Programowanie liniowe		
Dominik Wróbel	**23 IV 2018**	**Pon 08:00, s. 111**
Numery zadań		2, 3

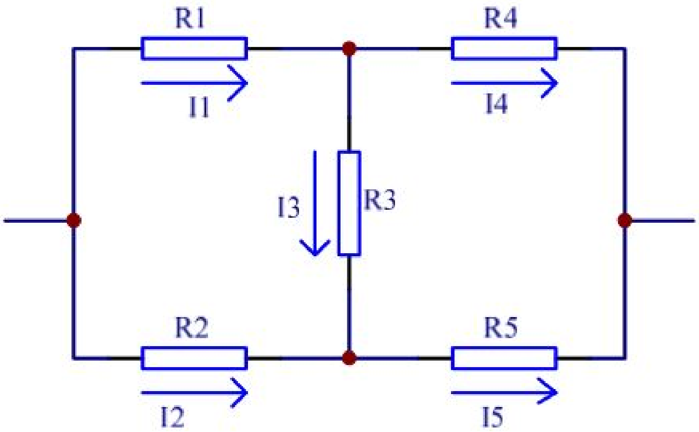
1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z optymalizacją praktycznych zagadnień przy użyciu programowania liniowego. Rozwiązane przykłady pozwolą na nabycie umiejętności budowy poprawnego modelu matematycznego dla danego zagadnienia.

2 Przebieg ćwiczenia

2.1. Zadanie 2 - Optymalizacja mocy wydzielanej na mostku

W zadaniu rozważany jest układ mostka z 5 opornikami. Układ z polecenia przedstawia Rysunek 1



Rysunek 1: Mostek analizowany w zadaniu

W zadaniu dane są napięcia odkładające się na każdym z oporników oraz zakresy wartości prądów jakie muszą przepływać przez dany opornik. Każdy prąd I_i musi spełniać warunek

$$\overline{I_i} - \Delta_i \leq I_i \leq \overline{I_i} + \Delta_i$$

przy danych założeniach

i	1	2	3	4	5
Ui [V]	6	10	4	7	3
Ii [mA]	4	2	2	2	4
Δ_i [mA]	1	1	1	1	

Rysunek 2: Założenia zadania

Zadanie rozpoczęto od budowy modelu matematycznego na podstawie I prawa Kirchhoffa dla węzłów mostka :

$$\begin{cases} I_1 - I_3 - I_4 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_5 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_4 - I_5 = 0 \end{cases}$$

Powyższe równania odpowiadają modelowi matematycznemu postaci $Ax = b$, w którym

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Celem zadania jest minimalizacja całkowitej mocy wydzielanej na mostku, a zatem funkcja celu jest postaci:

$$f_c(x) = U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3 + U_4 I_4 + U_5 I_5 \rightarrow min$$

Funkcja celu odpowiada modelowi $f_c(x) = cx$, zmienne decyzyjne w tym modelu to prądy płynące przez i-te oporniki, współczynniki funkcji celu, to napięcia na i-tych opornikach, stąd

$$c = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 \end{bmatrix}$$

Nierówność

$$\overline{I_i} - \Delta_i \leq I_i \leq \overline{I_i} + \Delta_i$$

określa górne i dolne ograniczenie dla zmiennych decyzyjnych, dlatego

$$l = \overline{I_i} - \Delta_i \quad u = \overline{I_i} + \Delta_i$$

W celu implementacji powyższego modelu do pliku zrodpl.m dopisano wszystkie potrzebne dane oraz na ich podstawie stworzono odpowiednie macierze. Skrypt przedstawia listing 1.

```

Diff = [];
Sum = [];
U_i = [ 6 10 4 7 3 ];
I_i = [ 4 2 2 2 4 ];
Delta_i = [ 1 1 1 1 0 ];
for i = 1:5
Diff = [ Diff I_i(i)-Delta_i(i) ];
end
for i = 1:5
Sum = [ Sum I_i(i)+Delta_i(i) ];
end
Diff=Diff';
Sum=Sum';
A = [ 1, 0, -1, -1,  0;
      0, 1 , 1, 0 , -1;
      1, 1, 0,  -1, -1 ];
b = [ 0 ; 0 ; 0 ];  % Ograniczenia Ax = b
t = [ 0 ;0 ; 0 ];   % typy ograniczen
c = U_i;            % wspolczynniki funkcji celu
l = Diff;           % I_i - delta_i, dolne ograniczenie
u = Sum;            % I_i + delta_i, gorne ograniczenie
zadan ='mini';
```

Listing 1: zrodpl.m

Stworzono także plik main.n wywołujący zrodpl.m oraz obliczający wartości optymalne mocy i oporników. Skrypt przedstawia listing 2.

```

plnad;
xopt
M = c * xopt ; % zuzyta moc optymalna
Moc = M / 1000
Oporniki = c ./ xopt'*1000; % opory optymalne R = u / i
Oporniki
Moc
```

