Spis treści

Zadania pochodzą z czterech źródeł:

- Zadania wysłane do AiR przed kolokwium I i II przez Bauera
- Zadania z egzaminów z doku
- Zadania z niebieskiego skryptu
- Zadania z przedmiotu MSD od informatyków

Nie ma żadnej gwarancji, że rozwiązania są poprawne, ale wiele z nich zostało już przedyskutowane i poprawione, niemniej jednak, należy zachować krytyczne spojrzenie na rozwiązania zadań.
Wersja rozwojowa w LaTeX. W celu utrzymania porządku edycja zgodnie z przyjętym w opracowaniu schematem. Zadania pasujące do więcej niż jednego działu zostały dodane tylko w jednym z nich w celu utrzymania porządku więc czasem trzeba poszukać.
Legenda:

- Kolor zielony w zbiorze zadań oznacza, że zadanie ma rozwiązanie w sekcji z rozwiązaniami
- Kolor żółty w zbiorze zadań oznacza, że zadanie ma niepełne rozwiązanie lub jest pozostawione na pewnym etapie w celu dorobienia czegoś albo z powodu braku pomysłu na dalsze rozwiązanie.

1. Portrety fazowe

1.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Egzamin

Naszkicuj portret fazowy układu

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) \quad i = 0, 1$$
$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2 - Egzamin

Narysować portret fazowy układu

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) \quad i = 0, 1$$
$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Podać macierze $e^{A_i}t$, napisać czym różnią się portrety fazowe powyższych systemów.

Zadanie 3 - Egzamin

Naszkicować portret fazowy układu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = a x_1(t)$$

4 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Naszkicować portrety fazowe systemów dynamicznych i opisać czym się różnią

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \qquad \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) \qquad \dot{x}_2(t) = -x_2(t)$$

i opisać czym się różnią.

Zadanie 5 - Egzamin

Dany jest układ:

$$\dot{x}_1(t) = -x_2 + x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

Narysować portrety fazowe systemu zlinearyzowanego w punktach równowagi.

1.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

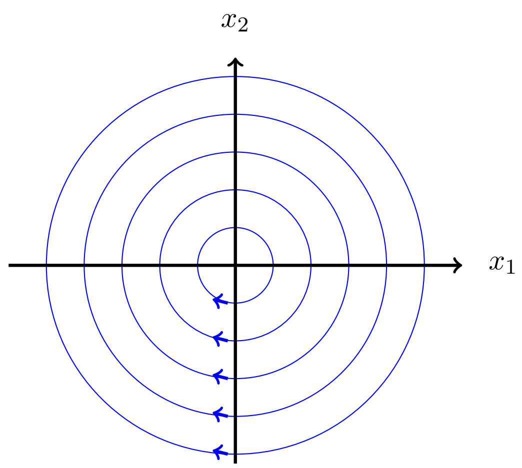
Zadanie 1 - Egzamin
Naszkicuj portret fazowy układu

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) \quad i = 0, 1$$
$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz A_0 jest w postaci normalnej, obliczam jej wartości własne:

$$det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2$$
$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Każdy punkt płaszczyzny jest punktem równowagi oraz trajektorią fazową.
Macierz A_1 jest w postaci kanonicznej Jordana i ma wartości własne $\lambda = \pm i$. Z tabelki odczytuję, że dla takich wartości własnych portret fazowy to 'środek'. Kierunek strzałek obliczam przez pomnożenia dowolnego punktu przez macierz A.

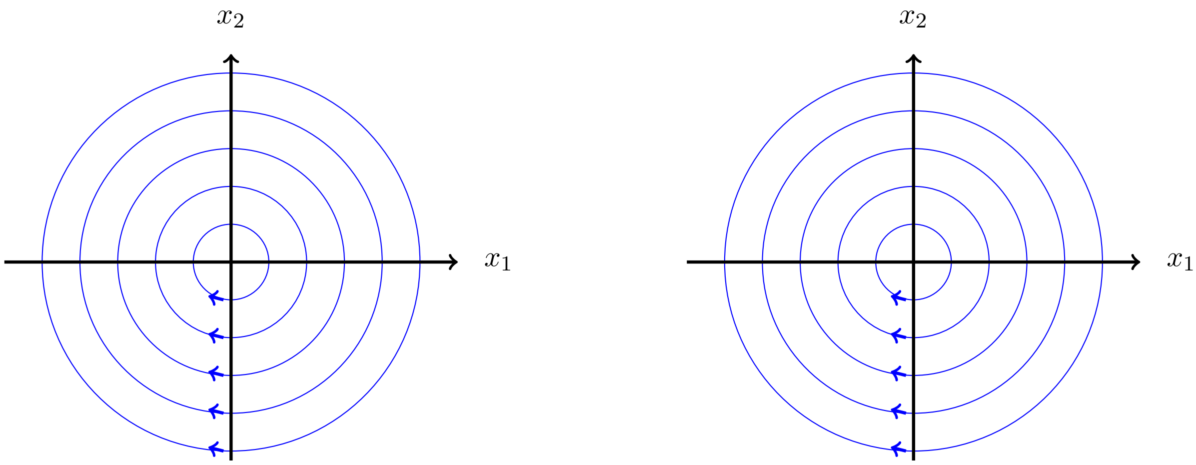


Zadanie 2 - Egzamin
Narysować portret fazowy układu

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) \quad i = 0, 1$$
$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Podać macierze $e^{A_i}t$, napisać czym różnią się portrety fazowe powyższych systemów.

Obie macierze są w kanonicznych postaciach Jordana z zespolonymi wartościami własnymi. Dla macierzy A_0 są to $\lambda = \pm i$, dla macierzy A_1 są to $\lambda = \pm 10i$. Z tabelki odczytuję, że w tym przypadku portretem fazowym jest środek (pierwiastki urojone, sprzężone, o zerowych częściach rzeczywistych). Kierunek strzałek wyznaczam mnożąc dowolny punkt przez macierz A. Macierze



$e^{A_i t}$ wyznaczam ze wzoru na e^{Jt} dla klatki zespolonej.

$$e^{A_0 t} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{bmatrix} = e^{0} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$
$$e^{A_1 t} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{bmatrix} = e^{0} \begin{bmatrix} \cos 10t & \sin 10t \\ -\sin 10t & \cos 10t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 10t & \sin 10t \\ -\sin 10t & \cos 10t \end{bmatrix}$$

Portrety fazowe są takie same, różnicą jest szybkość zmian trajektorii w dziedzinie czasu, co widać na podstawie macierzy e^{At}.

Zadanie 3 - Egzamin
Naszkicować portret fazowy układu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = ax_1(t)$$

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

Wartości własne:

$$det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -a & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - a$$

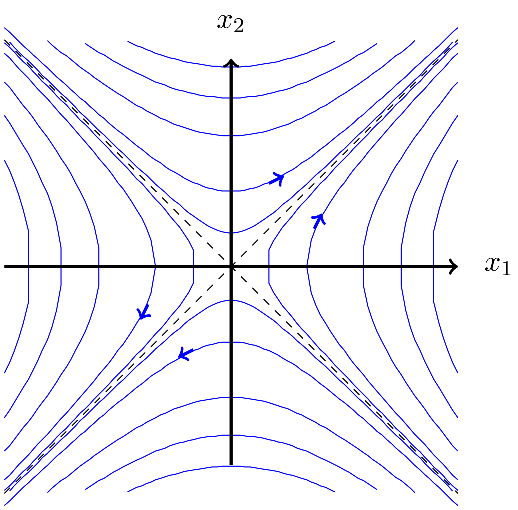
I przypadek a = 0

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Wtedy każdy punkt płaszczyzny jest punktem równowagi oraz trajektorią fazową.
II przypadek a > 0

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - \sqrt{a})(\lambda + \sqrt{a})$$

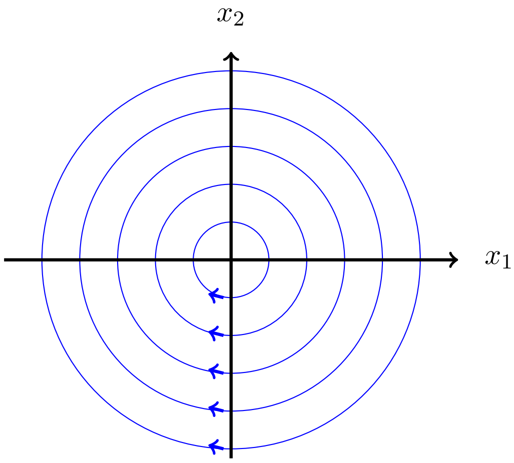
Dwie wartości własne rzeczywiste o przeciwnych znakach - siodło, osie zależą od wektorów własnych, które zależą od wartości a. Strzałki idą do nieskończoności przy wektorze związanym z dodatnią wartością λ.



III przypadek a < 0

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - i\sqrt{-a})(\lambda + i\sqrt{-a})$$

Dwie wartości własne urojone sprzężone, o zerowych częściach rzeczywistych, portretem jest środek, którego kształt zależy od wartości a.



Zadanie 4 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Naszkicować portrety fazowe systemów dynamicznych i opisać czym się różnią

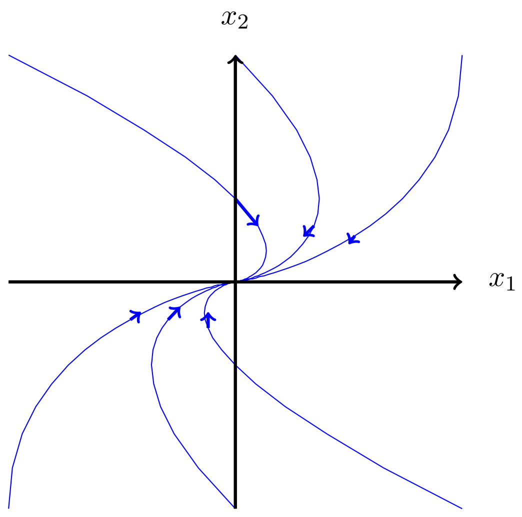
$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \qquad \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) \qquad \dot{x}_2(t) = -x_2(t)$$

i opisać czym się różnią.

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J$$

Macierz A jest w postaci Jordana, jedna wartość własna podwójna, rzeczywista, różna od zera $\lambda = -1$. Suma stopni klatek = krotność wartości własnej, liczba klatek = liczba wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\implies$ Jeden wektor własny.
Wartość własna jest ujemna więc wykresem jest węzeł asymptotycznie stabilny.



Dla drugiego systemu macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Macierz ta nie jest w postaci Jordana. Wartości własne:

$$det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

Dwie wartości własne rzeczywiste różnych znaków $\implies$ portret fazowy to siodło. Obliczam wektory własne aby wyznaczyć kierunki osi (macierz nie jest w postaci kanonicznej).
Wektory własne dla $\lambda_1 = 1$:

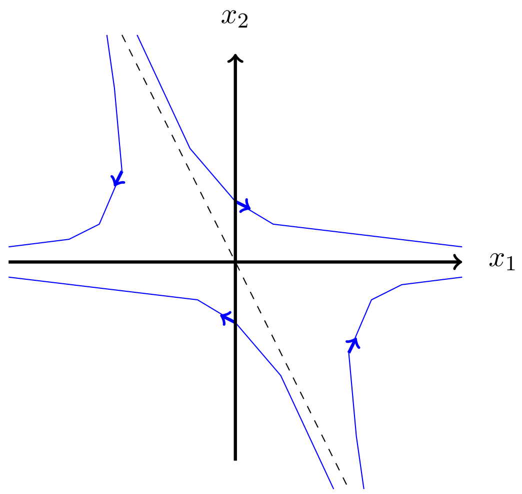
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies y = 0$$

Np. $(1, 0)$
Wartości własne dla $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies y = -2x$$

Np. $(1, -2)$
Portret fazowy:

Jeden z portretów to węzeł, a drugi to siodło, węzeł jest stabilny asymptotycznie, siodło nie.



Zadanie 5 - Egzamin
Dany jest układ:

$$\dot{x}_1(t) = -x_2 + x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

Narysować portrety fazowe systemu zlinearyzowanego w punktach równowagi.

nie ma sprzeczności w równaniu, ma tam być x1 zamiast 1 - poprawić

Wyznaczam punkty równowagi:

$$\begin{cases} -x_2 + x_1 x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(x_1 - 1) = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \end{cases} \implies x_2 = 0 \lor x_1 = 1$$

$$x_2 = 0$$
$$1 + \frac{1}{2}(x_1 - 0)(x_1 + 0) = 0$$
$$1 + \frac{1}{2}x_1^2 = 0$$
$$-\frac{1}{2}x_1^2 = 1$$
$$x_1^2 = -2$$

Sprzeczność

$$x_1 = 1$$
$$1 + \frac{1}{2}(1 - x_2)(1 + x_2) = 0$$
$$1 + \frac{1}{2}(1 - x_2^2) = 0$$
$$-1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2^2$$
$$\frac{1}{2}x_2^2 = \frac{3}{2}$$
$$x_2^2 = 3$$
$$x_2 = \sqrt{3} \ \lor \ x_2 = -\sqrt{3}$$

Punkty równowagi: $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$.
Macierz Jacobiego:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \frac{\partial f_1}{x_2} \\ \frac{\partial f_2}{x_1} & \frac{\partial f_2}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & -1 + x_1 \\ 1 + x_1 & -x_2 \end{bmatrix}$$

Dla punktu $x^* = (1, \sqrt{3})$:

$$J = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Wartości własne:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - \sqrt{3} & 0 \\ -2 & \lambda + \sqrt{3} \end{bmatrix}$$
$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \sqrt{3})(\lambda + \sqrt{3}) = \lambda^2 - 3$$
$$\lambda_1 = -\sqrt{3},\ \lambda_2 = \sqrt{3}$$

Dla punktu $x^* = (1, -\sqrt{3})$:

$$J = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Wartości własne:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda + \sqrt{3} & 0 \\ -2 & \lambda - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$
$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \sqrt{3})(\lambda + \sqrt{3}) = \lambda^2 - 3$$
$$\lambda_1 = -\sqrt{3},\ \lambda_2 = \sqrt{3}$$

W obu przypadkach istnieją dwie wartości własne różnych znaków rzeczywiste, a więc portretem fazowym jest siodło. Następnie obliczam wektory własne:
Dla punktu $x^* = (1, \sqrt{3})$ wektory własne to:
Dla $\lambda_1 = \sqrt{3}$ $(\sqrt{3}, 1)$, $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ $(1, 0)$.
Dla punktu $x^* = (1, -\sqrt{3})$ wektory własne to:
Dla $\lambda_1 = -\sqrt{3}$ $(-\sqrt{3}, 1)$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ $(0, 1)$. Portrety fazowe będą więc różne, ponieważ kierunki wektorów własnych są różne.
(Zrobić rysunki ...)

2. Kryteria częstotliwościowe

2.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Egzamin

Jaka będzie postać rozwiązania w stanie ustalonym jeśli na układ

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-1}{10}x_1(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{-1}{10}x_2(t) + x_1(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = \frac{-1}{11}x_3(t) + x_2(t)$$
$$\dot{x}_4(t) = \frac{-1}{9}x_4(t) + x_3(t)$$

gdzie

$y(t) = x_2(t)$

podano sygnał

$u(t) = \sin(0,1t)$

Zadanie 2 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\dot{x}(t) = -10x(t) + 5\sin(2t + \frac{3\pi}{4})$$

gdzie

$x(0) = 0,\ t \geq 0$ ma postać

$x(t) = ae^{-2t} + A\sin(2t + \varphi)$

Obliczyć A i φ.

3 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Mając daną transmitancję $G(s) = \frac{100}{s+20}$ określić amplitudę sygnału wyjściowego jeśli na wejście podano:

- $-3\sin(5t + \frac{\pi}{2})$
- $10\sin(2t + \pi)$
- $5\cos(2t + \frac{2\pi}{3})$

Zadanie 4 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Narysować charakterystyki Nyquista dla układu opisanego transmitancją operatorową:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

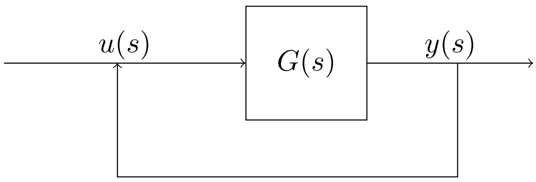
Podać wzór na transmitancję widmową tego układu (w postaci rozbicia na część urojoną i rzeczywistą)

Zadanie 5 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Niech dany będzie układ opisany transmitancją

$$G(s) = \frac{s + 4}{2s^2 + 3s + 1}$$

Korzystając z kryterium Nyquista sprawdzić czy układ zamknięty przedstawiony na rysunku będzie asymptotycznie stabilny.



