Spis treści

1. Lista opracowanych tematów

1. Wypukłość, wklęsłość, twierdzenie o punktach optymalnych
2. Poszukiwanie ekstremum na kierunku
3. Metoda Lagrange'a + regularność punktów
4. Kierunki sprzężone - ogólnie
5. Kierunki sprzężone - Metoda gradientów sprzężonych
6. Metoda Newtona-Rapsona
7. Wewnętrzna funkcja kary
8. Dualność
9. Kierunki poprawy
10. Kuhn - Tucker
11. Programowanie liniowe
12. **Do zrobienia**:
13. Kierunki sprzężone - Metoda Powella

2. Wypukłość, wklęsłość, warunki optymalności

2.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Definicja wypukłości
2. Definicja ścisłej wypukłości
3. Definicja wklęsłości
4. Funkcja wklęsła, a wypukła (zależność)
5. Wypukłość - liniowa kombinacja
6. Wypukłość - funkcja złożona
7. Czym jest hesjan ?
8. Dodatnia i ściśle dodatnia określoność macierzy - jak stwierdzić ?
9. Ujemna i ściśle ujemna określoność macierzy - jak stwierdzić ?
10. Określoność hesjanu, a wypukłość.
11. Twierdzenie Fermata, część I = WK optymalności rozwiązania
12. WD istnienia minimum
13. Kiedy punkt jest minimum, maksimum, punktem siodłowym ?
14. Kiedy minimum lokalne jest globalne ? Kiedy ekstremum jest globalne ?
15. Kiedy zadanie optymalizacji jest wypukłe ?

2.2. Ćwiczenia

Zadanie 1 - Notatki z ćwiczeń od Gregi
Udowodnić, że jeśli $F(x)$ jest liniowa, a $G(x)$ jest wypukła to $H(x) = G(F(x))$ jest wypukła.

Zadanie 2 - Notatki z ćwiczeń od Gregi
Dowieść, że jeśli $F(x)$ i $G(x)$ są wypukłe, to stwierdzenie, że $H(x) = G(F(x))$ jest wklęsła jest nie zawsze prawdziwe.

Zadanie 3 - Notatki z ćwiczeń od Gregi
Udowodnić, że jeśli $F_i(x) : R^N \to R$ jest wypukła oraz $\forall i \; c_i \geq 0$, to $F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(x)$ jest także funkcją wypukłą.

Zadanie 4 - Notatki z ćwiczeń od Gregi
Udowodnić, że funkcja $e^{x_1^2+x_2^2} + e^{x_1+x_2}$ jest wypukła.

Zadanie 5 - Notatki z ćwiczeń od Gregi
Wyznaczyć gradient i hesjan funkcji $F(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2$. Przyjąć punkt początkowy $x_0 = [x_{01}\ x_{02}]$.

Zadanie 6 - Notatki z ćwiczeń od Gregi
Czy funkcja $F(x) = 12x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$ osiąga maksimum dla pewnego x_1 , x_2, gdzie $x_1,\ x_2 \geq 0$.

Zadanie 7 - Notatki z ćwiczeń od Gregi
Wykazać ścisłą wklęsłość funkcji $F(x, y) = x + y(-e^x)(-e^{x+y})$.

2.3. Egzamin

Zadanie 8 - Egzamin +
Znaleźć obszar wypukłości funkcji $F(x) = \frac{1}{x_1} + 2x_2$.

Zadanie 9 - Egzamin +
Czy funkcja $F(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ jest
a) wypukła, b) wklęsła c) wypukła na podzbiorach (jakich ?).

Zadanie 10 - Egzamin +
Czy rozwiązanie zadanie min $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}$ na zbiorze $X_0 = \{x : Ax \leq b,\ b \geq 0,\ x_i \geq 0\}$ jest globalne ?

Zadanie 11 - Egzamin +
Czy zadanie min$\{(x-5)^2 + (y-1)^2 + xy\}$, przy ograniczeniach $x + y \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ jest wypukłym zadaniem optymalizacji w R^2? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 12 - Egzamin +

Dla zadania min$\{2x_1^3 + -3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 2)\}$, gdzie $(x_1, x_2) \in R^2$:

a) Znaleźć punkty spełniające warunki konieczne optymalności.

b) Na podstawie warunków wystarczających, określić charakter tych punktów.

3. Optymalizacja na kierunku

3.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Jak wyznaczamy minimum na określonym kierunku i przy danym punkcie początkowym ? Podaj algorytm. Czym jest krok ?

