

Pierwsza metoda Lapunowa		
Dominik Wróbel	27 III 2018	Wt 09:30

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zastosowanie pierwszej metody Lapunowa do badania systemów nieliniowych. Zostaną zbadane trzy różne nieliniowe systemy dynamiczne :

- Układ mechaniczny z masą i nieliniową sprężyną,
- Wahadło tłumione,
- Układ równań Van der Pola

Zastosowanie pierwszej metody Lapunowa pozwoli na wnioskowanie o stabilności punktów równowagi x^* tych systemów. Zostaną również przedstawione portrety fazowe systemów nieliniowych oraz ich liniowych przybliżeń.

2. Przebieg ćwiczenia

2.1. Układ mechaniczny z masą i nieliniową sprężyną

Układ mechaniczny z nieliniową sprężyną jest opisany równaniem różniczkowym drugiego rzędu postaci:

$$\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) + dy^3(t) = 0$$

W równaniu tym zmienna y oraz współczynniki b, c i d oznaczają :

- y - odchylenie drgającej masy od położenia równowagi,
- b - tarcie występujące w układzie,
- c, d - własności sprężyny o nieliniowej charakterystyce

Aby równanie opisywało rzeczywisty układ należy przyjąć dodatkowo założenia :

$$b, c > 0, \quad |c| < |d|$$

Równanie tego układu zapisane przy użyciu modelu równania stanu:

$$\begin{aligned} x_1 &= y, & x_2 &= \dot{y} \\ x_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= -bx_2 - cx_1 - dx_1^3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c - dx_1^2 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Macierz Jacobiego :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c - 3dx_1^2 & -b \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie punktów równowagi:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -bx_2 - cx_1 - dx_1^3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \vee x_1^2 = \frac{-c}{d} \end{cases}$$

Jeżeli $x_1^2 = \frac{-c}{d}$, a wiadomo, że $c > 0$, to implikuje, że $d < 0$, a zatem punkty równowagi wynikające z tego równania będą rozważane tylko dla sprężyny miękkiej.

2.1.1. Układ mechaniczny - sprężyna twarda $d > 0$

Dla $d > 0$ istnieje tylko jeden punkt równowagi $x^* = (0, 0)$. Macierz stanu A liniowego przybliżenia po podstawieniu wartości x^* :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + b\lambda + c$$

Powyższe równanie opisuje system drugiego rzędu, aby punkt równowagi był asymptotycznie stabilny części rzeczywiste wszystkich wartości pierwiastków tego równania muszą być ujemne. Dla systemu drugiego rzędu warunek ten jest spełniony, jeśli wszystkie współczynniki równania charakterystycznego są dodatnie. Z założenia wiemy, że b oraz c są większe od zera, a zatem warunek ten jest spełniony i punkt $(0,0)$ jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi systemu nieliniowego. Pierwiastki równania charakterystycznego to :

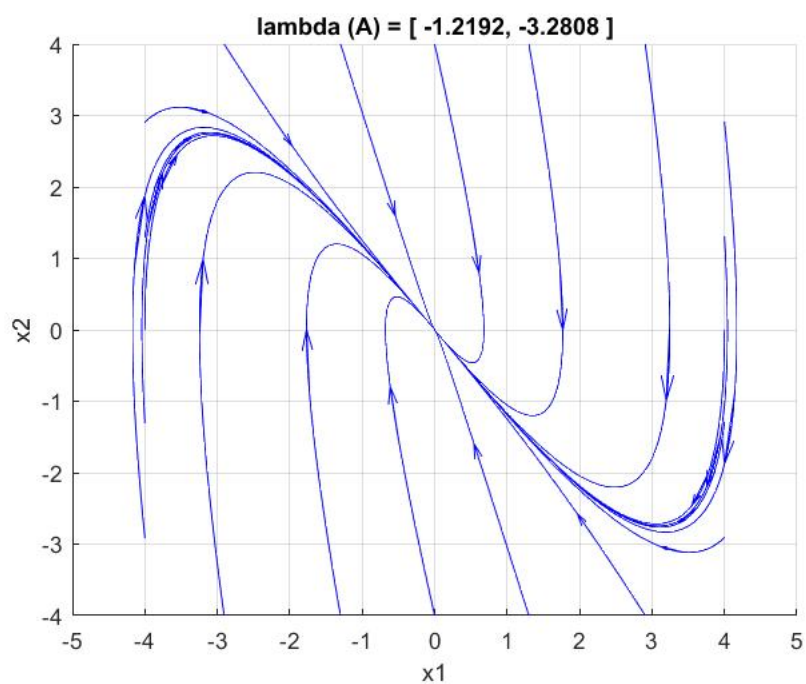
$$\lambda_1 = \frac{-b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

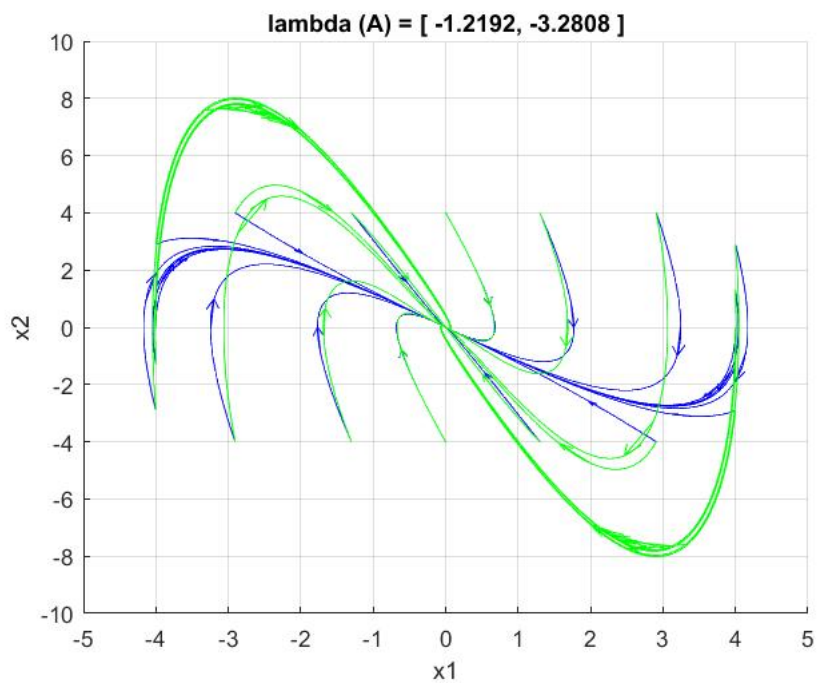
Przy założeniu dodatniości współczynników b oraz c równanie to może mieć :

- Dwa pierwiastki rzeczywiste ujemne dla $b \geq 2\sqrt{c}$
- Dwa pierwiastki zespolone sprzężone dla $0 < b < 2\sqrt{c}$

