 = 2.6e^{-2\alpha x}$$

4 Zadania z egzaminu 2018

4.1. Zadanie 1

Zagadnienie

Zadanie 1 - Patrz -> Zadania z zeszłego roku, które wysłał Bartek

Zagadnienie

Zadanie 2 - Patrz -> Zadania z zeszłego roku, które wysłał Bartek

Zagadnienie

Napisać rozpad alpha i beta dla pierwiastka X z liczbą masową A i atomową Z. Jakie są produkty tych rozpadów. Obliczyć ile cząstek pozostanie po 10 latach z 1kg materiału, jeżeli okres rozpadu połowicznego wynosi 2 lata.

4.1.1. Wstęp teoretyczny do zagadnienia

Jądro atomu składa się z:

- Nukleonów - wspólna nazwa dla protonów i neutronów, liczbę nukleonów oznacza się przez $A = Z + N$ (liczba masowa)
- Protonów - ładunki dodatnie, liczbę protonów oznacza się przez Z (liczba atomowa)
- Neutronów - ładunki neutralne, liczbę neutronów oznacza się przez N

Pierwiastki podajemy wraz z ich liczbą masową A i atomową Z:



X - symbol pierwiastka

A - liczba masowa

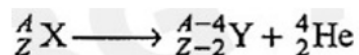
Z - liczba atomowa

Rozpadem jądra nazywamy dojście do stanu podstawowego przez zmianę liczby nukleonów, któremu często towarzyszy emisja promieniowania.

Trzy podstawowe rozpadły energetyczne:

1. Rozpad alfa α
2. Rozpad beta β
3. Rozpad gamma γ

4.1.2. Rozpad α



Występuje najczęściej dla jąder ze zbyt dużą liczbą protonów.

W wyniku rozpadu alfa powstaje jądro, które ma mniejszą o 2 liczbę atomową a liczbę masową mniejszą o 4 w porównaniu z rozpadającym się jądrem, a także cząstka α .

4.1.3. Rozpad β

Mogą zachodzić dwa rodzaje rozpadu β :

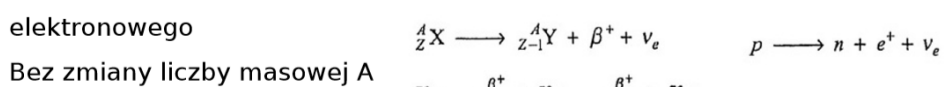
- beta +

beta +

Zamiana wewnątrz jądra protonu w neutron

Emisja pozytonu (antyelektron, ładunek +1, masa elektronu) i neutrino

elektronowego

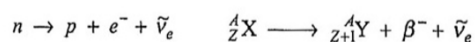


Bez zmiany liczby masowej A

- beta -

beta -

- Zamiana wewnątrz jądra neutronu w proton
- Emisja elektronu i antyneutrino elektronowego
- Bez zmiany liczby masowej A



4.1.4. Obliczyć ile cząstek...

Korzystamy z tego wzorku:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

$$t = 10 \text{ lat}$$

$$N_0 = 1000g$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 2 \text{ lata}$$

$$N(t) = 1000g \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}$$

$$N(t) = 1000g \frac{1}{2}^2 = 31,25g$$

4.2. Zadanie 2

Zagadnienie

Wyjaśnić dlaczego ciepło właściwe gazu elektronowego jest znacznie mniejsze niż gazu klasycznego. Opisać temperaturową zależność ciepła właściwego dla całego kryształu

4.2.1. Wyjaśnij dlaczego ciepło właściwe...

W podejściu klasycznym elektrony traktowane są jako identyczne rozróżnialne cząstki, które poddają się prawu Boltzmanna. Wówczas ciepło właściwe gazu elektronowego wynosi $\frac{3}{2}R$. Wartość ta jest jednak o wiele zawyżona, co pokazują eksperymenty.

Przed wszystkim wynika to z faktu, że klasyczna teoria nie uwzględnia zakazu Pauliego oraz rozkładu Fermiego-Diraca, które brane są pod uwagę w podejściu kwantowym.

- Zakaz Pauliego - mówi, że elektrony muszą się poruszać nawet w temperaturze $T = 0K$
- Rozkład Fermiego-Diraca - mówi, że dla $T = 0K$ elektrony przyjmują stany o energii poniżej E_F . Dla temperatury większej od $0K$, tylko elektrony będące na poziomie E_F mogą wyskoczyć poza ten stan. Dlatego wzbudzony termicznie może być tylko niewielki ułamek elektronów.

Definiując temperaturę Fermiego można wyprowadzić wzór na ciepło właściwe gazu elektronowego.

$$k_B T_F = E_F$$

Przyrost energii w temperaturze T:

$$dU = N \frac{(k_B T)^2}{E_F}$$

Stąd ciepło właściwe:

$$C_{vel} = \frac{dU}{dT} = \frac{\pi^2}{2} R \frac{T}{T_F} = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 D(E_F) T$$

4.2.2. Opisać temperaturową zależność...

Ciepło właściwe całego kryształu jest sumą ciepła właściwego gazu elektronowego oraz ciepła właściwego sieci krystalicznej.