3.2. Egzamin

Zadanie 1 - Egzamin +

Obliczyć:
a) gradient
b) hesjan
c) określić wypukłość
funkcji $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2$.
d) Jakiej długości należy wykonać krok z punktu $(1, 0)$ na kierunku $d = (1, 1)$ aby osiągnąć ekstremum?

Zadanie 2 - Egzamin +

Dla zadania:
$F(x) = x_1^2 + x_1x_2 + (x_1 - x_2)^4$
wykonać dokładne poszukiwanie minimum na kierunku $d = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ z punktu $x_0 = (0, 0)^T$.

Zadanie 3 - Egzamin +

$$\min F(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^3 + cx_2$$
$$x \in R^2, \;\; c - \text{parametr}$$

Dla $c = -3$ znaleźć wszystkie wektory d, które w punkcie $x^0 = (0, 1)^T n$ są ani kierunkami wzrostu ani kierunkami spadku.

Zadanie 4 - Egzamin +

Wyznacz minimum na kierunku antygradientu z punktu x_0 dla formy kwadratowej

$$F(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5 - Egzamin +

Dla zadania

$$\min\ x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 4x_2$$

a) Znajdź punkty w R^2 spełniające WK optymalności
b) Metodą analityczną (dokładną) dokonaj jednokrotnej optymalizacji kierunkowej z punktu startowego $x = [0\ 0]^T$.

4. Metoda Lagrange'a + regularność

4.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Do jakiego problemu jest używana metoda Lagrange'a ?
2. Jak przekształcamy zadanie z ograniczeniami na zadanie bez ograniczeń ? Jaki jest WK ?
3. Jak stwierdzić na podstawie tej metody czy obliczony punkt to minimum czy maksimum ?
4. Czym jest punkt regularny w zadaniu z ograniczeniami równościowymi ?

4.2. Ćwiczenia

Zadanie 1 - Notatki z ćwiczeń od Gregi
Dana jest hiperpłaszczyzna $x+y-z=3$. Na tej płaszczyźnie znaleźć punkt najbliżej punktu środka układu współrzędnych.

4.3. Egzamin

Zadanie 2 - Egzamin +
Wykorzystując metodę mnożników Lagrange'a znaleźć punkty ekstremalne funkcji $F(x) = x_1 x_2$ na zbiorze dopuszczalnym $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Zadanie 3 - Egzamin (podpunkt b) ?)
Zadanie

$$\min x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{4} x_3^2$$
$$-x_1 + x_3 - 1 = 0$$

a) Rozwiąż metodą mnożników Lagrangea
b) Sprawdź warunki regularności w punkcie rozwiązania.

5. Kierunki sprzężone - ogólne

5.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Jaki problem jest rozpatrywany w metodach kierunków sprzężonych ?
2. Jaki jest WK dla zastosowania tych metod ?
3. Jakie znasz metody kierunków sprzężonych ?
4. Kiedy dwa kierunki są sprzężone ?
5. Kiedy dwa kierunki są sprzężone względem ściśle dodatnio określonej macierzy A ?
6. Czy ściśle dodatnio określona macierz A ma zawsze kierunki sprzężone ?
7. Ile potrzeba kroków do znalezienia minimum w metodach kierunków sprzężonych ? Podaj twierdzenie.

5.2. Egzamin

Zadanie 1 - Egzamin +

Zbadać sprzężoność podanych kierunków d w stosunku do podanej macierzy A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) $d^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $d^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Zadanie 2 - Egzamin +

Udowodnić, że jeśli u, v są wektorami własnymi macierzy A, to $< u, Av >= 0$, gdzie $A > 0$.

Zadanie 3 - Egzamin +

Dla jakiego a kierunki $d^1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad d^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ są sprzężone względem $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 4 - Egzamin +

Metoda kierunków sprzężonych zastosowana dla znalezienia minimum funkcji:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$$
$$A > 0,\ x \in R^3$$

zakończy poszukiwania w co najwyżej n krokach. Podać n i uzasadnić.

6. Kierunki sprzężone - Metoda Powella

7. Kierunki sprzężone - Metoda gradientów sprzężonych

7.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Podaj algorytm metody gradientów sprzężonych
2. Ile kroków potrzebnych jest do wykonania co najwyżej aby metoda ta znalazła minimum przy ściśle dodatnio określonej macierzy A ?