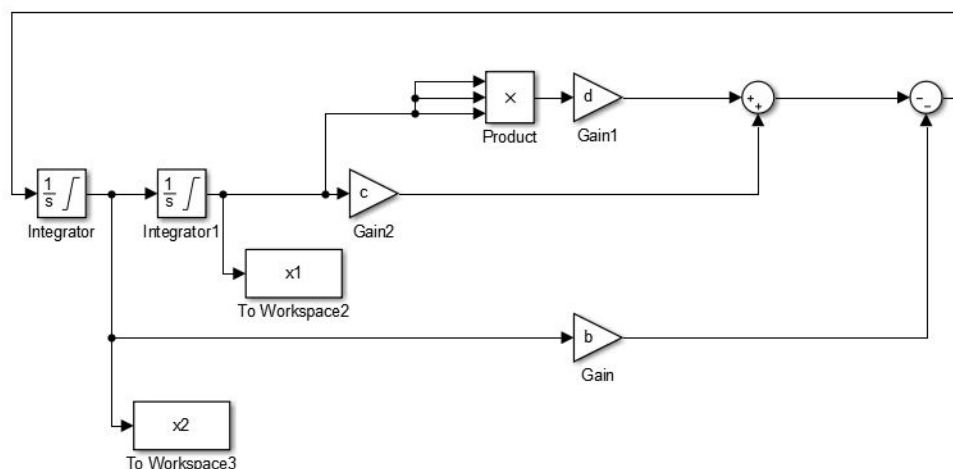
Dla obu tych przypadków dla systemu liniowego oraz nieliniowego narysowano portrety fazowe. Dla parametrów $b = 4.5$, $c = 4$, $d = 1$ (dwa pierwiastki rzeczywiste) portret fazowy systemu liniowego przedstawia Rysunek 1, a porównanie portretów systemów liniowego i nieliniowego Rysunek 2. Uzyskany portret to węzeł stabilny.



Rysunek 1: Portret fazowy systemu po linearyzacji



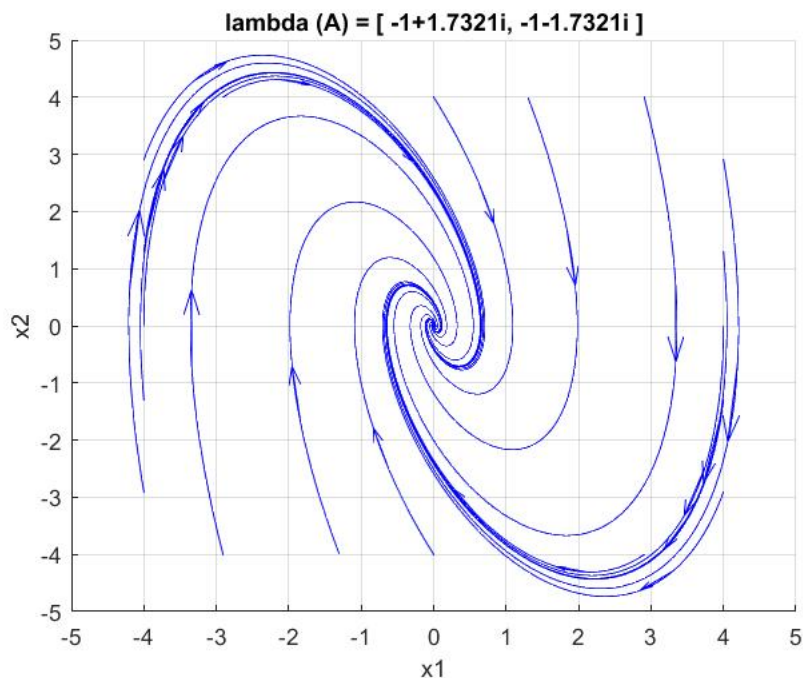
Rysunek 2: Porównanie portretu fazowego systemu liniowego i nieliniowego (kolor zielony)



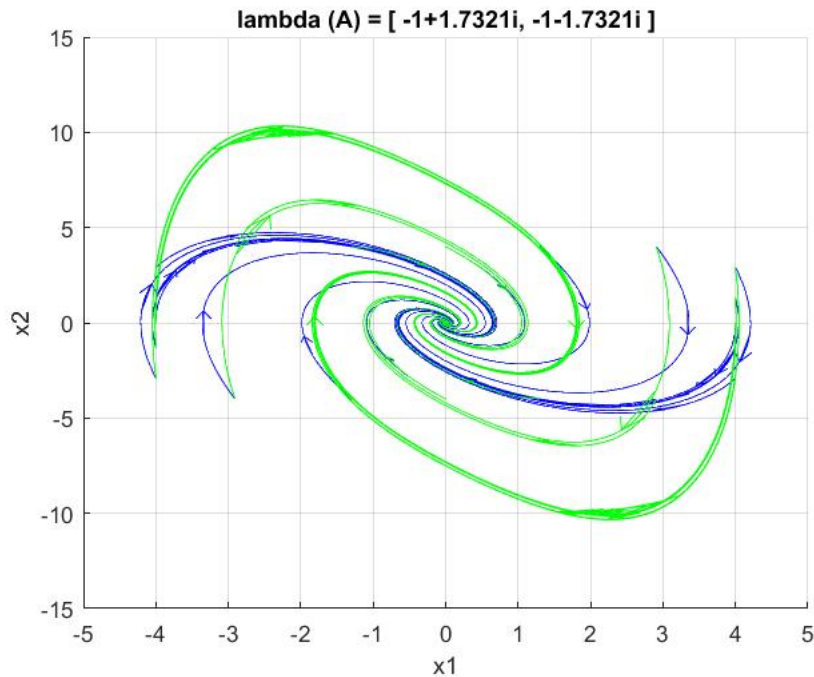
Rysunek 3: Model równania nieliniowego systemu dynamicznego sprężyny i masy.

W celu analizy zachowania modelu nieliniowego zbudowano model w przyborniku Simulink, który przedstawia Rysunek 3.

Dla parametrów $b = 2$, $c = 4$, $d = 1$ (dwa pierwiastki zespolone sprzężone) portret fazowy systemu liniowego przedstawia Rysunek 4, a porównanie portretów systemów liniowego i nieliniowego Rysunek 5. Uzyskany portret to ognisko stabilne.



Rysunek 4: Portret fazowy systemu po linearyzacji



Rysunek 5: Porównanie portretu fazowego systemu liniowego i nieliniowego (kolor zielony)

W obu przypadkach wszystkie badane punkty początkowe należą do obszaru atrakcji. Badanie doświadczalne pozwala przypuszczać, że obszarem atrakcji jest cały zbiór R^2 .