Zadanie 6 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Korzystając z kryterium Michajłowa zbadać asymptotyczną stabilność układu opisanego transmitancją

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + s^2 + 9s + 4}$$

Zadanie 7 - Informatyka Modelowanie

Rozwiązanie równania różniczkowego
$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12\sin(\omega t)$
gdzie $x(0) = 0$, ($\dot{x}(0)$ - w domysle), $t \geq 0$ ma postać
$x(t) = f(t) + A\sin(\omega t)$
znaleźć takie ω, dla którego A jest największe

Zadanie 8 - Egzamin

Wykorzystując kryterium Nyquista sprawdzić czy układ zamknięty będzie asymptotycznie stabilny, jeśli układ otwarty opisany transmitancją:

$$G(s) = \frac{6}{s^3 + 2s^2 + 2s + 40}$$

połączono szeregowo z regulatorem proporcjonalnym $G_K = 100$.

2.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

Zadanie 1 - Egzamin

Jaka będzie postać rozwiązania w stanie ustalonym jeśli na układ

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-1}{10}x_1(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{-1}{10}x_2(t) + x_1(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = \frac{-1}{11}x_3(t) + x_2(t)$$
$$\dot{x}_4(t) = \frac{-1}{9}x_4(t) + x_3(t)$$

gdzie

$$y(t) = x_2(t)$$

podano sygnał

$$u(t) = \sin(0,1t)$$

Na wejście układu podany jest sinus, a więc na wyjściu również otrzymamy sinus, o innej amplitudzie i fazie i o tej samej częstotliwości.

Aby wyznaczyć sygnał wyjściowy rozważam tylko równania wpływające na wyjście, czyli na pewno równanie na x_2 oraz równanie na x_1, bo x_1 zawiera się w równaniu na x_2 więc też od niego zależy. x_3 i x_4 nie wpływają na x_2 ani też na x_1, jedynie x_3 zależy od x_2, ale nie wpływa na nie.

W takim przypadku macierze są postaci: błąd w macierzy A - do poprawy

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 0 \\ 1 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transmitancja:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{10} & 0 \\ -1 & s - \frac{1}{10} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$\frac{1}{s^2 - \frac{1}{100}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - \frac{1}{10} & 0 \\ 1 & s + \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$\frac{1}{s^2 - \frac{1}{100}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & s + \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$\frac{1}{s^2 - \frac{1}{100}}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\underbrace{-\omega^2 - \frac{1}{100}}_{P(\omega)}}$$

$$\omega = 0,1 \; A_u = 1 \; \varphi_u = 0$$

$$|Y(j\omega)| = |G(j\omega)||U(j\omega)| = 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{(-0,02)^2}} = 50$$

$$\varphi_y = \varphi_u + \arg G(j\omega)$$

$$\cos\varphi = \frac{P(\omega)}{|G(j\omega)|} = \frac{-50}{50} = -1$$

$$\sin\varphi = \frac{Q(\omega)}{|G(j\omega)|} = \frac{0}{50} = 0$$

Sprzeczność ?

Zadanie 2 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\dot{x}(t) = -10x(t) + 5\sin(2t + \frac{3\pi}{4})$$

gdzie

$x(0) = 0,\ t \geq 0$ ma postać

$$x(t) = ae^{-2t} + A\sin(2t + \varphi)$$

Obliczyć A i φ.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$
$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$
$$A_y = |Y(j\omega)| = |G(j\omega)| \cdot |U(j\omega)| = |G(j\omega)| \cdot A_u$$
$$\varphi_y = \text{arg}Y(j\omega) = \text{arg}G(j\omega) + \text{arg}U(j\omega) = \text{arg}G(j\omega) + \varphi_u$$

Zakładam, że $y(t) = x(t) \implies C = 1$, wtedy:

$$u(t) = \sin(2t + \frac{3\pi}{4})$$
$$A_u = 1 \text{ bo } B = 5,\ \omega_u = \omega_y = 2$$
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = 1(s + 10)^{-1} \cdot 5 = \frac{5}{s + 10}$$
$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega + 10}$$
$$|G(j\omega| = \frac{5}{\sqrt{\omega^2 + 100}} = \frac{5}{\sqrt{104}} = 0,49$$
$$A_y = 0,49 \cdot A_u = 0,49 \cdot 1 = 0,49$$
$$\text{arg}G(j\omega) = \text{arg}5 - \text{arg}(j\omega + 10) = 0 - \text{arg}(j\omega + 10) = -\text{arg}(2j + 10)$$
$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{4 + 100}}$$
$$\cos\varphi = \frac{10}{\sqrt{4 + 100}}$$
$$\tan\varphi = \frac{2}{10}$$
$$\varphi = \arctan\frac{2}{10}$$
$$\varphi_y = \arctan\frac{2}{10} + \frac{3\pi}{4}$$

Zadanie 3 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Mając daną transmitancję $G(s) = \frac{100}{s+20}$ określić amplitudę sygnału wyjściowego jeśli na wejście podano:

- $-3\sin(5t + \frac{\pi}{2})$
- $10\sin(2t + \pi)$
- $5\cos(2t + \frac{2\pi}{3})$

$$u(t) = A_u \cdot \sin(\omega t + \phi_u) \text{ - wejście}$$
$$A_u \text{ - amplituda wejścia}$$
$$\phi_u \text{ - faza wejścia}$$
$$y(t) = A_y \cdot \sin(\omega t + \phi_y) \text{ - wyjście}$$
$$A_y = A(\omega) \cdot A_u \text{ - amplituda wyjścia}$$
$$\phi_y \text{ - faza wyjścia}$$
$$A(\omega) = |G(j\omega)|$$
$$G(s) = \frac{100}{s+20}$$

a)

$$u(t) = -3\sin(5t)$$
$$A_u = -3$$
$$\omega = 5$$
$$A(\omega) = A(5) = |G(5j)| = \left|\frac{100}{5j+20}\right| = \left|\frac{20}{4+j} \cdot \frac{4-j}{4-j}\right| = \left|\frac{20}{17} \cdot (4-j)\right| =$$
$$= \frac{20}{17} \cdot |4-j| = \frac{20}{17} \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \frac{20 \cdot \sqrt{17}}{17}$$
$$A_y = A(\omega) \cdot A_u = \frac{20 \cdot \sqrt{17}}{17} \cdot -3 = \boxed{\frac{-60 \cdot \sqrt{17}}{17}}$$

b)

$$\begin{aligned}
u(t) &= 10\sin(2t+\pi) \\
A_u &= 10 \\
\omega &= 2 \\
A(\omega) &= A(2) = |G(2j)| = \left|\frac{100}{2j+20}\right| = \left|\frac{50}{10+j}\cdot\frac{10-j}{10-j}\right| = \left|\frac{50}{101}\cdot(10-j)\right| = \\
&= \frac{50}{101}\cdot|10-j| = \frac{50}{101}\cdot\sqrt{10^2+(-1)^2} = \frac{50\cdot\sqrt{101}}{101} \\
A_y &= A(\omega)\cdot A_u = \frac{50\sqrt{101}}{101}\cdot 5 = \frac{250\sqrt{101}}{101}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
u(t) &= 5\cos\left(2t+\frac{2\pi}{3}\right) = 5\sin\left(2t+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3t+\frac{5\pi}{6}\right) \\
A_u &= 5 \\
\omega &= 2 \\
A(\omega) &= A(2) = |G(2j)| = \left|\frac{100}{2j+20}\right| = \left|\frac{50}{10+j}\cdot\frac{10-j}{10-j}\right| = \left|\frac{50}{101}\cdot(10-j)\right| = \\
&= \frac{50}{101}\cdot|10-j| = \frac{50}{101}\cdot\sqrt{10^2+(-1)^2} = \frac{50\cdot\sqrt{101}}{101} \\
A_y &= A(\omega)\cdot A_u = \frac{50\cdot\sqrt{101}}{101}\cdot 5 = \boxed{\frac{250\cdot\sqrt{101}}{101}}
\end{aligned}$$

Zadanie 4 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Narysować charakterystyki Nyquista dla układu opisanego transmitancją operatorową:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

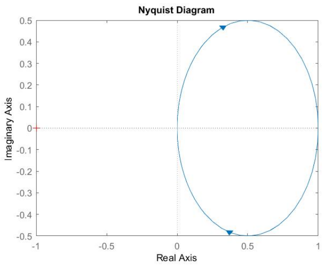
Podać wzór na transmitancję widmową tego układu (w postaci rozbicia na część urojoną i rzeczywistą)

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + j\omega + 1} = \frac{j\omega}{-\omega^2 + j\omega + 1} = \frac{j\omega}{-\omega^2 + 1 + j\omega} = \frac{j\omega(1-\omega^2 - j\omega)}{(1-\omega^2)^2 - (j\omega)^2} =$$
$$\frac{j\omega - \omega^3 j - j^2\omega^2}{1 - 2\omega^2 + \omega^4 - j^2\omega^2} = \frac{\omega^2 + j(\omega - \omega^3)}{\omega^4 - \omega^2 + 1} = \frac{\omega^2}{\omega^4 - \omega^2 + 1} + j\frac{\omega - \omega^3}{\omega^4 - \omega^2 + 1}$$

Tebelka

ω	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	∞
$P(\omega)$	0	$\frac{4}{13}$	1	$\frac{36}{61}$	0
$Q(\omega)$	0	$\frac{6}{13}$	0	$\frac{30}{61}$	0

Szkicuję charakterystykę:



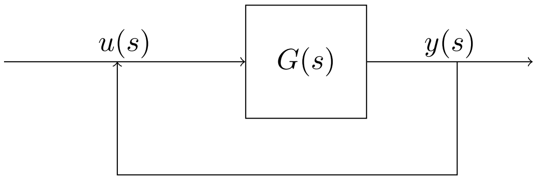
Rysunek 1: Szkic charakterystyki amp-faz

Zadanie 5 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Niech dany będzie układ opisany transmitancją

$$G(s) = \frac{s+4}{2s^2+3s+1}$$

Korzystając z kryterium Nyquista sprawdzić czy układ zamknięty przedstawiony na rysunku będzie asymptotycznie stabilny.



Sprawdzam ile pierwiastków ma w C^+ wielomian $M(s) = 2s^2 + 3s + 1$:

$$2s^2 + 3s + 1 = 0$$
$$\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$
$$\sqrt{\Delta} = 1$$
$$s_1 = \frac{-3+1}{4}, s_2 = \frac{-3-1}{4}$$
$$s_1 = \frac{-1}{2}, s_2 = -1$$

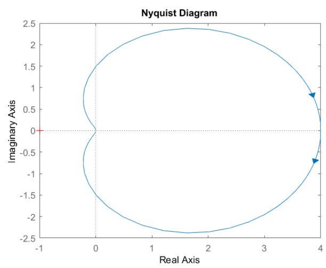
Wielomian $M(s)$ nie ma pierwiastków w C^+. Wyznaczam charakterystykę amplitudowo-fazową:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega+4}{2j^2\omega^2+3j\omega+1} = \frac{4+j\omega}{-2\omega^2+3j\omega+1} = \frac{4+j\omega}{1-2\omega^2+3j\omega} \cdot \frac{1-2\omega^2-3j\omega}{1-2\omega^2-3j\omega} =$$
$$\frac{(4+j\omega)(1-2\omega^2-3j\omega)}{(1-2\omega^2)^2)-(3j\omega)^2} = \frac{4-8\omega^2-12j\omega+j\omega-2j\omega^3-3j^2\omega^2}{1-4\omega^2+4\omega^4+9\omega^2} =$$
$$\frac{4-5\omega^2}{4\omega^4+5\omega^2+1} + j\frac{-2\omega^3-11\omega}{4\omega^4+5\omega^2+1}$$

Tebelka

ω	0	$0,1$	1	$0,5$	∞
$P(\omega)$	4	$3,76$	1	$1,1$	0
$Q(\omega)$	0	$-1,04$	0	$-2,3$	0

Szkicuję charakterystykę:



Rysunek 2: Szkic charakterystyki amp-faz

Charakterystyka obejmuje sumarycznie 0 razy punkt $(-1, j0)$, układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny, bo liczba ta jest równa liczbie pierwiastków wielomianu $M(s)$ w C^{+}.

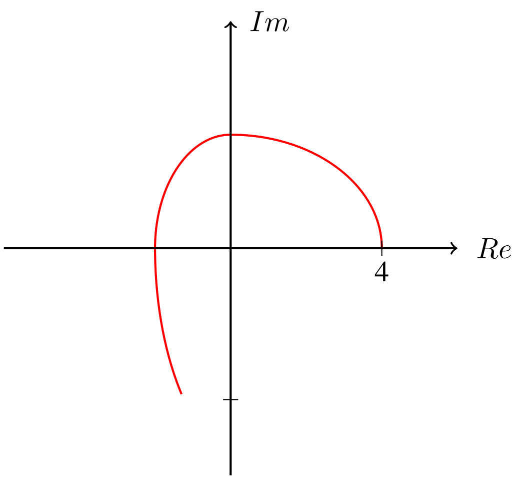
Zadanie 6 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Korzystając z kryterium Michajłowa zbadać asymptotyczną stabilność układu opisanego transmitancją

$$G(s) = \frac{s^2+1}{s^3+s^2+9s+4}$$

$$M(s) = s^3+s^2+9s+4$$
$$M(j\omega) = -j\omega^3 - \omega^2 + 9j\omega + 4 = \underbrace{4-\omega^2}_{Re} + j\underbrace{(9\omega-\omega^3)}_{Im}$$

Tebelka

ω	0	2	3	$\frac{n\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$
$P(\omega)$	4	0	$(-)$	0
$Q(\omega)$	0	$(+)$	0	$-\infty$



Wektor zakreśla kąt $\Delta\alpha = \frac{3\pi}{2}$ dla $\omega \in [0, \infty)$. Sprawdzam więc warunek:

$$\Delta\alpha = \frac{n\pi}{2} - m\pi$$
$$3\pi = n\pi - 2m\pi$$
$$3\pi = 3\pi - 2m\pi$$
$$0 = -2m\pi$$
$$m = 0$$

m to liczba pierwiastków wielomianu $M(s)$ w C^+, a zatem układ jest asymptotycznie stabilny.

Zadanie 7 - Informatyka Modelowanie
Rozwiązanie równania różniczkowego
$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12\sin(\omega t)$
gdzie $x(0) = 0$, ($\dot{x}(0)$ - w domysle), $t \geq 0$ ma postać
$x(t) = f(t) + A\sin(\omega t)$
znaleźć takie ω, dla którego A jest największe

$u(t) = \sin(\omega t)$
$y(t) = x(t)$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -x(t) + 12u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = \frac{\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)}{12} \\ y(t) = x(t) \end{cases} \Bigg| \mathscr{L}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + X(s)}{12} \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{s^2 \cdot X(s) + sX(s) + X(s)}{12} \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$$G(S) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{12 \cdot \cancel{X(s)}}{\cancel{X(s)} \cdot (s^2+s+1)} = \frac{12}{s^2+s+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{12}{-\omega^2 + j\omega + 1} = -\frac{12 \cdot \omega^2 - 12}{\omega^4 - \omega^2 + 1} - j\frac{12 \cdot \omega}{\omega^4 - \omega^2 + 1}$$
$$A_y = A_u \cdot ku(\omega)$$
$$ku(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{12 \cdot \omega^2 - 12}{\omega^4 - \omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{12 \cdot \omega}{\omega^4 - \omega^2 + 1}\right)^2} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega^4 - \omega^2 + 1}}$$

A_y będzie max., gdy $ku(\omega)$ będzie max., tj. $\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1}$ będzie min. $\omega \geq 0$, $min(\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1})$ dla $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Zadanie 8 - Egzamin

Wykorzystując kryterium Nyquista sprawdzić czy układ zamknięty będzie asymptotycznie stabilny, jeśli układ otwarty opisany transmitancją:

$$G(s) = \frac{6}{s^3 + 2s^2 + 2s + 40}$$

połączono szeregowo z regulatorem proporcjonalnym $G_K = 100$.

3. I metoda Lapunowa

3.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Informatyka Modelowanie

Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$$

Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

Zadanie 2 - Informatyka Modelowanie

Dany jest system dynamiczny

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - 3x_1(t)^2 - x_2(t) \end{aligned}$$

Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

Zadanie 3 - Informatyka Modelowanie

Dla jakich wartości parametru ϵ zerowy punkt równowagi układu zwanego oscylatorem Van der Pola będzie niestabilny.

$$\ddot{x}(t) - \epsilon(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

Zadanie 4 - Informatyka Modelowanie

Dla jakich wartości parametru a linearyzacja przestaje spełniać warunki twierdzenia Grobmana-Hartmana dla układu opisanego równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) \end{aligned}$$

Zadanie 5 - Informatyka Modelowanie

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)\end{aligned}$$

będzie niestabilny.