7.2. Ćwiczenia

Zadanie 1 - Notatki z ćwiczeń od Gregi
Metodą gradientów sprzężonych znaleźć minimum funkcji $F(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$.

7.3. Egzamin

Zadanie 2 - Egzamin
a) Uzupełnić krok algorytmu gradientu sprzężonego
b) Jeśli F jest formą kwadratową ściśle dodatnio określoną to w ilu krokach algorytm osiąga minimum

8. Metoda Newtona - Rapsona

8.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Podaj WKiD zbieżności metody Newtona
2. Dla formy kwadratowej, w ilu krokach jest osiągane minimum przez algorytm i jaki jest konieczny do tego warunek ?
3. Podaj algorytm metody Newtona-Rapsona
4. Jaki jest związek pomiędzy WK optymalności (Fermat), a działaniem metody dla macierzy ściśle dodatnio określonej ?

8.2. Egzamin

Zadanie 1 - Egzamin +

Wykazać, że algorytm Newtona-Rapsona zastosowany do funkcji
$F(x) = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 2)^2$ pozwoli osiągnąć jej minimum w jednym kroku.

Zadanie 2 - Egzamin +

Minimum formy kwadratowej $F(x) = x^T Ax$, gdzie $x \in \mathbb{R}^N$ będzie osiągnięte w jednym kroku przez algorytm Newtona-Rapsona pod warunkiem, że...

Zadanie 3 - Egzamin +

$minF(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^3 + cx_2$
a) dla $c = 3$ znaleźć punkty stacjonarne funkcji celu i określić charakter
b) dla $c = -1$ i $x0 = [2\ 1]^T$ wyznaczyć kierunek poszukiwań metody Newtona

9. Wewnętrzna funkcja kary

9.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Podaj postać problemu w zadaniu z wewnętrzną funkcją kary. (UWAGA: Jakie są tam ograniczenia ?)
2. Jak zamieniany jest problem wyjściowy na problem bez ograniczeń ? Jaką postać ma nowa funkcja celu ?
3. Podaj postać dwóch najczęściej wykorzystywanych funkcji kary.
4. Jak wyznaczamy rozwiązanie ? Co należy obliczyć ?

9.2. Egzamin

Zadanie 1 - Egzamin +

Rozwiązać zadanie metodą wewnętrznej funkcji kary

$$\min\{(x_1+1)^3+x_2\}$$
$$g_1(x)=x_1-1\geq 0$$
$$g_2(x)=x_2\geq 0$$

Podać postać nowej funkcji celu.

Zadanie 2 - Egzamin +

Rozwiązać zadanie metodą wewnętrznej funkcji kary

$$\min\{(x_1+1)^3+x_2\}$$
$$g_1(x)=x_1\geq 1$$
$$g_2(x)=x_2\geq 10$$

Zadanie 3 - Egzamin +

Rozwiązać zadanie przy użyciu logarytmicznej wewnętrznej funkcji kary

$$\min\{\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2\}$$
$$x_1+x_2\geq 0$$

a) wykorzystać logarytmiczną wewnętrzną funkcję kary
b) czy rozwiązanie jest globalne + uzasadnienie

10. Dualność

10.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Jaki problem jest rozważany w problemie dualności ? Jaką postać mają ograniczenia ?
2. Czym różni się ten problem od problemu KKT ?
3. Jaką postać ma funkcja Lagrange'a dla tego problemu ?
4. Czym jest punkt siodłowy ? Dlaczego jest ważny dla problemu wyjściowego ? Jak go wyznaczyć ?
5. Jak wyznaczyć funkcję dualną ?
6. Jak wyznaczyć punkt siodłowy ?
7. Czym jest odstęp dualności ?
8. Podaj treść silnego twierdzenia o dualności.

10.2. Egzamin

Zadanie 1 - Egzamin +

Co to jest odstęp dualności? Kiedy odstęp dualności jest równy zero?

Zadanie 2 - Egzamin +

Znaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych i spełniający:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \geq 1 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Zadanie rozwiązać metodą dekompozycji dualnej.

Zadanie 3 - Egzamin +

Zaleźć funkcję dualną dla zadania:

$$\begin{aligned} &\min x_1^2 + x_2^2 \\ &x_1 + x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Następnie zadanie rozwiązać metodą dekompozycji dualnej.