2.1.2. Układ mechaniczny - sprężyna miękka $d < 0$

Dla $d < 0$ istnieją dwa punkty równowagi, które spełniają równania $x^* = (0, 0)$ lub $x_2 = 0$ i $x_1^2 = \frac{-c}{d}$. W drugim przypadku macierz A ma postać :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2c & -b \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne:

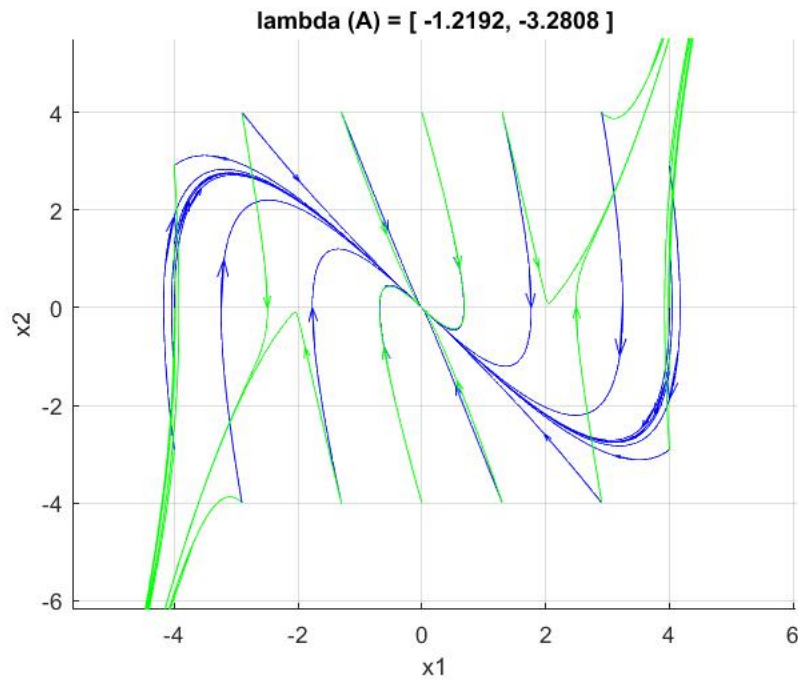
$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + b\lambda - 2c$$

Z postaci tego równania wynika, że punkt ten nie jest asymptotycznie stabilny, ponieważ jeden ze współczynników jest ujemny więc nie jest spełniony warunek konieczny stabilności asymptotycznej punktu równowagi. Stabilnym punktem równowagi jest $x^* = (0, 0)$. Do analizy pozostaje więc przypadek gdy dla $d < 0$ punkt równowagi jest równy $x^* = (0, 0)$.

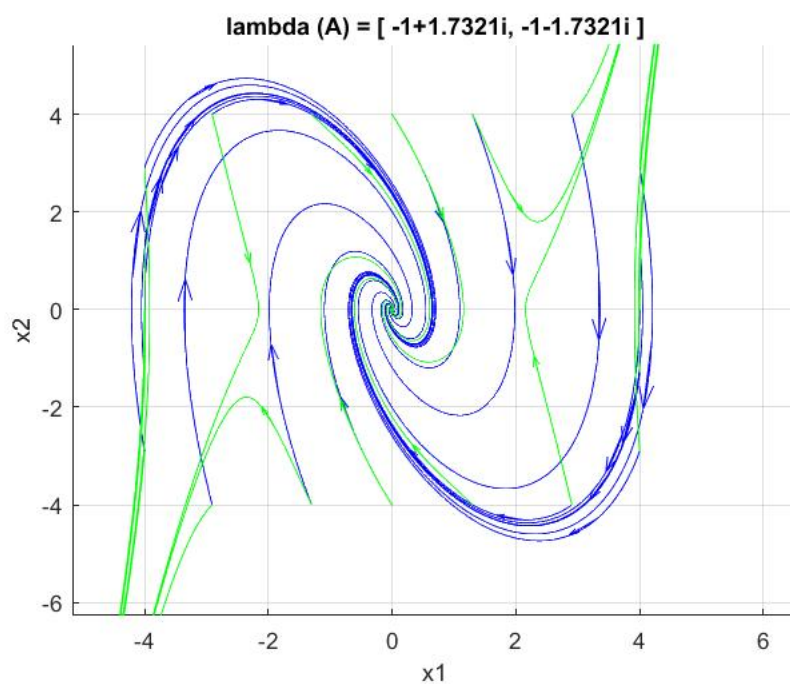
Warto zauważyć, że zmiana współczynnika d na ujemny nie ma wpływu na zachowanie modelu liniowego. Dlatego w tym punkcie prezentowane są tylko porównania modelu liniowego i nieliniowego dla parametrów takich jak analizowane dla sprężyny twardej. Dla parametrów

$b = 4.5$, $c = 4$, $d = -1$ porównanie portretów przedstawia Rysunek 6 , a dla parametrów $b = 2$, $c = 4$, $d = -1$ (dwa pierwiastki zespolone sprzężone) porównanie portretów przedstawia Rysunek 7.

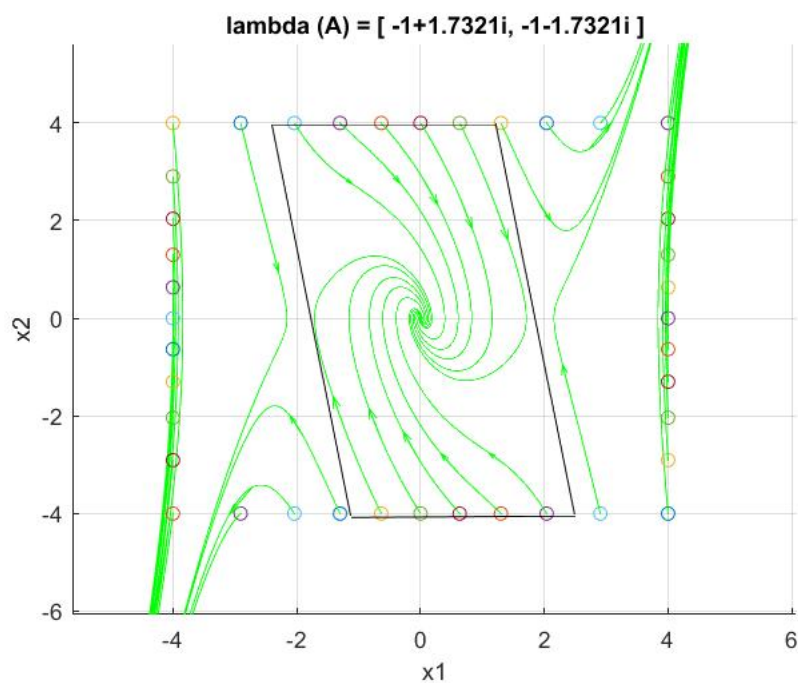
Widać, że w obu przypadkach obszar przyciągania nie jest całą przestrzenią R^2 . Podjęto próbę wyznaczenia obszaru przyciągania oraz trajektorii separujących. Przybliżone obszary przyciągania przedstawiają Rysunki 8 oraz 9.