Zadanie 6 - Informatyka Modelowanie

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)\end{aligned}$$

będzie asymptotycznie stabilny.

Zadanie 7 - Egzamin

Do układu opisanego równaniami

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1(t) = (u(t) - x_1(t))(1 + x_2^2(t))\\ &\dot{x}_2(t) = (x_1(t) - 2x_2(t))(1 + x_1^2(t))\\ &y(t) = x_2(t)\end{aligned}$$

wpięto sprzężenie zwrotne postaci $u(t) = -Ky(t)$. Znaleźć punkty równowagi układu zamkniętego w zależności od parametru K. Dla jakich wartości parametru K zerowy punkt równowagi jest lokalnie asymptotycznie stabilny.

3.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

Zadanie 1 - Informatyka Modelowanie
Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$$

Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$
$\dot{x}(t) = f(x(t))$
x_r jest punktem równowagi $\Leftrightarrow f(x_r) = 0$
$f(x_r) = \cos(x_r) \cdot \underbrace{e^{-x_r^2}}_{<0} = 0 \Rightarrow cos(x_r) = 0 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x) \cdot e^{-x^2} + \cos(x) \cdot (-2xe^{-x^2}) = -e^{-x^2}(\sin(x) + 2x\cos(x))$

$$J(x_r) = \underbrace{-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}}_{<0}\underbrace{(\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi))}_{=1\vee=-1} + \underbrace{2(\frac{\pi}{2} + k\pi)\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi)}_{=0} = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}(\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi))$$

$$\lambda = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)$$

Niestabilny gdy $\lambda > 0$:

$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) > 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + (2k\pi + 1)\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$

Stabilny asymptotycznie gdy $\lambda < 0$:

$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) > 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 2 - Informatyka Modelowanie
Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_1(t)^2 - x_2(t)$$

Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-6x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$

$-2x_1 - 3x_1^2 = 0$

$x_1(2+3x_1) = 0$

$x_1 = 0 \;\vee\; x_1 = -\frac{2}{3}$

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad\vee\quad$ $x_r = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + \lambda + 2$

$\Delta = -7$

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$

$\lambda = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ Stabilny

$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-\lambda)(-1-\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2$

$\Delta = 9$

$\lambda = \frac{-1\pm 3}{2}$

$\lambda = 1 \;\vee\; \lambda = -2$

$\lambda = 1 > 0 \Rightarrow$ Niestabilny

Zadanie 3 - Informatyka Modelowanie
Dla jakich wartości parametru ϵ zerowy punkt równowagi układu zwanego oscylatorem Van der Pola będzie niestabilny.

$$\ddot{x}(t) - \epsilon(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \epsilon(1 - x(t)^2) \cdot \dot{x}(t) - x(t) = \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\epsilon x_1 x_2 - 1 & \epsilon(1 - x_1^2) \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny:
$(-\lambda)(\epsilon - \lambda) + 1 = \lambda^2 - \lambda\epsilon + 1 = 0$

$\Delta = \epsilon^2 - 4 \Rightarrow \lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}$
Niestabilny jeżeli część rzeczywista $> 0 \Rightarrow \frac{\epsilon}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon > 0}$
Asymptotycznie stabilny gdy $\begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (kr. Hurwitza) $-\epsilon > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon < 0}$
Dla macierzy systemu zlinearyzowanego można już stosować kryteria stabilności dotyczące układów liniowych.

Zadanie 4 - Informatyka Modelowanie

Dla jakich wartości parametru a linearyzacja przestaje spełniać warunki twierdzenia Grobmana-Hartmana dla układu opisanego równaniami:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)\end{aligned}$$

$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t))$

$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))$

$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$

Zauważamy, że albo $x_1 = x_2 = 0$ albo dla $x_2 \neq 0 \wedge x_1 \neq 0$:

$\begin{cases} -\frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow -x_2^2 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ (sprzeczność)

więc $x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

z tw. Grobmana-Hartmana:

$\det(j\omega I - J(x_r)) \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}$

$\begin{vmatrix} j\omega - a & -1 \\ 1 & j\omega - a \end{vmatrix} = 0$

$(j\omega - a)^2 + 1 = 0$

$j\omega - a = \pm j \Rightarrow \boxed{a = 0}$

$J(x_r)$ nie ma wartości własnych na osi urojonej

$\begin{bmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{bmatrix}$

$(a - \lambda)^2 + 1 = 0$

$a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$

$\Delta = 4a^2 - 4a^2 - 4$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$

dla $a = 0$ wartości własne są na osi urojonej

Zadanie 5 - Informatyka Modelowanie
Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) \end{aligned}$$

będzie niestabilny.

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$

$\Delta = -4$

$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$

niestabilny, gdy $Re(\lambda) > 0$

$a > 0$

Zadanie 6 - Informatyka Modelowanie

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami:

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$$

będzie asymptotycznie stabilny.

$$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$
$$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$$

Kr. Hurwitza:

$-2a > 0 \Rightarrow a < 0$

$-2a(a^2 + 1) > 0 \Rightarrow a < 0$

Zadanie 7 - Egzamin
Do układu opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = (u(t) - x_1(t))(1 + x_2^2(t))$$
$$\dot{x}_2(t) = (x_1(t) - 2x_2(t))(1 + x_1^2(t))$$
$$y(t) = x_2(t)$$

wpięto sprzężenie zwrotne postaci $u(t) = -Ky(t)$. Znaleźć punkty równowagi układu zamkniętego w zależności od parametru K. Dla jakich wartości parametru K zerowy punkt równowagi jest lokalnie asymptotycznie stabilny.

W niezerowym punkcie równowagi x1 nie jest równe 0 - do poprawy

$u(t) = -ky(t) = -kx_2(t)$
$\dot{x}_1(t) = (-kx_2(t) - x_1(t))(1 + x_2^2(t))$
$\dot{x}_2(t) = (x_1(t) - 2x_2(t))(1 + x_1^2(t))$
Zapisuje dla wygody :
$\dot{x}_1 = (-kx_2 - x_1)(1 + x_2^2)$
$\dot{x}_2 = (x_1 - 2x_2)(1 + x_1^2)$
Szukam punktów równowagi, widać, że tylko jeden z czynników może być równy 0 :

$$\begin{cases} -kx_2 - x_1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -kx_2 = x_1 \\ -kx_2 - 2x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -kx_2 = x_1 \\ -kx_2 - 2x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -kx_2 = x_1 \\ x_2(-k - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ k \in \mathbb{R} - \{-2\} \end{cases} \vee \begin{cases} -k - 2 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k = -2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Wymnażając prawe strony równań wyjściowych otrzymano:

$$\dot{x}_1(t) = -kx_2 - kx_2^3 - x_1 - x_1x_2^3$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1 + x_1^3 - 2x_2 - 2x_2x_1^2$$

Macierz Jacobiego:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \frac{\partial f_1}{x_2} \\ \frac{\partial f_2}{x_1} & \frac{\partial f_2}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - x_2^2 & -k - 3kx_2^2 - 2x_1x_2 \\ 1 + 3x_1^2 - 4x_2 & -2 - 2x_1^2 \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu zerowego punktu równowagi:

$$\begin{bmatrix} -1 & -k \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & k \\ -1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 + k$$

Równanie jest drugiego rzędu więc asymptotyczna stabilność będzie dla $k > -2$.

4. II metoda Lapunowa

4.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Niebieski skrypt

Zbadać stabilność nieliniowego systemu dynamicznego

$$\dot{x}(t) = -x^3$$

Zadanie 2 - Niebieski skrypt

Zbadać stabilność nieliniowego systemu dynamicznego

$$\dot{x}(t) = -x + x^3$$

Zadanie 3 - Niebieski skrypt / Egzamin

Zbadać stabilność punktów równowagi nieliniowego systemu dynamicznego

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= x_2(t) - \sin x_1(t) \\ \dot{x_2}(t) &= -x_1^3 \end{aligned}$$

Zadanie 4 - Zadania od Bauera do kolokwium II

Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = x(t) - \sin(x(t))$$

Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą II metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

Zadanie 5 - Zadania od Bauera do kolokwium II

Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2x(t)^2$$

Za pomocą metody La Salle'a określić przybliżony zbiór przyciągania zerowego punktu równowagi.

Zadanie 6 - Zadania od Bauera do kolokwium II

Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x_1}(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x_2}(t) = -2x_1(t) - x_2(t)$$

Za pomocą II metody Lapunowa pokazać asymptotyczną stabilność zerowego punktu równowagi (wskazówka: funkcjonał Lapunowa można wyznaczyć za pomocą równania Lapunowa).

Zadanie 7 - Zadania od Bauera do kolokwium II

Układ postaci

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

z macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

objęto ujemnym, nieliniowym, sprzężeniem zwrotnym od wyjścia $f(y) = y^3$. Uzasadnić, że forma kwadratowa $V(x) = x^T Hx$, gdzie H jest rozwiązaniem równania:

$$A^T H + HA = -C^T C$$

jest funkcjonałem Lapunowa dla tego układu. Znaleźć maksymalny obszar atrakcji zerowego punktu równowagi.

4.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

Zadanie 1 - Niebieski skrypt
Zbadać stabilność nieliniowego systemu dynamicznego

$$\dot{x}(t) = -x^3$$

System jest nieliniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy, ciągły. Załóżmy, że istnieje potok rozwiązań układu w otoczeniu punktu równowagi.
Punkty równowagi:

$$-x^3 = 0 \implies x = 0$$

Istnieje tylko jeden punkt równowagi $x^* = 0$.
Kandydat na funkcjonał Lapunowa:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$V(x)$ spełnia założenia:

- Istnieje otoczenie Ω_1 takie, że $V(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega_1 - \{0\}$
- $V(x)$ jest ciągły
- $V(x)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu
- $V(0) = 0$

Obliczam $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V} = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\left[f(x)\right] = x \cdot (-x^3) = -x^4$$

Istnieje więc otoczenie Ω_2 punktu $x^* = 0$ takie, że spełnione są warunki:

$$V(x) > 0 \wedge \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega_2 - \{0\}$$

Punkt równowagi $x^* = 0$ jest więc stabilny asymptotycznie. Jako, że jest to jedyny punkt równowagi może być on także globalnie asymptotycznie stabilny. Zauważmy, że zachodzi dla:

$$||x|| \to \infty \implies V(x) \to \infty$$

więc punkt $x^* = 0$ jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Zadanie 2 - Niebieski skrypt
Zbadać stabilność nieliniowego systemu dynamicznego

$$\dot{x}(t) = -x + x^3$$

System jest nieliniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy, ciągły. Załóżmy, że istnieje potok rozwiązań układu w otoczeniu punktu równowagi.
Punkty równowagi:

$$\begin{aligned}
&-x + x^3 = 0\\
&x(-1 + x^2) = 0\\
&x(x-1)(x+1) = 0\\
&x^* = 0 \vee x^* = -1 \vee x^* = 1
\end{aligned}$$

Istnieją trzy punkty równowagi.
Przypadek I $x^* = 0$
Kandydat na funkcjonał Lapunowa:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$V(x)$ spełnia założenia:

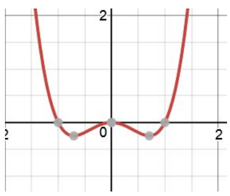
- Istnieje otoczenie Ω_1 takie, że $V(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega_1 - \{0\}$
- $V(x)$ jest ciągły
- $V(x)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu
- $V(0) = 0$

Obliczam $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V} = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\left[f(x)\right] = x \cdot (-x + x^3) = -x^2 + x^4 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$$

Istnieje więc otoczenie Ω_2 punktu $x^* = 0$ takie, że spełnione są warunki:

$$V(x) > 0 \wedge \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega_2 - \{0\}$$



Rysunek 3: Pochodna

Punkt równowagi $x^* = 0$ jest więc stabilny asymptotycznie. Jako, że nie jest to jedyny punkt równowagi nie rozpatrujemy globalnej asymptotycznej stabilności.

Przypadek II $x^* = 1$

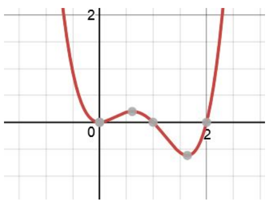
Lapunow II jest sformułowany dla zerowego punktu równowagi, aby badać niezerowe trzeba wykonać przesunięcie układu współrzędnych podstawiając $x = x - x^*]$. W tym przypadku podstawiam $x = x - 1$.

Wtedy system ma postać:

$$\frac{d(x(t)-1)}{dt} = -(x(t)-1) + (x(t)-1)^3$$
$$\frac{dx}{dt} = -x + 1 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$\dot{x} = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Przyjmuje funkcjonał Lapunowa jak w przypadku I i liczę pochodną:

$$\dot{V} = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] \left[f(x)\right] = x \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x) = x^2(x-2)(x-1)$$



Rysunek 4: Pochodna

Pochodna w otoczeniu 0 ma więc wartość dodatnią, co oznacza, że punkt równowagi $x^* = -1$ jest niestabilny.

Przypadek III $x^* = -1$

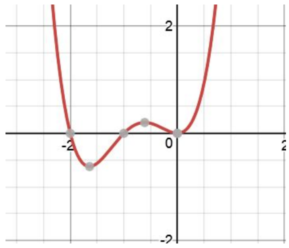
W tym przypadku podstawiam $x = x + 1$.

Wtedy system ma postać:

$$\frac{d(x(t)+1)}{dt} = -(x(t)+1) + (x(t)+1)^3$$
$$\frac{dx}{dt} = -x - 1 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3x^2 + 2x$$
$$\dot{x} = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Przyjmuje funkcjonał Lapunowa jak w przypadku I i liczę pochodną:

$$\dot{V} = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] \left[f(x)\right] = x \cdot (x^3 + 3x^2 + 2x) = x^2(x+2)(x+1)$$



Rysunek 5: Pochodna

Pochodna w otoczeniu 0 ma więc wartość dodatnią, co oznacza, że punkt równowagi $x^* = 1$ jest niestabilny.

Zadanie 3 - Niebieski skrypt / Egzamin
Zbadać stabilność punktów równowagi nieliniowego systemu dynamicznego

$$\dot{x_1}(t) = x_2(t) - \sin x_1(t)$$
$$\dot{x_2}(t) = -x_1^3$$

System jest nieliniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy, ciągły. Załóżmy, że istnieje potok rozwiązań układu w otoczeniu punktu równowagi.
Punkty równowagi:

$$\begin{cases} x_2 - sinx_1 = 0 \\ -x_1^3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

System ma jeden punkt równowagi $x^* = 0$.
Wybieramy funkcjonał Lapunowa, gdybyśmy wzięli funkcjonał energetyczny, to w tym przypadku nie udałoby się nam określić jednoznacznie znaku pochodnej w otoczeniu 0 (można przeliczyć i sprawdzić), na podstawie czego nie można wnioskować o niczym.
System jest system postaci:

$$\dot{x_1}(t) = x_2(t) - h(x_1)$$
$$\dot{x_2}(t) = -g(x_1)$$

Dla systemu w takiej postaci często dobrym wyborem jest zastosowanie funkcjonały Lapunowa:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(\xi)d\xi$$

którego pochodna jest dana wzorem:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -g(x_1)h(x_1)$$

Obliczam funkcjonał:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} -\xi^3 d\xi$$
$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\xi^4}{4}\Big|_0^{x_1}$$
$$V(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$$

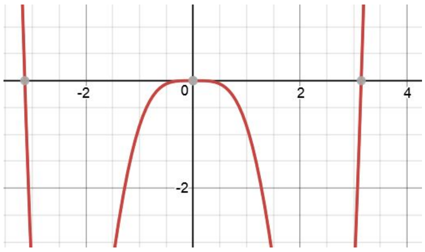
Spełnia on założenia:

- $V(0) > 0$
- $V(x) > 0$ w pewnym otoczeniu 0

- $V(x)$ jest ciągły
- $V(x)$ ma ciągłe pierwsze pochodne

Pochodna:

$$\dot{V}(x) = -g(x_1)h(x_1) = -x_1^3 \sin x_1$$



Rysunek 6: Pochodna

Istnieje więc takie otocznie punktu równowagi, że pochodna jest niedodatnia $\dot{V}(x) \leq 0$, ale nie zachodzi nierówność ostra, bo dla punktów $(0, x_2)$ pochodna się zeruje dla dowolnego x_2. Zatem wykazano, że punkt równowagi $x^* = 0$ jest stabilnym punktem równowagi systemu (ale nie asymptotycznie stabilnym).