$$C_V = C_{vel} + C_{vs}$$

Ciepło właściwe gazu zostało opisane już wyżej. Drugi ze składników pochodzi od drgań sieci, które w podejściu kwantowym są drganiami kwantowych oscylatorów harmonicznymi. Ciepło właściwe sieci wynosi:

$$C_{vs} = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{T_D} \right)^3$$

T_D - temperatura Debye'a

5 Zadania wybrane według uznania

5.1. Model Bohra atomu

Zagadnienie

Model atomu Bohra, nowe postulaty, wyprowadzenie wzorów na promienie orbit oraz poziomy energetyczne elektronu w atomie wodoru

5.1.1. Nowe postulaty

Bohr zmodyfikował model planetarny atomu wprowadzając trzy postulaty:

- W atomie istnieją orbity stacjonarne, na których elektron porusza się nie emitując promieniowania
- Atom emituje promieniowanie o częstotliwości f , kiedy elektron przeskakuje pomiędzy orbitami
 $hf = E_i - E_f$
- W granicy dużych orbit i dużych energii, obliczenia kwantowe muszą być zgodne z obliczeniami klasycznymi (zasada korespondencji Bohra)

Konsekwencją tych postulatów jest kwantyzacja momentu pędu: $L = n\hbar$

5.1.2. Wyprowadzenie wzorów

- Promienie orbit

Siła dośrodkowa potrzebna do poruszania elektronu po orbicie kołowej jest siłą Coulomba:

$$F = \frac{kZe^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Rozwiązując to równanie ze względu na v :

$$v = \left(\frac{kZe^2}{mr} \right)^{1/2}$$

Na podstawie kwantyzacji momentu pędu Bohra:

$$L = mvr = \frac{n\hbar}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Wyliczając z tego równania r , a następnie podstawiając wcześniej wyznaczone v :

$$r = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{n\hbar}{m} \left(\frac{rm}{kZe^2} \right)^{1/2}$$

Podnosząc r do kwadratu i skracając otrzymujemy, że:

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{mkZe^2} = \frac{n^2 a_0}{Z}$$

stąd promień równy jest:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 0.529 \text{ \AA} = 0.0529 \text{ nm}$$

- Poziomy energetyczne

Całkowita energia elektronu to suma energii kinetycznej i potencjalnej

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{kZe^2}{r} \right)$$

Jako, że siłę dośrodkową stanowi siła Coulomba:

$$\frac{1}{2}mv^2 = kZe^2/2r$$

więc całkowita energia:

$$E = \frac{kZe^2}{2r} - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{kZe^2}{2r}$$

Podstawiając obliczone r_n otrzymamy, że:

$$E_n = -\frac{kZe^2}{2r_n} = -\frac{kZe^2}{2} \left(\frac{mkZe^2}{n^2 \hbar^2} \right)$$

$$E_n = -\frac{mk^2 Z^2 e^4}{2\hbar^2 n^2} = -E_0 \frac{Z^2}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

5.2. Zakaz Pauliego

Zagadnienie

Zakaz Pauliego

Zakaz Pauliego dotyczy sytuacji w której rozważamy więcej niż jeden elektron poruszający się w polu potencjalnym. Przykładowo rozważając ponownie problem nieskończonej studni potencjału, ale tym razem umieszczając tam dwie nierozróżnialne cząstki nie oddziałujące ze sobą. Równanie Schrodingera dla dwóch cząstek ma postać:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + V\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2)$$

Jako, że rozważamy cząstki, które nie oddziałują ze sobą, możemy zapisać funkcję falową jako iloczyn funkcji 1-cząstkowych, gdzie jedna z cząstek jest w stanie m , a druga n .

Prawdopodobieństwo znalezienia się cząstki w danym położeniu jest równe iloczynowi prawdopodobieństw dla każdej z cząstek. Ale jako, że cząstki są identyczne nie możemy rozróżnić, która się gdzie znajduje więc konieczne jest skonstruowanie funkcji prawdopodobieństwa, która spełniać będzie warunek:

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2$$

Warunek ten zachodzi, gdy funkcja falowa jest symetryczna lub antysymetryczna, czyli gdy:

$$\begin{aligned}\psi(x_2, x_1) &= +\psi(x_1, x_2) && \text{symmetric} \\ \psi(x_2, x_1) &= -\psi(x_1, x_2) && \text{antisymmetric}\end{aligned}$$

Aby funkcja falowa dwóch cząstek mogła być symetryczna lub antysymetryczna konieczne jest stworzenie kombinacji liniowej:

$$\begin{aligned}\psi_S &= C[\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) + \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)] && \text{symmetric} \\ \psi_A &= C[\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) - \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)] && \text{antisymmetric}\end{aligned}$$

Stąd wynika, że mamy w przyrodzie dwa rodzaje cząstek:

- bozony - opisane funkcją symetryczną
- fermiony - opisane funkcją antysymetryczną

Jak łatwo zauważyć dla fermionów funkcja się zeruje gdy $m = n$, stąd wynika zakaz Pauliego, który mówi, że w danym stanie kwantowym, dla fermionów, może znajdować się tylko jedna cząstka.

Czyli wracając do przykładu ze studnią, cząstki muszą mieć różne m i n .

To, czy cząstka jest bozonem, czy fermionem, związane jest z jej spinem:

cząstki o spinie całkowitym to bozony (foton, cząstka α) cząstki o spinie połówkowym to fermiony (elektron, proton, neutron)

5.3. Wiązania jonowe i kowalencyjne

Zagadnienie

Wiązania jonowe i kowalencyjne