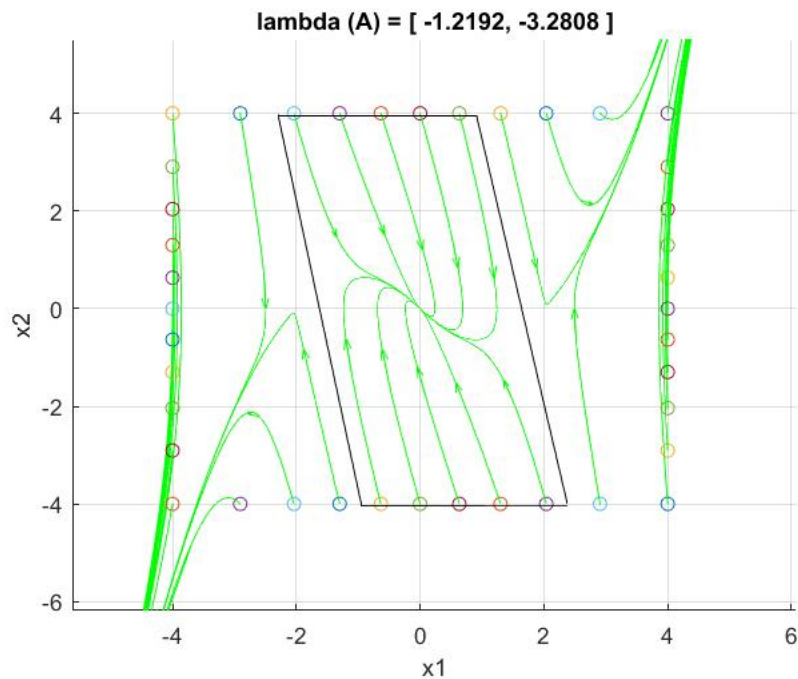
Rysunek 6: Portret fazowy systemu po linearyzacji



Rysunek 7: Porównanie portretu fazowego systemu liniowego i nieliniowego (kolor zielony)



Rysunek 8: Doświadczalnie wyznaczony obszar przyciągania



Rysunek 9: Doświadczalnie wyznaczony obszar przyciągania

2.2. Wahadło tłumione

Model wahadła tłumionego jest opisany równaniem różniczkowym drugiego rzędu postaci:

$$\ddot{y}(t) + \frac{g}{l} \sin y(t) + \frac{c}{lm} \dot{y}(t) = 0$$

W równaniu tym zmienna y oraz współczynniki g , l , m i c oznaczają :

- y - kąt wychYLENIA wahadła z położenia równowagi,
- m - masa wahadła,
- l - długość wahadła,
- g - współczynnik przyspieszenia ziemskiego
- c - współczynnik tłumienia

Aby równanie opisywało rzeczywisty układ należy przyjąć dodatkowo założenia :

$$m, l, g, c > 0$$

Równanie tego układu zapisane przy użyciu modelu równania stanu:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{c}{lm} x_2$$

Macierz Jacobiego :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{c}{lm} \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie punktów równowagi:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{c}{lm} x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Wielomian charakterystyczny dla dowolnego punktu równowagi:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{c}{lm} \lambda + \frac{g}{l} \cos x_1$$

Aby punkty równowagi były asymptotycznie stabilne wielomian musi mieć wszystkie współczynniki nieujemne, co będzie zachodzić gdy $\cos x_1 \neq -1$. Zatem punktami równowagi są:

$$x^* = \begin{cases} (2k\pi + \pi, 0), & k \in \mathbb{Z}, \text{ niestabilny} \\ (2k\pi, 0), & k \in \mathbb{Z}, \text{ stabilny asymptotycznie} \end{cases}$$

Dalej rozważamy tylko punkty równowagi stabilne asymptotycznie. Jako, że punkt równowagi jest okresowy, to rozważany jest tylko jeden punkt $(0,0)$. Podstawiając $\frac{g}{l} = b$ oraz $\frac{c}{lm} = a$ otrzymamy, że równanie ma postać:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

gdzie $b > 0$ oraz $a \geq 0$. Pierwiastki to:

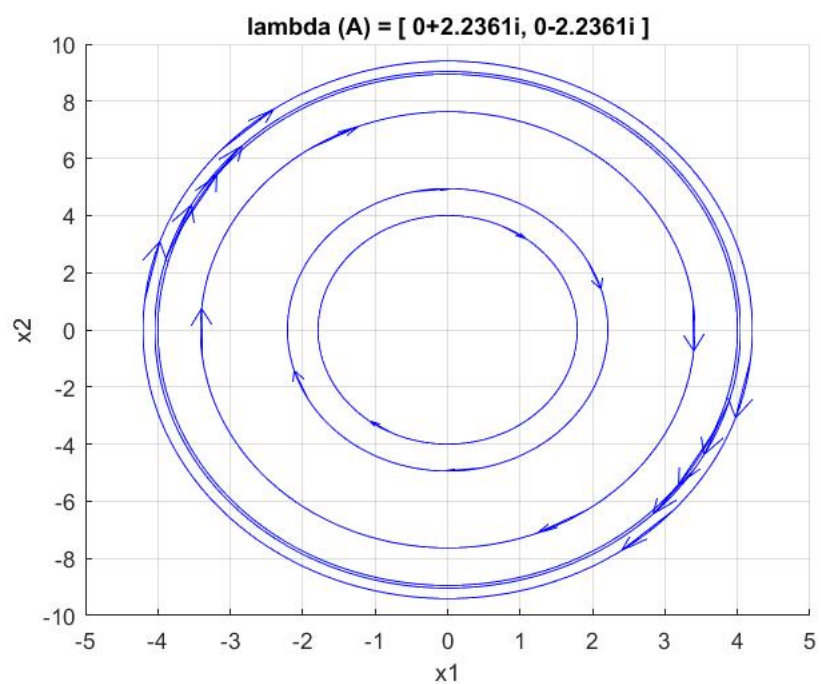
$$\lambda_1 = \frac{-a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

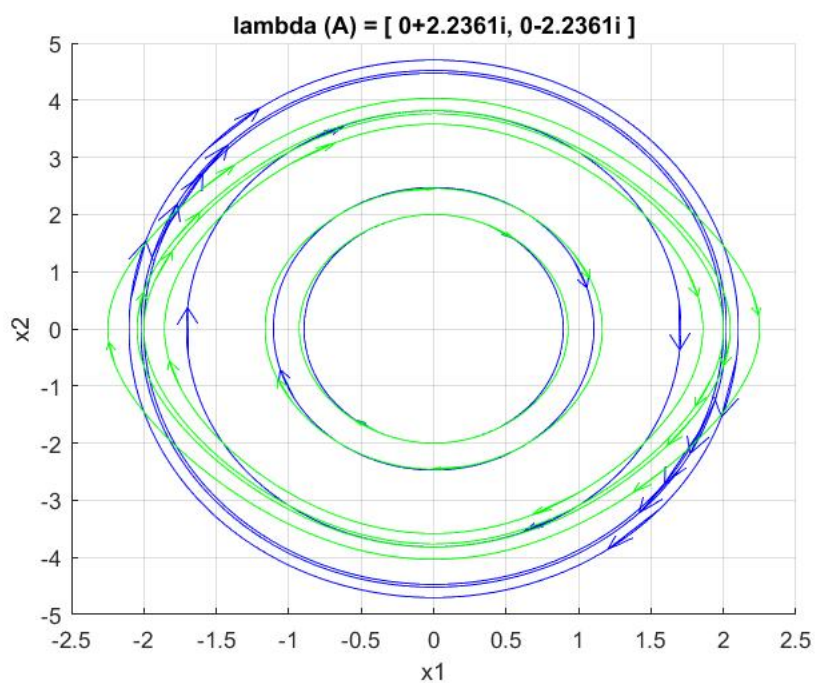
Przy ograniczeniach na a oraz b równanie charakterystyczne może mieć :