Zadanie 4 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = x(t) - \sin(x(t))$$

Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą II metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

System jest nieliniowy ciągły, skończenie wymiarowy, stacjonarny, zakładam, że ma rozwiązanie.
Punkty równowagi:

$$x(t) - \sin(x(t)) = 0$$
$$sin(x(t)) = x$$
$$x^* = 0$$

Jest tylko jeden punkt równowagi.
Kandydat na funkcjonał Lapunowa:

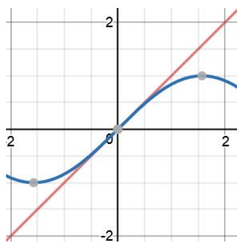
$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Spełnia on założenia:

- $V(x)$ jest ciągły
- $V(x) > 0$ w pewnym otoczeniu 0
- $V(x)$ ma ciągłe pochodne I rzędu
- $V(0) = 0$

Obliczam pochodną:

$$\dot{V}(x) = x \cdot (x - \sin x) = x^2 - x \sin x = x(x - \sin x)$$



Rysunek 7: sinx i x - jeden punkt wspólny

Zatem $\forall x$ należącego do otoczenia x^* zachodzi $\dot{V}(x) > 0$, a zatem punkt równowagi jest niestabilny.

Zadanie 5 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2x(t)^2$$

Za pomocą metody La Salle'a określić przybliżony zbiór przyciągania zerowego punktu równowagi.

System jest nieliniowy ciągły, skończenie wymiarowy, stacjonarny, zakładam, że ma rozwiązanie.
Punkty równowagi to $x^* = 0$ (z polecenia). Kandydat na funkcjonał Lapunowa:

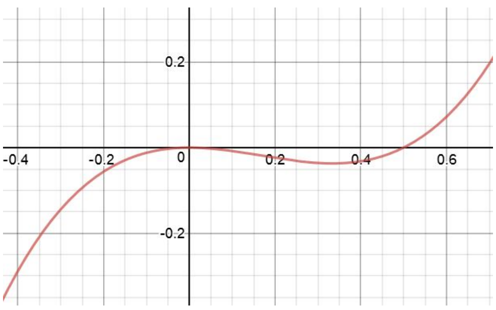
$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Spełnia on założenia:

- $V(x)$ jest ciągły
- $V(x) > 0$ w pewnym otoczeniu 0
- $V(x)$ ma ciągłe pochodne I rzędu
- $V(0) = 0$

Obliczam pochodną:

$$\dot{V}(x) = x \cdot (-x + 2x^2) = x^2(-1 + 2x)$$



Rysunek 8: $x^2(-1 + 2x)$

Wyznaczam Z_l - kandydatem jest $l = \frac{1}{8}$, bo z rysunku widać, że maksymalny zbiór będzie dla $|x| < \frac{1}{2}$, czyli

$$\begin{aligned}|x| &< \frac{1}{2}\\ x^2 &< \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}x^2 &< \frac{1}{8}\\ V(x) &< l\end{aligned}$$

Przybliżony zbiór przyciągania to:

$$Z_l = \{x : \frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{8}\} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Zadanie 6 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x_1}(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x_2}(t) = -2x_1(t) - x_2(t)$$

Za pomocą II metody Lapunowa pokazać asymptotyczną stabilność zerowego punktu równowagi (wskazówka: funkcjonał Lapunowa można wyznaczyć za pomocą równania Lapunowa).

(Po co robić Lapunowa dla systemu liniowego ???)
System jest ciągły, skończenie wymiarowy, stacjonarny, zakładam, że ma rozwiązanie.
Punkty równowagi to $x^* = 0$ (z polecenia). Kandydat na funkcjonał Lapunowa (zgodnie ze wskazówką):

$$V(x) = x^T D x$$

Macierz A systemu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Równanie Lapunowa ma postać:

$$A^T D + DA = -G$$

Ma ono rozwiązanie gdy:

$$Re\lambda(A) < 0$$

$$det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 1) + 2 = \lambda^2 + \lambda + 2$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 = -7$$
$$\lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$$

Zresztą widać, że równanie 2 rzędu i same współczynniki dodatnie więc musi mieć ujemne części rzeczywiste pierwiastków.
G wybieram arbitralnie taką, że $G = G^T > 0$, wybieram macierz jednostkową. D jest również macierzą symetryczną dodatnio określoną.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}$$
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2d_{12} & -2d_{22} \\ d_{11} - d_{12} & d_{12} - d_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2d_{12} & d_{11} - d_{12} \\ -2d_{22} & d_{12} - d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4d_{12} & d_{11} - d_{12} - 2d_{22} \\ d_{11} - d_{12} - 2d_{22} & 2d_{12} - 2d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4d_{12} = -1 \\ d_{11} - d_{12} - 2d_{22} = 0 \\ d_{11} - d_{12} - 2d_{22} = 0 \\ 2d_{12} - 2d_{22} = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} d_{12} = \frac{1}{4} \\ d_{11} = \frac{7}{4} \\ d_{22} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Kandydat na funkcjonał Lapunowa:

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 & \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{7}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{3}{4}x_2^2 =$$
$$\frac{7}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{3}{4}x_2^2$$

Spełnia on założenia:

- $V(x)$ jest ciągły
- $V(x) > 0 \quad \forall x - \{0\}$ (bo forma jest dodatnio określona)
- $V(x)$ ma ciągłe pochodne I rzędu
- $V(0) = 0$

Obliczam pochodną:

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \frac{14}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & \frac{6}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -2x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2$$

Widać więc, z postaci pochodnej, że jest ona zawsze ujemna w otoczeniu zera, a zatem zachodzi $V(x) > 0 \wedge \dot{V}(x) < 0$ w pewnym otoczeniu 0 więc jest to punkt równowagi asymptotycznie stabilny.

Zadanie 7 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Układ postaci

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

z macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

objęto ujemnym, nieliniowym, sprzężeniem zwrotnym od wyjścia $f(y) = y^3$. Uzasadnić, że forma kwadratowa $V(x) = x^T Hx$, gdzie H jest rozwiązaniem równania:

$$A^T H + HA = -C^T C$$

jest funkcjonałem Lapunowa dla tego układu. Znaleźć maksymalny obszar atrakcji zerowego punktu równowagi.

System jest nieliniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy, z czasem ciągłym. Z drugiego równania systemu:

$$\begin{aligned}y(t) &= x_1\\ u(t) &= f(y) = y^3 = x_1^3\end{aligned}$$

UWAGA: system objęty jest *ujemnym* sprzężeniem zwrotnym dlatego sterowanie $u(t)$ wstawiamy ze znakiem minus do równań systemu.
Więc system można zapisać:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) = -x_1(t) - x_2(t) + x_1^3(t) \end{cases}$$

Jednym z punktów równowagi tego systemu jest $x^* = 0$.

$$-CC^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz H to macierz symetryczna dodatnio określona:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -h_{12} & -h_{22} \\ h_{11}-h_{12} & h_{12}-h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h_{12} & h_{11}-h_{12} \\ -h_{22} & h_{12}-h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2h_{12} & h_{11}-h_{12}-h_{22} \\ h_{11}-h_{12}-h_{22} & 2h_{12}-2h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2h_{12} = -1 \\ h_{11}-h_{12}-h_{22} = 0 \\ 2d_{12}-2d_{22} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} h_{12} = \frac{1}{2} \\ h_{11} = 1 \\ h_{22} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Kandydat na funkcjonał Lapunowa:

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 =$$
$$x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

Spełnia on założenia:

- $V(x)$ jest ciągły
- $V(x) > 0 \quad \forall x - \{0\}$ (bo forma jest dodatnio określona)
- $V(x)$ ma ciągłe pochodne I rzędu
- $V(0) = 0$

Obliczam pochodną:

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_2 + x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 + x_1^3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(x) = 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_2^2 + x_2x_1^3 - x_1^2 - x_2x_1 + x_1^4 = x_1^4 - x_1^2 + x_2x_1^3 = x_1^2(x_1^2 + x_2x_1 - 1)$$

x_1^2 jest zawsze dodatnie oraz istnieje takie otoczenie 0, że wyrażenie $x_1^2 + x_2x_1 - 1$ jest niedodatnie więc jest to funkcjonał Lapunowa.

Aby wyznaczyć obszar przyciągania korzystam z twierdzenia LaSalle'a. Poszukuje takiego obszaru aby spełnione były oba warunki :

$$V(x) > 0$$
$$\dot{V}(x) \leq 0$$

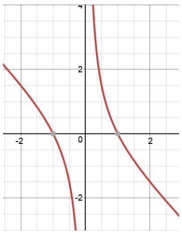
w pierwszej kolejności interesuje mnie gdzie jest granica w której pochodna przestaje być niedodatnia. Tą granicę obliczam z równania:

$$\dot{V}(x) = 0 \implies x_1 = 0 \vee x_1^2 + x_2 x_1 - 1 = 0$$

Z drugiego równania otrzymuje, że:

$$x_2 = \frac{1 - x_1^2}{x_1}$$

co wyznacza granicę po przekroczeniu której pochodna przestaje być niedodatnia.



Rysunek 9: Granica niedodatniości pochodnej

Teraz sprawdzam czy na tej granicy funkcjonał $V(x)$ pozostaje dodatni. W tym celu podstawiam $x_2 = \frac{1-x_1^2}{x_1}$ do wyrażenia na $V(x)$ i otrzymuje:

$$V_1(x_1) = \frac{x_1^4 + 1}{2x_1}$$

co odpowiada wartościom funkcji $V(x)$ na wyznaczonym brzegu. Aby sprawdzić czy funkcja jest tam dodatnio szukam jej minimum, które wynosi:

$$x_{1min} = -1 \vee 1 \implies x_{2min} = 0$$
$$V_{min}(x_{1min}, x_{2min}) = 1$$

co odpowiada minimalnej wartości na brzegu. A zatem maksymalny obszar przyciągania wyznaczony na podstawie twierdzenia LaSalle'a to:

$$Z_l = \{x : V(x) < l = 1\}$$

5. Kryterium Koła i Popova

5.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Układ postaci

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 4u(t)$$

z wyjściem $y(t) = x(t)$ objęto ujemnym sprzężeniem zwrotnym od wyjścia:

$$u(t) = (1 + e^{-t})y$$

Zbadać asymptotyczną stabilność powstałego układu.

Zadanie 2 - Egzamin
Układ postaci

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y &= Cx(t)\end{aligned}$$

z macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

objęto, ujemnym, nieliniowym sprzężeniem zwrotnym od wyjścia $f(y) = y^3$. Sprawdzić stabilność asymptotyczną zerowego punktu równowagi.
Wskazówka: Wykorzystać kryterium Popova
Uwaga: Zakładamy $\beta > 0$, $\gamma > 0$ $\beta \cdot \gamma > 0$

5.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

Zadanie 1 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Układ postaci

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 4u(t)$$

z wyjściem $y(t) = x(t)$ objęto ujemnym sprzężeniem zwrotnym od wyjścia:

$$u(t) = (1 + e^{-t})y$$

Zbadać asymptotyczną stabilność powstałego układu.

System ma sprzężenie zwrotne niestacjonarne, co wyklucza stosowanie kryterium Popova, bo jest ono zdefiniowane dla sprzężenia stacjonarnego, stosuje twierdzenie Koła.
Spełnione są założenia:

- System jest SISO, liniowy, stacjonarny, objęty nieliniowym, niestacjonarnym sprzężeniem zwrotnym
- Macierz A części liniowej nie ma pierwiastków na osi urojonej (nie musi być stabilna asymptotycznie !), bo $\lambda = -2 = A$ dla systemu jednowymiarowego.

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 4(1 + e^{-t})y(t) = -2x(t) + 4(1 + e^{-t})y(t)$$

Wyznaczam transmitancję części liniowej:

$$G(s) = C^T(sI - A)^{-1}B = 1 \cdot (s + 2)^{-1} \cdot 4 = \frac{4}{s+2}$$

Ale twierdzenie Koła (jak też Popova) są sformułowane dla dodatniego sprzężenia zwrotnego więc bierzemy ze znakiem minus:

$$G_1(s) = -\frac{4}{s+2}$$

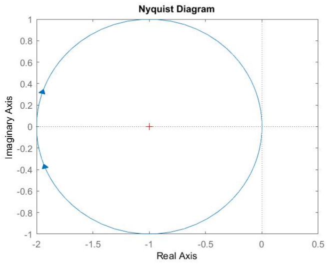
Wyznaczam charakterystykę amplitudowo-fazową:

$$G_1(j\omega) = \frac{-4}{j\omega + 2} = \frac{-4(2 - j\omega)}{(2 + j\omega)(2 - j\omega)} = \frac{-4(2 - j\omega)}{4 - (j\omega)^2} = \frac{-8 + 4j\omega}{4 - j^2\omega^2} = \frac{-8 + 4j\omega}{4 + \omega^2} = \frac{-8}{\omega^2 + 4} + j\frac{4\omega}{4 + \omega^2}$$

Wyznaczam tabelkę wartości dla charakterystyki:

ω	0	$\frac{1}{2}$	2	6	∞
$P(\omega)$	-2	$\frac{-32}{17}$	-1	$\frac{-1}{5}$	0
$Q(\omega)$	0	$\frac{8}{17}$	1	$\frac{3}{8}$	0

Szkicuję charakterystykę:



Rysunek 10: Szkic charakterystyki amp-faz

Widać, że wychodzi coś podobnego do koła, można jeszcze sprawdzić czy maksymalną wartością na osi urojonej jest 1 poprzez sprawdzenie zerowania pochodnej $Q(\omega)$:

$$Q^{'}(\omega) = \frac{4(\omega^2+4) - 2\omega \cdot 4\omega}{(\omega^2+4)^2} = \frac{4(2-\omega)(2+\omega)}{(\omega^2+4)^2}$$

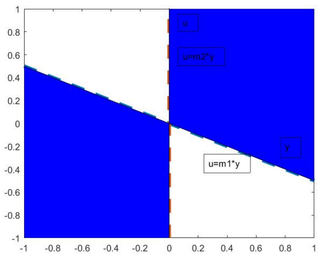
Widać, że ma maksimum dla $\omega = 2$ więc maksymalna wartość na osi urojonej to 1.
Dobieram m_1 i m_2 (m_2 > m_1) aby zawrzeć charakterystykę w kole[1], takim które przecina oś $P(\omega)$ w punktach $\frac{1}{m_1}$ i $\frac{1}{m_2}$. Charakterystyka nie może mieć punktów wspólnych z brzegiem koła więc dobieram:

$$\frac{1}{m_2} > 0$$
$$\frac{1}{m_1} < -2$$

skąd otrzymuje, że:

$$m_2 < \infty$$
$$m_1 > \frac{-1}{2}$$

Stąd sektor dopuszczalny:



Rysunek 11: Sektor dopuszczalny

[1]Gdyby się tak nie dało dobrać koła bo charakterystyka by była za duża, to dobieram półpłaszczyznę, wtedy $m_1 = 0$ lub $m_2 = 0$

Jeśli wykres funkcji $u(t) = f(t, y)$ zawiera się w sektorze dopuszczalnym, to zerowe rozwiązanie układu zamkniętego jest asymptotycznie stabilne, jeśli tak nie jest, to nic nie można powiedzieć o stabilności układu. W przypadku zadania $u(t) = (1 + e^{-t})y$ więc wykres w każdej chwili czasu zawiera się w sektorze dopuszczalnym więc punkt równowagi jest asymptotycznie stabilny.

Zadanie 2 - Egzamin

Układ postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) \end{aligned}$$

z macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

objęto, ujemnym, nieliniowym sprzężeniem zwrotnym od wyjścia $f(y) = y^3$. Sprawdzić stabilność asymptotyczną zerowego punktu równowagi.

Wskazówka: Wykorzystać kryterium Popova

Uwaga: Zakładamy $\beta > 0$, $\gamma > 0$ $\beta \cdot \gamma > 0$

6. Systemy dyskretne

6.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Zadania od Bauera do kolokwium II

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

przy czym

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

Zadanie 2 - Zadania od Bauera do kolokwium II

Do systemu

$$\begin{aligned}&x_1(i+1) = x_2(i)\\ &x_2(i+1) = x_1(i) + x_2(i) + u(i)\\ &u(i) = -k_1x_1(i) - k_2x_2(i)\\ &i = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

zbadać asymptotyczną stabilność układu w zależności od k_1 i k_2. Zaznaczyć odpowiedni obszar na płaszczyźnie $k_1 \times k_2$.

