

## Całka Riemanna

Niech dana będzie funkcja ograniczona  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Sumą częściową (Riemanna) nazywa się liczbę

$$R_{f,P(q_1,\dots,q_n)} = \sum_{i=1}^n f(q_i) \cdot \Delta p_i$$

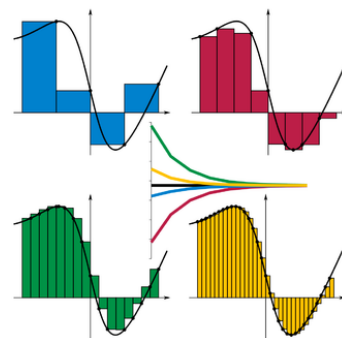
Funkcję  $f$  nazywa się całkowaną w sensie Riemanna lub krótko R-całkowaną, jeśli dla dowolnego ciągu normalnego  $(P^k)$  podziałów przedziału  $[a, b]$ , istnieje (niezależna od wyboru punktów pośrednich) granica

$$R_f = \lim_{k \rightarrow \infty} R_{f,P^k(q_1^k,\dots,q_{n_k}^k)}$$

nazywana wtedy **całką Riemanna** tej funkcji. Równoważnie: jeżeli istnieje taka liczba  $R_f$ , że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $\varepsilon > 0$  istnieje taka liczba rzeczywista  $\delta > 0$ , że dla dowolnego podziału  $P(q_1, \dots, q_n)$  o średnicy  $\text{diam } P(q_1, \dots, q_n) < \delta$ ; bądź też w języku rozdrobnień: że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $\varepsilon > 0$  istnieje taki podział  $S(t_1, \dots, t_m)$  przedziału  $[a, b]$  że dla każdego podziału  $P(q_1, \dots, q_n)$  rozdrabniającego  $S(t_1, \dots, t_m)$  zachodzi

$$|R_{f,P(q_1,\dots,q_n)} - R_f| < \varepsilon$$

Funkcję  $f$  nazywa się wtedy całkowaną w sensie Riemanna (R-całkowaną), a liczbę  $R_f$  jej **całką Riemanna**.



Rysunek 1: Przykład sum Riemanna przy wyborze punktu pośredniego w prawym końcu podprzedziału (niebieski), w wartości minimalnej (czerwony) i maksymalnej (zielony) funkcji w podprzedziale i lewego końca podprzedziału (żółty). Wartość wszystkich czterech przypadków zbliża się do 3,76 przy powiększaniu liczby podprzedziałów od 2 do 10 (w domyśle, również nieograniczenie).