Listing 2: main.m

Otrzymano następujące wyniki:

$$R_{opt} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 2000 \\ 7000 \\ 750 \end{bmatrix} \Omega \quad P_{opt} = 0.0650W \quad I_{opt} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} mA$$

2.2. Zadanie 3 - Optymalizacja procesu wytwarzania

W zadaniu rozważany zakład produkcyjny, który wytwarza trzy wyroby. Dana jest liczba roboczogodzin potrzebna do wykonania sztuki produktu:

Wyrób	Montaż	Kontrola	Pakowanie
A	0,30	0,10	0,06
B	0,50	0,08	0,04
C	0,40	0,12	0,05

Rysunek 3: Założenia zadania

Dane jest też liczba możliwych do wykorzystania roboczogodzin w ciągu tygodnia w każdym z działów zakładu produkcyjnego:

- Montaż 1800
- Kontrola 800
- Pakowanie 700

oraz zysk ze sprzedaży każdego z produktu:

- Wyrób A 400 zł/szt
- Wyrób B 300 zł/szt
- Wyrób C 200 zł/szt

Powyższe ograniczenia odpowiadają modelowi matematycznemu postaci $Ax \leq b$, w którym wektor b zawiera całkowitą możliwą liczbę roboczogodzin w danym dziale. x to wektor zmiennych decyzyjnych, który opisuje liczbę wyprodukowanych produktów danego typu.

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.08 & 0.12 \\ 0.06 & 0.04 & 0.05 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1800 \\ 800 \\ 700 \end{bmatrix}$$

Celem zadania jest maksymalizacja zysku z produkowanych produktów.

$$f_c(x) = 400x_a + 300x_b + 200x_c \rightarrow max$$

Funkcja celu odpowiada modelowi $f_c(x) = cx$, zmienne decyzyjne w tym modelu to ilość wyprodukowanych sztuk danego wyrobu

$$c = \begin{bmatrix} 400 & 300 & 200 \end{bmatrix}$$

Ilość produkowanych produktów powinna być większa lub równa zero oraz mniejsza od nieskończoności, są to ograniczenia dolne górne na wartość znalezionego rozwiązania :

$$l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \leq x_i < \text{inf} = \begin{bmatrix} inf \\ inf \\ inf \end{bmatrix} = u$$

W celu implementacji powyższego modelu do pliku zrodpl.m dopisano wszystkie potrzebne dane oraz na ich podstawie stworzono odpowiednie macierze. Skrypt przedstawia listing 3.

```

product_A = [ 0.3 0.1 0.06 ]; % roboczogodziny potrzebne na sztuke
product_B = [ 0.5 0.08 0.04 ]; % danego produktu
product_C = [ 0.4 0.12 0.05 ];
max_mon = 1800; % max. dostepna liczba roboczogodzin
max_kont = 800; % w tygodniu
max_pakow = 700;
zysk_A = 400;
zysk_B = 300;
zysk_C = 200;
A = [ product_A(1) product_B(1) product_C(1);
      product_A(2) product_B(2) product_C(2);
      product_A(3) product_B(3) product_C(3);
      ];
b = [ max_mon ; max_kont ; max_pakow ];  % Ograniczenia Ax = b
t = [ -1 ;-1 ; -1 ];    % -1 to <=
c = [ zysk_A zysk_B zysk_C ];             % wspolczynniki funkcji celu
l = [ 0; 0; 0] ;             % , dolne ograniczenie
u = [ inf; inf; inf];        % , gorne ograniczenie
zadan ='maks';
```

Listing 3: zrodpl.m

Stworzono także plik main.n wywołujący zrodpl.m oraz obliczający wartości optymalne liczy sztuk produkowanych produktów oraz całkowity zysk. Skrypt przedstawia listing 4.

```

plnad;
xopt
profit = xopt(1)*zysk_A+xopt(2)*zysk_B+xopt(3)*zysk_C;
profit
```

Listing 4: main.m

Otrzymano następujące wyniki:

$$x_{opt} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \qquad Zysk_{opt} = 2400000$$

Ilość produkowanego produktu x_a odpowiada optymalnemu tygodniowemu planowi produkcji z zyskiem 2400000 zł. Uzyskana odpowiedź spełnia wszystkie założenia.

3 Wnioski końcowe

Programowanie liniowe pozwala na łatwe rozwiązywanie wielu praktycznych problemów. Kluczowe przy tego typu zadaniach jest zbudowanie prawidłowego modelu matematycznego z uwzględnieniem wszystkich ograniczeń. Następnie rozwiązanie przy pomocy metody Simpleks wymaga dbałości o zapisane ograniczenia.