Zadanie 4 - Egzamin +

Obliczyć funkcję dualną i składową λ punktu siodłowego dla problemu:

$$\min\{2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2\}$$
$$-x_1 + 2x_1 \leq 4$$

11. Kierunki poprawy

11.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Czym są kierunki dopuszczalne w danym punkcie ?
2. Czym są kierunki spadku w danym punkcie ?
3. Czym są kierunki poprawy w danym punkcie ?

11.2. Egzamin

Zadanie 1 - Egzamin +

Wyznaczyć analitycznie kierunek dopuszczalny poprawy. Optymalizować długość kroku na tym kierunku.

$$d = (-1, -1)^T$$
$$F(x) = x_1 + x_2$$
$$h(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$
$$x_0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

a) Czy d jest kierunkiem poprawy ? b) Czy d jest kierunkiem dopuszczalnym ?

12. Kuhn - Tucker

12.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Jaki jest problem w zadaniu KT ?
2. Podaj warunki konieczne KT
3. Czym są ograniczenia aktywne ? Jak mają się do lambd ?
4. Podaj WKiD KT
5. Co się dodaje do WK KT w przypadku ograniczeń równościowych ?
6. Jak wyglądają WK KT w przypadku maksymalizacji ?
7. Jak wykazać regularność punktów wyznaczonych przez warunki konieczne KT ?

12.2. Egzamin

Zadanie 1 - Egzamin +

Dla zadania:

$$\begin{aligned} &\min -x^2 - x^3 \\ &x^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Wyznaczyć pary (x, λ) spełniające warunki konieczne Kuhna-Tuckera.

Zadanie 2 - Egzamin +

Czy w punkcie $x = 6$ spełnione są warunki konieczne Khuna-Tuckera ?

$$\begin{aligned} &\max(x-4)^2 \\ &1 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

Zadanie 3 - Egzamin +

Sformułować warunki Kuhna Tuckera dla zadania:

$$\begin{aligned} &\max F(x) \\ &h_i(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Zadanie 4 - Egzamin +

$$
\begin{aligned}
&\min(e^{-x_1} - x_2^2) \\
&x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\
&x_1^2 - 1 \leq x_2 \\
&x \in R^2
\end{aligned}
$$

a) Czy jest to wypukły problem optymalizacji ?
b) Czy punkt $(1, 0)$ spełnia WK Kuhna-Tuckera ?
c) Jeśli tak, to czy jest to minimum czy maksimum ?

Zadanie 5 - Egzamin +

$$
\begin{aligned}
&\min(e^{-x_1} + 2x_2^2) \\
&x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\
&x_1^2 - 1 \leq x_2 \\
&x \in R^2
\end{aligned}
$$

Czy w punkcie $(2, 1)$ są spełniona warunki KKT ?

Zadanie 5 - Egzamin

$$
\begin{aligned}
&\min(e^{-x_1} + 2x_2^2) \\
&x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\
&x_1^2 - 1 \leq x_2 \\
&x \in R^2
\end{aligned}
$$

Czy w punkcie $(2, 1)$ są spełniona warunki KKT ?

Zadanie 6 - Egzamin

Dla zadania

$$
\begin{aligned}
&\min\, x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2 \\
&x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Podaj warunki konieczne optymalności (Karusha - Tuckera)
b) Udowodnij, że istnieją dwa punkty spełniające te warunki

Zadanie 7 - Egzamin

Dla zadania

$$\begin{aligned} &\min\ -x_1 - x_2 \\ &x_1 + x_2^2 - 5 \leq 0 \\ &x_1 - 2 \leq 0 \\ &x_1,\ x_2 \in R^2 \end{aligned}$$

a) Podać warunki konieczne optymalności i znaleźć punkty, które je spełniają. Który z tych punktów jest rozwiązaniem?
b) Pokazać, że w tym punkcie są spełnione warunki regularności.

13. Programowanie liniowe

13.1. Pytania własne - teoria do opracowania

1. Jak dodawane są zmienne przy przekształcaniu ograniczeń w programowaniu liniowym ?
2. Które zmienna są zmiennymi bazowymi w pierwszej iteracji ?
3. Jak wyznaczyć pierwsze rozwiązanie bazowe ?

13.2. Egzamin

Zadanie 1 - Egzamin +

Podać pierwsze rozwiązanie bazowe:

$$\max\ 2x_1 + x_2$$
$$3x_1 + x_2 \leq 7$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 10$$

Zadanie 2 - Egzamin

Wypisać ograniczenia oraz funkcję celu dla budynku o zadanych parametrach