Zadanie 3 - Zadania od Bauera do kolokwium II

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -ln\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -ln\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ln9 \\ ln8 \end{bmatrix} u(t)$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1$. Znaleźć parametry systemu dyskretnego odpowiadające temu połączeniu. Do powstałego modelu dyskretnego wpięto sterowania postaci $u(k) = Kx(k)$. Dobrać wartości K tak aby wartościami własnymi układu zamkniętego były $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Wskazówka: Sterowania ma postać $u(k) = K_1x_1(k) + K_2x_2(k)$

Zadanie 4 - Egzamin

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \pi & 0 \\ -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix} u(t)$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu. Do powstałego modelu dyskretnego wpięto sterowanie $u(k) = Kx(k)$. Dobrać wartość K tak żeby układ zamknięty był:

- asymptotycznie stabilny
- stabilny

Wskazówka: Sterowanie ma postać $u(k) = K_1 x_1(k) + K_2 x_2(k) + K_3 x_3(k)$.

6.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

Zadanie 1 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

przy czym

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.s

$$\begin{aligned} &x^+(i+1) = A^+x^+(i) + B^+u^+(i) \\ &y^+(i) = C^+x^+(i) \end{aligned}$$

gdzie

$$x^+(i) = x(ih), u^+(i) = u(ih), y^+ = y(ih), i = 0, 1, 2, \dots,$$

$h = 1s$

$$A^+ = e^{hA}$$

A jest w postaci kanonicznej Jordana z wartościami własnymi $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -3$.

$$A^+ = e^{hA} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 h} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{bmatrix}$$

$$B^+ = \int_0^h e^{tA} B dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int_0^1 e^{-t}dt & \int_0^1 0dt \\ \int_0^1 0dt & \int_0^1 e^{-3t}dt \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -e^{-t}\Big|_0^1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3}e^{-3t}\Big|_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-1}+1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3}e^{-3} + \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$C^+ = C$$

Zadanie 2 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Do systemu

$$\begin{aligned} &x_1(i+1) = x_2(i) \\ &x_2(i+1) = x_1(i) + x_2(i) + u(i) \\ &u(i) = -k_1x_1(i) - k_2x_2(i) \\ &i = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

zbadać asymptotyczną stabilność układu w zależności od k_1 i k_2. Zaznaczyć odpowiedni obszar na płaszczyźnie $k_1 \times k_2$.

Podstawiam za $u(i)$ sterowanie i otrzymuje układ:

$$\begin{aligned} &x_1(i+1) = x_2(i) \\ &x_2(i+1) = x_1(i)(1-k_1) + x_2(i)(1-k_2) \end{aligned}$$

Nowa macierz układu:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-k_1 & 1-k_2 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny:

$$det(\lambda I - M) = det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ k_1 - 1 & \lambda + k_2 - 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + k_2 - 1) + (k_1 - 1) = \lambda^2 + \lambda k_2 - \lambda + k_1 - 1 =$$

$$\lambda^2 + \lambda(k_2 - 1) + k_1 - 1$$

Układ będzie asymptotycznie stabilny $\Leftrightarrow$ wartości własne tego równania będę się znajdować wewnątrz koła jednostkowego o środku w zerze.
Gdyby teraz policzyć wartości własne z tego równania to nie wyszły by one zbyt ładne i ciężko by było stwierdzić kiedy leżą w kole a kiedy nie.
Stosując przekształcenie $\lambda = \frac{s+1}{s-1}$ odwzorowujemy wnętrze koła jednostkowego w lewą półpłaszczyznę zespoloną.

$$\begin{gathered} \frac{(s+1)^2}{(s-1)^2} + \frac{(s+1)(k_2-1)}{s-1} + k_1 - 1 = \\ \frac{(s+1)^2 + (s+1)(s-1)(k_2-1) + (k_1-1)(s-1)^2}{(s-1)^2} = \\ \frac{s^2 + 2s + 1 + (s^2-1)(k_2-1) + (k_1-1)(s^2-2s+1)}{(s-1)^2} \end{gathered}$$

Licznik:

$$\begin{aligned} &s^2 + 2s + 1 + s^2k_2 - s^2 - k_2 + 1 + k_1s^2 - 2k_1s + k_1 - s^2 + 2s - 1 = \\ &s^2(k_2 + k_1 - 1) + s(4 - 2k_1) + 1 - k_2 + k_1 \end{aligned}$$

Do tego wielomianu można zastosować kryterium Hurwitza. Warunek konieczny:

$$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$$

$$\begin{cases} k_2 > -k_1 + 1 \\ k_1 < 2 \\ k_2 < k_1 + 1 \end{cases}$$

Macierz Hurwitza:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 2k_1 & 0 \\ k_2 + k_1 - 1 & 1 - k_2 + k_1 \end{bmatrix}$$

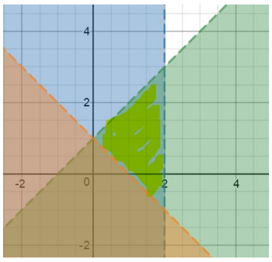
Minory wiodące większe od 0:

$$\begin{cases} 4 - 2k_1 > 0 \\ (4 - 2k_1)(1 - k_2 + k_1) > 0 \Leftrightarrow 1 - k_2 + k_1 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 < 2 \\ k_2 < k_1 + 1 \end{cases}$$

Ostatecznie:

$$\begin{cases} k_1 < 2 \\ k_2 < k_1 + 1 \\ k_2 > -k_1 + 1 \end{cases}$$

W żółtym obszarze (bez krawędzi) system pozostaje asymptotycznie stabilny.



Rysunek 12: Asymptotycznie stabilny (żółty bez krawędzi)

Zadanie 3 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -ln\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -ln\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ln9 \\ ln8 \end{bmatrix} u(t)$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1$. Znaleźć parametry systemu dyskretnego odpowiadające temu połączeniu. Do powstałego modelu dyskretnego wpięto sterowania postaci $u(k) = Kx(k)$. Dobrać wartości K tak aby wartościami własnymi układu zamkniętego były $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Wskazówka: Sterowania ma postać $u(k) = K_1x_1(k) + K_2x_2(k)$

W zadaniu dany jest układ ciągły więc pierwszą czynnością jest zamiana na układ dyskretny:

$$\begin{aligned} x^+(i+1) &= A^+x^+(i) + B^+u^+(i) \\ y^+(i) &= C^+x^+(i) \end{aligned}$$

gdzie

$$x^+(i) = x(ih), u^+(i) = u(ih), y^+ = y(ih), i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$h = 1s$

$$A^+ = e^{hA}$$

A jest w postaci kanonicznej Jordana z wartościami własnymi $\lambda_1 = -ln\frac{1}{3} = ln3$ i $\lambda_2 = -ln\frac{1}{2} = ln2$. W przekształceniach korzystam z tożsamości:

$$\begin{aligned} -\log_a b &= \log_a b^{-1} \\ a^{\log_a b} &= b \end{aligned}$$

$$A^+ = e^{hA} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 h} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ln3} & 0 \\ 0 & e^{ln2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^+ = \int_0^h e^{tA}Bdt = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{t\cdot ln3} & 0 \\ 0 & e^{t\cdot ln2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ln9 \\ ln8 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} ln9 \cdot e^{t\cdot ln3} \\ ln8 \cdot e^{t\cdot ln2} \end{bmatrix} dt =$$

$$\begin{bmatrix} ln9 \cdot \int_0^1 e^{t\cdot ln3}dt \\ \\ ln8 \cdot \int_0^1 e^{t\cdot ln2}dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ln9}{ln3} \cdot \left[e^{t\cdot ln3}\Big|_0^1 \right] \\ \frac{ln8}{ln2} \left[e^{t\cdot ln2}\Big|_0^1 \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (e^{ln3} - 1) \\ 3 \cdot (e^{ln2} - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C^+ = C$$

System z obliczonymi macierzami jest postaci:

$$\begin{aligned} x^+(i+1) &= A^+x^+(i) + B^+u^+(i) \\ y^+(i) &= C^+x^+(i) \end{aligned}$$

wiadomo, że $u(k) = K_1x_1(k) + K_2x_2(k)$, podstawiając to równanie jako sterowanie do systemu:

$$\begin{bmatrix} x_1^+(i+1) \\ x_2^+(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} (K_1x_1(i) + K_2x_2(i))$$

$$\begin{cases} x_1^+(i+1) = (3+4K_1)x_1(i) + 4K_2x_2(i) \\ x_2^+(i+1) = 3K_1x_1(i) + (2+3K_2)x_2(i) \end{cases}$$

Nowa macierz:

$$M = \begin{bmatrix} 3+4K_1 & 4K_2 \\ 3K_1 & 2+3K_2 \end{bmatrix}$$

Wartości własne:

$$\det(\lambda I - M) = \begin{bmatrix} \lambda - 3 - 4K_1 & 4K_2 \\ 3K_1 & \lambda - 2 - 3K_2 \end{bmatrix} = (\lambda - 3 - 4K_1)(\lambda - 2 - 3K_2) - 3K_1 \cdot 4K_2 =$$

$$\begin{aligned} =&\lambda^2 - 2\lambda - 3K_2\lambda - 3\lambda + 6 + 9K_2 - 4K_1\lambda + 8K_1 + 12K_1K_2 - 12K_1K_2 = \\ &\lambda^2 + (-4K_1 - 3K_2 - 5)\lambda + 8K_1 + 9K_2 + 6 \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku można w tym miejscu skorzystać ze wzorów Viete'a, ale tutaj od razu widać, że aby $lambda_1 = \lambda_2 = 0$ musi zachodzić:

$$\begin{cases} -4K_1 - 3K_2 - 5 = 0 \\ 8K_1 + 9K_2 + 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -8K_1 - 6K_2 - 10 = 0 \\ 8K_1 + 9K_2 + 6 = 0 \end{cases} \implies 3K_2 - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{4}{3} \\ 8K_1 &= -8 - 10 \\ K_1 &= \frac{-9}{4} \end{aligned}$$

Zadanie 4 - Egzamin

Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \pi & 0 \\ -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix} u(t)$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1s$. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu. Do powstałego modelu dyskretnego wpięto sterowanie $u(k) = Kx(k)$. Dobrać wartość K tak żeby układ zamknięty był:

- asymptotycznie stabilny
- stabilny

Wskazówka: Sterowanie ma postać $u(k) = K_1x_1(k) + K_2x_2(k) + K_3x_3(k)$.

Tu macierz jest w postaci kanonicznej Jordana więc parametry wyznaczyć łatwo, później trochę trudniej...

7. Badanie zachowania układu

7.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Zadania od Bauera do kolokwium II

Dla systemu

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

zbadać zachowanie się układu w zależności od ξ i ω_0. Zaznaczyć odpowiednie obszary na płaszczyźnie $\xi \times \omega_0$.

Zadanie 2 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t)$$

będzie asymptotycznie stabilny.

Zadanie 3 - Zadania od Bauera do kolokwium I / Egzamin

Zbadać charakter pracy układu

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = u(t)$$
$$u(t) = Kx(t)$$

w zależności od parametru K. Zaznaczyć wszystkie istotne rodzaje zachowań na osi liczbowej.

Zadanie 4 - Egzamin

Dany jest układ opisany następującymi równaniami

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$
$$x(0) = 0$$
$$u(t) = Ky(t)$$
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobrać takie $K \in \mathbb{R}$ aby system zamknięty był asymptotycznie stabilny.

Zadanie 5 - Informatyka Modelowanie

Dla systemu

$$\begin{aligned} x(t) + 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) &= u(t) \\ u(t) &= k_1\dot{x}(t) - k_2 x(t) \end{aligned}$$

zbadać zachowanie się ukłądu w zależności od k_1 i k_2. Zaznaczyć odpowiednie obszary na płaszczyźnie $k_1 \times k_2$

Zadanie 6 - Egzamin

Dany jest system dynamiczny opisany równaniem:

$$\ddot{x}(t) = a\dot{x}(t) + bx(t) = u(t)$$
$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 \dot{x}(t)$$

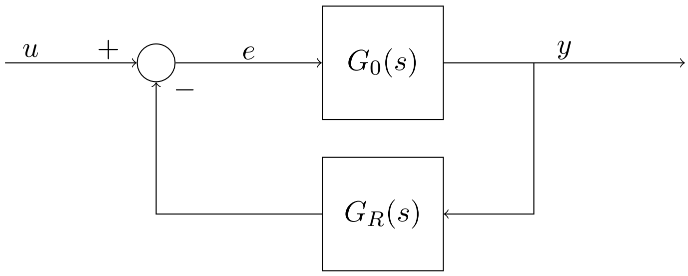
gdzie

$a,\ b$ to pewne stałe rzeczywiste

Dobrać parametry regulatora K_1 K_2 ,tak by równanie charakterystyczne układu miało zadane z góry pierwiastki λ_1 λ_2.

Zadanie 7 - Egzamin

Korzystając z kryterium Hurwitza określić stabilność układu automatycznej regulacji składającego się z obiektu o transmitancji $G(s) = \frac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ i regulatora $G_r(s) = K_r$, gdzie $T_1 = 1,5$, $T_2 = 0,5$, $K = 5$, $K_r = 0,5$.



7.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

Zadanie 1 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Dla systemu

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

zbadać zachowanie się układu w zależności od ξ i ω_0. Zaznaczyć odpowiednie obszary na płaszczyźnie $\xi \times \omega_0$.

Najpierw przechodzę na opis przy pomocy równań stanu, a później wyznaczam wartości własne.

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = \dot{x}(t) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -2\xi\omega_0 x_2(t) - \omega_0^2 x_1(t) \end{cases}$$

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny:

$$det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \omega_0^2 & \lambda + 2\xi\omega_0 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 2\xi\omega_0) + \omega_0^2 = \\ \lambda^2 + 2\lambda\xi\omega_0 + \omega_0^2$$

Wartości własne:

$$\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2$$
$$\sqrt{\Delta} = 2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$
$$\lambda_1 = \frac{-2\xi\omega_0 - 2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-2\xi\omega_0 + 2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}{2}$$
$$\lambda_1 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad \lambda_2 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$
$$\lambda_1 = -\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}), \quad \lambda_2 = -\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

Część urojona będzie niezerowa (oscylacje) dla:

$$\xi^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \xi \in (-1, 1)$$

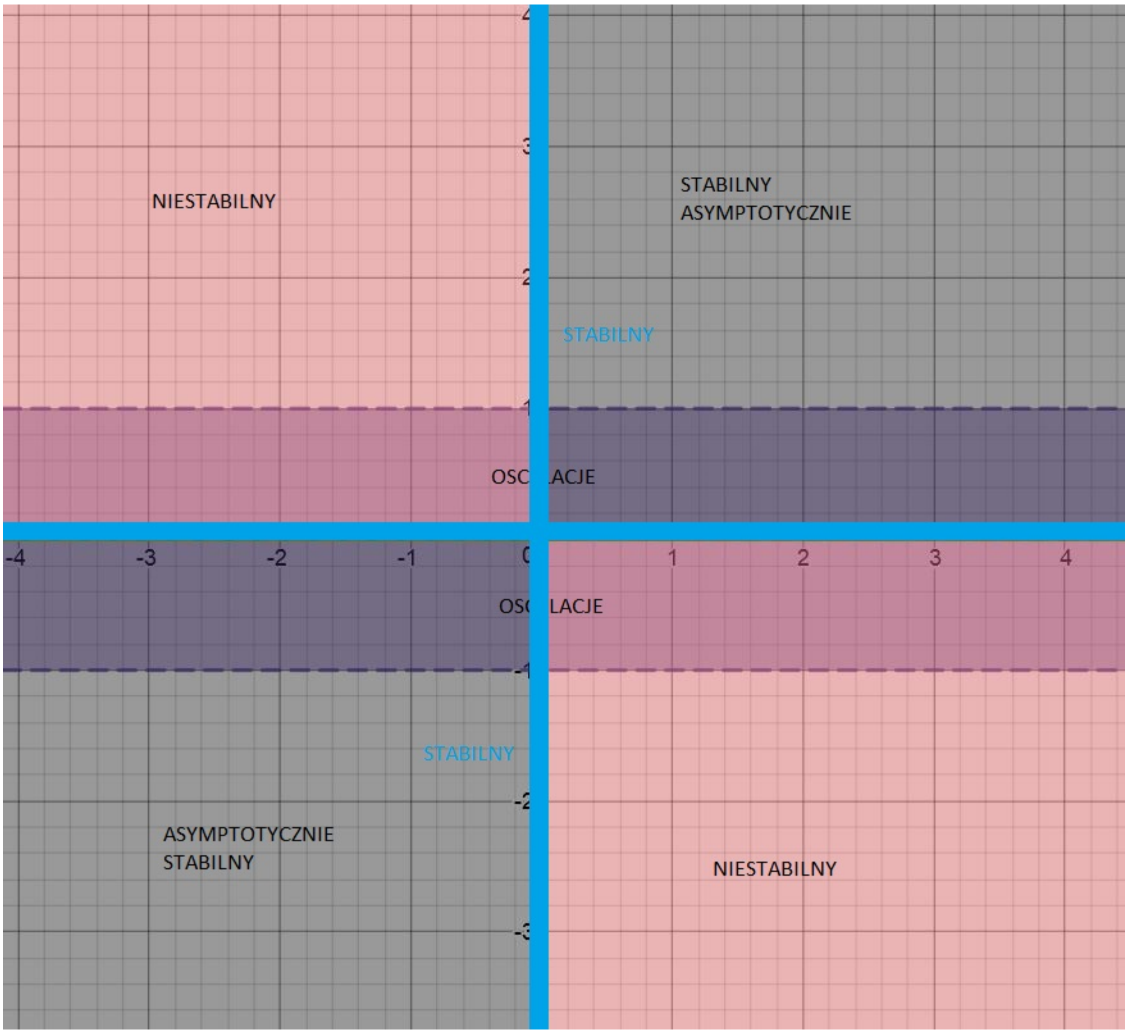
Wyrażenie pod pierwiastkiem nie wpłynie na stabilność w żaden sposób, bo będzie albo dodatnie albo zerowe albo da część urojoną więc wpływa jedynie na oscylacje.
Asymptotyczna stabilność:

$$\begin{cases} \omega_0 > 0 \\ \xi > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \omega_0 < 0 \\ \xi < 0 \end{cases}$$

Stabilność:

$$\begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} \omega_0 \in \mathbb{R} \\ \xi = 0 \end{cases}$$

Obszar na płaszczyźnie:



Rysunek 13: Zachowanie systemu

Zadanie 2 - Zadania od Bauera do kolokwium I / Egzamin
Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t)$$

będzie asymptotycznie stabilny.