- Dwa pierwiastki urojone sprzężone dla $a = 0$,
- Dwa pierwiastki zespolone sprzężone o ujemnych częściach rzeczywistych dla $0 < a < 2\sqrt{b}$,
- Dwa pierwiastki rzeczywiste ujemne dla $a > 2\sqrt{b}$

Dla parametrów $b = 5$, $a = 0$ (dwa pierwiastki urojone sprzężone) portret fazowy systemu liniowego przedstawia Rysunek 10, a porównanie portretów systemów liniowego i nieliniowego Rysunek 11. Uzyskany portret to środek. W tym przypadku nie wiadomo czy system nieliniowy jest stabilny.

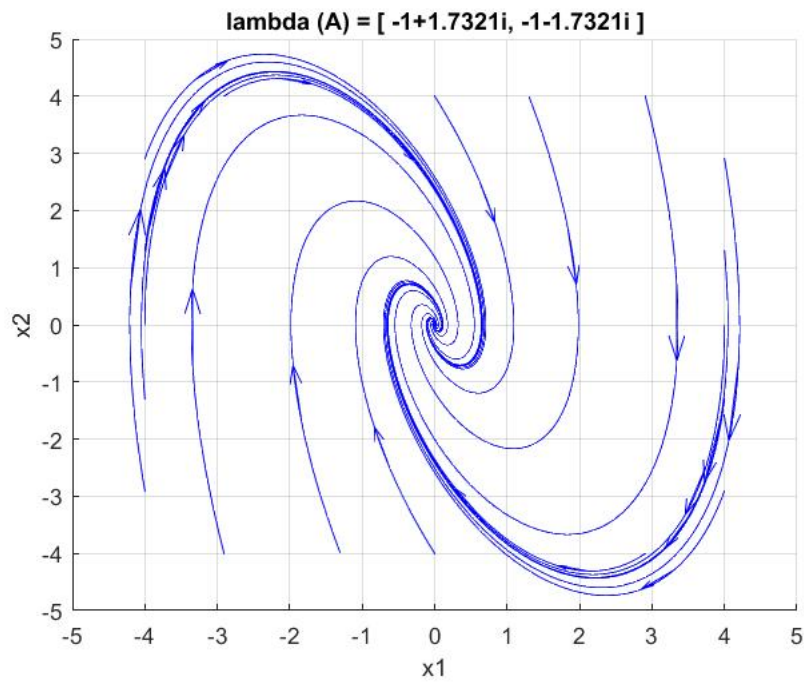


Rysunek 10: Portret fazowy systemu po linearyzacji

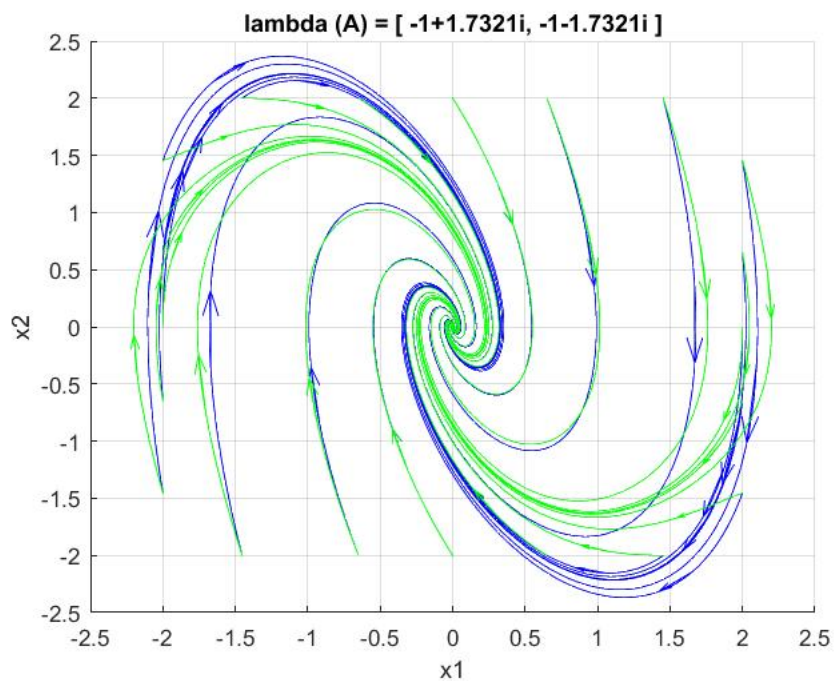


Rysunek 11: Porównanie portretu fazowego systemu liniowego i nieliniowego (kolor zielony)

Dla parametrów $b = 4$, $a = 2$ (dwa pierwiastki zespolone sprzężone) portret fazowy systemu liniowego przedstawia Rysunek 12, a porównanie portretów systemów liniowego i nieliniowego Rysunek 13. Uzyskany portret to ognisko.

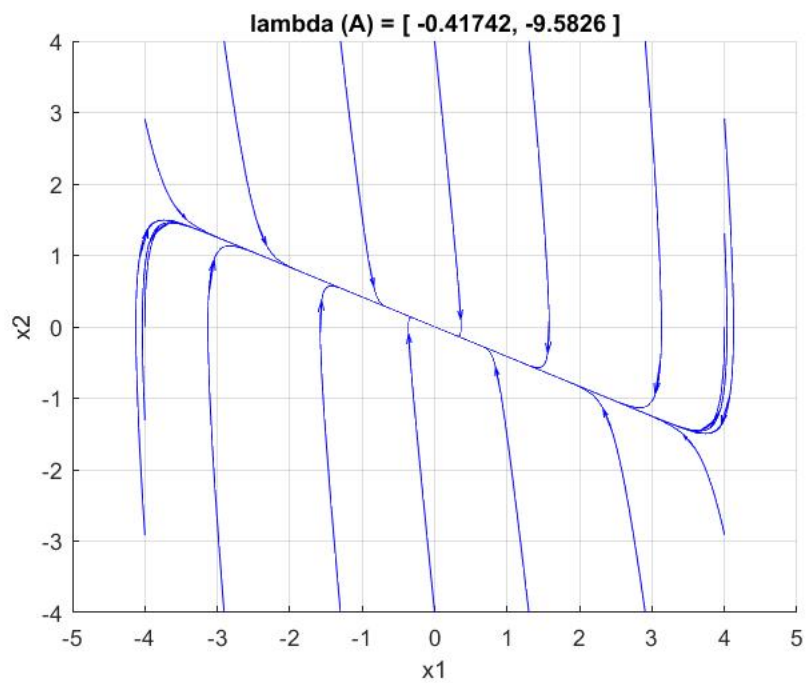


Rysunek 12: Portret fazowy systemu po linearyzacji

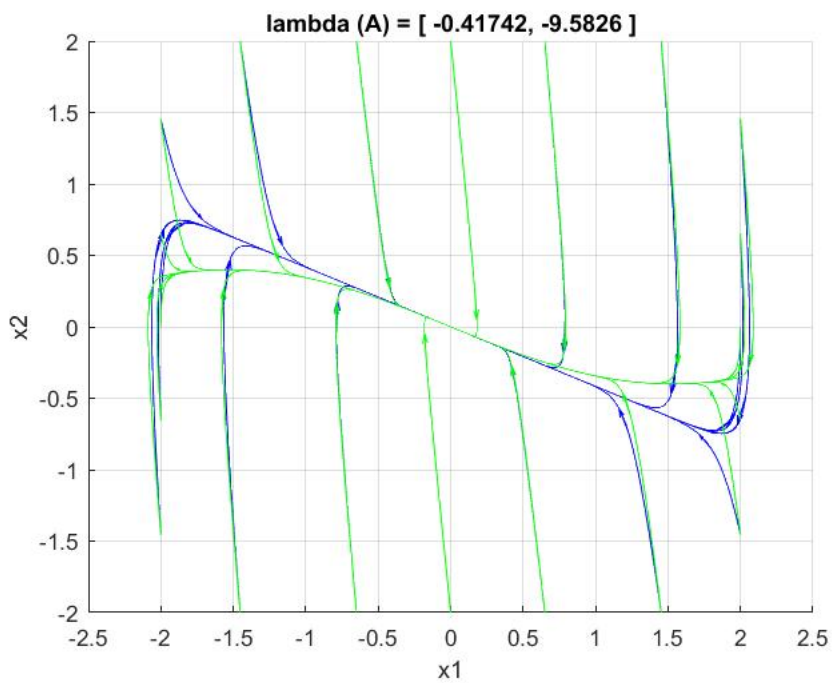


Rysunek 13: Porównanie portretu fazowego systemu liniowego i nieliniowego (kolor zielony)

Dla parametrów $b = 4$, $a = 10$ (dwa pierwiastki rzeczywiste ujemne) portret fazowy systemu liniowego przedstawia Rysunek 14, a porównanie portretów systemów liniowego i nieliniowego Rysunek 15. Uzyskany portret to węzeł.

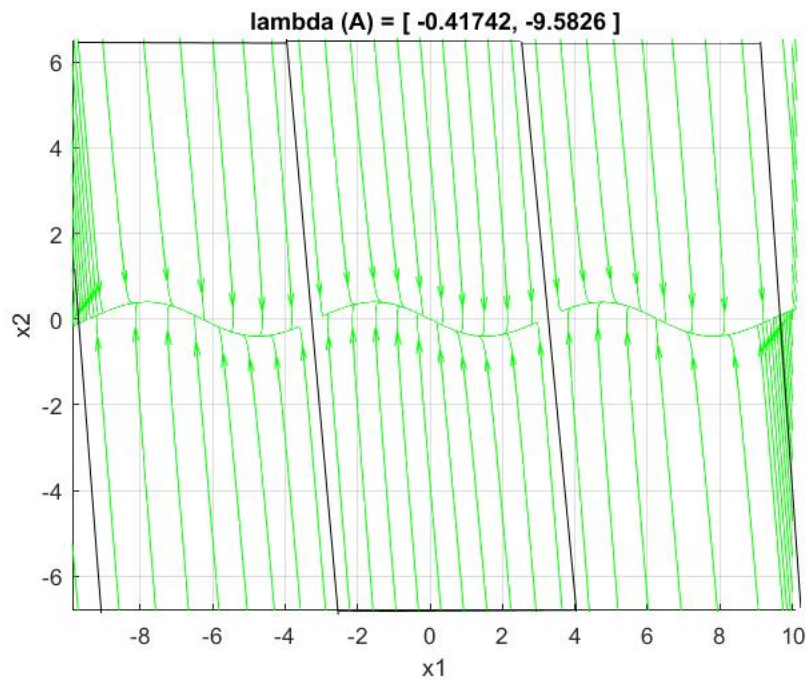


Rysunek 14: Portret fazowy systemu po linearyzacji

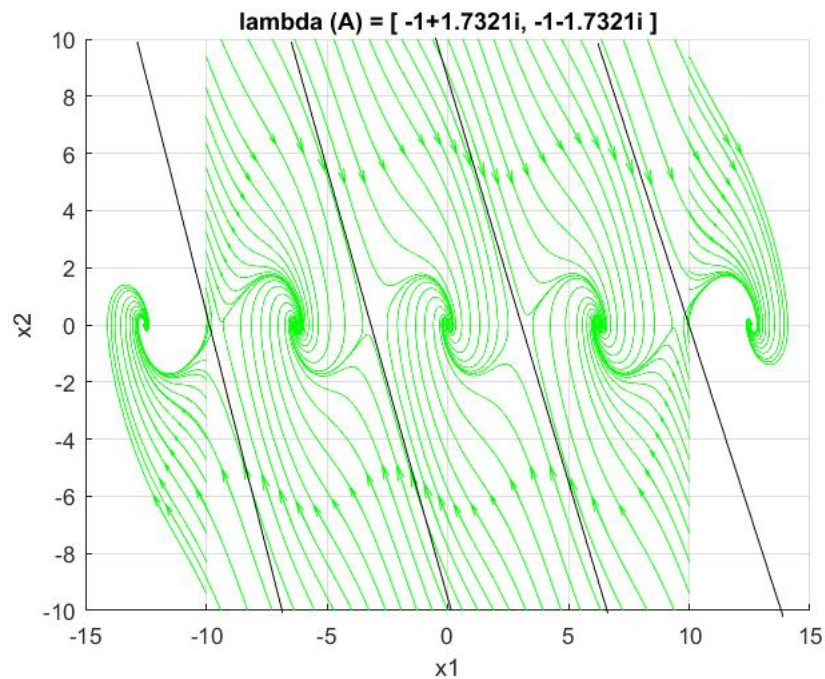


Rysunek 15: Porównanie portretu fazowego systemu liniowego i nieliniowego (kolor zielony)

Obszary przyciągania dla tych przypadków przedstawiają Rysunki 16 i 17.