Macierz jest w postaci Frobeniusa:

$$c_1 = -(-k_1) = k_1,\ c_0 = -(-k_2) = k_2,\ c_2 = 1 \text{ (zawsze)}$$

Wielomian charakterystyczny:

$$w(\lambda) = \lambda^2 + k_1\lambda + k_2$$

Dla systemu 2 rzędu wystarczy, że wszystkie współczynniki są dodatnie:

$$k_1,\ k_2 > 0$$

Zadanie 3 - Zadania od Bauera do kolokwium I / Egzamin

Zbadać charakter pracy układu

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = u(t)$$
$$u(t) = Kx(t)$$

w zależności od parametru K. Zaznaczyć wszystkie istotne rodzaje zachowań na osi liczbowej.

$\ddot{x} + \dot{x} + x = Kx$

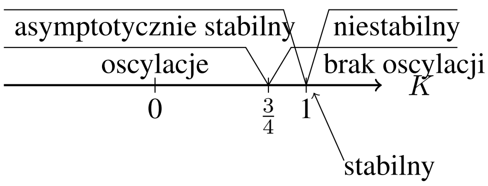
$\ddot{x} + \dot{x} + x(1 - K) = 0$

$\lambda^2 + \lambda + 1 - K = 0$ wielomian charakterystyczny

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-K \end{bmatrix}$ macierz Hurwitza

$1 - K > 0 \Rightarrow K < 1$

$\Delta = 1 - 4(1 - K) = -3 + 4K < 0 \Rightarrow K < \frac{3}{4}$



Zadanie 4 - Egzamin

Dany jest układ opisany następującymi równaniami

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\
&y(t) = Cx(t) \\
&x(0) = 0 \\
&u(t) = Ky(t) \\
&A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dobrać takie $K \in \mathbb{R}$ aby system zamknięty był asymptotycznie stabilny.

$$
\begin{aligned}
&u(t) = Ky(t) \\
&y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \\
&u(t) = Kx_1 \\
&\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Kx_1 \\
&\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 + K & 0 \end{bmatrix} \\
&\lambda I - A_{new} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 - K & 0 \end{bmatrix} \\
&\lambda I - A_{new} = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 1 - K & \lambda \end{bmatrix} \\
&det(\lambda I - A_{new}) = \lambda^2 + \lambda + 1 - K
\end{aligned}
$$

Aby system II rzędu był asymptotycznie stabilny wystarczy, że wszystkie współczynniki będą dodatnie.

$$
\begin{aligned}
&1 - K > 0 \\
&K < 1
\end{aligned}
$$

Zadanie 5 - Informatyka Modelowanie

Dla systemu

$$\begin{aligned} x(t) + 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) &= u(t) \\ u(t) &= k_1\dot{x}(t) - k_2x(t) \end{aligned}$$

zbadać zachowanie się układu w zależności od k_1 i k_2. Zaznaczyć odpowiednie obszary na płaszczyźnie $k_1 \times k_2$

$x + 4\ddot{x} + \dot{x} = k_1\dot{x} - k_2x$

$4\ddot{x} + (1 - k_1)\dot{x} + (1 + k_2)x = 0$

wielomian charakterystyczny:

$x = e^{\lambda t} \quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$4\lambda^2 + (1 - k_1)\lambda + 1 + k_2 = 0$

macierz Hurwitza dla wielomianu stopnia drugiego: $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}$ czyli $\begin{bmatrix} 1-k_1 & 0 \\ 4 & 1+k_2 \end{bmatrix}$

żeby układ był stabilny to $|a_1| > 0$ i $\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$

więc:

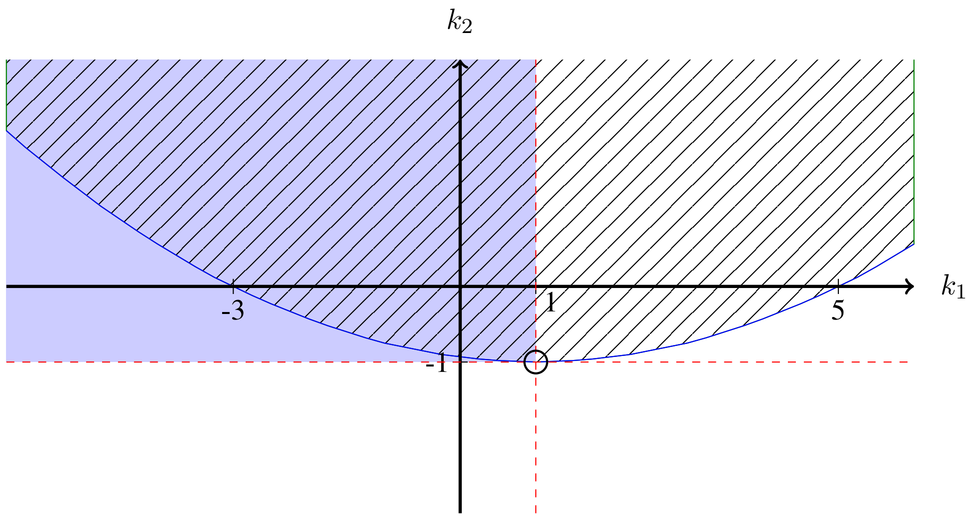
$1 - k_1 > 0 \Rightarrow \boxed{k_1 < 1}$

$(1 - k_1)(1 + k_2) > 0 \Rightarrow 1 + k_2 > 0 \Rightarrow \boxed{k_2 > -1}$

dla $\Delta < 0$ występują oscylacje, więc:

$\Delta = (1 - k_1)^2 - 4 \cdot 4(1 - k_2) = (1 - k_1)^2 - 16 - 16k_2 < 0$

$k_2 > \frac{1}{16}(1 - k_1)^2 - 1$



wewnątrz niebieskiego obszaru asymptotycznie stabilny $k_1 < 1 \wedge k_2 > -1)$

na czerwonych prostych granicznych stabilny $(k_1 = 1 \vee k_2 = -1)$ bez punktu wspólnego

niestabilny na przecięciu prostych i w pozostałych obszarach

oscylacje dla zakreskowanego $k_2 > \frac{1}{16}(1 - k_1)^2 - 1$

Zadanie 6 - Egzamin

Dany jest system dynamiczny opisany równaniem:

$$\ddot{x}(t) = a\dot{x}(t) + bx(t) = u(t)$$
$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 \dot{x}(t)$$

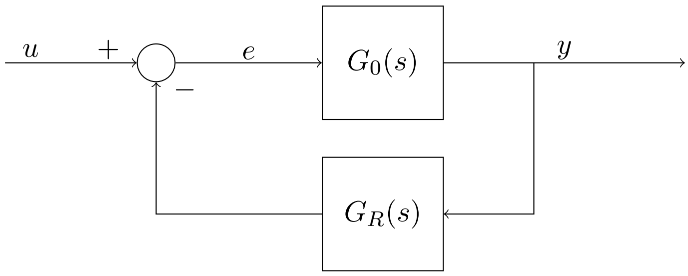
gdzie

$a,\ b$ to pewne stałe rzeczywiste

Dobrać parametry regulatora $K_1\ K_2$,tak by równanie charakterystyczne układu miało zadane z góry pierwiastki $\lambda_1\ \lambda_2$.

Zadanie 7 - Egzamin

Korzystając z kryterium Hurwitza określić stabilność układu automatycznej regulacji składającego się z obiektu o transmitancji $G(s) = \frac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ i regulatora $G_r(s) = K_r$, gdzie $T_1 = 1,5$, $T_2 = 0,5$, $K = 5$, $K_r = 0,5$.

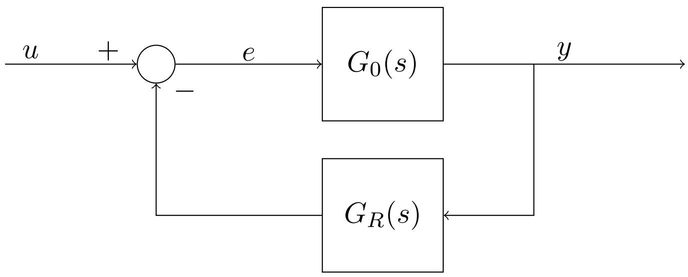


8. Uchyb regulacji

8.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Egzamin

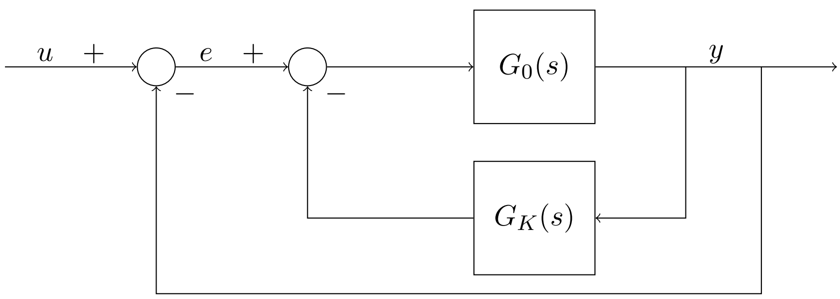
Dla jakich wartości parametru $k_f \in \mathbb{R}$ uchyb ustalony będzie równy 0 jeśli na układ z rysunku:



gdzie $G_0 = \frac{k_p}{s}$ oraz $G_R(s) = k_f$ podano sygnał $u(t) = t$.

Zadanie 2 - Egzamin

Dany jest układ regulacji jak na rysunku



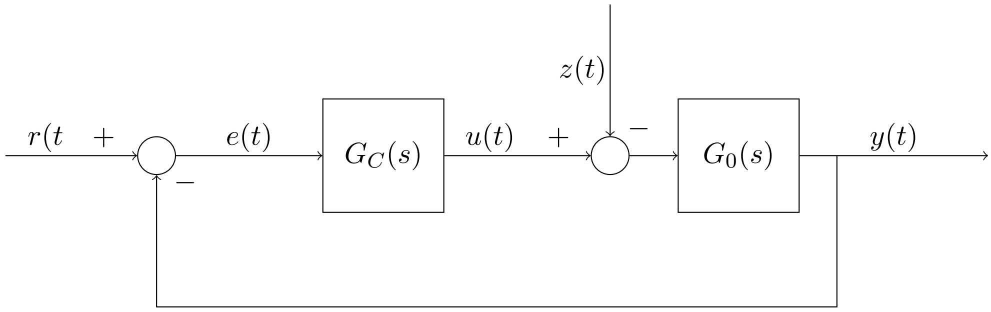
gdzie obiekt G_0 jest opisany transmitancją:

$$G_0(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Wyznaczyć transmitancję operatorową $G_K(s)$ członu korekcyjnego, którego umieszczenie w torze dodatkowego sprzężenia zwrotnego spowoduje zanikanie uchybu ustalonego na wymuszenie skokowe $1(t)$.

Zadanie 3 - Egzamin

Dla układu regulacji z rysunku



Rysunek 14: Schemat rozważanego układu regulacji

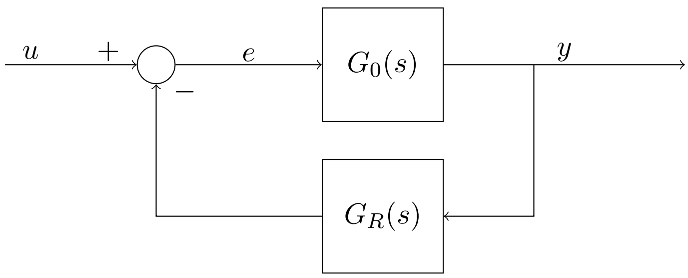
gdzie

$$G_C(s) = KG_0(s) = \frac{1}{s+1}$$

wyznaczyć wartość początkową i końcową uchybu regulacji dla wymuszeń $u(t) = u_0 \cdot 1(t)$ oraz $z(t) = z_0 \cdot 1(t)$ działających równocześnie na układ.

8.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

Zadanie 1 - Egzamin
Dla jakich wartości parametru $k_f \in \mathbb{R}$ uchyb ustalony będzie równy 0 jeśli na układ z rysunku:



gdzie $G_0 = \frac{k_p}{s}$ oraz $G_R(s) = k_f$ podano sygnał $u(t) = t$.

W układzie nie ma zakłóceń więc rozważam uchyb od wartości zadanej. Z definicji uchyb ustalony od wartości zadanej to granica:

$$\lim_{t\to\infty} e_r(t) = \lim_{s\to 0} sE_r(s)$$

Aby ją obliczyć potrzebne jest więcej wyznaczenie transformaty Laplace'a uchybu. Rozpatrując układ w dziedzinie operatora s:

$$\begin{cases} E(s) = U(s) - Y(s) \cdot G_R(s) \\ Y(s) = E(s) \cdot G_0(s) \end{cases} \implies E(s) = U(s) - E(s) \cdot G_0(s) \cdot G_R(s)$$

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + G_0(s)G_R(s)}$$

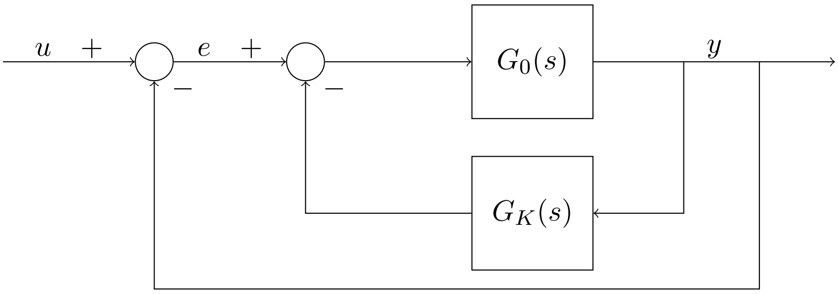
$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{a}{s}\} = a$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{a}{s-b}\} = ae^{bt}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{a}{s^2}\} = a \cdot t$$

$$U(s) = \mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$
$$E(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{k_p k_f}{s}} = \frac{1}{s^2 + k_p k_f s}$$
$$\lim_{s\to 0} sE_r(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s^2 + k_p k_f s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + k_p k_f} = \frac{1}{k_p k_f}$$
$$\frac{1}{k_p k_f} = 0$$

Nie istnieje takie k_f, ponieważ $\frac{1}{k_f k_p} = 1 \iff k_f \to \infty$.

Zadanie 2 - Egzamin

Dany jest układ regulacji jak na rysunku



gdzie obiekt G_0 jest opisany transmitancją:

$$G_0(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Wyznaczyć transmitancję operatorową $G_K(s)$ członu korekcyjnego, którego umieszczenie w torze dodatkowego sprzężenia zwrotnego spowoduje zanikanie uchybu ustalonego na wymuszenie skokowe $1(t)$.