Rysunek 16: Obszary przyciągania wyznaczone doświadczalnie



Rysunek 17: Obszary przyciągania wyznaczone doświadczalnie)

2.3. Układ Van der Pola

Układ Van der Pola to układ dwóch równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1^3(t) - ax_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

Macierz Jacobiego :

$$J = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie punktów równowagi:

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ x_2 - x_1^3 - ax_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Wielomian charakterystyczny dla punktu równowagi (0, 0):

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + a\lambda + 1$$

Aby punkty równowagi były asymptotycznie stabilne wielomian musi mieć wszystkie współczynniki nieujemne, co będzie zachodzić gdy $a \geq 0$, wtedy punkt równowagi (0, 0) jest punktem stabilnym asymptotycznie. Pierwiastki to:

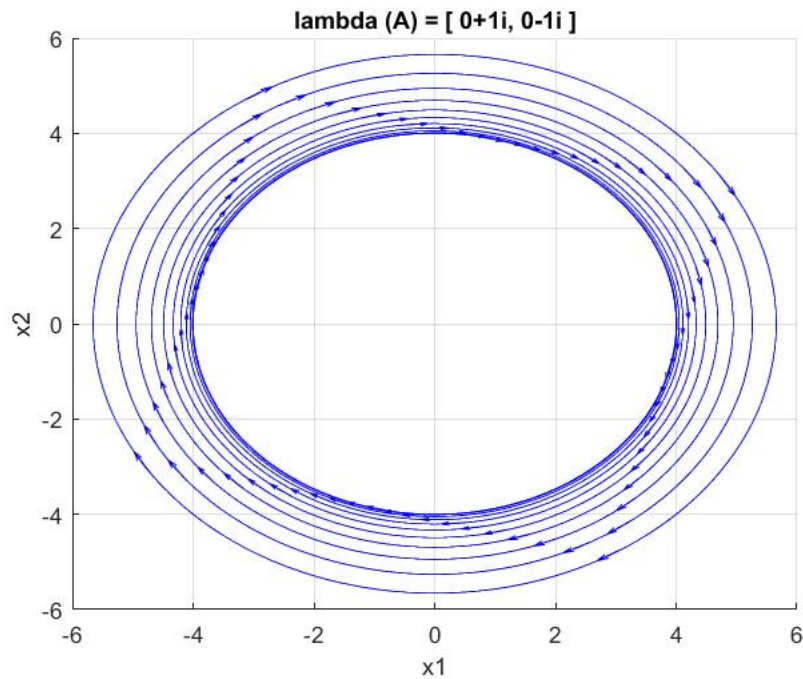
$$\lambda_1 = \frac{-a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

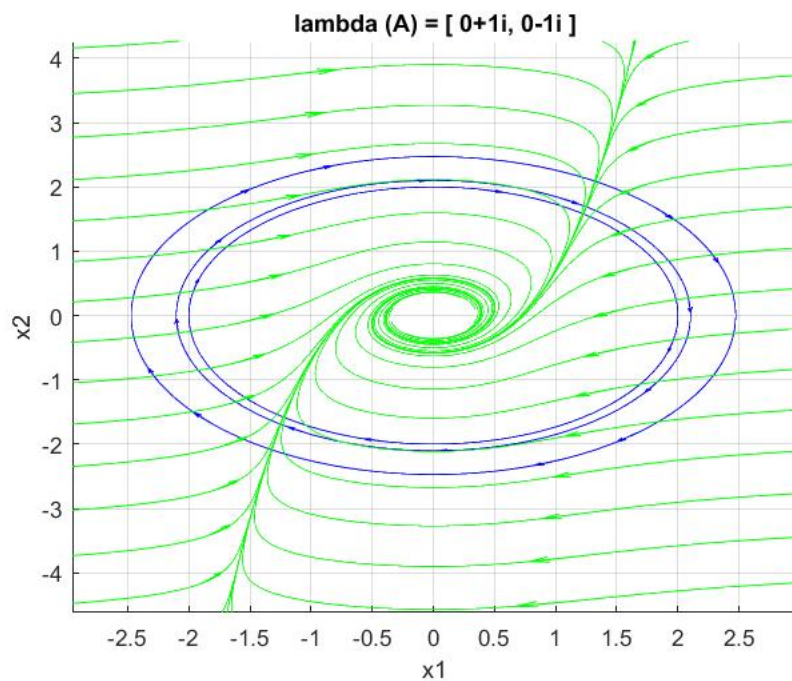
Przy ograniczeniu $a \geq 0$ równanie charakterystyczne może mieć :

- Dwa pierwiastki urojone sprzężone dla $a = 0$,
- Dwa pierwiastki zespolone sprzężone o ujemnych częściach rzeczywistych dla $0 < a < 2$,
- Dwa pierwiastki rzeczywiste ujemne dla $a > 2$

Dla parametru $a = 0$ (dwa pierwiastki urojone sprzężone) portret fazowy systemu liniowego przedstawia Rysunek 18, a porównanie portretów systemów liniowego i nieliniowego Rysunek 19. Uzyskany portret to środek. W tym przypadku nie wiadomo czy system nieliniowy jest stabilny czy nie.

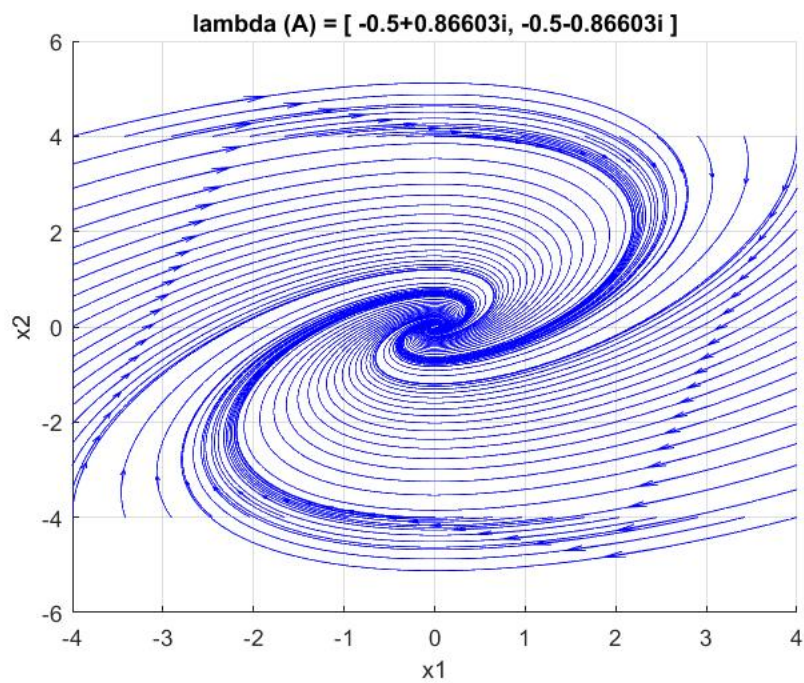


Rysunek 18: Portret fazowy systemu po linearyzacji

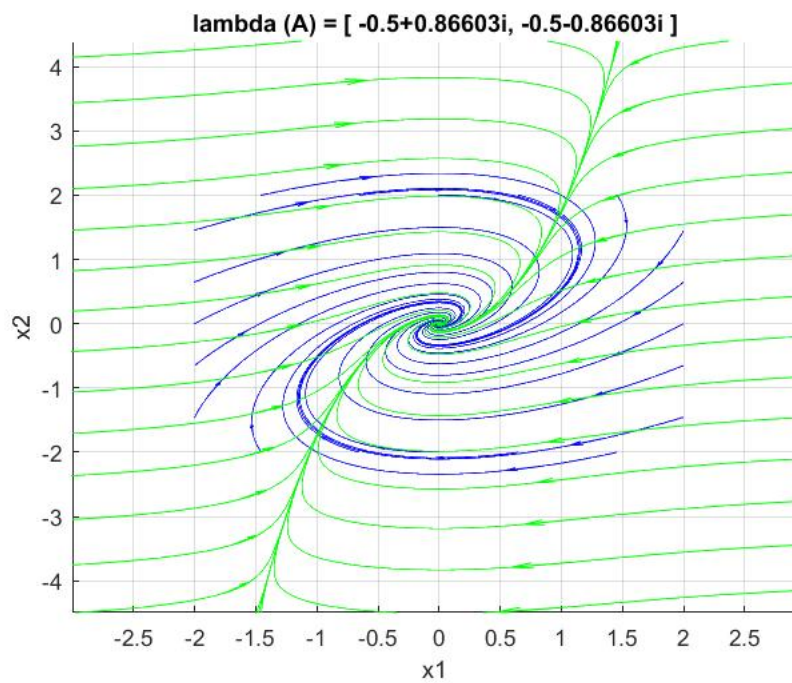


Rysunek 19: Porównanie portretu fazowego systemu liniowego i nieliniowego (kolor zielony)

Dla parametru $a = 1$ (dwa pierwiastki zespolone sprzężone) portret fazowy systemu liniowego przedstawia Rysunek 20, a porównanie portretów systemów liniowego i nieliniowego Rysunek 21. Uzyskany portret to ognisko.

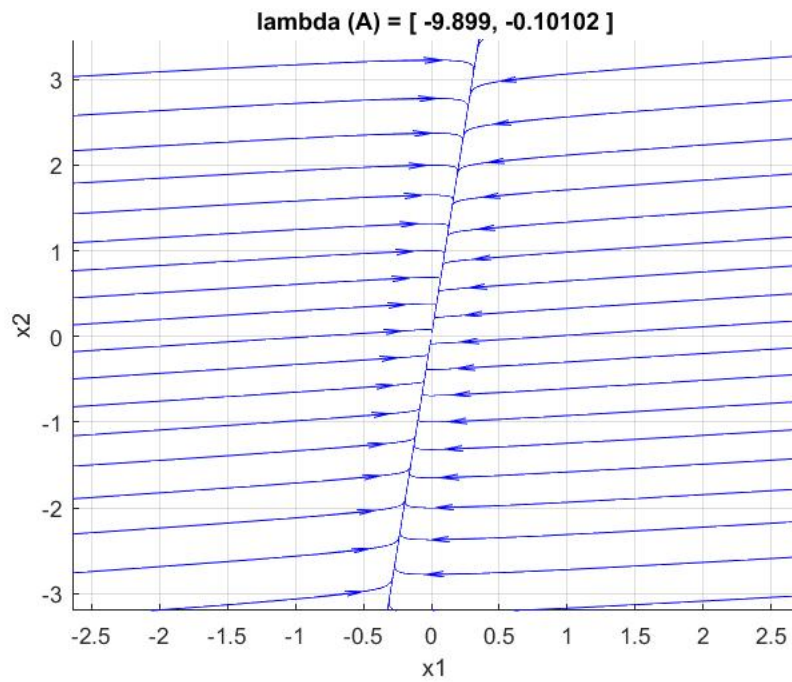


Rysunek 20: Portret fazowy systemu po linearyzacji

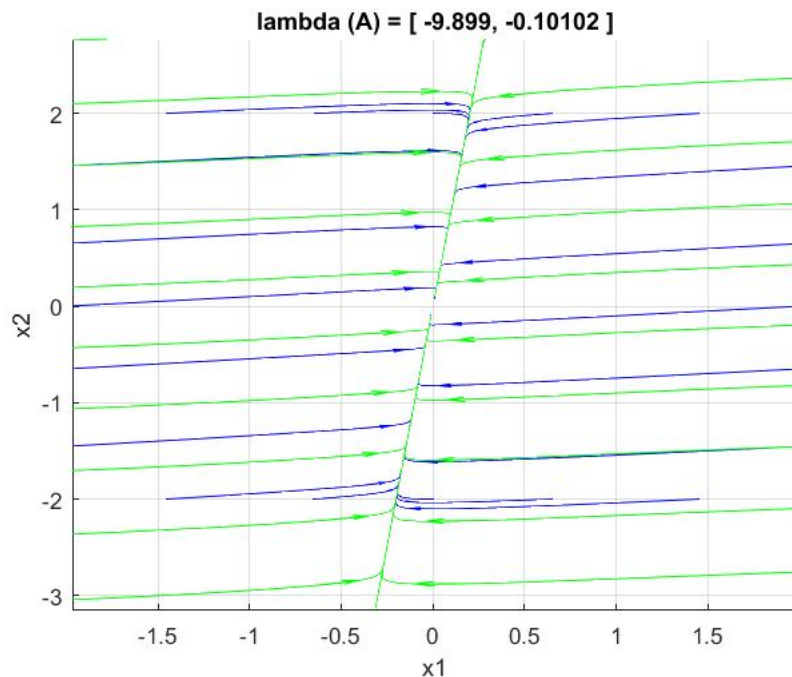


Rysunek 21: Porównanie portretu fazowego systemu liniowego i nieliniowego (kolor zielony)

Dla parametru $a = 10$ (dwa pierwiastki rzeczywiste ujemne) portret fazowy systemu liniowego przedstawia Rysunek 22, a porównanie portretów systemów liniowego i nieliniowego Rysunek 23. Uzyskany portret to węzeł.



Rysunek 22: Portret fazowy systemu po linearyzacji



Rysunek 23: Porównanie portretu fazowego systemu liniowego i nieliniowego (kolor zielony)

3. Wnioski końcowe

Linearyzacja przy pomocy pierwszej metody Lapunowa pozwala na dokładne przybliżenie zachowania układu nieliniowego w okolicy stabilnego punktu równowagi. Przybliżenie to jest tym lepsze im bliżej punktu równowagi znajdują się trajektorie systemu.

Pierwsza metoda Lapunowa pozwala na określenie stabilności punktów równowagi systemu nieliniowego na podstawie analizy tego systemu po linearyzacji. Nie zawsze jest to jednak możliwe - przypadek gdy części rzeczywiste pierwiastków wielomianu charakterystycznego są równe 0. Narysowane portrety fazowe pozwalają na zauważenie różnic pomiędzy rzutami trajektorii na płaszczyznę stanu, widoczne jest, że im bliżej punktu równowagi tym różnice te są mniejsze.

W rzeczywistych układach gdy system dynamiczny pracuje tylko w niewielkim zakresie odchyłek od punktów równowagi można zamiast systemu nieliniowego analizować system liniowy.

Obszar przyciągania nie zawsze jest całą przestrzenią stanu. Dla wielu punktów równowagi każdy z nich może mieć własny obszar przyciągania będący podzbiorem przestrzeni stanu.