Najpierw obliczam transmitancję zastępczą układu wewnętrznego składającego się z $G_0(s)$ oraz $G_K(s)$ ze wzoru:

$$G_{Z1}(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_K(s) G_0(s)}$$

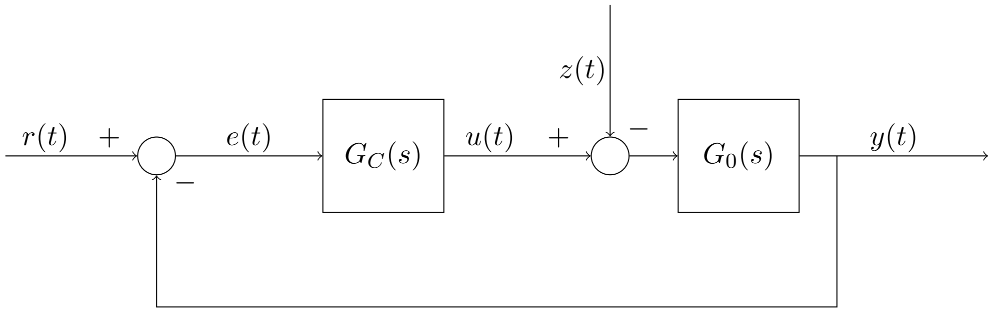
Wówczas powstaje układ ze zwykłym sprzężeniem zwrotnym ujemnym i obliczam dla niego uchyb i przyrównuję do zera ze wzoru:

$$\lim_{t \to s} s \cdot E(s) = 0$$

Dopisać obliczenia...

Zadanie 3 - Egzamin

Dla układu regulacji z rysunku



Rysunek 15: Schemat rozważanego układu regulacji

gdzie

$$G_C(s) = KG_0(s) = \frac{1}{s+1}$$

wyznaczyć wartość początkową i końcową uchybu regulacji dla wymuszeń $u(t) = u_0 \cdot 1(t)$ oraz $z(t) = z_0 \cdot 1(t)$ działających równocześnie na układ.

Uchyb regulacji to suma uchybów pochodzących od wartości zadanej i od zakłóceń. A więc w chwili początkowej uchyb ten wynosi $u_0 + z_0$.
W chwili końcowej uchyb będzie równy sumie granic:

$$e_{ustalony} = \lim_{s\to 0} s \cdot E_z(s) + \lim_{s\to 0} s \cdot E_r(s)$$

Najpierw należy obliczyć $E_z(s)$ oraz $E_r(s)$, a następnie liczymy granicę.
Zapisuje równania w przestrzeni zmiennej s :

$$\begin{cases} E_r(s) = R(s) - Y(s) \\ Y(s) = E_z(s) \cdot G_0(s) \\ E_z(s) = U(s) - Z(s) \\ U(s) = E_r(s) \cdot G_C(s) \end{cases}$$

gdzie $Z(s)$ $R(s)$ $G_C(s)$ $G_0(s)$ są znane. Z równań tych łatwo wyliczyć uchyby podstawiając drugie równanie do pierwszego oraz czwarte do trzeciego.
Uzupełnić obliczenia...

9. Obliczanie transmitancji

9.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Oblicz transmitancję układu opisanego równaniami

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

przy czym:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

z macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową układu przy założeniu zerowych warunków początkowych $x(0) = 0$.

Zadanie 3 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

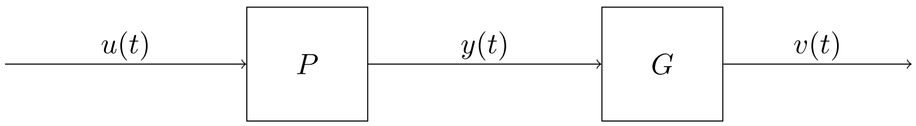
z macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową układu przy założeniu zerowych warunków początkowych $x(0) = 0$.

Zadanie 4 - Egzamin

Dany jest układ postaci:



gdzie system P jest opisany równaniem:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 3\dot{u}(t) - u(t)$$

a system G równaniem

$$\ddot{v}(t) - 6\dot{v}(t) + 2v(t) = \dot{y}(t) + 4y(t)$$

Znaleźć równania stanu tego układu.

Zadanie 5 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Za pomocą transmitancji znaleźć odpowiedź układu

$$\dot{x}(t) = 5x(t) + u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

na skok jednostkowy, czyli funkcję postaci:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Przyjąć $x(0) = 0$

9.2. Rozwiązania zadań

Zadanie 1 - Zadania od Bauera do kolokwium II
Oblicz transmitancję układu opisanego równaniami

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

przy czym:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Podstawiam do wzoru i liczę. Macierz odwrotną dla 2x2, na przekątnej zamieniamy, na drugiej przekątnej minusy, wszystko przez wyznacznik.

$$\begin{aligned}
G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & s+1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 2s+2 \\ 0 & 2s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2s+2}{s^2} \\ 0 & \frac{2}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + 1 & \frac{2s+2}{s^2} \\ 0 & \frac{2}{s} + 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Zadanie 2 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Oblicz transmitancję układu opisanego równaniami

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

przy czym:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Układ jest opisany równaniami stanu w postaci

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

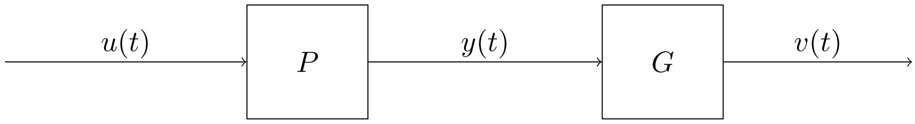
z macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Znaleźć transmitancję operatorową układu przy założeniu zerowych warunków początkowych $x(0) = 0$.

Zadanie 4 - Egzamin

Dany jest układ postaci:



gdzie system P jest opisany równaniem:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 3\dot{u}(t) - u(t)$$

a system G równaniem

$$\ddot{v}(t) - 6\dot{v}(t) + 2v(t) = \dot{y}(t) + 4y(t)$$

Znaleźć równania stanu tego układu.

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 3\dot{u}(t) - u(t) \\ \ddot{v}(t) - 6\dot{v}(t) + 2v(t) = \dot{y}(t) + 4y(t) \end{cases}$$

Działam operatorem Laplace'a na każde z równań i przyjmuje zerowe warunki początkowe.

$$\begin{cases} s^2Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = 3sU(s) - U(s) \\ s^2V(s) - 6sV(s) + 2V(s) = sY(s) + 5Y(s) \end{cases}$$

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s-1}{s^2+3s+1}$$

$$G(s) = \frac{V(s)}{Y(s)} = \frac{s+5}{s^2-6s+2}$$

Transmitancja zastępcza całego układu:

$$G_z = P(s)\cdot G(S) = \frac{(3s-1)(s+5)}{(s^2+3s+1)(s^2-6s+2)} = \frac{3s^2+15s-s-5}{s^4-6s^3+2s^2+3s^3-18s^2+6s+s^2-6s+2} = \frac{3s^2+14s-5}{s^4-3s^3-15s^2+0s+2}$$

Przyjmując postać kanoniczną system można przedstawić w postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 15 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 14 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$D = 0$

Ponieważ dla transmitancji:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0}$$

Macierze są postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \dots & -c_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} (a_0 - c_0 \cdot a_n) & (a_1 - c_1 \cdot a_n) & (a_2 - c_2 \cdot a_n) & \dots & (a_{n-1} - c_{n-1} \cdot a_n) \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

Zadanie 5 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Za pomocą transmitancji znaleźć odpowiedź układu

$$\dot{x}(t) = 5x(t) + u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

na skok jednostkowy, czyli funkcję postaci:

$$u(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0 \\ 1, \ t \geq 0 \end{cases}$$

Przyjąć $x(0) = 0$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 5x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = 5, \mathbf{B} = 1, \mathbf{C} = 1$$

Dla $x(0) = 0$ mamy:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

$$G(s) = 1 \cdot [s-5]^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{s-5}$$
$$U(s) = \mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s-5} \cdot \frac{1}{s}$$
$$\frac{1}{(s-5)s} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s} \Bigg| \cdot (s-5)s$$
$$1 = A \cdot s + B \cdot s - 5B = s(A+B) - 5B$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -5B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \frac{-1}{5} \\ A = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{5}}{s-5} + \frac{-\frac{1}{5}}{s}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{\tfrac{a}{s}\} = a$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{\tfrac{a}{s-b}\} = ae^{bt}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{5}}{s-5} + \frac{-\frac{1}{5}}{s}\right\} = \boxed{\frac{1}{5}e^{5t} - \frac{1}{5}}$$

10. Wyznaczanie e^{At}

10.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Naszkicować rozwiązania równania różniczkowego:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 1$$
$$\text{dla } x(0) = x_i \; i = 1,2,3 \; t \geq 0$$
$$x_1 = 0 \; x_2 = 1 \; x_3 = 2$$

Zadanie 2 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Dane jest równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2$$
$$x(0) = 0, \; t \geq 0$$

Po jakim czasie t_k zachodzi $x(t_k) = 1$

Zadanie 3 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Wyznaczyć macierz e^{At} dla macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Wyznaczyć macierz e^{At} dla macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Zadanie 5 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Wyznaczyć rozwiązanie $x(t)$, $t \geq 0$ równania:

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t) = 0$$
$$x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$$

Zadanie 6 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Dany jest system opisany równaniem:

$$\dot{x}_1(t) = -\pi x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \pi x_1(t)$$

naszkicować zbiór punktów powstałych z trajektorii stanu systemu w chwili $t = 0,75s$ dla warunków początkowych branych ze zbioru :

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + x_2| = 1\}$$

Zadanie 7 - Egzamin
Dany jest układ:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2(t) = x_2$$

z wyjściem $y = x_1 + x_2$. Znaleźć warunek początkowy x_0 jeśli wiadomo, że w przedziale $t \in [0, 1]$ wyjście układu ma postać $y = e^{-t}$.

10.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

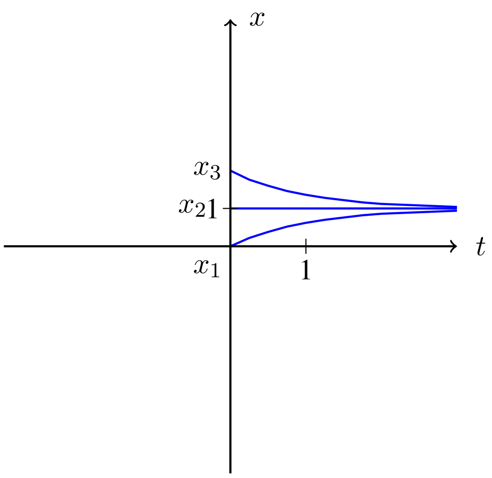
Zadanie 1 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Naszkicować rozwiązania równania różniczkowego:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 1$$
$$\text{dla } x(0) = x_i \; i = 1, 2, 3 \; t \geq 0$$
$$x_1 = 0 \; x_2 = 1 \; x_3 = 2$$

$\frac{dx}{dt} = -x + 1$
$-\ln|-x+1| = t + c$
$ce^{-t} = -x + 1$
$x = 1 - ce^{-t}$
$x(0) = 1 - c = x_i \Rightarrow c = 1 - x_i$
$x = 1 - (1 - x_i)e^{-t}$

$x = 1 - e^{-t} \;\vee\; x = 1 \;\vee\; x = 1 + e^{-t}$
($t \geqslant 0$, więc tylko prawa strona)



Zadanie 2 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Dane jest równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2$$
$$x(0) = 0,\ t \geq 0$$

Po jakim czasie t_k zachodzi $x(t_k) = 1$

$x(t) = e^{At} + \int_0^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau) d\tau$

$A = -1,\ B = 2\ , u(\tau) = 1$

$x_0 = 0$

$x(t) = e^{-t} \int_0^t e^{-\tau \cdot -1} \cdot 2d\tau = e^{-t} \cdot 2 \cdot \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-t} \cdot 2[e^{\tau}]\Big|_0^t = e^{-t} \cdot 2 \cdot (e^t - 1) = 2 - 2e^{-t}$

$x(t) = 1$

$2 - 2e^{-t} = 1$

$e^{-t} = \frac{1}{2}$

$-t = \ln|\frac{1}{2}|$

$t = -\ln\frac{1}{2}$

Zadanie 3 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Wyznaczyć macierz e^{At} dla macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz A nie jest w postaci kanonicznej, obliczam wartości własne.

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 2 & \lambda \end{bmatrix}$$
$$|\lambda I - A| = (\lambda + 2)\lambda + 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$
$$\Delta = -4$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i$$
$$\lambda_1 = \frac{-2 + 2i}{2} \ \lambda_2 = \frac{-2 - 2i}{2}$$
$$\lambda_1 = -1 + i \ \lambda_2 = -1 - i$$
$$a = -1 \ b = 1$$
$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$e^{Jt} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Wektory własne (wybieram np. $\lambda_1 = -1 + i$) :

$$\begin{bmatrix} 1 + i & -1 \\ 2 & -1 + i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} x + ix - y = 0 \\ 2x - y + iy = 0 \end{cases} \implies y = x + ix$$
$$(x, x + ix) \implies P = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos t - \sin t) & e^{-t}\sin t \\ -2e^{-t}\sin t & e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{bmatrix}$$

Zadanie 4 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Wyznaczyć macierz e^{At} dla macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Macierz A nie jest w postaci kanonicznej, obliczam wartości własne.

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda + \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda + \frac{1}{2})(\lambda + \frac{3}{2}) + \frac{1}{4} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

Wektory własne:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$$

$$\implies y = x$$

$$(x, x)$$

Wektory główne:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 = x$$

$$\implies y_1 = x_1 + 2x$$

$$(x, x_1 + 2x)$$

$$P = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x_1 + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - \frac{-te^{-t}}{2} & -\frac{te^{-t}}{2}t \\ -\frac{te^{-t}}{2} & e^{-t} + \frac{-te^{-t}}{2} \end{bmatrix}$$

Zadanie 5 - Zadania od Bauera do kolokwium I

Wyznaczyć rozwiązanie $x(t)$, $t \geq 0$ równania:

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t) = 0$$
$$x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$$

Zadanie 6 - Zadania od Bauera do kolokwium I
Dany jest system opisany równaniem:

$$\dot{x}_1(t) = -\pi x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \pi x_1(t)$$

naszkicować zbiór punktów powstałych z trajektorii stanu systemu w chwili $t = 0,75s$ dla warunków początkowych branych ze zbioru :

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + x_2| = 1\}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\pi \\ \pi & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \pi^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\pi^2 \qquad \lambda = \pm i\pi$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix}$$

$A = J, a = 0, b = \pi$

$$e^{tJ} = e^t \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{tJ}x(0) + \underbrace{\int_0^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau)\, d\tau}_{=0,\ \text{bo } u=0\ \ B=0}$$

$$x(t) = e^{tJ}x(0)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix} x(0)$$

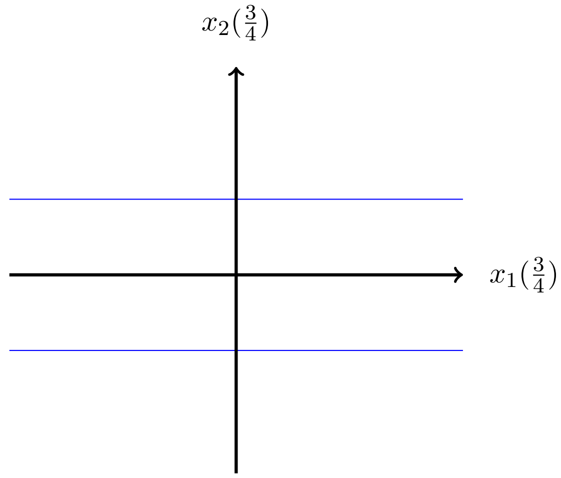
$t = \frac{3}{4}s$

$$x(\tfrac{3}{4}) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} x(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(0)$$

$$\begin{cases} x_1(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1(0) - x_2(0)) \\ x_2(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1(0) + x_2(0)) \\ |x_1 + x_2| = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \quad \vee \quad x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 = 1 - x_2 \quad \vee \quad x_1 = -1 - x_2 \end{array} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-x_2(0) + 1 - x_2(0)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}x_2(0) \\ x_2(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-x_2(0) + 1 + x_2(0)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - x_2(0) - x_2(0)) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}x_2(0) \\ x_2(\frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - x_2(0) + x_2(0)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$


$x_2(\frac{3}{4})$
$x_1(\frac{3}{4})$

Zadanie 7 - Egzamin
Dany jest układ:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2(t) = x_2$$

z wyjściem $y = x_1 + x_2$. Znaleźć warunek początkowy x_0 jeśli wiadomo, że w przedziale $t \in [0, 1]$ wyjście układu ma postać $y = e^{-t}$.

Macierz systemu A ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wartości własne:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 = -1 \, , \lambda_2 = 1$$

Macierz A nie jest w postaci kanonicznej Jordana, wyznaczam e^{At}. Wektory własne:

$$\lambda_1 = -1$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies y = 0 \text{ np.}(1, 0)$$
$$\lambda_2 = 1$$
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies 2x - y = 0 \text{ np.}(1, 2)$$

Macierz e^{At}:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Wiadomo, że dla układu jednorodnego:

$$x = e^{At} x_0$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}x_{10} - \frac{1}{2}e^{-t}x_{20} + \frac{1}{2}e^t x_{20} \\ e^t x_{20} \end{bmatrix}$$

Z treści zadania:

$$y = x_1 + x_2 = e^{-t}x_{10} - \frac{1}{2}e^{-t}x_{20} + \frac{1}{2}e^{t}x_{20} + e^{t}x_{20}$$

chcę aby

$$y = x_1 + x_2 = e^{-t}$$

$$e^{-t}x_{10} - \frac{1}{2}e^{-t}x_{20} + \frac{1}{2}e^{t}x_{20} + e^{t}x_{20} = e^{-t}$$

Wybierając np. $(x_{10}, x_{20}) = (1, 0)$ otrzymam prawidłowy wynik.

11. Sterowalność, obserwowalność, stabilizowalność

11.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Egzamin

Dla jakich parametrów b_1, b_2 para (A, B) jest :
a) Sterowalna
b) Stabilizowalna

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2 - Egzamin

Dla jakich b i c układ jest obserwowalny ?

$$\dddot{z} = bu(t)$$
$$y(t) = -cz(t)$$

Zadanie 3 - Egzamin

Podaj taką macierz C żeby układ

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$y = Cx(t)$$

jeśli

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

był obserwowalny.

11.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

Zadanie 1 - Egzamin

Dla jakich parametrów b_1, b_2 para (A, B) jest :
a) Sterowalna
b) Stabilizowalna

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Para (A, B) jest sterowalna $\iff rz[B\ AB\ A^2B \dots A^{n-1}B] = n$

$$\iff |B\ AB\ A^2B \dots A^{n-1}B| \neq 0$$

$$A^{2\times 2} \implies n = 2$$

$$rz[B\ AB] = 2 \iff |B\ AB| \neq 0$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

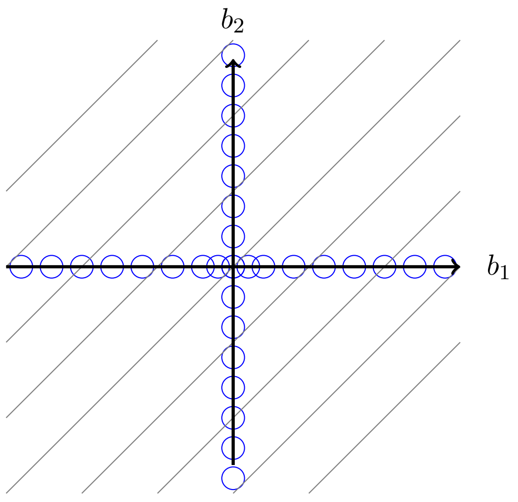
$$det \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ b_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$b_1 b_2 + b_1 b_2 \neq 0$$

$$2b_1 b_2 \neq 0$$

$$b_1 b_2 \neq 0$$

$$b_1 \in \mathbb{R} - \{0\}\ b_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$



Rysunek 16: Sterowalny dla obszaru szarego bez osi

Jeśli para (A, B) jest sterowalna $\implies$ jest stabilizowalna, a więc w obszarze szarym jest też stabilizowalna (czy gdzieś więcej ?).
Para (A, B) jest stabilizowalna gdy:

$$\exists K : Re\lambda(A + BK) < 0 \Longleftrightarrow rz[\lambda_i I - A, B] = n \; \forall \lambda_i \in \lambda(A) : Re\lambda_i \geq 0$$

Dla każdej wartości własnej macierzy A o części rzeczywistej nieujemnej macierz blokowa ma rząd równy $n = 2$. Dla macierzy A wartości własne o nieujemnej części rzeczywistej to $\lambda_1 = 1$.

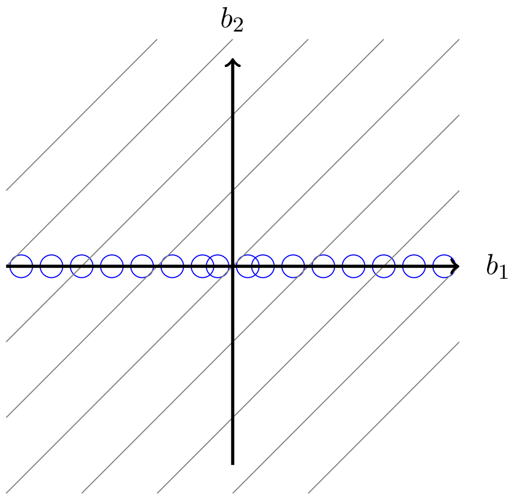
$$[\lambda_1 I - A, B] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

Minory 2×2 :

$$det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \; det \begin{bmatrix} 2 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = 2b_2 \; det \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = 0$$

stąd aby układ był stabilizowalny:

$$\begin{aligned} 2b_2 &\neq 0 \\ b_2 &\neq 0 \end{aligned}$$



Rysunek 17: Stabilizowalny dla obszaru szarego bez osi

Zadanie 2 - Egzamin

Dla jakich b i c układ jest obserwowalny ?

$$\dddot{z} = bu(t)$$
$$y(t) = -cz(t)$$

Przejście na równania stanu:

$$\begin{cases} z_1 = z \\ z_2 = \dot{z} \\ z_3 = \ddot{z} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = \dddot{z} = bu(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$
$$y = -cz(t) = -cz_1$$
$$y = \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Układ jest obserwowalny $\iff$

$$rz \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

$A^{2\times2} \implies n = 2$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$$

$$rz \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} = 3 \iff -c^3 \neq 0 \iff (c \neq 0 \land b \in \mathbb{R})$$

Zadanie 3 - Egzamin
Podaj taką macierz C żeby układ

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$y = Cx(t)$$

jeśli

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

był obserwowalny.

Układ jest obserwowalny $\iff$

$$rz \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

$A^{3\times 3} \implies n = 3$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$rz \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3 \iff det \neq 0$$

Wyznacznik tej macierzy jest zawsze równy 0 więc taka macierz nie istnieje, układ nie jest obserwowalny.

12. LQ / Wskaźniki jakości

12.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Egzamin

Wyznaczyć regulator optymalny w sensie wskaźnika jakości

$$J = x^2(10) + \int_0^{10} (x(t)^2 + \frac{1}{4}u(t)^2)dt$$

jeśli

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}u(t)$$

gdzie

$$x(0) = 1$$

Wskazówka: Regulator optymalny ma postać $u(t) = -Kx(t),\ K \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2 - Egzamin

Dany jest system dynamiczny $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$. Znaleźć sterowanie postaci: $u(t) = Kx(t)$ minimalizujące wskaźnik:

$$J(u) = \int_0^{\infty} ||x(t)||^2 + ||u(t)||^2 dt$$

Zadanie 3 - Egzamin = Zadanie 2 - Egzamin

Układ opisany równaniem:

$$\dot{y}(t) = -y(t) + u(t)$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$ objęto ujemnym sprzężeniem zwrotnym o wzmocnieniu K. Znaleźć takie K, które minimalizuje wskaźnik jakości:

$$J = \int_0^{\infty} y(t)^2 + u(t)^2 dt$$

12.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

Zadanie 1 - Egzamin

Wyznaczyć regulator optymalny w sensie wskaźnika jakości

$$J = x^2(10) + \int_0^{10} (x(t)^2 + \frac{1}{4}u(t)^2)dt$$

jeśli

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}u(t)$$

gdzie

$$x(0) = 1$$

Wskazówka: Regulator optymalny ma postać $u(t) = -Kx(t),\ K \in \mathbb{R}$.

Jak widać na podstawie wskaźnika jakości mamy tu do czynienia z problemem liniowo-kwadratowym ze skończonym horyzontem, ponieważ jest to problem postaci:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = x^T(t_1)F(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (x^TQx + u^TRu + 2x^TNu)dt$$

$$u = -Kx$$

W problemie tym wzmocnienie regulatora optymalnego wyraża się wzorem:

$$K = R^{-1}(B^TP(t) + N^T)$$

gdzie P znajduje się przez rozwiązanie równania Ricattiego:

$$A^TP(t) + P(t)A - (P(t)B + N)R^{-1}(B^TP(t) + N^T) + Q = -\dot{P}(t)$$

W zadaniu:

$$t_1 = 10,\ F(t_1) = F(10) = 1,\ Q = 1,\ R = \frac{1}{4},\ N = 0$$

a także jeśli $\dot{x}(t) = \frac{1}{2}u(t)$ to $A = 0$ oraz $B = \frac{1}{2}$.
Podstawiając więc te wartości do równania na $\dot{P}(t)$:

$$\underbrace{A^TP(t)}_{=0} + \underbrace{P(t)A}_{=0} - \underbrace{(P(t)B + N)}_{\frac{1}{2}P(t)}\underbrace{R^{-1}}_{=4}\underbrace{(B^TP(t) + N^T)}_{\frac{1}{2}P(t)} + Q = -\dot{P}(t)$$

$$-P(t)^2 + 1 = -\dot{P}(t)$$

Równanie ma rozwiązanie stałe $P(t) = 1$. Podstawiając do równania na K otrzymujemy: $K = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 = 2$.

Zadanie 2 - Egzamin
Dany jest system dynamiczny $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$. Znaleźć sterowanie postaci: $u(t) = Kx(t)$ minimalizujące wskaźnik:

$$J(u) = \int_0^{\infty} ||x(t)||^2 + ||u(t)||^2 dt$$

Jak widać na podstawie wskaźnika jakości mamy tu do czynienia z problemem liniowo-kwadratowym z nieskończonym horyzontem, ponieważ jest to problem postaci:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + Bu \\
&J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru + 2x^T Nu)dt \\
&u = -Kx
\end{aligned}$$

Wskaźnik jest postaci:

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + u^2)dt$$

W problemie tym wzmocnienie regulatora optymalnego wyraża się wzorem:

$K = R^{-1}(B^T P + N^T)$
gdzie P znajduje się przez rozwiązanie równania Ricattiego:
$A^T P + PA - (PB + N)R^{-1}(B^T P + N^T) + Q = 0$

W zadaniu:

$$Q = 1,\ R = 1,\ N = 0$$

a także $A = -1$ oraz $B = 1$.
Podstawiając więc te wartości do równania na P :

$$\begin{aligned}
&\underbrace{A^T P}_{-P} + \underbrace{PA}_{-P} - (\underbrace{PB + N}_{P}) \underbrace{R^{-1}}_{=1} (\underbrace{B^T P + N^T}_{P}) + Q = 0 \\
&-2P - P^2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

Równanie ma rozwiązania stałe $P = 2\sqrt{2}\ \vee\ -2\sqrt{2}$.
Wtedy $K = 1(1 \cdot 2\sqrt{2} + 0) = 2\sqrt{2}$

Zadanie 3 - Egzamin
Układ opisany równaniem:

$$\dot{y}(t) = -y(t) + u(t)$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$ objęto ujemnym sprzężeniem zwrotnym o wzmocnieniu K. Znaleźć takie K, które minimalizuje wskaźnik jakości:

$$J = \int_0^\infty y(t)^2 + u(t)^2 dt$$

Patrz → Rozwiązanie zadania 2 (LQ / Wskaźniki jakości)

13. Definicje & Twierdzenia

13.1. Zbiór zadań

Zadanie 1 - Pytanie własne
Czym jest trajektoria równania, trajektoria fazowa, a czym portret fazowy ?

Zadanie 2 - Pytanie własne
O czym mówi twierdzenie Grabman-Hartman ?

Zadanie 3 - Pytanie własne
Czym jest sterowalność układu ?

Zadanie 4 - Pytanie własne
Czym jest stabilizowalność układu ?

Zadanie 5 - Pytanie własne
Czym jest obserwowalność układu ?

Zadanie 6 - Egzamin
Proszę sformułować twierdzenie Nyquista (dla układu z jednym wejściem i jednym wyjściem) ?

Zadanie 7 - Pytanie własne
Proszę sformułować twierdzenie Michajłowa ?

Zadanie 8 - Pytanie własne
Czym jest wykrywalność ?

Zadanie 9 - Pytanie własne
Podać trzy definicje stabilności.

- Stabilność w sensie Lapunowa: rozwiązanie x^* nazywamy stabilnym w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t_0 \in [0, \infty)$ i dla każdego ϵ istnieje $\delta > 0$ taka, że każda trajektoria stanu x spełniająca warunek $||x(t_0) - x^*(t_0)|| < \delta$ jest określona na $[t_0, \infty)$ oraz $||x(t) - x^*(t)|| < \epsilon$ w przedziale $[t_0, \infty)$.
- Asymptotyczna stabilność: rozwiązanie x^* nazywamy stabilnym asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy jest stabilne w sensie Lapunowa oraz $\exists \delta > 0$ taka, że dla każdego rozwiązania x^* określonego na przedziale $[t_0, \infty)$ zachodzi $\lim_{t \to \infty} ||x(t) - x^*(t)|| = 0$.

13.2. Rozwiązania zadań ze zbioru

Zadanie 1 - Pytanie własne
Czym jest trajektoria równania, trajektoria fazowa, a czym portret fazowy ?

Trajektoria równania jest krzywą w przestrzeni $\mathbb{R}^N \times t$. Trajektoria fazowa to rzut trajektorii na przestrzeń stanu $\mathbb{R}^N$ przy danych warunkach początkowych. Portret fazowy to rodzina trajektorii fazowych dla różnych warunków początkowych.

Zadanie 2 - Pytanie własne
O czym mówi twierdzenie Grabman-Hartman ?

Twierdzenie mówi, że jeżeli macierz A systemu zlinearyzowanego nie ma wartości własnych o zerowych częściach rzeczywistych, to trajektorie systemu nieliniowego są lokalnie podobne do trajketorii systemu liniowego.

Zadanie 3 - Pytanie własne
Czym jest sterowalność układu ?

Sterowalność to własność układu polegająca na tym, że istnieje sterowanie przeprowadzające układ w pewnym skończonym przedziale czasu do zadanego stanu.

Zadanie 4 - Pytanie własne
Czym jest stabilizowalność układu ?

Stabilizowalność to własność układu mówiąca o tym, że istnieje takie sterowanie $u(t) = Kx(t)$ dla którego układ opisany macierzą stanu A oraz macierzą wejść B jest stabilny, czyli macierz $A + BK$ jest stabilna.

Zadanie 5 - Pytanie własne
Czym jest obserwowalność układu ?

Obserwowalność to własność układu, która pozwala na określenie stanu układu na podstawie obserwacji wejścia oraz wyjścia.

Zadanie 6 - Egzamin
Proszę sformułować twierdzenie Nyquista (dla układu z jednym wejściem i jednym wyjściem) ?

Kryterium Nyquista pozwala na określenie stabilności układu zamkniętego na podstawie charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego.
Założenia:

- Rozłączamy sprzężenie zwrotne
- G_0 to transmitancja otrzymanego układu otwartego
- Układ otwarty ma m biegunów w prawej półpłaszczyźnie i $n - m$ w lewej (nie ma pierwiastków na osi urojonej)

Przy spełnieniu powyższych założeń układ zamknięty jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy gdy:

$$1 + G_0(j\omega) \neq 0 \; \forall \omega \in \mathbb{R}$$
oraz
$$\Delta \text{arg}(1 + G_0(j\omega)) = m\pi$$
dla $\omega \in [0, \infty]$

Zadanie 7 - Pytanie własne
Proszę sformułować twierdzenie Michajłowa ?

Służy do określania stabilności dowolnego układu którego transmitancja zastępcza jest znana.
Założenia:

- $M(s)$ to mianownik transmitancji zastępczej układu.
- n to stopień wielomianu $M(s)$

Układ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy gdy przyrost argumentu Δarg $M(j\omega) = n\frac{\pi}{2}$, gdzie $\omega \in [0, \infty]$.

Zadanie 8 - Pytanie własne
Czym jest wykrywalność ?

Wykrywalność to własność układu mówiąca o tym, że dla macierzy A, C istnieje taka macierz L, że macierz $A + LC$ jest stabilna asymptotycznie.

Zadanie 9 - Pytanie własne
Podać trzy definicje stabilności.